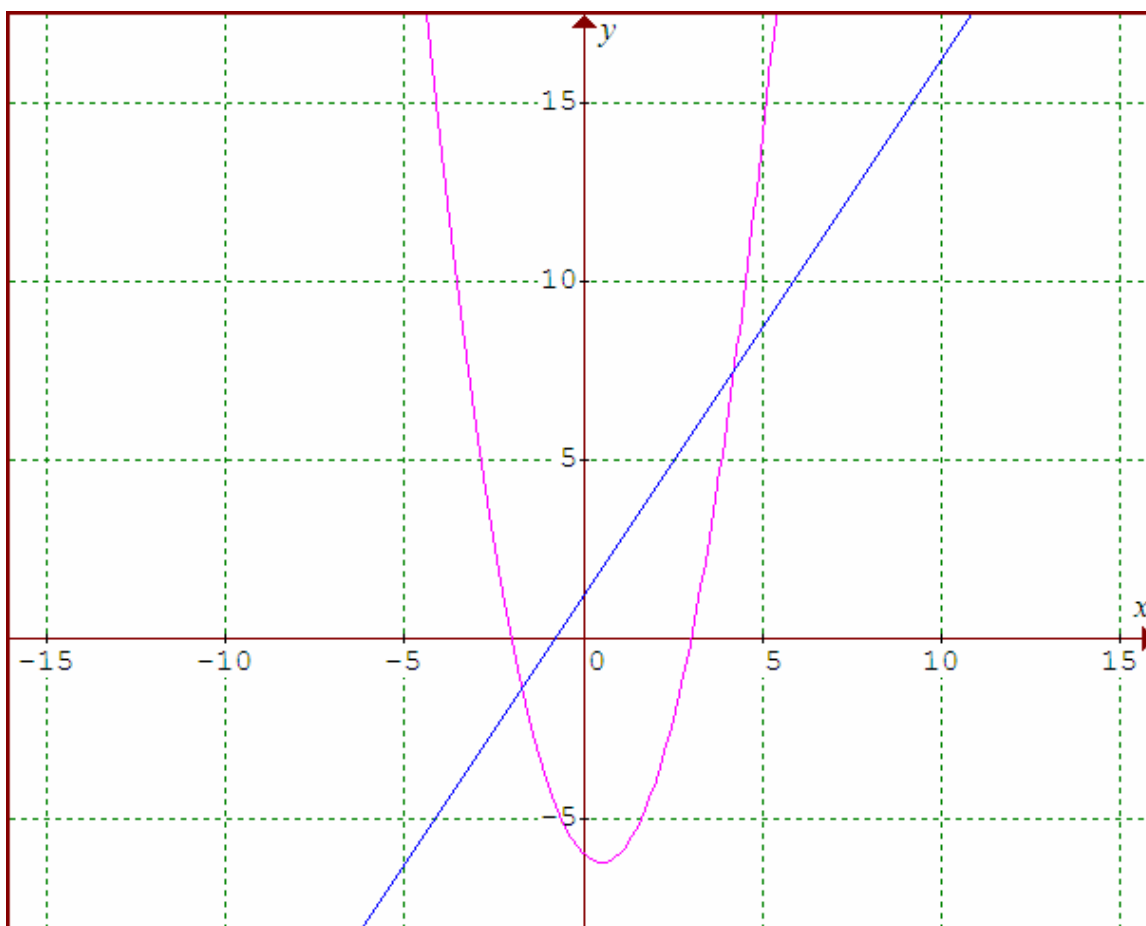


STÆ263

Stærðfræði fyrir félagsfræði-
og málabrautir framhaldsskóla



Ársæll Másson
Guðmundur K. Birgisson
Netútgáfa 2006

Efnisyfirlit

Efnisyfirlit	3
Fallhugtakið	5
Æfingar	6
Annars stigs jöfnur.....	7
Þáttun annars stigs margliða	7
Æfingar	7
2.stigs jöfnur	8
Æfingar	9
Annars stigs margliður sem föll	10
Æfingar	12
Net og streymi	14
Setningin um mesta streymi og minnsta þverskurð	16
Mengi og mengjaaðgerðir.....	23
Hlutmengi, tómamengi og grunnmengi	23
Mengjaaðgerðir og Venn-myndir.....	24
Æfingar	26
Verkefni.....	27
Talningarfræði	28
Margföldunarreglan.....	28
Æfingar	28
Samantektir (tvíliðustuðlar)	31
Æfingar	31
Verkefni.....	33
Tölur og talnamengi.....	34
Æfingar	37
Náttúrlegar tölur	37
Verkefni.....	40
Fleiri gerðir náttúrlegra talna	41
Verkefni.....	42
Vasareiknirinn.....	43
Fleiri möguleikar vasareiknisins.....	46
Æfingar	46
Jöfnur og jöfnuhneppi leyst með vasareikni	48
Æfingar	48
Verkefni.....	49
Æfingar	50
Verkefni.....	50
Staðalform og markverðir stafir	52
Æfingar	55
Verkefni.....	55
Töflureiknisverkefni: Kennitölur gæludýranna.....	57
Töflureiknisverkefni: Vextir	60
Töflureiknisverkefni: Vísitala neysluverðs.....	68
Meira um tölur	70

Æfingar	72
Verkefni.....	72
Töflureiknisverkefni: Farsímaþjónusta	73
Simplex og línuleg bestun	74
Verkefni.....	77
Svör við æfingum	78

Fallhugtakið

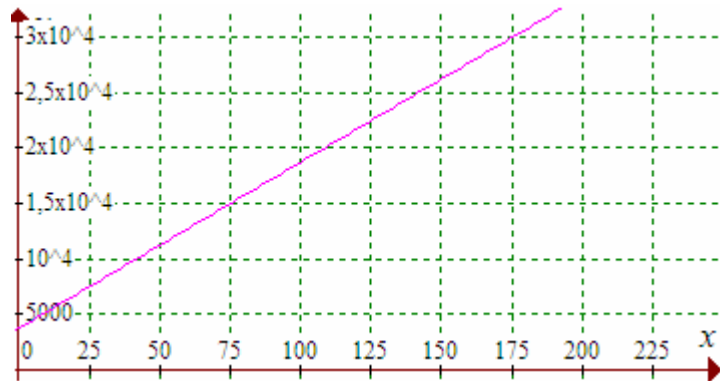
Dæmi:

Maður leigir bíl í einn dag. Leigukostnaðurinn y er reiknaður út frá eknum kílómetrum samkvæmt formúlunni

$$y = 150x + 3700$$

en formúlan er hugsuð þannig að 3700 kr eru fast leigugjald, en hver ekinn kílómetri kostar 150 kr. Við getum sett upp gildistöflu til að sjá kostnaðinn betur, og enn fremur getum við teiknað línurit sem sýnir kostnaðinn út frá eknum kílómetrum:

x	$y = f(x)$
0	$y = 150 \cdot 0 + 3700 = 3700$
25	$y = 150 \cdot 25 + 3700 = 7450$
50	$y = 150 \cdot 50 + 3700 = 11200$
100	$y = 150 \cdot 100 + 3700 = 18700$
200	$y = 150 \cdot 200 + 3700 = 33700$



Við segjum að leigukostnaðurinn sé *fall af* kílómetrafjöldanum í þessu dæmi. Falli má lýsa með formúlu, gildistöflu eða grafi, eða öllu þessu þrennu. Almennt gildir að

y er fall af x ef sérhverju gildi á x tilheyrir ákveðið gildi á y .

Þá er oft skrifað $y = f(x)$.

Dæmi:

Samband milli x og y er sýnt í gildistöflu hér fyrir neðan:

x	$y = f(x)$
-1	4
0	1
2	-5
5	-14
8	-23

Þessu falli má lýsa með reiknireglunni

$$f(x) = -3x + 1$$

Táknið $f(x)$ er lesið „eff af x “, og stendur fyrir y -gildið sem tilheyrir x .

Þegar skrifað er $f(2) = -5$ þá þýðir það að x -gildinu 2 tilheyrir y -gildið -5 , og við lesum „eff af 2 er mínus 5“.

Dæmi:

Fall hefur reikniregluna $f(x) = x^2 + x$. Reiknum fallgildi x -gildanna í töflunni hér fyrir neðan:

x	$f(x) = x^2 + x$
-2	$f(-2) = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2$
-1	$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$
0	$f(0) = 0^2 + 0 = 0$
1	$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

Æfingar

Búðu til gildistöflu með sömu x -gildum og í töflunni að ofan fyrir föllin

1. $f(x) = 2x - 1$

4. $g(x) = \sqrt{3 + x^2}$

2. $f(x) = x^3 - x^2$

5. $h(x) = \frac{2}{x-1}$

3. $g(x) = 3x^2 + 5x$

6. $h(x) = \frac{x+1}{2-x}$

Annars stigs jöfnur

Þáttun annars stigs margliða

Þegar stæður eru þáttaðar, þá er alltaf byrjað á því að taka út fyrir sviga, sé það hægt. Þegar stæðan er 2.stigs margliða, þá er hægt að ljúka þáttuninni með ágiskun, ferningsreglu eða samokareglu, ef frekari þáttun er möguleg.

Dæmi:

1. $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2)$
2. $5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$
3. $3x^2 + x + 16$, óþáttanleg margliða
4. $x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$

Æfingar

Þáttaðu 2.stigs margliðurnar ef hægt er:

1. $9x^2 - 36$
2. $x^2 + 4$
3. $x^2 - 8x$
4. $2x^2 - 18$
5. $12 - 75x^2$
6. $x^2 + 5x - 14$
7. $2x^2 + 10x + 12$
8. $x^2 - x - 42$
9. $3x^2 - 6x + 3$
10. $2x^2 - 12x + 18$
11. $x^2 + 8x + 15$
12. $x^2 + 6x + 8$
13. $x^2 - 5x + 6$
14. $x^2 - 8x + 12$
15. $x^2 + 4x - 12$
16. $x^2 + 2x - 15$
17. $x^2 - x - 20$
18. $x^2 + 5x - 24$
19. $x^2 + 14x + 24$
20. $2x^2 + 16x + 30$
21. $x^2 + 9x + 20$
22. $x^2 - 3x - 18$
23. $x^2 + 12x + 27$
24. $x^2 + 2x - 3$
25. $x^2 + 6x - 16$

2.stigs jöfnur

2.stigs jöfnur er oft hægt að leysa með þáttun. Sú aðferð byggir á því að ef margfeldi tveggja eða fleiri talna er 0 þá hlýtur a.m.k. ein talnanna að vera 0.

Dæmi:

$$\begin{aligned} 1. \quad & x^2 - 3x = 0 \\ & x(x-3) = 0 \\ & x = 0 \quad \text{eða} \quad x - 3 = 0 \\ & x = 0 \quad \text{eða} \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 2x^2 + 4x + 2 = 0 \\ & 2(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ & 2(x+1)^2 = 0 \\ & x+1 = 0 \\ & x = -1 \end{aligned}$$

Rétt er að nota þáttun við að leysa annars stigs jöfnur þegar það er hentugt. En við höfum einnig í bakhöndinni formúlu sem gefur lausnir á annars stigs jöfnum þegar þær eru til. Almennt lítur annars stigs jafna svona út:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

þar sem a , b og c eru einhverjar rauntölur og $a \neq 0$. Þá segir formúlan að

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dæmi:

$$1. \quad 4x^2 - 12x - 7 = 0$$

Hér er $a = 4$, $b = -12$, $c = -7$. Látum það inn í formúluna,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-7)}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{8} = \frac{12 \pm 16}{8} = \begin{cases} 3,5 \\ -0,5 \end{cases}$$

$$2. \quad 3x^2 + x = -16$$

$$3x^2 + x + 16 = 0$$

Hér er $a = 3$, $b = 1$, $c = 16$, svo

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-191}}{6}, \text{ engin lausn því ekki er hægt að}$$

draga ferningsrót af neikvæðum tölum.

Æfingar

Leystu með þáttun:

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $x^2 - 25 = 0$
3. $3x^2 - 27 = 0$
4. $x^2 + 5x = 0$
5. $x^2 + 8x + 15 = 0$
6. $x^2 + 6x + 8 = 0$
7. $x^2 + 2x = 15$
8. $x^2 = x + 20$
9. $x^2 + 25 = 0$
10. $x^2 + 9x + 20 = 0$
11. $2x^2 - 5 = 0$
12. $2x^2 - 5x = 0$

Leystu með þáttun eða formúlu:

13. $x^2 - 5x + 6 = 0$
14. $x^2 - 8x + 12 = 0$
15. $2x^2 + 16x + 30 = 0$
16. $x^2 + 9x + 20 = 0$
17. $x^2 - 3x - 18 = 0$
18. $x^2 + 12x + 27 = 0$
19. $-2x^2 + 3x - 5 = 0$
20. $-3x^2 + 6x + 12 = 0$
21. $5x^2 - 10x + 5 = 0$
22. $x^2 - 6x + 10 = 0$

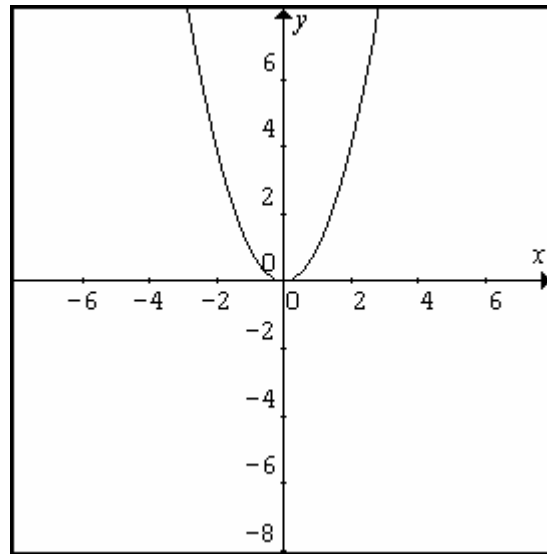
Annars stigs margliður sem föll

Graf annars stigs falls kallast fleygbogi, (parabola á ensku og fleiri málum), en allir fleygbogar hafa sömu lögun, en eru aðeins mismunandi að stærð og staðsetningu.

Dæmi:

1. Graf fallsins $f(x) = x^2$ lítur svona út:

Við sjáum að grafið er samhverft um y-ásinn, þ. e. y-ásinn er spegilás grafsins. Sérhver fleygbogi hefur slíkan **samhverfuás**. Þessi fleygbogi hefur **botnpunkt** og er **opinn að ofan**, en sumir fleygbogar hafa **topppunkt** og **opnast að neðan**. Um þessi atriði gildir eftirfarandi:



Graf annars stigs fallsins $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, er fleygbogi.

Samhverfuás hans er línan $x = \frac{-b}{2a}$

Ef $a > 0$ þá hefur grafið botnpunkt á samhverfuásnum.

Ef $a < 0$ þá hefur grafið topppunkt á samhverfuásnum.

Til dæmis hefur graf fallsins $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ topppunkt (því $a = -1$ sem er minna en 0) og samhverfuásinn er $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

Við þurfum einnig að rifja upp hvernig við finnum skurðpunkta grafs við ása hnitakerfisins:

Skurðpunktur við y-ásinn er sá punktur á grafinu sem hefur x-hnitið 0, og því látum við $x = 0$ inn í fallið til að finna hann. Þá fæst punkturinn (0,c).

Skurðpunktar við x-ásinn eru þeir punktar þar sem y-hnitið er 0, og því látum við $f(x) = 0$ til þess að finna þá. Fleygbogi getur haft engan, einn eða tvo skurðpunkta við x-ásinn.

Dæmi: Finnum skurðpunkta fleygbogans $f(x) = x^2 - 4x - 21$ við hnitaásana:

Skurðp. við y-ás: $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 21 = -21$, svo punkturinn er $(0, -21)$.

Skurðp. við x-ás:

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x - 7)(x + 3) = 0$$

$$x = 7 \text{ eða } x = -3$$

Skurðpunktar við x-ás eru þá $(7, 0)$ og $(-3, 0)$.

Dæmi: Gefið er 2.stigs fallið $f(x) = x^2 - 3x$. Finnum

- a) samhverfuás grafsins
- b) topp- eða botnpunkt grafsins
- c) skurðpunkta við hnitaásana.
- d) Teiknum fleygbogann í hnitakerfi.

a) Hér er $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$. Samhverfuásinn er þá

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

b) Hér er $a > 0$ svo fleygboginn hefur **botnpunkt** á samhverfuásnum. Finnum y-hnit hans:

$$f(1,5) = 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 = -2,25, \text{ svo}$$

botnpunkturinn er $(1,5 ; -2,25)$.

c) Skurðp. við y-ás: $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$, svo hann er $(0, 0)$.

Skurðp. við x-ás:

$$x^2 - 3x = 0$$

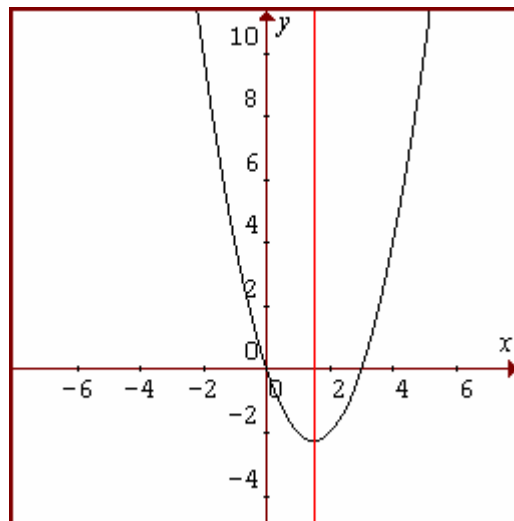
$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ eða } x = 3$$

Skurðpunktarnir eru $(0, 0)$ og $(3, 0)$.

d) Færum nú þá punkta sem við höfum þegar fundið inn í gildistöflu, og finnum fleiri punkta:

x	$x^2 - 3x$
1,5	-2,25
0	0
3	0
4	4
5	10



Æfingar

Finndu jöfnu samhvefuássins, topp- eða botnpunkt og skurðpunkta við ásana á grafi fallsins

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = -x^2 + x$
3. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
4. $f(x) = 2x^2 - 6$
5. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

Finndu jöfnu samhverfuáss, topp- eða botnpunkt og skurðpunkta við ása hnitakerfisins á grófum eftirfarandi falla:

6. $f(x) = 4 - x^2$
7. $f(x) = -x^2 + 5$
8. $f(x) = x^2 - 2x$
9. $f(x) = x^2 + x - 6$
10. $f(x) = 0,5x^2 - x - 4$

Finndu stærsta gildi eða minnsta gildi fallanna, eftir því sem við á:

11. $f(x) = 24x - x^2$

12. $f(x) = 600x - 1,5x^2$

13. $f(x) = 10x - 0,5x^2$

14. $f(x) = 0,03x^2 - 9x$

15. $f(x) = 5x^2 - 120x + 100$

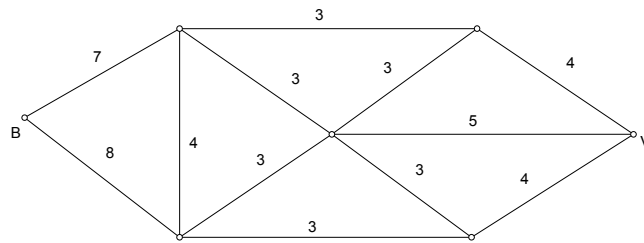
16. $f(x) = -0,1x^2 + 50x + 4000$

Net og streymi

Í þessum kafla verða kynntar aðferðir til að reikna flutningsgetu í netkerfi. Sá vandi skýtur oft upp kollinum í flóknum netkerfum, eins og neti olíuleiðslna, að ekki er augljóst hversu mikið magn er hægt að láta streyma frá einum stað til annars í kerfinu.

Fyrst verður hugað að einföldu dæmi. Á ímynduðu olíuvinnslusvæði þarf að dæla olíu frá borholu til vinnslustöðvarinnar. Á svæðinu eru fjölmargar leiðslur frá fyrri tíð sem allar eru samtengdar. Hver leiðsla getur flutt tiltekið magn olíu á hverri mínútu. Á

teikningunni eru leiðslur táknaðar með strikum og tölurnar við strikin tákna flutningsgetuna í



ótilgreindum einingum. B táknar borholuna og V táknar vinnslustöðina.

Nú þarf að finna út hversu mikið af olíu getur streymt frá B til V á mínútu og hvaða leið olían á að fara svo streymið verði sem mest. Finna þarf hagstæðustu leiðina fyrir olíuna gegnum netið og svo þarf að reikna hversu mikið streymir þá leið þegar jafnt streymi er komið á. Ein leið er valin, svo er skrúfað frá og látið renna stöðugt eftir þeirri leið. Taka þarf fram að punktarnir þar sem olíuleiðslurnar tengjast takmarka streymið ekki og að olían getur ekki runnið í báðar áttir í sömu pípunni.

Lesendur ættu að gera hér hlé á lestrinum og glíma sjálfir við þrautina, helst í samvinnu við bekkjarfélaga sína.

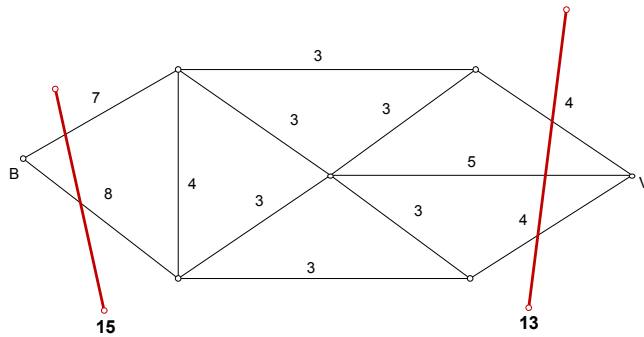
Frá borholunni liggja aðeins tvær pípur. Samanlögð flutningsgeta þeirra er 15 einingar og af því má ráða að heildarmagn olíu sem hægt er að dæla frá B til V sé 15 einingar eða minna.

Að vinnslustöðinni liggja þrjár pípur. Samanlögð flutningsgeta þeirra er 13 einingar og af því má álykta að ekki sé hægt að dæla nema 13 einingum til vinnslustöðvarinnar.

Hvort skiptir meira máli, að það sé hægt að koma allt að 15 einingum frá borholunni eða að það sé ekki hægt að koma nema 13 einingum inn í vinnslustöðina? Er ekki augljóst að leiðslurnar sem liggja inn í vinnslustöðina eru hinn takmarkandi þáttur?

Athuganirnar hafa fram að þessu leitt í ljós að flutningsgeta kerfisins getur ekki verið meiri en 13 einingar. Er hugsanlegt að hún sé minni?

Á þessari mynd hefur röksemdafærslan hér að framan verið táknuð með því að teikna strik gegnum kerfið sem tákna þverskurð. Annað er rétt framan við borholuna og



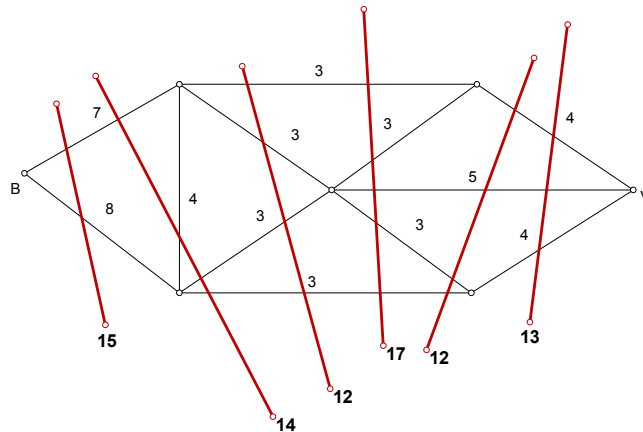
hitt framan við vinnslustöðina. Við hvort strik stendur hversu mikið af olíu gæti runnið yfir strikið ef leiðslurnar sem liggja yfir það væru allar fullnýttar.

Nú má hugsa sér að teiknuð væru fleiri strik inná myndinar, þannig að ekki væri hægt að komast frá B til V

án þess að fara yfir þau.

Við hvert strik væri svo rituð hámarksflutningsgeta röranna sem skera strikið.

Á þessari mynd hafa nokkur slík strik verið teiknuð. Á myndinni sést að yfir tvö strikanna geta



ekki runnið nema 12 einingar af olíu. Það skiptir því litlu þótt 13 einingar virðist geta runnið inn í vinnslustöðina þegar rörin næst henni eru skoðuð; inn í þau rör koma aldrei fleiri en 12 einingar vegna þess að það komast ekki fleiri en 12 einingar yfir strikin tvö (og öll olían þarf að fara yfir þau).

Þegar hér er komið sögu ættu lesendur að íhuga hvort teikna þarf fleiri strik á myndina. Til að vera viss um hver hámarksflutningsgetan sé í raun og veru 12 einingar þarf að sannfærast um að ekkert strik (og það vantar nokkur á síðustu mynd) takmarki flutningsgetuna enn frekar.

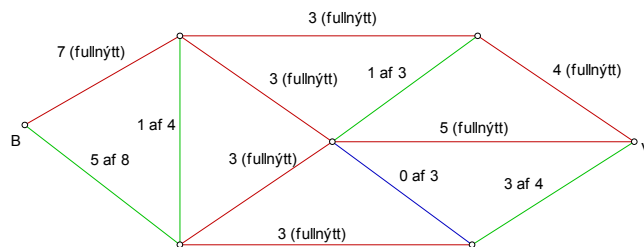
Setningin um mesta streymi og minnsta þverskurð

Þau rök sem notuð hafa verið er hægt að klæða í almennan búning og setja þar með fram setningu: Mesta streymi í netkerfi er það magn sem flætt getur um minnsta þversniðið.

Lester Ford og D. R. Fulkerson sönnuðu setninuna um miðjan 6. áratug 20. aldar. Þeir eru einnig höfundar reikniritis sem nota má til að finna mesta streymi.

Þegar öllum vafa um að hámarksflutningsgetan sé 12 einingar hefur verið eytt þarf að finna út hvaða leið olían á að fara, þ.e. hvaða pípur á að nota og hversu miklu af olíu á að dæla um hverja þeirra.

Myndin sýnir eina mögulega útfærslu. Lesendur geta vafalaust búið til aðrar útfærslur.



Eins og nærri má geta er hægt að hugleiða viðfangsefni af fleiri sviðum með sömu aðferð. Hér eru nokkrar spurningar sem aðferðin gæti hentað til að svara:

- Hvað er hægt að downloda mörgum MB frá vefþjóni í Malasíu á tölvu í Hrísey?
- Hvað er hægt að koma mörgum farþegum á dag frá Baltimore til Kuala Lumpur?
- Hvað geta margir hjólréiðamenn streymt frá Gróttu til Nauthólsvíkur eftir hjólréiðastígum borgarinnar?

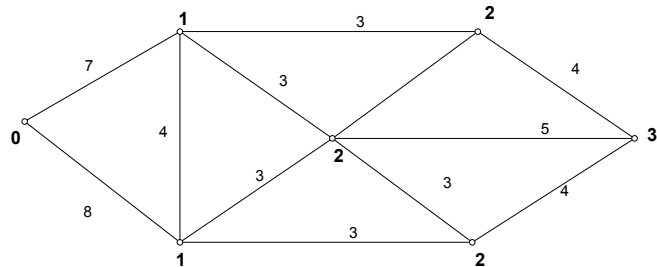
Viðfangsefni af þessu tagi geta orðið mjög umfangsmikil og verður þá afar seinlegt að leysa þau án þess að nota tölvur til aðstoðar. Þegar tölvur eru notaðar til að finna mesta flæði í netkerfi er algengast að notað sé reiknirit sem

heitir Ford – Fulkerson reikniritið í höfuðið á fyrrnefndum sköpurum sínum.

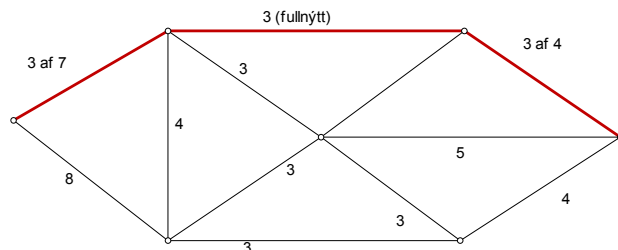
Reikniritið er á þessa leið:

1. Látið uppsprettuna heita 0.
2. Merkið með 1 alla hnúta sem hægt er að komast til frá uppsprettunni gegnum legg sem ekki er þegar fullnýttur.
3. Merkið með 2 alla hnúta sem hægt er að komast til frá hnúti sem merktur er 1 gegnum legg sem ekki er þegar fullnýttur.
4. Haldið áfram á sama hátt. Merkið hnúta sem hægt er að komast til frá 2 með þremur, hnúta sem hægt er að komast til frá 3 með 4 o.s.frv.
5. Ef lokapunkturinn fær merkingu þá er hægt að auka streymið. Veljið leið sem tengir saman hnútana 1,2,3,4... og aukið þar með streymið.
6. Ef merkingin stöðvar án þess að lokahnúturinn fái tölustaf er ekki hægt að auka streymið. Reikniritið stöðvist.
7. Eftir að hafa bætt við streymið með aðferðinni sem lýst var er endurmetið hversu miklu til viðbótar hver leggur getur annað og byrjað á byrjuninni.

Til útskýringar má framkvæma reikniritið á kerfinu sem rannsakað var í upphafi kaflans. Á myndinni er búið að merkja borholuna með núlli, alla staði sem eru tengdir henni beint með 1, alla staði sem tengdir eru þeim stöðum með 2 og þá staði sem tengdir eru þeim með 3. Lengra þarf ekki að fara því hreinsistöðin hefur verið merkt með 3.



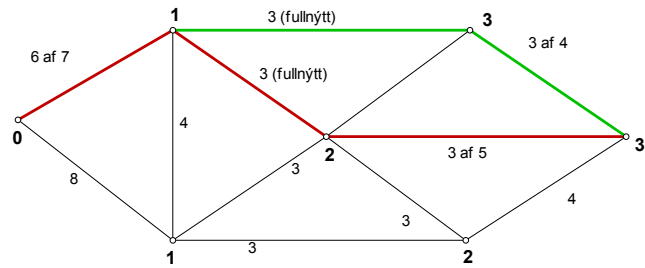
Þessu næst þarf að velja leið sem tengir saman 0,1,2 og 3. Best er auðvitað að velja þá leið sem flytur mesta olíu, það hefur í för með sér að ekki þarf að framkvæma



reikniritið eins oft. Það skiptir þó engu máli um hina endanlegu útkomu hvaða leið er valin. Á myndinni hefur leiðin sem merkt er með rauðu verið valin. Um hana komast 3 einingar og má þá segja að streymið sé komið í 3 einingar.

Er reikniritið þá endurtekið. Fyrst eru þeir staðir sem hægt er að komast til frá borholunni merktir með 1, þá næstu staðir við með 2 og svo koll af kolli. Eins og áður þarf ekki að halda lengi

áfram, þar sem hreinsistöðin fær merkinguna 3. Þá er hægt að finna leið frá borholu til hreinsistöðvar og auka við streymið. Á myndinni er leiðin



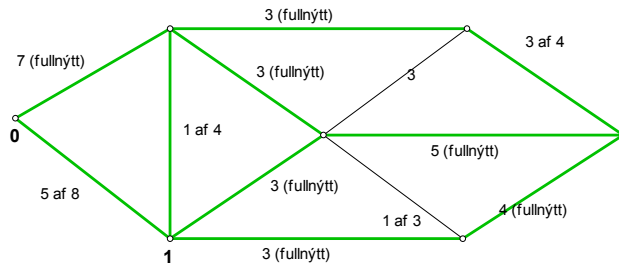
sem valin var merkt með rauðu og flæðið vex úr 3 einingum í 6.

Svo er haldið áfram á sama hátt, þ.e. reikniritið er endurtekið þar til ekki tekst að merkja hreinsistöðina með tölustaf.

Á síðustu myndinni hefur reikniritið verið endurtekið nokkrum sinnum og nú er ekki lengur hægt að komast frá borholunni til hreinsistöðvarinnar.

Steymið er nú 12 einingar.

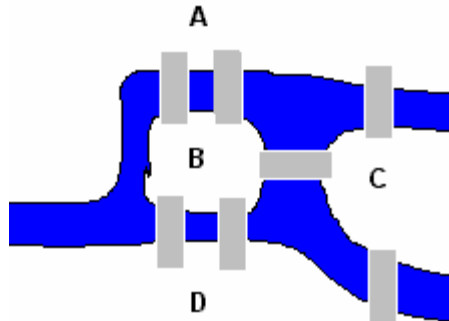
Lesendur ættu að sannreyna að ekki sé hægt að koma tölustaf á hreinsistöðina.



Sú stærðfræði sem fjallað er um í þessum kafla heitir netafræði og á upptök sín í einfaldri spurningu, nokkurskonar gestapraut, sem íbúar Köningsberg glímdu við á fyrri hluta 18. aldar. Köningsberg var prússnensk borg og stóð á bökkum árinna Pregel, nálægt ósum hennar við Eystrasaltið. Þar er nú rússneska borgin Kaliningrad. Í Köningsberg voru sjö

brýr yfir Pregel og hafði einhver varpað þeirri spurningu fram hvort hægt væri að fara í einni gönguferð yfir sérhverja brú án þess að fara tvisvar yfir þá sömu. Við þetta glímdu íbúarnir jafnt sem gestir borgarinnar á gönguferðum sínum uns svissneski

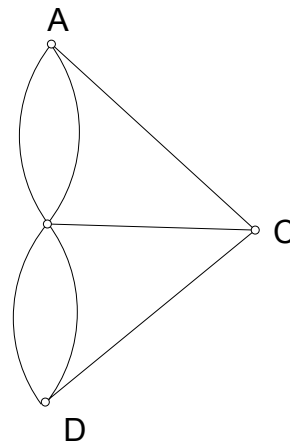
stærðfræðingurinn Leonhard Euler



Kort sem sýnir brýrnar í Köningsberg yfir ána Pregel.

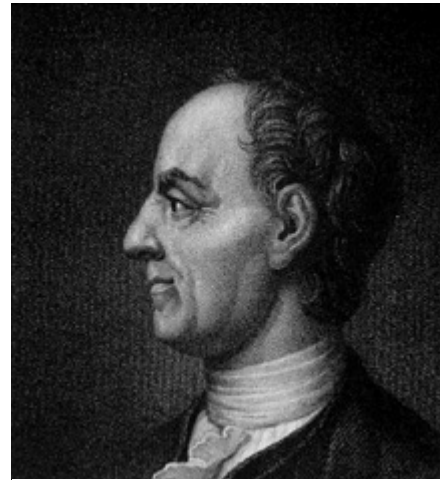
(1707-1783) leysti gátuna. Euler áttaði sig á að fæst af því sem fram kemur á landakorti af borginni skiptir máli um lausn þrautarinnar. Hægt er að tákna það sem máli skiptir á einfaldri mynd af neti þar sem leggur tákna brú og hnútar tákna svæðin sem brýrnar tengja saman. Þá verður spurningin sú hvort hægt sé að teikna myndina án þess að lyfta blýantinum og án þess að teikna sama legginn tvisvar. Til eru fjölmargar þrautir af þessari gerð sem lesendur ættu að kannast við, t.d. hvort hægt sé að teikna mynd sem minnir á útlínur umslags.

Euler byrjaði á að gera greinarmun á hnútum eftir því hvort fjöldi leggja sem tengist þeim er oddatala eða slétt tala. Ef fjöldi leggja sem tengist hnút er oddatala má kalla þann hnút oddahnút en ef fjöldi leggja sem tengist hnútum er slétt tala má kalla þann hnút sléttan hnút. Lausnin á þrautinni felst svo í því að telja oddahnútana. Til að hægt sé að teikna myndina án þess að lyfta blýantinum og án þess að teikna sömu leggina tvisvar þarf fjöldi oddahnúta að vera núll eða tveir. Sé fjöldi oddahnúta tveir þarf að byrja teikninguna í öðrum þeirra og enda í hinum.



Netið á myndinni hefur sömu eiginleika og brýrnar í Köningsberg með tilliti til þrautarinnar.

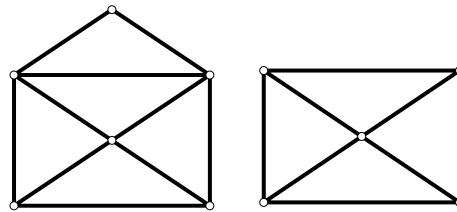
Eins og sjá má á netinu sem lýsir brúnum í Königsberg eru allir hnútarnir þar oddahnútar og því var ekki hægt að fara yfir allar brýrnar í einni gönguferð án þess að fara tvisvar yfir nokkra brú. Á síðari hluta 19. aldar var áttundu brúnni bætt við. Hún tengdi saman svæði A og svæði D. Þá voru B og C orðnir einu oddahnútar og því uppfyllti netið skilyrði Eulers. Var þá hægt að ganga yfir allar brýrnar í einni ferð, án þess að fara tvisvar yfir neina þeirra, ef byrjað var í B og endað í C eða byrjað í C og endað í B.



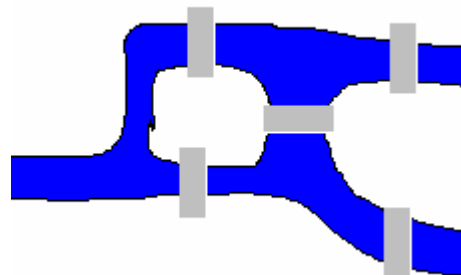
Leonhard Euler (1707-1783). Euler var einn afkastamesti stærðfræðingur allra tíma.

Æfingar

1. Notið aðferð Eulers til að skera úr um hvort hægt er að teikna myndirnar án þess að lyfta blýantinum og án þess að teikna sama strikið tvisvar.

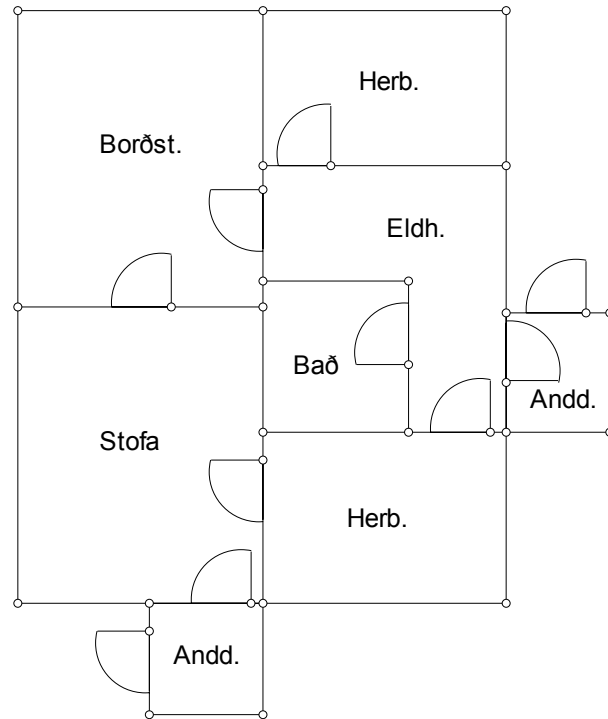


2. Myndin sýnir einfalt kort af Kalinigrad sem sýnir hvernig brýrnar yfir Pregel eru nú á dögum. Er hægt að fara yfir allar brýrnar í einni gönguferð án þess að fara tvisvar yfir neina þeirra?



3. Í gömlum húsum í Reykjavík eru víða íbúðir þar sem margar leiðir eru inn í hvert herbergi og fleiri en einn inngangur í íbúðina.

Teikningin sýnir íbúð í vesturbæ Reykjavíkur. Á henni eru tveir inngangar, tvö svefnherbergi, tvær stofur, eldhús og bað. Er hægt að fara skoðunarferð um íbúðina þannig að gengið sé um sérhverjar dyr einu sinni og bara einu sinni?



Til íhugunar

- I. Þótt íbúar í Königsberg hafi fyrst og fremst glímt við þrautina um brýrnar sér til skemmtunar er hægt að hugsa sér svipuð viðfangsefni þar sem svarið skiptir miklu máli. Snjóruðningstæki þarf t.d. að moka sérhverja götu, hugsanlega einu sinni í hvora átt, en það er óhagræði af því að þurfa að fara um götu sem er þegar búið að moka. Lesendur eru hvattir til að finna fleiri slík viðfangsefni og velta fyrir sér hvernig mætti nota aðferð Eulers til að leysa þau.
- II. Í þrautinni um brýrnar í Königsberg þurfti að fara yfir sérhverja brú, fara um sérhvern legg í netinu. Hægt er að ímynda sér aðra útgáfu, þ.e. að koma þurfi við á hverjum hnút, en ekki endilega að fara um hvern legg. Við slíkar þrautir glíma allir sem þurfa að heimsækja tiltekna staði, svo sem blaðberar, póstar og farandsalar. Í slíkum tilvikum er reynt að komast á alla staðina í sem fæstum skrefum eða með sem minnstum tilkostnaði. Viðfangsefni af þessu tagi ganga undir nafninu farandsalaþrautir og geta orðið afar flókin. Engin aðferð er til sem dugar til að finna bestu lausn á öllum slíkum þrautum en til eru aðferðir sem gera tölvum kleift að finna lausnir sem eru tiltölulega nálægt bestu lausn í hverju tilviki. Lesendur eru

hvattir til að velta því fyrir sér af hverju farandsalaþrautirnar eru svo miklu flóknari en þrautin um brýrnar í Köningsberg.

Vefslóðir

<http://www.birgisson.com> Þar er að finna forrit, MaxFlow, sem hægt er að nota til að teikna net og reikna flæði. Forritið er fyrir Windows og er ókeypis.

Mengi og mengjaaðgerðir

Orðið **mengi** þýðir safn eða hópur. Í stærðfræði eru mengi og stak undirstöðuhugtök, og önnur hugtök, t. d. tölur, eru skýrð og skilgreind út frá þeim. Þeir hlutir sem eru í mengi eru kallaðir **stök** mengisins. Skoðum nokkur dæmi um mengi:

Mengi talnanna á venjulegum teningi inniheldur sex stök, og er hægt að skrifa mengið niður með því að telja stökin upp inní slaufusviga: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mengi enskra sérhljóða er mengið $\{a, e, i, o, u, y\}$. Ef við köllum þetta mengi A , þá getum við sagt að i sé stak í A með því að skrifa $i \in A$.

Sléttar tölur milli 15 og 25 mynda mengið $V = \{16, 18, 20, 22, 24\}$. Við getum þá skrifað að $22 \in V$, þ. e. 22 er stak í menginu V , og einnig að $23 \notin V$, þ. e. að 23 er ekki stak í menginu V .

Ef mengi inniheldur óendanlega mörg stök er ekki hægt að skrifa öll stök mengisins niður. Þá beitum við öðrum aðferðum:

Mengi slétttra talna mætti tákna $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, eða

$S = \{x \mid x = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}\}$, en þetta er lesið „mengi þeirra talna x þannig að x sé tvisvar sinnum einhver náttúrleg tala“.

Hlutmengi, tómamengi og grunnmengi

Mengið A er sagt vera **hlutmengi** í menginu B ef sérhvert stak í A er einnig í B . Þetta er táknað $A \subseteq B$.

Mengið A er sagt vera **eiginlegt hlutmengi** í menginu B ef sérhvert stak í A er einnig í B , en A er ekki allt mengið B . Þetta er táknað $A \subset B$.

Þannig er sérhvert mengi hlutmengi í sjálfu sér, og mengi oddatalna er hlutmengi í mengi náttúrlegra talna.

Þar sem tvö mengi eru eins ef þau innihalda nákæmlega sömu stök, þá er bara til eitt mengi sem inniheldur ekkert stak. Það er kallað **tómamengið**, og er táknað með $\emptyset$.

Grunnmengi er það mengi sem verið er að vinna í hverju sinni. Þannig er t. d. mengi náttúrlegra talna eðlilegt grunnmengi þegar verið er að tala um sléttar tölur og oddatölur. Þegar verið er að vinna með bil á talnalínunni er mengi rauntalnanna eðlilegasta grunnmengið, því öll bil eru hlutmengi í því.

Mengjaáðgerðir og Venn-myndir

Sammengi mengjanna A og B er mengi sem inniheldur öll stök úr A og líka öll stök úr B .

Það er táknað með $A \cup B$, og er lesið „ A sam B “. Á táknmáli er

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eða } x \in B\}.$$

Dæmi: Ef $A = \{1, 2, 5\}$ og $B = \{a, s, d\}$, þá er $A \cup B = \{1, 2, 5, a, s, d\}$.

Sniðmengi mengjanna A og B er mengi sem inniheldur þau stök sem eru bæði í A og líka

í B . Það er táknað með $A \cap B$, og er lesið „ A snið B “. Á táknmáli er

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}.$$

Ef sniðmengi tveggja mengja er tómt, þ. e.

mengin hafa ekkert stak sameiginlegt, þá er sagt að mengin séu **sundurlæg**.

Dæmi: Ef $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ og $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, þá er $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Fyllimengi mengisins A inniheldur öll þau stök grunnmengisins sem ekki eru í A .

Fyllimengi A er táknað með A' . Á táknmáli er $A' = \{x \in G \mid x \notin A\}$.

Dæmi: Ef grunnmengið er náttúrlegar tölur og A er mengi sléttra talna, þá er A' mengi oddatalna.

Dæmi: Ef grunnmengið G eru vikudagarnir sjö og A er mengi vinnudaga, þ. e.

$G = \{\text{sunnudagur, mánudagur, þriðjudagur, miðvikudagur, fimmtudagur, föstudagur, laugardagur}\}$

$A = \{\text{mánudagur, þriðjudagur, miðvikudagur, fimmtudagur, föstudagur}\}$

þá er $A' = \{\text{laugardagur, sunnudagur}\}$.

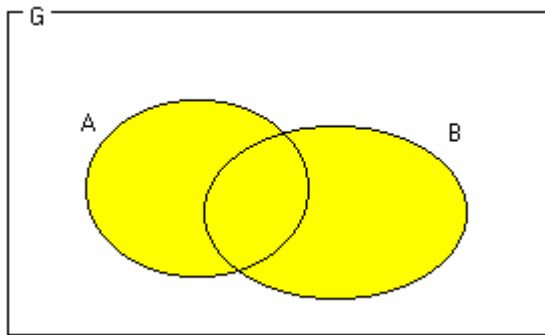
Mismunamengi:

Mengi sem inniheldur þau stök úr A sem ekki eru í B er táknað $A \setminus B$. Táknid er lesið „ A mínus B “. Á táknmáli er $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \notin B\}$.

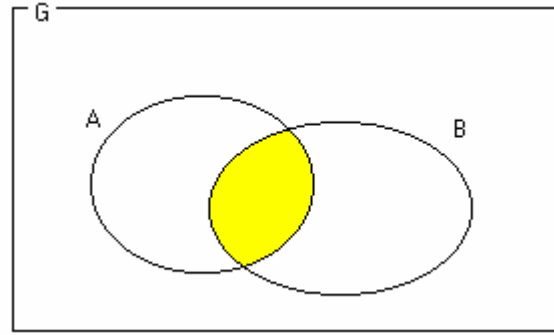
Athyglisvert er að fyllimengi mengisins A má þá tákna með $A' = G \setminus A$, þar sem G er grunnmengið.

Dæmi: Ef $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, þá er $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$.

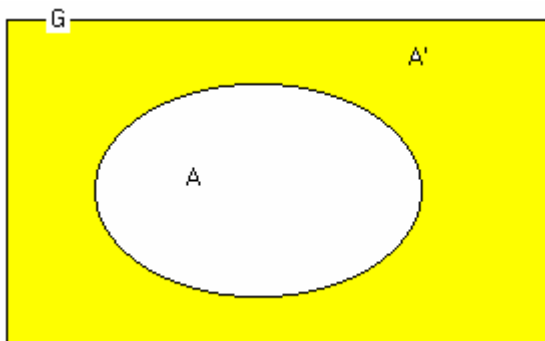
Svonefndar Venn-myndir eru mikið notaðar til skýringa í mengjafræði. Með slíkum myndum er hægt að sýna samband þeirra mengja sem koma við sögu:



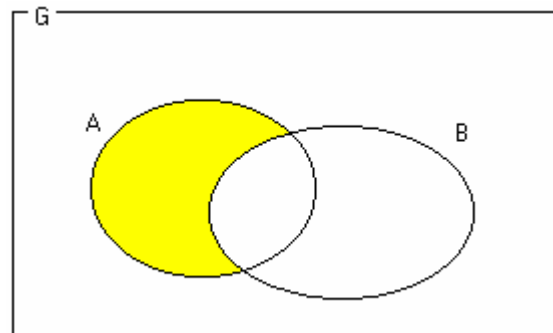
$A \cup B$
A sam B



$A \cap B$
A snið B



A'
Fyllimengi A



$A \setminus B$
A mínus B

Dæmi:

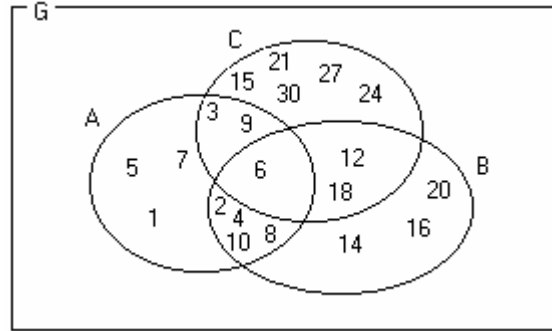
Táknum með Venn-mynd tengsl eftirfarandi hlutmengja úr náttúrlegu tölunum:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

Á myndinni sjáum við til dæmis að



$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A \cap B \cap C = \{6\}$$

$$A \cap C = \{3, 6, 9\}$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{1, 5, 7\}$$

Æfingar

- Skráðu öll hlutmengi í menginu A þegar
 - $A = \{1\}$
 - $A = \{1, 2\}$
 - $A = \{1, 2, 3\}$
- Skráðu niður mengin $A \cup B$ og $A \cap B$ þegar
 - $A = \{4, 8, 10\}$ og $B = \{3, 4, 7, 10\}$
 - $A = \{0, 5, 11\}$ og $B = \{3, 7, 8, 13\}$
 - $A = \{3, 6, 15\}$ og $B = \{3, 5, 6, 15\}$
 - $A = \{7, 8, 20\}$ og $B = \{7, 8, 20\}$
- Skráðu eftirfarandi mengi niður þegar $A = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ og $B = \{3, 4, 7, 8\}$:
 - $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - $A \setminus B$
 - $B \setminus A$
 - $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$
 - $(B \setminus A) \cup (A \cap B)$

4. Gefin eru eftirfarandi hlutmengi úr grunnmenginu

$$G = \{1, 2, 3, 4, \dots, 48, 49, 50\} :$$

$$A = \{x \in G \mid x \text{ er ferningstala}\}$$

$$B = \{x \in G \mid x \text{ er frumtala}\}$$

$$C = \{x \in G \mid x \text{ er oddatala}\}$$

$$D = \{x \in G \mid x \text{ er slétt tala}\}$$

a) Hver af þessum mengjum eru sundurlæg?

b) Er eitthvert mengið hlutmengi í öðru ?

Gerðu stakaskrá yfir eftirfarandi mengi:

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

e) $B \setminus C =$

f) $C \setminus B =$

g) $B \setminus D =$

h) $A \cap B =$

i) $C' \cap D' =$

j) $B' \setminus C =$

k) $C' \cup A =$

5. Mengið A inniheldur 70 stök og mengið B inniheldur 35 stök. Sniðmengi þeirra inniheldur 20 stök. Hversu mörg stök eru í $A \cup B$?
6. Maður nokkur á 70 hunda, sem eru allir annaðhvort svartir eða háfættir. Þeir svörtu eru 45 talsins og þeir háfættu eru 40. Hversu margir af svörtu hundunum eru háfættir? Teiknaðu Venn-mynd.

Verkefni

1. Höldum áfram með æfingu 1 hér að framan. Hversu mörg hlutmengi eru í mengi með n stökum?
2. Um mengin A , B og C er vitað að
- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| $A \cap B$ inniheldur 12 stök | $A \cup B$ inniheldur 65 stök |
| $A \cap C$ inniheldur 15 stök | $A \cup C$ inniheldur 75 stök |
| $B \cap C$ inniheldur 17 stök | $B \cup C$ inniheldur 80 stök |
| $A \cap B \cap C$ inniheldur 7 stök | |

Teiknaðu Venn-mynd og finndu stakafjöldann í hverju mengjanna á myndinni. Hversu mörg stök eru í $A \cup B \cup C$?

Talningarfræði

Á hversu marga vegu . . .

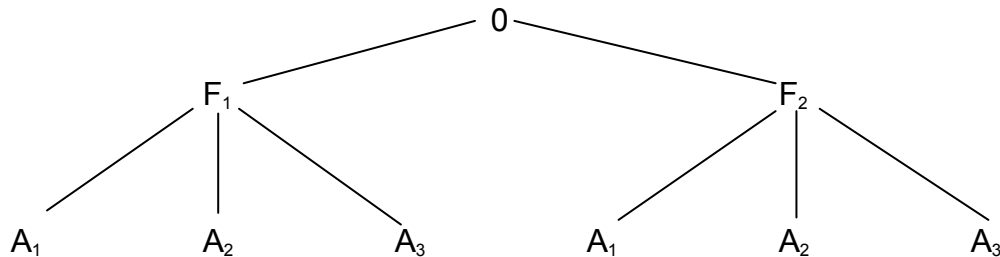
Hvað eru margir mismunandi möguleikar . . .

Sú grein stærðfræðinnar sem leitast við að svara spurningum í þessa veru nefnist talningarfræði, og slíkar spurningar hefjast gjarnan á orðum svipuðum og hér að framan.

Margföldunarreglan

Á hópmatseðli er hægt að velja milli tveggja forréttar og þriggja aðalréttar. Hve margar mismunandi tveggja rétta máltíðir er hægt að setja saman?

Hér þarf þá fyrst að velja forrétt, en það er hægt að gera á tvo vegu. Síðan er hægt að velja aðalrétt, en það er hægt að gera á þrjá vegu. Heildarfjöldi möguleikanna verður þá samkvæmt margföldunarreglunni $2 \cdot 3 = 6$ möguleikar. Skoðum þetta á mynd:



Þegar byrjað er í 0 og farið fyrst í annan forréttinn og síðan einhvern aðalréttinn, þá sjáum við að við getum endað á sex mismunandi stöðum sem allir standa fyrir mismunandi máltíðir.

Sú regla sem birtist í þessu dæmi gildir einnig þótt velja þurfi oft en tvisvar sinnum. Til dæmis ef eftirréttirnir væru fjórir, þá mætti búa til $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ mismunandi þriggja rétta máltíðir. Þetta má hugsa þannig að fyrir hverja af þessum sex tveggja rétta máltíðum má velja milli fjögurra eftirréttar, svo þeir möguleikar sem fyrir voru margfaldast með fjórum.

Margföldunarreglan:

Ef fyrst er valið á milli n möguleika og síðan milli m möguleika, þá er heildarfjöldi valmöguleikanna $n \cdot m$.

Æfingar

1. Guðmundur á þrjá skrifblýanta og fimm kúlupenna. Á hve marga vegu getur hann valið sér skriffæri?
2. Fólksbílategund er fáanleg í sex mismunandi litum, með taui eða leðri á sætum í þremur mismunandi litum hvorttveggja, með eða án beinnar innspýtingar og með eða án sóllúgu. Ef umboðið ætlar að hafa allar

mögulegar útgáfur af bílnum til, hversu marga bíla þurfa þeir þá að hafa að lágmarki á lager?

3. Í 1.A eru 12 strákar og 10 stelpur, í 1.B eru 10 strákar og 13 stelpur og í 1.C eru 8 strákar og 12 stelpur. Á hve marga vegu er hægt að velja einn strák og eina stelpu úr hverjum bekk (þ. e. 6 nem. alls)?
4. Hjólalás er með fjórum tökkum, og hvern þeirra er hægt að stilla á þrjá vegu. Hve marga möguleika þarf að prófa ef maður er búinn að gleyma stillingunni á lásnum?
5. Hjólalás er með þremur tökkum, og hvern þeirra er hægt að stilla á fjóra vegu. Hve marga möguleika þarf að prófa ef maður er búinn að gleyma stillingunni á lásnum?
6. Úr hópi sjö skáta á að velja einn sem sér um matseld og annan sem safnar brenni. Á hve marga vegu er það hægt?
7. Starfsmönnum fyrirtækis eru gefnar einkunnir í þremur flokkum, starfshæfni, samstarfsvilja og snyrtimennsku. Einkunnin er einn af bókstöfunum A, B, C, D og E. Á hve marga vegu er hægt að gefa starfsmanni einkunnir?
8. Í morsstafrófinu eru bókstafirnir táknaðir með punktum $\square$ og strikum $-$. Til dæmis er bókstafurinn S táknaður með þremur punktum. Ef A er táknað með $\square$, Á með $-$, B með $\square-$, C með $-\square$ o. s. frv., hvað þarf þá samtals mörg strik og punkta til að tákna bókstafinn Ö? Við reiknum með að bókstafirnir séu 34 alls.
9. Á hve marga vegu er hægt að fylla út getraunaseðil með einni röð og 13 leikjum?
10. Á hve marga vegu er hægt að fylla út getraunaseðilinn þannig að allir leikirnir séu rangir?
11. Á þingi sitja 12 frjálslyndir, 10 afturhaldssamir, 7 íhaldssamir og 4 umbótasinnar. Á hve marga vegu er hægt að skipa fjögurra manna nefnd þannig að allir flokkar eigi sinn fulltrúa?
12. Hve mörg mismunandi merki er hægt að senda með fimm ljóskösturum með því að láta loga á sumum kösturunum og öðrum ekki?

Umraðanir

Á hve marga vegu er hægt að raða þremur hlutum, t. d. bókstöfunum A, B og C? Við getum valið fremsta stafinn á þrjá vegu, eftir það getum við valið miðstafinn á tvo vegu, og að lokum er þá bara einn möguleiki að velja aftasta stafinn. Samkvæmt margföldunarreglunni er þá fjöldi möguleikanna $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Þessi tala er nefnd **þrír hrópmerkt**, skrifað með upphrópunarmerki, **3!**. Almenn gildir að

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

.

.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Talan $n!$ segir til um á hversu marga vegu sé hægt að raða n hlutum.

Dæmi: Hversu margar fjögurra stafa tölur er hægt að búa til úr tölustöfunum 1, 2, 3 og 4 ef hver þeirra á að koma einu sinni fyrir í hverri tölu? Hér þarf að raða þessum fjórum tölustöfum, og það er hægt á $4! = 24$ vegu.

Stundum þarf bæði að velja og raða, eins og í eftirfarandi dæmi:

Dæmi: Á hve marga vegu getur fjögurra manna fjölskylda setið til borðs ef sex sæti eru við borðið?

Við byrjum á að velja sæti fyrir fyrsta manninn. Það er hægt á 6 vegu, og næsti maður getur valið um 5 sæti, sá þriðji um 4 og sá síðasti um 3 sæti, og því verða möguleikarnir $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ alls.

Þetta er dæmi um almenna reglu.

Talan $P(n, k)$ er skilgreind með $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Hægt er að velja og raða k hlutum úr mengi með n hlutum á $P(n, k)$ vegu.

Á mörgum reiknivélum er takki til að reikna þessa tölu, $\boxed{nPr}$.

Talan $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$, er því svarið við dæminu að ofan.

Dæmi: Á hve marga vegu er hægt að stilla upp 11 manna knattspyrnuliði, ef úr 15 mönnum er að velja og reiknað er með að allir geti spilað allar stöður?

Við þurfum þá að velja 11 af 15 og raða þeim í stöður,

$$P(15,11) = \frac{15!}{(15-11)!} = 5,4 \cdot 10^{10}$$

Samantektir (tvíliðustuðlar)

Talan $C(n,k)$ eða $\binom{n}{k}$, lesið „ n yfir k “ er skilgreind með jöfnunni

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Á mörgum reiknivélum er takki til að reikna þessa tölu, $\boxed{nCr}$.

Hægt er að velja k hluti úr mengi með n hlutum á $C(n,k)$ vegu, eða $C(n,k)$ er fjöldi hlutmengja með k stökum í mengi með n stökum.

Munurinn á samantekt $C(n,k)$ og umröðun $P(n,k)$ er því að þegar röðin á niðurstöðunni skiptir máli, þá gefur $P(n,k)$ réttan fjölda, en ef röðin skiptir ekki máli þá er það talan $C(n,k)$ sem gefur rétta niðurstöðu.

Dæmi:

1. Á hve marga vegu er hægt að velja þriggja manna stjórn í tíu manna félagi?

Hér verður svarið $C(10,3) = 120$, því röð stjórnarmanna skiptir ekki máli.

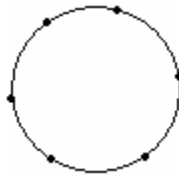
2. Á hversu marga vegu er hægt að velja formann, ritara og gjaldkera í tíu manna félagi?

Hér verður svarið $P(10,3) = 720$, því það þarf bæði að velja þrjá og skipa þeim í embætti (raða þeim), svo röð mannanna skiptir máli.

Æfingar

1. Hversu margar fjögurra stafa tölur er hægt að mynda úr tölustöfunum 1,2,3,4,5,6 og 7? (Ath. að sami stafur getur komið fyrir oftari en einu sinni).
2. Hversu margar fjögurra stafa tölur er hægt að mynda úr tölustöfunum 1,2,3,4,5,6 og 7 ef enginn tölustafur má koma fyrir oftari en einu sinni í hverri tölu?

3. Hversu margar mismunandi þrennur eru í venjulegum spilastokk?
4. Á hve marga vegu er hægt að koma sjö fyrirtækjum fyrir í tíu sýningarbásum?
5. Hvað eru til margar mismunandi fjögurra stafa tölur?
6. Á hve marga vegu er hægt að velja sex nemedur úr 20 manna bekk?
7. Á hve marga vegu er hægt að velja sex stráka og sjö stelpur úr bekk með tíu strákum og tólf stelpum?
8. Á hve marga vegu er hægt að raða stöfunum í orðinu *litur*?
9. Sex punktar eru á hringferli. Hve mörg strik er hægt að draga á milli tveggja af punktunum?

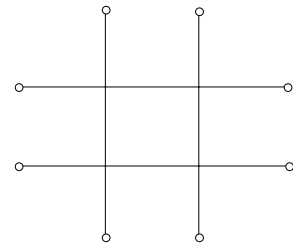


10. Í ísbúð er hægt að velja á milli tíu mismunandi tegunda af ískúlum. Erla og Ari ætla að fá sér þrjár kúlur hvort. Ara er alveg sama í hvaða röð kúlurnar eru í forminu.
 - a) Hvað getur Ari fengið sér marga mismunandi ísa?
 - b) Röð kúlnanna í forminu skiptir miklu máli fyrir Erlu. Hvað getur hún fengið sér marga mismunandi ísa?
11. Pizzustaður býður upp á 12 mismunandi tegundir af áleggi. Hversu margar mismunandi pizzur með þremur áleggstegundum er hægt að kaupa hjá þeim?
12. Á hve marga vegu er hægt að stilla upp fjögurra manna boðhlaupssveit úr hópi tíu hlaupara?
13. Fimm menn standa og bíða eftir strætó. Á hve marga vegu geta þeir myndað röð?
14. Ég þarf að koma við á fimm stöðum á leiðinni heim. Á hve marga vegu get ég gert það?
15. Þrjár kúlur eru merktar með tölustöfunum 2, 3 og 4. Á hve marga vegu er hægt að
 - a) raða kúlunum í röð?
 - b) raða þeim þannig að þær myndi þriggja stafa oddatölu?
 - c) raða þeim þannig að þær myndi þriggja stafa slétta tölu?
16. Vélstjóri hefur eftirlit með fimm vélum. Á hve marga vegu getur hann heimsótt vélarnar á eftirlitsferð sinni?

Verkefni.

1. Á hve marga vegu er hægt að raða stöfunum í orðunum
 - a. Borð
 - b. Inna
 - c. Anna
 - d. Annan

2. Allir þekkja krossleikinn hér til hliðar. Á hve marga vegu er hægt að leika þrjá fyrstu leikina þegar tekið er tillit til samhverfunnar í myndinni? (Þá verða t.d. bara þrír möguleikar að leika fyrsta leikinn: í horn, í miðjuna eða á miðja hliðina).



Tölur og talnamengi

Tölurnar 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . o.s.frv. eru kallaðar **náttúrlegar tölur**.

Nafnið er væntanlega komið til vegna þess að þetta eru þær tölur sem við notum til þess að telja með, og þær þykja þessvegna nær því að eiga uppruna sinn í náttúrunni en aðrar tölur. Það er auðvelt að skilja að menn hafi fundið upp aðferð til að telja, hvort heldur er búfénað, verkfæri eða börn. En náttúrlegu tölurnar duga skammt þegar þarf að fara að reikna. Ýmislegt veldur því að náttúrlegu tölurnar eru ekki fullnægjandi fyrir mörg fyrirbrigði sem standa nærri daglegu lífi. Til dæmis verða neikvæðar tölur og brot „eðlilegar“ og nauðsynlegar tölur í tímatalsreikningum. Tímatal er alltaf miðað við einhvern upphafspunkt, og þá fá þau ár sem liðin voru fyrir upphafspunktinn neikvætt ártal. Þannig verður sá tími sem liðinn var fyrir núllpunktinn neikvæður í reikningum. Hægt er að nota aðra viðmiðun en fæðingu Krists. Vestmannaeyingum er til dæmis tamt að miða tímann við gosið í Heimaey, og töluðu því oft um að eitthvað hefði gerst svo og svo mörgum árum fyrir eða eftir gos. Gosið í Heimaey ákvarðaði núllpunktinn, og þannig hafði atburður sem gerðist þremur árum fyrir gos gerst árið -3, og hafði því gerst fyrir átta árum þegar liðin voru fimm ár frá gosi. Með þessu móti er alltaf hægt að finna lengd tímabils milli tveggja ártala með því að draga lægra ártalið frá hinu. Þannig var núllinu bætt við og neikvæðum heilum tölum, og er þá komið það sem við köllum heilar tölur, en með tilkomu þeirra höfðu allir samlagningar- og frádráttarreikningar fengið lausn, og um leið eðlilega merkingu. Það er nauðsynlegt að taka eftir því að allar náttúrlegu tölurnar eru vitaskuld heilar, þ.e. náttúrleg tala er einnig heil tala:

Mengi **náttúrlegra talna** er táknað með **N**:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Mengi **heilla talna** er táknað með **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Nafnið heilar tölur vísar til þess að þeim er raðað upp með einni heilli einingu á milli þeirra á **talnalínu**. Talnalínan er hugsuð eins og kvarði eða málband og er ekki aðeins óendanleg í báðar áttir, heldur einnig „óendanlega fíngerð“. Það merkir að á milli tveggja punkta á talnalínu eru alltaf óendanlega margir punktar.

Náttúran sér til þess að við viljum hafa nákvæmari tímakvarða en ártöl. Árstíðir, dagur og nótt, flóð og fjara valda því að árinu er skipt upp í mánuði og daga. Í framhaldi af því eru hlutar úr ári orðnir eðlilegur hluti af daglegu lífi. Til dæmis er

árið 12 mánuðir eða 365 dagar, og því eru þrír mánuðir $\frac{3}{12}$ úr ári, og 25 dagar

eru $\frac{25}{365}$ úr ári. Þessi brot má svo reyndar bæði stytta, $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ úr ári, og $\frac{25}{365} = \frac{5}{73}$

úr ári.

Ræð tala (brot) fæst þegar einni heilli tölu (þó ekki 0) er deilt upp í aðra heila tölu. Allar tölur sem geta komið fram sem útkoma úr slíkri deilingu eru nefndar ræðar tölur. Við segjum oft að mengi ræðra talna innihaldi allar tölur sem hægt sé að skrifa með almennu broti. Þannig eru allar heilu tölurnar ræðar (og þá allar náttúrlegu tölurnar líka), því þær er hægt að skrifa með almennu broti

(t.d. er $-5 = \frac{-5}{1}$).

Mengi **ræðra talna** er táknað með **Q**:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ og } b \neq 0 \right\}$$

Eins og fyrr sagði, þá er talnalínan þeim eiginleika gædd að á milli sérhverra tveggja punkta á henni eru óendanlega margir punktar. Við lítum á sérhvern punkt línunnar sem tölu, og þannig mynda **allir punktar talnalínunnar það sem við köllum mengi rauntalna**, og er táknað með **R**. Allar þær tölur sem fyrr voru nefndar, náttúrlegar, heilar og ræðar eru því rauntölur, og auk þeirra tölur sem kallaðar eru **óræðar tölur**. Það eru einfaldlega allir þeir punktar talnalínunnar sem **ekki** samsvara broti, þ.e. allar tölur sem ekki er hægt að skrifa sem almennt brot heilla talna. Rauntölurnar skiptast þannig í tvennt, annars vegar ræðu tölurnar og hins vegar óræðu tölurnar.

Mengi **rauntalna** : $\mathbf{R}$: Allir punktar talnalínunnar.

Talnalínan hefur fleiri merkilega eiginleika. Einn er sá, að ef við skiptum henni í tvo hluta á einhverjum stað, þá fær annar parturinn endapunkt en hinn ekki. Það er ástæða þess að við fáum þrjár mismunandi tegundir af **bilum**, en bútur af talnalínunni er kallaður bil :

Opin bil: Það eru bil sem engan endapunkt hafa:

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \text{ og } x < b\}$ inniheldur allar rauntölur sem eru á milli a og b .

$\langle \leftarrow, a \rangle = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$ inniheldur allar rauntölur sem eru minni en a .

$\langle a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$ inniheldur allar rauntölur sem eru stærri en a .

Lokuð bil: Það eru bil með endapunkt báðum megin:

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ inniheldur allar rauntölur stærri eða jafnar a og minni eða jafnar b .

Hálfopin bil: Það eru bil með endapunkt öðru megin:

$\langle a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ inniheldur allar rauntölur stærri en a og minni eða jafnar b .

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ inniheldur allar rauntölur stærri eða jafnar a og minni en b .

$\langle \leftarrow, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\}$ inniheldur allar rauntölur sem eru minni eða jafnar a .

$[a, \rightarrow) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$ inniheldur allar rauntölur sem eru stærri eða jafnar a .

Æfingar

Táknaðu eftirfarandi mengi með biltákni:

1. Mengi rauntalna stærri en 0 og minni en 7
2. Mengi rauntalna stærri eða jafnar 0 og minni en 10
3. Mengi rauntalna stærri eða jafnar 0 og minni eða jafnar 10
4. Mengi rauntalna stærri eða jafnar 20
5. Mengi rauntalna stærri en -5 og minni en 10
6. Mengi rauntalna minni eða jafnar π

Lýstu eftirfarandi bilum í orðum. Hver þeirra eru opin, hver lokuð og hver eru hálfopin?

7. $[-1, 4]$
8. $\langle 0, \frac{3}{5} \rangle$
9. $\langle 0, \rightarrow \rangle$
10. $[\sqrt{2}, \pi \rangle$
11. $\langle \leftarrow, 100 \rangle$
12. $\langle 100, \rightarrow \rangle$
13. $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

Náttúrlegar tölur

Sumar náttúrlegar tölur hafa sérstaka eiginleika sem aðrar hafa ekki. Allir þekkja **sléttar tölur** og **oddatölur** :

Mengi jákvæðra sléttra talna : $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Mengi jákvæðra oddatalna : $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

Þessi mengi skipta náttúrlegu tölunum bróðurlega milli sín - mengi sléttra talna fær í sinn hlut þær tölur sem talan 2 gengur upp í, en mengi oddatalna fær þær sem 2 gengur ekki upp í.

Sérstaklega athyglisverðar eru þær tölur sem ekki er hægt að skrifa sem margfeldi nema með 1 og tölunni sjálfri. Slíkar tölur nefnast **frumtölur**, eða **prímtölur**. Það eru tölurnar

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, . . .

Talan 1 telst ekki til frumtalna, og 2 er eina slétta frumtalan, þar sem 2 gengur upp í allar hinar sléttu tölurnar. Þær tölur sem ekki eru frumtölur eru kallaðar **samsettar tölur**, vegna þess að þær eru samsettar úr margfeldi tveggja eða fleiri frumtalna. Til dæmis er talan 66 samsett, því $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Það að skrifa samsetta tölu sem margfeldi annarra talna kallast að **þátta** töluna, og tölurnar sem mynda margfeldið kallast **þættir**. Við getum þáttað töluna 66 á fleiri vegu en gert var hér að framan:

$$66 = 6 \cdot 11$$

$$66 = 2 \cdot 33$$

$$66 = 3 \cdot 22$$

En í öllum þessum tilvikum er einhver þátturinn samsett tala sem hægt er að þátta upp í frumtölur. Ef þáttað er eins mikið og hægt er, þannig að allir þættirnir eru frumtölur, þá fæst alltaf sama niðurstaðan: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. Þess vegna getum við sagt að talan 66 innihaldi frumþættina 2, 3 og 11, og það að þátta þannig að allir þættir séu frumtölur, kallast að **frumþátta**. Samkvæmt því sem hér stendur er því aðeins til ein frumþáttun fyrir töluna 66, og það gildir reyndar fyrir allar tölur, svo við setjum það í reglu:

REGLA:

Sérhver samsett tala hefur aðeins eina frumþáttun (burtséð frá röð þáttanna).

Eftirfarandi aðferð er gjarnan notuð til þess að þátta tölur. Við sýnum hana með því að þátta töluna 111078. Við höfum vasareikninn við hendina, og byrjum á því

að athuga hvort fyrsta framtalan, talan 2, gangi upp í tölunni, $111078 : 2 = 55539$.

Þá skrifum við

111078 ----- 55539

|

2

Nú gengur 2 ekki upp í 55539, svo við prófum næstu framtölu, 3:

$55539 : 3 = 18513$, svo við bætum við myndina,

111078 ----- 55539 ----- 18513

|

|

2

3

Nú gengur 3 aftur upp í 18513,

111078 ----- 55539 ----- 18513 ----- 6171

|

|

|

2

3

3

Nú gengur 3 enn upp í 6171, svo við deilum enn með 3,

111078 ----- 55539 ----- 18513 ----- 6171 ----- 2057

|

|

|

|

2

3

3

3

Nú gengur 3 ekki upp í 2057, svo við prófum næstu framtölu, 5. Hún gengur ekki heldur, svo við prófum næst 7. Sú deiling gengur ekki heldur, og þá er næsta framtala 11, og $2057 : 11 = 187$,

111078	-----	55539	-----	18513	-----	6171	-----	2057	-----	187
2		3		3		3		11		

Enn gengur 11 upp í 187,

111078	-----	55539	-----	18513	-----	6171	-----	2057	-----	187	-----	17	-----	1
2		3		3		3		11		11		17		

Nú er 17 framtala, svo frumpáttun tölunnar 111078 er fengin,

$$111078 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17.$$

Æfing : Þáttið tölunnar 1460, 1461, 1462, . . . 1470 með þessari aðferð.

Verkefni

Í matvörubúðum er hamborgurum með brauði oft pakkað í pakka með tveimur og pakka með fjórum hamborgurum, til þess að flýta fyrir afgreiðslu. Athugið hvaða fjölda af hamborgurum er hægt að kaupa með þessu móti (frá 1 upp í 20).

Hverju myndi það breyta ef hamborgurunum væri pakkað

a) í pakka með 2 og í pakka með 5 borgurum

b) í pakka með 3 og í pakka með 6 borgurum

c) í pakka með 3 og í pakka með 7 borgurum

Hvað er það sem skiptir máli svo hægt sé að kaupa sem flestar mismunandi tölur af hamborgurum?

Fleiri gerðir náttúrlegra talna

Ferningstölur eru tölurnar

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

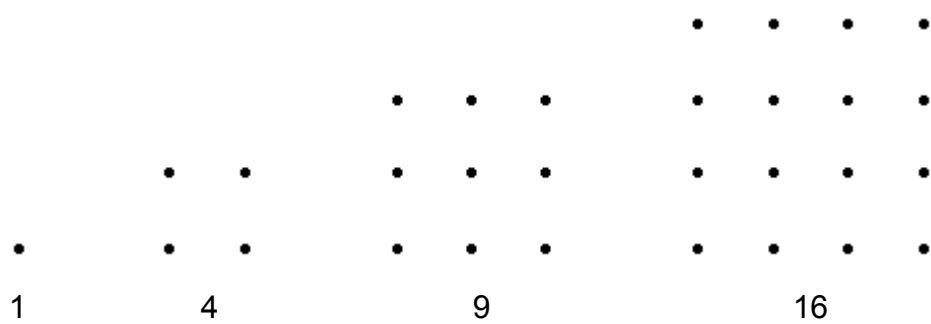
.

.

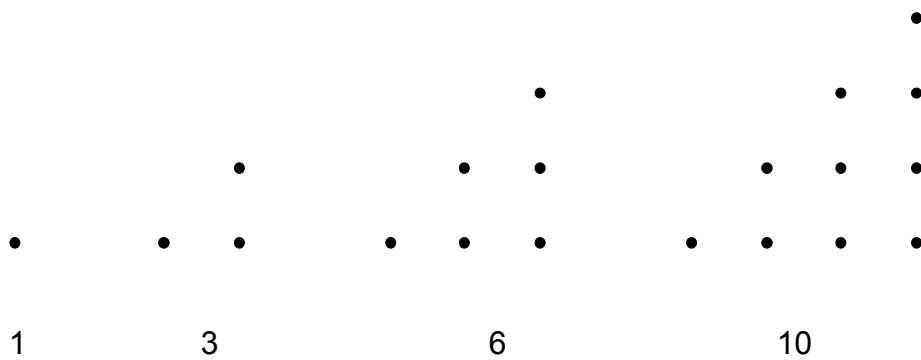
.

o. s. frv.

Nafn sitt hafa þær fengið vegna þess að sérhverri þeirra er hægt að raða upp í ferning:



Þríhyrningstölur eru þær tölur nefndar sem raðast upp í jafnarma rétthyrndan þríhyrning, sbr. þessar myndir:



Verkefni

1. Skrifðu niður reglu fyrir
 - a. ferningstölum
 - b. þríhyrningstölum
2. Eru einhver tengsl milli ferningstalna og þríhyrningstalna?

Vasareiknirinn

Þegar slegið er inn $2 + 3 \cdot 67 =$ á vasareikni, þá gefur hann svarið 203. Það þýðir að hann margfaldar saman 3 og 67 og bætir útkomunni við töluna 2, sem er í samræmi við þær forgangsreglur sem gilda um reikniaðgerðir. En þótt vasareiknirinn viti í hvaða röð eigi að framkvæma aðgerðir sem slegnar eru inn, þá verður það í okkar verkahring að slá hlutina inn þannig að hann fái rétt skilaboð. Ef dæmið að ofan hefur átt að reikna út samanlagt verð á tveimur léttmjólkurlítrum og þremur lítrum af nýmjólk, ef hver mjólkurlítri kostar 67 krónur, þá hefur okkur augljóslega orðið á í messunni. Til þess að reikna það út eru tveir kostir í stöðunni. Annaðhvort að slá inn $2 \cdot 67 + 3 \cdot 67 =$ sem þýðir að verðið á léttmjólkinni er reiknað sér og lagt við verðið á nýmjólkinni. Hinn möguleikinn er að slá inn $(2 + 3) \cdot 67 =$ sem þýðir að fyrst er fjöldi lítranna reiknaður og hann síðan margfaldaður með verði hvers lítra, því sviginn breytir röðinni á aðgerðunum. Vitaskuld fæst sama niðurstaða úr reikningunum, en ástæðan fyrir því er kölluð dreifireglan:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

Þegar við lesum regluna frá vinstri til hægri, þá erum við að *margfalda inn í sviga*. Ef við lesum hana í hina áttina, þá erum við að *taka út fyrir sviga*. Athugaðu að röð þáttanna skiptir ekki máli, reglan er líka oft skrifuð svona:

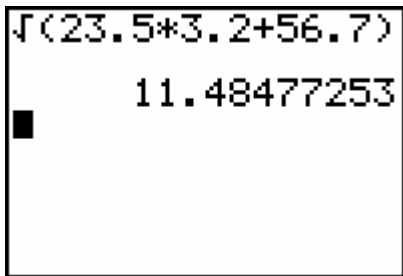
$$c \cdot (a + b) = ca + cb$$

Þar sem vasareiknirinn þekkir forgangs röð aðgerðanna, þá er það ekki margvíslegt að geta farið úrskeiðis þegar við sláum inn uppsett dæmi, því í meginatriðum sláum við inn nákvæmlega það sem stendur á blaðinu. Það er þó tvennt sem þarf að varast - ferningsrót(eða aðrar rætur) og brotastrik:

Ef fleiri en einn liður er undir rótarmerki eða á brotastriki, þá getum við látið sviga utan um liðina.

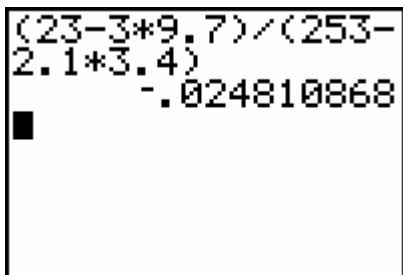
Dæmi:

1. $\sqrt{23,5 \cdot 3,2 + 56,7} =$



√(23.5*3.2+56.7)
11.48477253

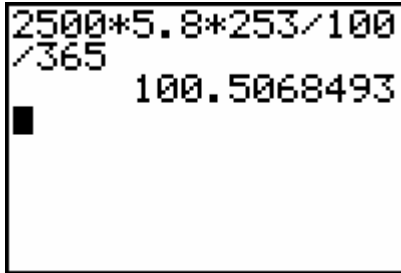
2. $\frac{23 - 3 \cdot 9,7}{253 - 2,1 \cdot 3,4} =$



(23-3*9.7)/(253-
2.1*3.4)
-.024810868

Ef bæði nefnari og teljari brots eru einn liður(engin + eða – merki í brotinu), þá er einfaldast að margfalda saman alla þætti teljarans og deila svo með hverjum þætti nefnarans fyrir sig. Það að tala sé undir striki þýðir að það á að deila með henni, þótt margföldunarmerki sé á milli talnanna í nefnaranum.

$$3. \quad \frac{2500 \cdot 5,8 \cdot 253}{100 \cdot 365} =$$



Reiknið eftirfarandi æfingar á vasareikninn:

$$1. \quad 2,3 \cdot 3,7 - (45 - (23,2 - 2,1)) =$$

$$2. \quad \frac{52,3 - 3,5}{1,5 + 3,2} =$$

$$3. \quad \frac{2 \cdot \frac{3}{5} - 8,73}{12,7 - 15,8} =$$

$$4. \quad \sqrt{(3,2 + 7,9^2) \cdot 5,3} =$$

$$5. \quad \frac{\sqrt{23000 - 460 \cdot 2,5}}{7,6 + 2,3 \cdot 55} =$$

Fleiri möguleikar vasareiknisins

Flestir nútíma vasareiknar búa yfir ýmsum möguleikum sem oft eru ekki nýttir sem skyldi. Einn af þeim er reikningur með almennum brotum, en við þá reikninga er notaður takki með táknu $a\frac{b}{c}$. Hann má nota eins og hér er sýnt:

Dæmi:

$$2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{5} =$$

$$2 \left[a\frac{b}{c} \right] 1 \left[a\frac{b}{c} \right] 4 + 3 \left[a\frac{b}{c} \right] 2 \left[a\frac{b}{c} \right] 5 =$$

Hér gefur vasareiknirinn niðurstöðuna $5\frac{13}{20}$, og ef ýtt er á $\boxed{shift} \left[a\frac{b}{c} \right]$ þá fellir hann

heilu töluna inn í brotið, $\frac{113}{20}$. Ef síðan er ýtt á $\left[a\frac{b}{c} \right]$, þá breytir hann almenna

brotinu í tugabrotið 5,65. Hér á eftir eru æfingar í reikningi með almennum brotum á vasareikni.

Æfingar

Skilið svari í öllum tilvikum í almennu broti.

1. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$

2. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4} - \frac{5}{12} =$

3. $\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} =$

4. $3 \cdot \frac{5}{4} \div \frac{7}{4} =$

5. $\frac{7}{15} \cdot \frac{30}{21} =$

6. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} =$

7. $\frac{3}{4} \div 5 =$

$$8. \quad \frac{2}{7} : \frac{5}{3} =$$

$$9. \quad \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} =$$

$$10. \quad 2 : \frac{1}{9} =$$

$$11. \quad \frac{5 + \frac{2}{3}}{2} =$$

$$12. \quad \frac{4 + \frac{1}{3}}{4 - \frac{1}{3}} =$$

$$13. \quad \frac{5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} =$$

$$14. \quad \frac{\frac{3}{14} - \frac{2}{7}}{5} =$$

$$15. \quad \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{3} - 1} =$$

$$16. \quad -\frac{3}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$17. \quad \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{6}{11}} =$$

Jöfnur og jöfnuhneppi leyst með vasareikni

Vasareiknar geta margir leyst línuleg jöfnuhneppi með tveimur og þremur óþekktum stærðum, og einnig leyst annars stigs og þriðja stigs jöfnur. Þar sem það er ærið misjafnt hvernig unnið er á mismunandi tegundir vasareikna, þá lýsum við ekki innslættinum hér í bókinni. En vasareiknum fylgir alltaf ítarlegur leiðarvísir sem upplagt er að hafa við höndina. En hér á eftir eru æfingar og verkefni sem ætlast er til að séu leyst með vasareikni.

Æfingar

Leystu eftirfarandi jöfnuhneppi með vasareikni:

1. $2x + y = 5$
 $3x - y = 10$
2. $-3x + y = 7$
 $x + 4y = 2$
3. $3x - 4y = 7$
 $x + 2y = 4$
4. $4x + y = -4$
 $x - 2y = 8$
5. $y + 2 = x$
 $x + 2y = -1$
6. $x - y = 3$
 $2x + 3y = 11$
7. $1 + x = y$
 $x + y = 6$
8. $x + y = 10$
 $2x - y = -4$
9. $y = x - 4$
 $x = y - 9$
10. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5$
 $x - y = 5$

11. $4y - 2x = 8$
 $x - 2y = -4$
12. $x + 3y - 4z = -1$
 $2x - y + z = 5$
 $3x - 2y - z = 8$
13. $x + y + 2z = 5$
 $2x - y + z = 7$
 $x + y - 3z = -10$
14. $x + y + z = 1$
 $x - y - z = 3$
 $2x + y + 3z = -1$
 $3x - 2y + 2z = -2$
15. $x + y - 3z = 2$
 $2x - 2y - 4z = 1$
 $x + 3y + 2z = -6$
16. $y - x - 5z = 10$
 $3x - y + z - 2 = 0$

Verkefni

1. Skiptu tölunni 24 í tvo hluta þannig að stærri talan sé þremur lægri en tvöföld minni talan.
2. Finndu þrjár tölur sem hafa summuna 40. Sú stærsta er þreföld sú minnsta, og er líka 3 lægri en tvöföld miðtalan.
3. Hve miklu af 75% og 40% lausn þarf að blanda saman til að fá 6 lítra af 60% lausn?
4. Bílstjóri ekur 160 km vegalengd. Hann ekur á 100 km hraða á klst í dreifbýli en á 40 km hraða á klst í þéttbýli. Ferðin tók 2 klst. Hve langt ók hann í þéttbýli?

Margir vasareiknar leysa einnig 2.stigs og 3.stigs jöfnur. Stuðlar jöfnunnar eru þá slegnir inn í vasareikninn, og hann gefur síðan lausnir jöfnunnar, ef hún hefur lausn á annað borð. Leystu æfingarnar hér fyrir neðan með vasareikni.

Æfingar

1. $-1,5x^2 + 750x - 60000 = 0$
2. $0,1x^2 - 1,6x + 6,3 = 0$
3. $-0,1x^2 + 1,5x - 5 = 0$
4. $-0,2x^2 + 6x = 40$
5. $x^2 + 1,85x - 2,45 = 0$
6. $x^2 - 14,85x + 34,2 = 0$
7. $0,84x^2 - 3,47x = 9,45$
8. $-8,45x^2 + 16,84x + 12,5 = 0$
9. $645,2x - 862,5 = 42,4x^2$
10. $-0,1x^2 + 10x - 50 = 190$

Verkefni

1. Í rétthyrningi er önnur hliðin 6 cm lengri en hin. Flatarmál rétthyrningsins er 112 cm^2 . Hve langar eru hliðarnar?
2. Flatarmál rétthyrnings er 14 cm^2 . Önnur hliðin er 0,5 cm lengri en hin. Finndu lengdir hliðanna í rétthyrningnum.
3. Fyrirtæki framleiðir og selur x einingar af vöru á dag. Hagnaðurinn í krónum er gefinn með fallinu $H(x) = -x^2 + 600x - 50000$.
 - a. Hve margar einingar þarf að selja á dag til að hagnaðurinn verði 30000 kr?
 - b. Hve margar einingar þarf að selja á dag til að hagnaðurinn verði 38000 kr?
 - c. Getur hagnaðurinn orðið 45000 kr?
4. Sú vegalengd sem bíll fer frá því að ökumaðurinn sér hindrun og þar til bíllinn stöðvast kallast stöðvunarvegalengd. Við frekar slæmar aðstæður

getur stöðvunarvegalegdin y í metrum verið $y = 0,3x + 0,012x^2$, þar sem x er hraði í km/klst. Hver er hraðinn ef stöðvunarvegalegdin er

- a. 36 metrar
- b. 72 metrar

5. Lóð er rétthyrningslaga, 20m breið og 40m löng. Ætlunin er að helluleggja hringinn í kringum lóðina, alls 171 m^2 . Hversu breið verður stéttin?

Staðalform og markverðir stafir

Mjög stórar og mjög litlar tölur eru oft skrifaðar með veldi af 10. Þannig sparast skriftir á mörgum núllum og auðveldara er að bera saman stærð talna. Tala er sögð vera á **staðalformi** ef hún er skrifuð þannig að einn stafur sem ekki er 0 er hafður fyrir framan kommu, og margfaldað með veldi á 10 til samræmis við það. Þannig verður þá staðalform eftirfarandi talna:

$$200,7 = 2,007 \cdot 10^2$$

$$0,00465 = 4,65 \cdot 10^{-3}$$

$$297300000 = 2,973 \cdot 10^8$$

Veldisvísirinn á 10 ræður *stærðargráðu* tölunnar. Það er t.d. oft sagt að tala sé af „stærðargráðunni tíu í fjórða“, sem þýðir að veldisvísirinn á 10 sé 4 þegar talan er rituð á staðalformi. Þetta er sami hugsunarháttur og þegar talað er um einhver þúsund (stærðargráðan 10^3) eða einhverjar milljónir (stærðargráðan 10^6). Ef stærðargráða talna er mismunandi, þá er mjög mikill munur á stærð þeirra. Þess má geta í þessu sambandi að svonefndur Richterskvarði sem notaður er til að mæla stærð jarðskjálfta er „stærðargráðukvarði“, í þeirri merkingu að tölur kvarðans eru veldisvísar. Þess vegna er „meiri“ munur á skjálftum af stærð 5 og 6 en á skjálftum af stærð 4 og 5, í sama skilningi og meiri munur er á hundrað þúsund (10^5) og milljón (10^6), heldur en á tíu þúsundum (10^4) og hundrað þúsundum (10^5).

Vasareiknirinn skrifar tölur oft á staðalformi, og því er mikilvægt að geta lesið rétt úr því sem á skjánum stendur. Ef við tökum einfalt dæmi:

$$\frac{0,02}{3700} = ?$$

Sláum þetta inn á vasareikninn, og hann sýnir

```
0.02/3700
5.405405405E-6
■
```

Þetta þýðir að útkoman er $5 \cdot 10^{-6}$, sem væri skrifuð 0,000005 með venjulegum rithætti. Stafurinn „E“ stendur fyrir „Exponent“ sem þýðir veldisvísir (á tölunni 10).

En af hverju er útkoman ekki skrifuð með fleiri stöfum, t. d. $5,4054 \cdot 10^{-6}$? Ástæðan er svonefndir **markverðir stafir**. Fjöldi markverðra stafa í tölu er talinn til og með fyrsta staf sem ekki er 0 til og með aftasta staf sem ekki er 0, sbr. eftirfarandi:

$0,002 = 2 \cdot 10^{-3}$ hefur einn markverðan staf

$0,202 = 2,02 \cdot 10^{-1}$ hefur þrjá markverða stafi

$20200 = 2,02 \cdot 10^4$ hefur þrjá markverða stafi

$5000000 = 5 \cdot 10^6$ hefur einn markverðan staf

$3,005$ hefur fjóra markverða stafi

Þegar 0 er skrifað aftast í tugabroti, þá telst það þó markverður stafur, því annars væri því sleppt. Því hefur

$1,200$ fjóra markverða stafi

$1,2$ tvo markverða stafi

$0,0074100$ fimm markverða stafi.

Reglan er síðan sú að þegar við margföldum og/eða deilum, þá skal útkoman aldrei hafa fleiri markverða stafi en sú af tölunum sem hefur fæsta markverða stafi. Í dæmi okkar hér á undan, þá hefur talan 0,02 einn markverðan staf og 3700 tvo markverða stafi. Niðurstaðan hefur því aðeins einn markverðan staf. Önnur regla gildir um samlagningu og frádrátt, svo við skrifum nú tvær reglur:

REGLA UM SAMLAGNINGU OG FRÁDRÁTT MÆLDRA STÆRÐA:

Þegar tugabrot eru lögð saman eða dregin hvert frá öðru, þá skal útkoman hafa jafnmarga stafi fyrir aftan kommu og sú talan sem fæsta aukastafi hefur.

REGLA UM MARGFÖLDUN OG DEILINGU MÆLDRA STÆRÐA:

Þegar tölur eru margfaldaðar og/eða þeim deilt, þá skal útkoman hafa jafnmarga markverða stafi og sú tala sem hefur fæsta markverða stafi.

Athugaðu vel að önnur reglan talar um *markverða stafi* en hin um tugabrot og *aukastafi*. Við þurfum nefnilega að gæta okkar þegar við leggjum saman tölur að fara ekki að reikna á fáránlegan hátt. Til dæmis að ef 25 manns flytja til Íslands, þá halda Íslendingar áfram að vera um 280.000, vegna þess að talan 280.000 hefur aðeins tvo markverða stafi - hún gefur fjöldann ekki nákvæmar en upp á tugþúsund. Reglan um samlagningu og frádrátt ætti að segja að ***aðeins er lagt saman og dregið frá í þeim sætum þar sem allar tölurnar hafa markverðan staf.***

Dæmi

Það eru $6,7 \cdot 10^{22}$ vetnisatóm í einum rúmsentimetra vatns. Hversu mörg vetnisatóm eru í 16 rúmsentimetrum vatns?

Lausn: $6,7 \cdot 10^{22} \cdot 16 = 1,1 \cdot 10^{24}$ atóm.

Vasareiknirinn gefur niðurstöðuna $1,072 \cdot 10^{24}$, en talan $6,7 \cdot 10^{22}$ hefur einungis tvo markverða stafi, og niðurstaðan á að hafa sama fjölda markverðra stafa.

Æfingar

1. Skrifaðu tölurnar með einum markverðum staf:

- a) 243
- b) 1144
- c) 0,276
- d) 0,031
- e) 25100
- f) 0,00761

2. Bók er 1,7 cm á þykkt án káunnar, og er 284 síður. Hversu þykkt er hvert blað bókarinnar?

3. Hversu marga hljómdiska má fá fyrir eina milljón króna ef meðalverð þeirra er áætlað um 1900-2100 kr?

4. Hvers virði er 5 km hár stafli af tókllum?

Verkefni

1. Auglýsingatafla er 112 cm há og 3,12 m löng. Hversu mörg A4-blöð er hægt að hengja upp á töfluna án þess að þau skarist, ef
 - a) þau eiga öll að standa upp á endann(portrait)?
 - b) þau liggja öll á hliðinni(landscape)?
 - c) þau þurfa ekki öll að liggja eins?A4- blað er $21,0 \times 29,6$ cm.
2. Reynið að áætla með ágiskunum samanlagt verðmæti allra bifreiða sem til eru í landinu. Berið síðan áætlun ykkar saman við áætlanir annarra hópa til þess að fá betri hugmynd um stærðargráðuna.
3. Í umræðu um byggðamál heyrir oft sagt að það svari ekki kostnaði að „halda uppi byggð í hverju krummaskuði“. Áætlið verðmæti dæmigerðs 500 manna sjávarþorps, þ.e. verðmæti þeirra fasteigna sem eftir yrðu ef

þorpið færi í eyði. Hverjir eru helstu gallar og takmarkanir á reikningum af þessu tagi?

4. Salur er 10,5 m langur og 6,7 m breiður. Lofthæð er 2,70 m. Á salnum eru tvennar dyr, 2 m háar og 2,6 m breiðar. Þrír gluggar á öðrum lengri veggnum ná samtals yfir nokkurn veginn fimmtung af flatarmáli hans. Til stendur að mála salinn. Áætlið hversu mikla málningu þarf til að mála loft og veggi hans, ef reiknað er með að hver lítri málningar þeki 9-11 fermetra, og þrjár umferðir þurfi. Áætlið einnig í hvaða umbúðum er ódýrast að kaupa málninguna ef verð mismunandi umbúða er sem hér segir:

1 lítra dós: 1050 kr.

3 lítra dós: 2875 kr.

6 lítra dós: 4893 kr.

10 lítra dós: 7126 kr.

Töflureiknisverkefni: Kennitölur gæludýranna

Hagstofan býr til kennitölu fyrir sérhverja manneskju og öll fyrirtæki. Kennitalan er búin til úr fæðingardeginum, tveimur tölustöfum sem valdir eru af handahófi, einni vartölu sem dregur úr líkum þess að villur séu gerðar í meðförum kennitalna og einum tölustaf sem táknar öldina sem viðkomandi fæddist á.

Fæðingardagurinn ákvarðar sex fyrstu tölustafina í kennitölunni. Til dæmis yrðu sex fyrstu stafirnir í kennitölu manneskju sem er fædd 12. janúar 1960 120160.

Næstu tveir tölustafir eru valdir af handahófi. Þannig er hægt að tryggja að þeir sem fæddir eru sama daginn fái ekki sömu kennitöluna. Hugsum okkur til dæmis að tilviljun hafi ráðið því að einstaklingurinn sem fæddist 12. janúar 1960 fái handahófstölurnar 3 og 3. Þá eru fystu átta tölustafirnar í kennitölu þess einstaklings 120160-33.

Þá er komið að því að reikna vartöluna. Fyrsta skrefið í útreikningnum er að margfalda tölustafina átta, hvern fyrir sig, með tölu á bilinu 2 til 7. Byrjað er á tölustafnum sem er lengst til hægri, hann er margfaldaður með 2, sá næsti með 3 o.s.frv. Fyrir einstaklinginn sem fékk 120160-33 lítur dæmið svona út:

1	2	0	1	6	0	3	3
x	x	x	X	x	x	x	x
3	2	7	6	5	4	3	2
=	=	=	=	=	=	=	=
3	4	0	6	30	0	9	6

Niðurstöðurnar úr margfölduninni eru því næst lagðar saman. Útkoman er 58. Þá er deilt í summuna með 11 og afgangurinn fundinn. $11 \times 5 = 55$, afgangurinn er 3. Þá eru 3 dregnir frá 11, $11 - 3 = 8$. Vartalan verður 8.

Síðasti tölustafurinn verður 9 vegna þess að manneskjan fæddist á 20. öldinni. Þá er kennitalan tilbúin. Hún er 120160-3389.

1. Notið lýsinguna hér að ofan til að reikna vartöluna í ykkar eigin kennitölum. Er hún rétt?

2. Búið til reikniverk í töflureikninum sem býr til kennitölur og nota má til að gefa gæludýrum kennitölur.

Hér eru nokkrar ráðleggingar:

- Notið einn reit fyrir hvern tölustaf í afmælisdeginum.
 - =RAND() setur handahófstölu á bilinu 0 til 1 í reitinn. Hægt er að fá tölu á bilinu 0 til 9 með því að margfalda með 9, þ.e. með því að nota =RAND()*9.
 - Við viljum bara heilar tölur. Hægt er að nota Round fallið til að rúnna handahófstölurnar af. Fallið =ROUND(X;f) þar sem X er tala eða breyta og f er náttúruleg tala eða núll skilar X-inu með f aukastöfum og hækkar upp eða lækkar niður eftir því sem við á. Með því að nota =ROUND(RAND()*9;0) fáum við því handahófstölu á bilinu 0 til 9 með engum aukastöfum.
 - Hægt er að láta töflureikninn klippa alla aukastafi af án þess að hækka upp. Þið þurfið á því að halda þegar vartalan er reiknuð. Til að klippa aukastafi af er fallið TRUNC() notað. =TRUNC(X) skilar heiltöluhlutanum af tölunni X.
 - Hægt er að nota SUM() fallið til að leggja tölur saman. Ef á t.d. að leggja saman tölur í tiltekinni línu, frá A3 til H3 má nota =SUM(A3:H3).
 - Mörgum finnst þægilegt að láta töflureikninn reikna vartöluna í mörgum þrepum, setja summuna í einn reit, deilinguna með 11 í næsta reit, klippa aukastafina af í þriðja reitnum, margfalda útkomuna úr því með 11 í fjórða reitnum, finna afganginn í fimmta reitnum og draga afganginn frá 11 í síðasta reitnum.
3. Notið nú kennitöluvélinu til að gera ykkar eigin kennitölu. Kemur sama tala og Hagstofan úthlutaði ykkur? Hvers vegna ekki?
 4. Notið nú kennitöluvélinu til að búa til kennitölur fyrir gæludýrin ykkar.
 5. Er öruggt að vartalan verði aldrei stærri en 9?
 6. Hvað gerist ef fleiri en 100 fæðast sama daginn?
 7. Hverjar eru líkur þess að tveir einstaklingar sem fæðast sama dag fái sömu kennitölu? Havð skyldi vera gert ef það á sér stað?

8. Fyrir skemmstu var mikið talað um 2000 vandann. Er einhver slíkur vandi innbyggður í aðferðina sem notuð er til að smíða kennitölur?

Töflureiknisverkefni: Vextir

Þegar fólk leggur peningana sína í banka reiknar það með því að fá vexti.

Ástæðan er sú að þegar peningarnir eru komnir í bankann getur bankinn notað þá en ekki eigandinn. Þetta er nákvæmlega eins og þegar einhver leigir íbúð.

Þá getur leigjandinn notað íbúðina en ekki eigandinn og því finnst öllum eðlilegt að leigjandinn borgi leigu. Á sama hátt finnst fólki eðlilegt að bankinn borgi leigu fyrir að fá að nota peningana. (að vísu notar bankinn peningana sjaldnast sjálfur, heldur leigir einhverjum öðrum þá og tekur þá aðeins hærri leigu en hann borgar sjálfur).

Þegar húsnæði er leigt út er ekki sjálfgefið hve há leigan á að vera og það er heldur ekki sjálfgefið hver leigan fyrir peninga á að vera, þótt hjá flestum bönkum sé hún reiknuð á ótrúlega líkan hátt.

Einfaldasta útgáfan er sú að allir sem leggja peninga í bankann fái greidda sömu upphæð þegar þeir leggja inn, segjum 5000 kr. Bankinn borgaði þá fimmpúsundkall í leigu, svona eins og maður borgar vissa upphæð í leigu þegar maður leigir sér keiluskó. Upphæðin er óháð stærð skónna og því hversu lengi maður er að spila.

Hætt er við að viðskiptavinum bankanna þætti þessi aðferð við að ákveða vextina heldur klén vegna þess að allir fá sömu upphæð í leigu, sama hversu mikla peninga þeir leggja í bankann. Það væri eins og ef allar íbúðir væru leigðar út á sama verði, burtséð frá stærðinni. Þegar leiga fyrir íbúð er ákveðin er eðlilegt að taka tillit til þess hvað hún er stór, þ.e. að hve miklum notum hún getur komið og sömuleiðis er eðlilegt að þegar leiga fyrir peninga er ákvörðuð sé tillit tekið til þess um hve mikla peninga er að ræða.

Til viðbótar hlýtur að skipta máli hversu lengi bankinn má hafa peningana. Það kostar meira að leiga bíl í viku en í einn dag og á sama hátt ætti að kosta meira að leigja peninga í eitt ár en eina viku.

Það er því eðlilegt að við ákvörðun á leigu fyrir peninga, þ.e. vöxtum, sé tekið tillit til þess um hve mikla peninga er að ræða og hversu lengi bankinn fær afnot af þeim. Hvaða reikningskúnstir skyldu uppfylla þessi skilyrði?

Til að byrja með er best að hugsa sér að peningarnir séu allir lánaðir bankanum í jafnlangan tíma, til dæmis eitt ár. Þá þarf bara að ákveða hversu há leigan er á ári fyrir tiltekna peningaupphæð. Fyrir tveggja ára leigu fengist tvöföld ársleiga, þreföld fyrir þrjú ár o.s.frv.

En hvað er eðlilegt að greiða í leigu fyrir peninga á ári? Rök voru færð fyrir því að leigan ætti að vera háð upphæðinni, eins og leiga af íbúð er háð stærð íbúðarinnar. Þá þarf bara að ákveða hvernig samband upphæðarinnar og leigunnar er og er ekki sjálfgefið hvernig það samband er ákveðið. Getur það til dæmis ráðist af framboði af leigupeningum og eftirspurn eftir þeim. Ef fáir eiga peninga og marga vantar peninga má ætla að leigan sé há, en ef margir eiga peninga og fáa vantar peninga verður leigan lág. Það er sem sagt samkomulagsatriði milli eiganenda peninganna og bankans hversu stóran hluta af innlagðri upphæð bankinn borgar í leigu.

Þegar samningar hafa tekist við bankann, segjum um að borga 1/20 eða 5% af upphæðinni sem lögð er inn í leigu, þarf eigandinn aðeins að þrauka út árið og þá borgar bankinn leiguna. Þá getur eigandinn annað hvort valið að hirða leiguna fyrir liðið ár og fara að nota peningana sína sjálfur eða að láta peningana liggja áfram í bankanum. Þurfi eigandinn heldur ekki á leigunni að halda getur hann lagt hana líka í bankann og látið bankann borga leigu af henni að ári. Þá bætist aftur við leiga og svo koll af kolli. Þetta kallast vaxtavextir, það þegar vextirnir bætast við innistæðuna og fara sjálfir að bera ávöxt.

En hvernig á að reikna vextina? Hvernig er best að bera sig að því að finna hvað maður á mikið inni í bankanum eftir tiltekinn fjölda ára?

Það er auðvelt að reikna þetta í töflureikni. Best er að hafa einhverskonar tímatal í sérdálki, t.d. þeim fyrsta. Í næsta dálki er hægt að reikna vextina í lok hvers árs og í þriðja dálkinum er hægt að birta inneignina með áföllum vöxtum í lok hvers árs. Þetta er sérlega auðvelt í töflureikni vegna þess að í honum er auðvelt að gefa skipun um að reikna tiltekna stærð á grundvelli annarrar stærðar, þ.e. vextina í árslok á grundvelli þess sem var lagt inn í ársbyrjun.

	A	B	C
1	Tími	Vextir	Inneign
2	upphaf		100
3	1 ár	=C2*0.05	=C2+B3
4	2 ár		
5	3 ár		
6	4 ár		
7	5 ár		
8	6 ár		
9	7 ár		
10	8 ár		
11	9 ár		
12	10 ár		
13			
14			

Á myndinni er sýnt hvernig hægt er að láta töflureikninn reikna vextina fyrir fyrsta árið og innistæðuna í lok þess.

Til að reikna vexti næsta árs og innistæðu í lok þess þarf ekki að gera annað en að afrita formúlurnar sem notaðar voru fyrir fyrsta árið.

Í Microsoft Excel er hægt að gera það með því að velja reitina tvo þar sem formúlurnar eru, færa bendilinn yfir hægra hornið neðst (þá breytist bendillinn í lítinn kross), smella með músinni og halda takkanum niðri og draga hana svo niður eins langt og þarf til að reikna fyrir allan tímann.

Þá ætti taflan að líta svona út:

	A	B	C	D	E	F
1	Tími	Vextir	Inneign			
2	upphaf		100			
3	1 ár	5	105			
4	2 ár	5.25	110.25			
5	3 ár	5.5125	115.7625			
6	4 ár	5.788125	121.5506			
7	5 ár	6.077531	127.6282			
8	6 ár	6.381408	134.0096			
9	7 ár	6.700478	140.71			
10	8 ár	7.035502	147.7455			
11	9 ár	7.387277	155.1328			
12	10 ár	7.756641	162.8895			
13						
14						

Almenn formúla til að reikna

$$S_1 = I \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

S er innistæðan í árslok. I er upphæðin sem lögð er inn. Í sviganum eru tveir

liðir, 1 og $\frac{p}{100}$. 1 vísar til þess að í árslok á eigandinn auðvitað eitt stykki af

upphæðinni sem lögð var inn. Það er staðreynd sem er óháð vaxtaþrósentunni, alveg eins og að sá sem leigir út íbúð á íbúðina sjálfa þegar leigusamningurinn

rennur út, burt séð frá því hvað hann fékk í leigu. $\frac{p}{100}$ gefur vísbendingu um

leiguna, þ.e. vextina. Ef vextirnir eru 5% þá er $P=5$. Leigan fyrir árið er þá $\frac{p}{100}$

sinnum I, svo ef vextirnir eru 5% er leigan fyrir árið 5% af því sem lagt var inn.

En hvað ef peningarnir eru meira en eitt ár í leigu, hvernig verður formúlan þá?

Þá má nota samskonar hugsun og þegar þrautin var leyst í töflureikninum og

segja: Aðferðin er sú sama, en ár tvö er innlögð upphæð upphæðin sem var lögð

inní upphafi ársins á undan að viðbættum vöxtum fyrir það ár. Þá er formúlan fyrri

ár tvö:

$$S_2 = S_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Svo má minnst þess að $S_1 = I \left(1 + \frac{p}{100} \right)$ og stinga því sem er hér á hægri

vogarskálinni inn í staðinn fyrir S_1 í formúlunni fyrir ár tvö.

$$S_2 = I \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = I \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

Með sömu rökum má sýna fram á að innistæðan að loknum nokkrum árum myndi vera (ef árafjöldinn er táknaður með n):

$$S_n = I \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Það blasir við að viðskiptavinur bankans hagnast í áranna rás á því að fá vextina lagða inn í lok hvers árs, í stað þess að þeir séu reiknaðir þegar peningarnir eru teknir út, kannski eftir áratugi. Ástæðan er sú að þegar vöxtunum er bætt við í árslok bera þeir ávöxt að næsta ári loknu. Viðskiptavinurinn fær "vexti, vaxtavexti og vexti líka af þeim," eins og glaðbeittir tröllasparibaukar sungu einu sinni í auglýsingu frá Útvegsbankanum. Þetta veit fólk, og þá vaknar sú spurning hvort banki gæti ekki freistað fólks til að leggja peningana inn hjá sér með því að bjóðast til að reikna vexti og leggja við höfuðstólinn oftar en einu sinni á ári.

Hvernig væri svona auglýsing:

Hjá okkur í Vaxtabankanum eru vextirnir reiknaðir mánaðarlega - hjá okkur byrjar þú að fá vaxtavexti strax eftir mánuð í stað þess að þurfa að bíða í heilt ár!

Hvað myndi þetta kosta fyrir bankann?

Ef bankinn hefur greitt tiltekinn hluta inneignarinnar í vexti fyrir heilt ár hlýtur að vera eðlilegast að reikna með að hann borgi $1/12$ part fyrir mánuðinn.

$$S_{1\text{ mánuður}} = I \left(1 + \frac{p/12}{100} \right)$$

ætti þá að gefa innistæðuna eftir einn mánuð ef vextirnir eru

p prósent,

$$S_{2 \text{ mánuðir}} = I \left(1 + \frac{p/12}{100} \right) \left(1 + \frac{p/12}{100} \right) = I \left(1 + \frac{p/12}{100} \right)^2 \text{ væri innistæðan eftir tvo mánuði og í}$$

$$\text{árslok væri innistæðan } S_{12 \text{ mánuðir}} = I \left(1 + \frac{p/12}{100} \right)^{12}$$

Ef ársvextirnir væru 5% fengist

$$S_{12 \text{ mánuðir}} = I \left(1 + \frac{5/12}{100} \right)^{12} = I \left(1 + \frac{5}{1200} \right)^{12} = I \left(\frac{1205}{1200} \right)^{12} = 1,0512I$$

Þetta þýðir að 5% ársvextir sem reiknaðir eru mánaðarlega jafngilda 5,12% ársvöxtum sem reiknaðir eru árlega. Ekki mikill munur það!

Hvað ef vextirnir væru reiknaðir enn oftari, kannski daglega eða jafnvel á hverri mínútu? Það er einfalt að fága formúluna þannig að hægt verði að nota hana í öllum tilvikum. Í stað þess að nota 12 (fjölda mánuða) í formúlunni er hægt að setja m sem ótilgreindan fjölda tímabila. Leigan fyrir hvert tímabil er þá p/m og innistæðan í árslok væri þá

$$S_{m \text{ tímabili}} = I \left(1 + \frac{p/m}{100} \right)^m$$

$a^n = a \cdot a \cdots a \cdot a$ (n stykki af a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	Reiknireglur fyrir veldi og rætur
---	--

Upprifjun

Lesendur eru hvattir til að nota töflureikninn til að skoða áhrif þess að fjölga tímabilunum.

Æfingar

1. 30.000 kr eru lagðar inn á reikning með 7% ársvöxtum.

a) Hver er innistæðan að loknu einu, tveimur og upp í tíu árum, ef hún liggur óhreyfð allan tímann?

Búðu til töflu sem sýnir vexti og innistæðu í lok hvers árs.

b) Hvað þarf innistæðan að liggja lengi inni til þess að verða 2000.000 kr?

2. 50.000 kr eru lagðar á reikning með 7% ársvöxtum. Á sama tíma eru 70.000 kr lagðar á reikning með 5,5% ársvöxtum. Hvað líður langurtími þar til 50.000 kr innleggið er orðið verðmeira en 70.000 kr innleggið?

3. 1000 kr eru lagðar á reikning með 10% ársvöxtum. Reiknaðu út innistæðuna í árslok ef innistæðan er tekin út og lögð aftur inn

0 sinnum á árinu

1 sinni á árinu

2 sinnum á árinu

3 sinnum á árinu

12 sinnum á árinu

200 sinnum á árinu

4. Útbúið í töflureikni myndrit sem sýnir hvernig innistæða á bankareikningi vex ef lagt er inn einu sinni á ári í 20 ár, aldrei er tekið út á söfnunartímanum og vexir eru lagðir inn í lok hvers árs. Prófið að breyta vaxtaþrósentunni og upphæðinni sem lögð er inn. Hefur það mikil eða lítil áhrif að hækka vexti um 1%?

Til íhugunar

Þegar verðbólga geisar verða peningarnir sífellt verðminni. Eftir því sem tíminn líður er minna hægt að kaupa fyrir sömu fjárhæð. Þyrfti ekki að taka tillit til verðbólgunnar þegar fjallað er um vexti og sparnað? Hvernig væri best að gera það?

Vefslóðir

Bankar og fjármálastofnanir hafa sett reiknivélar af ýmsu tagi á netið. Skoðið vefi banka og fjármálastofnana og notið reiknivélar þeirra til að reikna eftirfarandi:

- Hversu dýran bíl er hægt að kaupa ef maður á 300 000 kr. til að nota í útborgun og treystir sér til að borga 20 000 kr. á mánuði í afborganir af bílaláni. (www.sjova.is www.glitnir.is www.vis.is www.lysing.is www.frjalsi.is o.s.frv.)
- Hversu mikinn lífeyrissparnað á maður við 65 ára aldur ef hann hefur 190 000 kr. í laun á mánuði og leggur í lífeyrissparnað það sem þarf til að fá allt mótframlag launagreiðanda? Hvaða ávöxtun er rétt að miða við í þessu verkefni? (www.landsbanki.is www.bunadarbanki.is www.isb.is)

Töflureiknisverkefni: Vísitala neysluverðs

Taflan hér að neða sýnir hvert vægi einstakra útgjaldaliða er við útreikning á vísitölu neysluverðs.

Búið til töflu í töflureikninum sem getur reiknað nýja vísitölu. Hugsum okkur að í hverjum mánuði sé reiknað meðalverð í hverjum útgjaldaflokk og svo reiknað hve mikið eða lítið útgjöldin hafa hækkað eða lækkað. Þannig má láta vörur í öllum flokkum kosta 100 fyrsta mánuðinn. Hafi tiltekinn flokkur hækkað um 3% í næsta mánuði er verðið á þeim flokki orðið 103 o.s.frv.

Tafla I. Hlutfallsleg skipting útgjalda í vísitölu neysluverðs í mars 1997

		%
01	Matur og drykkjarvörur	17,0
02	Áfengi og tóbak	3,2
03	Föt og skór	6,5
04	Húsnæði, hiti og rafmagn	17,3
05	Húsgögn, heimilisbúnaður o.fl.	5,9
06	Heilsugæsla	3,2
07	Ferðir og flutningar	15,8
08	Póstur og sími	1,3
09	Tómstundir og menning	14,2
10	Menntun	1,0
11	Hótel og veitingastaðir	5,3
12	Ýmsar vörur og þjónusta	9,3
	Alls	100,0

Notið töfluna til að skoða áhrif verðhækkana einstakra flokka á vísitöluna. Hvað hækkar vísitalan mikið ef:

- Föt og skór hækka um 10%?
- Heilsugæsla hækkar um 20%?
- Ferðir og flutningar hækka um 2%?
- Áfengi og tóbak hækkar um 13%?

Bætið við dálki í töfluna og setjið þar áætluð útgjöld ykkar fjölskyldu í hverjum flokki. Reiknið því næst hve þungt hver þáttur (í prósentum) vegur í heildarútgjöldum fjölskyldunnar. Berið niðurstöðuna saman við hlutföllin sem Hagstofan notar til að reikna vísitölu neysluverðs.

Meira um tölur

Talnakerfið sem við notum er **sætiskerfi** með **grunntölu** 10. Það kallast sætiskerfi vegna þess að tölustafirnir standa fyrir mismunandi tölur eftir því hvar (í hvaða sæti) tölustafurinn er í tölunni. Athugum til dæmis töluna 171. Fremsti tölustafurinn táknar töluna 100 en sá aftasti töluna 1. Sæti tölustafsins segir til um hvert veldið á grunntölunni (10) á að vera, en tölustafurinn sjálfur hversu oft þetta veldi kemur fyrir í tölunni. Þannig er aftasta sætið einingasæti (10^0) tölunnar, þar fyrir framan er tugasætið (10^1), síðan hundraðasætið (10^2), o.s.frv.

Skrifum nokkrar tölur með grunntölu 10:

$$171 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$2063 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$30201 = 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

Í tölvu er flókið kerfi rafrása. Í hverri rás er ýmist straumur eða ekki. Þar sem sætiskerfi með grunntölu 2, kallað tvíundarkerfi, hefur þann eiginleika að nota aðeins tvo tölustafi, 0 og 1, þá er hægt að lýsa því sem gerist í tölvunni með tölum rituðum í tvíundarkerfi. Þá táknar tölustafurinn 1 að straumur sé á viðkomandi rás, en 0 að ekki fari straumur um rásina.

Talan 10001101 í tvíundarkerfi er talan

$$10001101 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

sem í tugakerfi er talan $2^7 + 2^3 + 2^2 + 1 = 128 + 8 + 4 + 1 = 141$.

Til er leikur, eða „galdur“ sem byggist á tvíundarkerfi. Í honum eru notuð þessi talnaspjöld:

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

„Galdramaðurinn“ fer út á meðan hinir velja eina af tölunum 1, 2, 3, . . . 30, 31. Þegar hann kemur inn þá er honum sagt á hvaða spjöldum talan er, og þá getur hann sagt hvaða tala var valin.

Hægt er að nota eftirfarandi töflu til þess að breyta rithætti talna úr tugakerfi yfir í tvíundarkerfi:

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

n	2^n
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192

Þegar verið er að breyta tölum milli talnakerfa er grunntalan oft sýnd á þennan hátt:

$$11_2 = 3_{10}$$

Þetta þýðir að talan sem er rituð 11 í tvíundarkerfi er talan 3 í tugakerfi

$$(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3)$$

Skrifum nú töluna 6572_{10} í tvíundarkerfi:

1. Finnum stærstu töluna í töflunni sem er minni eða jöfn 6572. Það er $4096 = 2^{12}$.

2. Afgangurinn er $6572 - 4096 = 2476$.

3. Finnum svo stærstu töluna í töflunni sem er minni eða jöfn 2476. Það er $2048 = 2^{11}$.
4. Afgangurinn er $2476 - 2048 = 428$.
5. Finnum stærstu tölu í töflunni sem er minni eða jöfn 428. Það er $256 = 2^8$.
6. Afgangurinn er $428 - 256 = 172$.
7. Finnum stærstu tölu í töflunni sem er minni eða jöfn 172. Það er $128 = 2^7$.
8. Afgangurinn er $172 - 128 = 44$.
9. Finnum stærstu tölu í töflunni sem er minni eða jöfn 44. Það er $32 = 2^5$.
10. Afgangurinn er $44 - 32 = 12$.
11. Finnum stærstu tölu í töflunni sem er minni eða jöfn 12. Það er $8 = 2^3$.
12. Afgangurinn er $12 - 8 = 4$.
13. Finnum stærstu tölu í töflunni sem er minni eða jöfn 4. Það er $4 = 2^2$.
14. Afgangurinn er 0.

Talan 6572 í tugakerfi er því

$$\begin{aligned}
 &6572_{10} \\
 &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
 &= 1100110101100_2
 \end{aligned}$$

Æfingar

1. Breyttu eftirfarandi tölum úr tugakerfi í tvíundarkerfi:
3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 31, 32, 33, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.
2. Breyttu eftirfarandi tölum úr tvíundarkerfi í tugakerfi:
101, 111, 1101, 101101, 1111, 10000, 10001, 10011, 11001, 10101010, 10010010, 111000110011, 111000000111001.

Verkefni

Athugið galdurinn sem er lýst í textanum. Breytið tölunum á spjöldunum yfir í tvíundarkerfi og finnið út hvernig tölurnar eru flokkaðar niður á spjöldin.

Hvernig stendur á því að galdurinn virkar? Er hægt að finna allar tölur frá 1 upp í 31? Koma aldrei tvær tölur til greina?

Búið til samskonar galdur með sex spjöldum, þar sem koma fyrir tölurnar frá 1 upp í 63.

Töflureiknisverkefni: Farsímapjónusta

Fjögur fyrirtæki bjóða farsímapjónustu. Hér að neðan eru upplýsingar um verð þjónustunnar

	Stofngjald	Fastagjald á mánuði	Mínútugjald
Símafyrirtæki A	4000 kr.	1100 kr.	19,5 kr.
Símafyrirtæki B	0 kr.	0 kr.	25 kr
Símafyrirtæki C	-10000 kr*.	600 kr.	27 kr
Símafyrirtæki D	2500 kr.	700 kr.	21 kr

* Fyrirtækið innheimtir ekkert stofngjald og niðurgreiðir kaup símtækis um 10000 kr.

Notið töflureikninn til að reikna hversu mikið er greitt fyrir farsímapjónustuna fyrsta árið hjá fyrirtækjunum fjórum fyrir notkun á bilinu 0-400 mínútur á mánuði.

Notið töflureikninn til að búa til graf sem sýnir verðið hjá fyrirtækjunum fjórum.

Hvaða fyrirtæki væri hagstæðast fyrir notanda sem talar í 20 mínútur á mánuði?

Hvaða fyrirtæki væri hagstæðast fyrir notanda sem talar í 170 mínútur á mánuði?

Hvaða fyrirtæki væri hagstæðast fyrir notanda sem talar í 250 mínútur á mánuði?

Hvaða fyrirtæki væri hagstæðast fyrir notanda sem talar í 400 mínútur á mánuði?

Simplex og línuleg bestun

Línuleg bestun (linear programming) er samheiti yfir aðferðir til að finna hagstæðustu lausn vandamála sem eru háð línulegum skilyrðum, þ.e. hægt er að lýsa þeim með línulegum jöfnum eða ójöfnum. Simplex aðferðin tilheyrir þessum flokki, þ.e. hún er aðferð til að leysa línuleg bestunarvandamál. Í sem stystu máli virkar Simplex aðferðin svona:

1. Skilyrðum er lýst með ójöfnum.
2. Graf ójafnanna er teiknað og afmarkast þá svæði sem inniheldur allar mögulegar lausnir.
3. Byrjað er í einhverjum hornpunkti svæðisins sem inniheldur allar mögulegar lausnir. Þá er athugað hvort lausnin verði hagstæðari með því að ferðast eftir útlínunum svæðisins í átt að einhverjum öðrum hornpunkti. Sé svo er farið í þann punkt sem gefur mestu hagræðingu, annars er besta lausnin fundin.
4. Skref 3 endurtekið.

Gott er að skoða þetta með einföldu dæmi:

Fyrirtæki framleiðir bæði fiskbúðing og fiskibollur. Hagnaður af hverri dós af fiskbúðingi er 8 kr. og hagnaður af hverri dós af fiskibollum er 12 kr. Fyrirtækið þarf að ákveða hversu mikið á að framleiða af hvoru fyrir sig til að hagnaður verði sem mestur.

Í hverja dós af fiskbúðingi þarf 4 einingar af mjöli, 3 einingar af nýjum fiski og 6 einingar af fiskafskurði.

Í hverja dós af fiskibollum þarf 4 einingar af mjöli, 6 einingar af nýjum fiski og 2 einingar af fiskafskurði. (Nú veit ég ekki hvernig fiskibollur og fiskbúðingur eru búin til, en látum þetta gilda í dæminu).

Ímyndum okkur líka að á lagernum séu í dag til 1400 einingar af mjölinu, 1800 einingar af nýjum fiski og 1800 einingar af fiskafskurði. Þá þarf að ákveða hvað á að framleiða í dag til að hagnaður dagsins verði sem mestur.

Látum A vera fjölda dósa af bollum og B vera fjölda dósa af búðingi. Þá gilda eftirfarandi ójöfnur:

$4A + 4B \leq 1400$ (af því að það eru ekki til nema 1400 einingar af mjöli)

$6A + 3B \leq 1800$ (af því að það eru ekki til nema 1800 einingar af ferskum fiski)

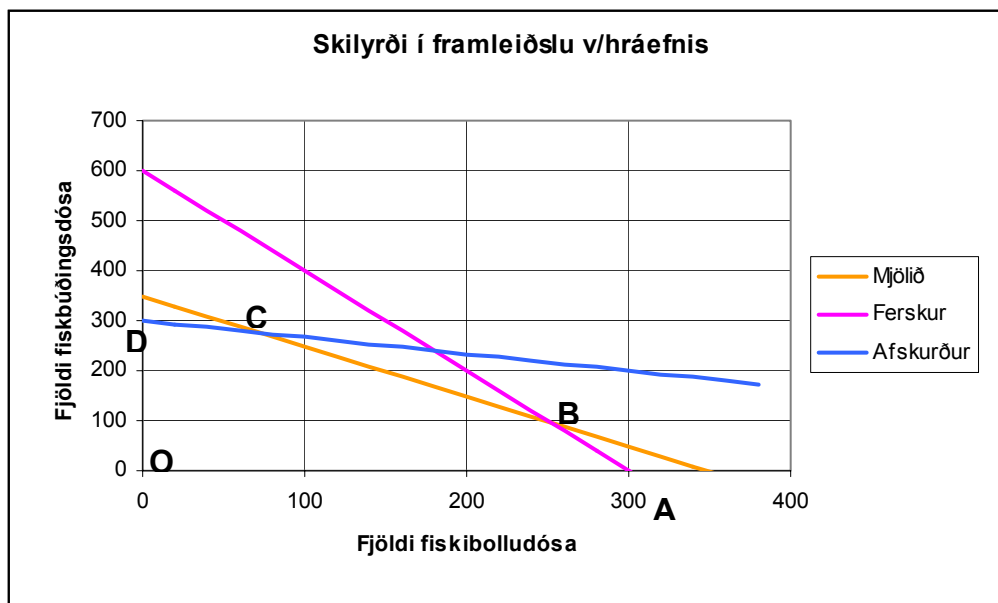
$2A + 6B \leq 1800$ (af því að það eru ekki til nema 1800 einingar af fiskafskurði)

Auk þess vitum við að hagnaðurinn er

$P = 12A + 8B$, þ.e. 12 kr. fyrir hverja dós af bollum og 8 kr. fyrir hverja dós af búðingi.

Nú viljum við gera P sem stærst innan þeirra marka sem ójöfnurnar setja okkur.

Aðferðin er sú að teikna gröf ójafnanna.



Einu mögulegu lausnirnar eru á svæðinu sem er undir öllum þremur línunum, þ.e. svæðið sem hefur hornpunkta A, B, C, D og O. Simplex aðferðin segir okkur að við þurfum ekki að reikna hagnaðinn fyrir sérhvern punkt á svæðinu, heldur nægi okkur að skoða hornpunktana (sem merktir eru A, B, C, og D. Strangt tiltekið þurfum við að skoða 0 líka, en það gefur augaleið að hann verður ekki hagstæður í þessu tilviki). Og það sem meira er, það skiptir ekki máli hvaða punktur er skoðaður fyrst: veljum bara einhvern punkt, athugum hvort P hækki við færslu eftir útlínunum svæðisins, ef svo er þá flytjum við okkur í þann punkt sem gefur

mesta hækkun hagnaðar, þar til við endum í punkti sem er þannig að færsla eftir útlínum svæðisins frá punktinum er óhagstæð. Þá er besta lausn fundin sem í þessu tilviki er 250 dósir af fiskibollum og 100 dósir af fiskbúðingi þetta gæti til dæmis farið þannig fram:

Erum í pkt.	Færsla til O	Færsla til A	Færsla til B	Færsla til C	Færsla til D
O	X	hagst.	X	X	hagst.
A	óhagst.	X	hagst.	X	X
B	X	óhagst	X	óhagst.	X

eða:

Erum í pkt.	Færsla til O	Færsla til A	Færsla til B	Færsla til C	Færsla til D
D	óhagst	X	X	hagst.	X
C	X	X	hagst.	X	óhagst.
B	X	óhagst	X	óhagst.	X

Við endum sem sagt í punktinum B burtséð frá því í hvaða punkti var byrjað.

Verkefni

1. 90 nemendur úr þremur skólum, A, B og C í Reykjavík eiga að taka þátt í íþróttakeppni í Kópavogi, 30 úr skóla A, 25 úr skóla B og 35 úr skóla C. Þeir eru fluttir í tvo skóla, R og S í Kópavogi, 50 nemendur í skóla R og 40 í skóla S. Flutningskostnaður á nemanda er 25 kr. á km, og fjarlægð milli skólanna er gefinn í eftirfarandi töflu:

	A	B	C
R	12 km	10 km	10 km
S	14 km	10 km	14 km

Látum x vera fjölda nemenda frá skóla A sem fara í skóla R, og y vera fjölda nemenda frá skóla B sem fara í skóla R. Ætlunin er að finna tölurnar x og y þannig að flutningskostnaður verði í lágmarki, og einnig lægsta hugsanlega flutningskostnað. Setjið upp ójöfnur:

1. Á hvaða bili er x ?
2. Á hvaða bili er y ?
3. Á hvaða bili er $x+y$?

Teiknið ójöfnurnar inn í hnitakerfi og reiknið flutningskostnaðinn í hornpunktunum.

2. Byggingavöruverslun hefur 60 rúmmetra pláss undir tvær gerðir af loftplötum, A og B. Kassi af A er 3 rúmmetrar, en kassi af B er 2 rúmmetrar. Búðareigandinn ætlar að panta plötur fyrir 45000 kr. Kassi af A kostar í heildsölu 1500 kr en kassi af B kostar 3000 kr. Hagnaður hans er 500 kr af hverjum kassa af A en 600 kr af hverjum kassa af B. Hvað er skynsamlegt að panta mikið af hvorri tegund, ef ætlunin er að græða sem mest á pöntuninni?

Setjið upp ójöfnur fyrir

- a) geymsluplássið
- b) heildsöluverð pöntunarinnar

Teiknið þær í hnitakerfi og reiknið hagnaðinn í hornpunktunum.

Svör við æfingum

Bls.6:

1.

x	$f(x) = 2x - 1$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

2.

x	$f(x) = x^3 - x^2$
-2	-12
-1	-2
0	0
1	0
2	4

3.

x	$g(x) = 3x^2 + 5x$
-2	2
-1	-2
0	0
1	8
2	22

4.

x	$g(x) = \sqrt{3 + x^2}$
-2	2,646
-1	2
0	1,732
1	2
2	2,646

5.

x	$h(x) = \frac{2}{x-1}$
-2	-0,667
-1	-1
0	-2
1	ekki til
2	2

6.

x	$h(x) = \frac{x+1}{2-x}$
-2	-0,25
-1	0
0	0,5
1	1
2	ekki til

Bls. 7:

1. $9(x-2)(x+2)$
2. Óþáttanleg margliða
3. $x(x-8)$
4. $2(x-3)(x+3)$
5. $3(2-5x)(2+5x)$
6. $(x+7)(x-2)$
7. $2(x+3)(x+2)$
8. $(x-7)(x+6)$
9. $3(x-1)^2$
10. $2(x-3)^2$

11. $(x+3)(x+5)$
12. $(x+2)(x+4)$
13. $(x-2)(x+3)$
14. $(x-2)(x-6)$
15. $(x-2)(x+6)$
16. $(x-3)(x+5)$
17. $(x+4)(x-5)$
18. $(x-3)(x+8)$
19. $(x+2)(x+12)$
20. $2(x+3)(x+5)$
21. $(x+4)(x+5)$
22. $(x+3)(x-6)$
23. $(x+3)(x+9)$
24. $(x+3)(x-1)$
25. $(x+8)(x-2)$

Bls. 9:

1. $L = \{-3, 3\}$
2. $L = \{-5, 5\}$
3. $L = \{-3, 3\}$
4. $L = \{-5, 0\}$
5. $L = \{-5, -3\}$
6. $L = \{-4, -2\}$
7. $L = \{-5, 3\}$
8. $L = \{-4, 5\}$
9. $L = \emptyset$ (engin lausn)
10. $L = \{-5, -4\}$
11. $L = \left\{ -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$
12. $L = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$
13. $L = \{2, 3\}$
14. $L = \{2, 6\}$
15. $L = \{-5, -3\}$
16. $L = \{-5, -4\}$

17. $L = \{-3, 6\}$
18. $L = \{-9, -3\}$
19. $L = \emptyset$ (engin lausn)
20. $L = \{-1, 24 ; 3, 24\}$
21. $L = \{1\}$
22. $L = \emptyset$ (engin lausn)

Bls. 12-13:

1. Samhverfuás: $x = 0$
 Botnpunktur: $(0, 1)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, 1)$
 Skpkt. v. x -ás: enginn
2. Samhverfuás: $x = \frac{1}{2}$
 Topppunktur: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, 0)$
 Skpkt. v. x -ás: $(0, 0)$ og $(1, 0)$
3. Samhverfuás: $x = -2$
 Botnpunktur: $(-2, -1)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, 3)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-3, 0)$ og $(-1, 0)$
4. Samhverfuás: $x = 0$
 Botnpunktur: $(0, -6)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, -6)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-1, 73 ; 0)$ og $(1, 73 ; 0)$
5. Samhverfuás: $x = 2$
 Topppunktur: $(2, 5)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, 1)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-0, 24 ; 0)$ og $(4, 24 ; 0)$
6. Samhverfuás: $x = 0$
 Topppunktur: $(0, 4)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0, 4)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-2, 0)$ og $(2, 0)$
7. Samhverfuás: $x = 0$

- Toppunktur: $(0,5)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0,5)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-2,24 ; 0)$ og $(2,24 ; 0)$
8. Samhverfuás: $x = 1$
 Botnpunktur: $(1,-1)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0,0)$
 Skpkt. v. x -ás: $(0,0)$ og $(2,0)$
9. Samhverfuás: $x = -0,5$
 Botnpunktur: $(-0,5 ; -6,25)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0,-6)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-3,0)$ og $(2,0)$
10. Samhverfuás: $x = 1$
 Botnpunktur: $(1 ; -4,5)$
 Skpkt. v. y -ás: $(0,-4)$
 Skpkt. v. x -ás: $(-2,0)$ og $(4,0)$
11. Stærsta gildi er 144
12. Stærsta gildi er 60000
13. Stærsta gildi er 50
14. Minnsta gildi er -675
15. Minnsta gildi er -620
16. Stærsta gildi er 10250

Bls. 26-7:

1. a) $\emptyset, \{1\}$
 b) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$
 c) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$
2. a) $A \cup B = \{3,4,7,8,10\}$ $A \cap B = \{4,10\}$
 b) $A \cup B = \{0,3,5,7,8,11,13\}$ $A \cap B = \emptyset$
 c) $A \cup B = \{3,5,6,15\}$ $A \cap B = \{3,6,15\}$
 d) $A \cup B = A \cap B = \{7,8,20\}$ $A \cap B = \{7,8,20\}$

3. a) $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
 b) $\{3, 8\}$
 c) $\{2, 5, 9\}$
 d) $\{4, 7\}$
 e) $\{2, 3, 5, 8, 9\}$
 f) $\{3, 4, 7, 8\}$
4. a) A og B eru sundurlæg, C og D eru sundurlæg.
 b) Nei.
 c) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$
 d) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$
 e) $\{2\}$
 f) $\{1, 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49\}$
 g) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$
 h) $\emptyset$
 i) $\emptyset$
 j) $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 46, 48, 50\}$
 k)
 $\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50\}$

5. 85 stök.

6. 15 hundar.

Verkefni:

1. 2^n .
 2. 95 stök.

Bls. 28-9

1. 8 vegu.
 2. 144 bíla.
 3. $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 12 = 1497600$ vegu
 4. $3^4 = 81$ möguleika
 5. $4^3 = 64$ möguleika
 6. 42 vegu
 7. 125 vegu
 8. 5 strik eða punkta alls
 9. 3^{13}
 10. 2^{13}
 11. 3360
 12. 32 merki

Bls. 31-2:

1. 2401 tölu
2. 840 tölur
3. 52 þrennur
4. 604800 vegu
5. 9000
6. 38760 vegu
7. 166320 vegu
8. 120 vegu
9. 15 vegu
10. a) 120
b) 720
11. 220 mismunandi pizzur
12. 5040 vegu
13. 120 vegu
14. 120 vegu
15. a) 6
b) 2
c) 4
16. 120 vegu

Verkefni:

1. a) 24 vegu
b) 12 vegu
c) 6 vegu
d) 10 vegu
2. 66 möguleikar

Bls.36-7:

1. $\langle 0, 7 \rangle$, opið bil
2. $[0, 10)$, hálfopið bil
3. $[0, 10]$, lokað bil
4. $[20, \rightarrow)$, hálfopið bil
5. $\langle -5, 10 \rangle$, opið bil
6. $[\leftarrow, \pi)$, hálfopið bil
7. Mengi rauntalna stærri eða jafnar -1 og minni eða jafnar 4
8. Mengi rauntalna stærri en 0 og minni eða jafnar $\frac{3}{5}$
9. Mengi rauntalna stærri en 0
10. Mengi rauntalna stærri eða jafnar $\sqrt{2}$ og minni en π
11. Mengi rauntalna minni en 100
12. Mengi rauntalna stærri en 100
13. Mengi rauntalna

Bls. 40:

$$1460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 73$$

$$1461 = 3 \cdot 487$$

$$1462 = 2 \cdot 17 \cdot 43$$

$$1463 = 7 \cdot 11 \cdot 19$$

$$1464 = 2^3 \cdot 3 \cdot 61$$

$$1465 = 5 \cdot 293$$

$$1466 = 2 \cdot 733$$

$$1467 = 3^2 \cdot 163$$

$$1468 = 2^2 \cdot 367$$

$$1469 = 13 \cdot 113$$

$$1470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Bls.46-7:

1. $1\frac{1}{2}$

2. $7\frac{1}{2}$

3. $\frac{2}{29}$

4. $2\frac{1}{7}$

5. $\frac{2}{3}$

6. $\frac{1}{12}$

7. $\frac{3}{20}$

8. $\frac{6}{35}$

9. $\frac{1}{2}$

10. 18

11. $2\frac{5}{6}$

12. $1\frac{2}{11}$

13. 20

14. $\frac{-1}{70}$

15. $\frac{-51}{80}$

16. $2\frac{1}{6}$

17. $1\frac{1}{10}$

Bls.48-9:

1. $x = 3$ og $y = 1$

2. $x = -2$ og $y = 1$

3. $x = 3$ og $y = \frac{1}{2}$

4. $x = 0$ og $y = -4$

5. $x = 1$ og $y = -1$

6. $x = 4$ og $y = 1$

7. $x = \frac{5}{2}$ og $y = \frac{7}{2}$

8. $x = 2$ og $y = 8$

9. Engin lausn

10. $x = 8$ og $y = 3$

11. Óendanlega margar lausnir

12. $x = 2$, $y = -1$ og $z = 0$

13. $x = 1$, $y = -2$ og $z = 3$

14. $x = 2$, $y = 1$ og $z = -2$

15. $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ og $z = -\frac{1}{2}$

16. $x = 1,2$ og $y = -0,8$ og $z = -2,4$

Verkefni:

1. 15 og 9

2. 21, 12 og 7

3. 3,43 lítrar af 75% lausn og 2,57 lítrar af 40% lausn

4. 26,7 km í þéttbýli

Bls. 50:

1. $L = \{100,400\}$

2. $L = \{7,9\}$

3. $L = \{5,10\}$

4. $L = \{10,20\}$

5. $L = \{-2,74;0,89\}$

6. $L = \{2,85;12\}$

7. $L = \{-1,87;6\}$
8. $L = \{-0,58;2,57\}$
9. $L = \{1,48;13,74\}$
10. $L = \{40,60\}$

Verkefni:

1. 8 og 14 cm
2. 3,5 og 4 cm
3. a) 200 eða 400 einingar
b) 255 eða 345 einingar
4. a) 44 km/klst
b) 66 km/klst
5. 1,5 metrar

Bls. 55:

1. a) 200
b) 1000
c) 0,3
d) 0,03
e) 30000
f) 0,008
2. 0,060 mm
3. ca. 500 diska
4. 31-36 milljónir

Bls. 72:

1. 11, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 11111, 100000, 100001, 111100, 111101, 111110, 111111, 1000000, 1000001, 1000010.
2. 5, 7, 13, 45, 15, 16, 17, 19, 25, 170, 146, 3635, 28729.