NÁMSGAGNASTOFNUN 07490

GEISLI 3

Kennslu-leiðbeiningar

Uppfært 22. september 2006

Efnisyfirlit

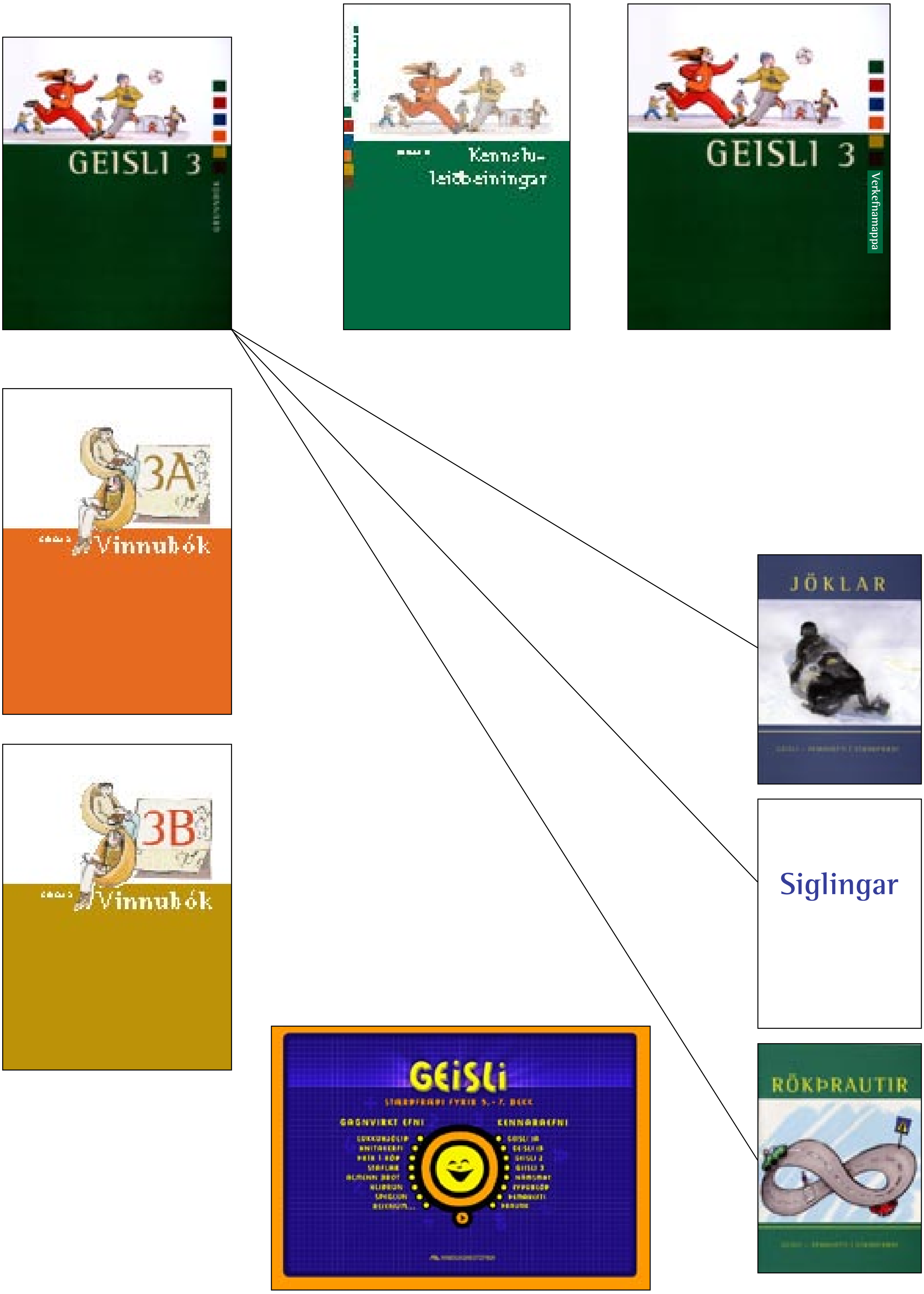
Geisli 3 – kennsluleiðbeiningar

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2004
Námsgagnastofnun

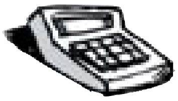
Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Yfirlit yfir námsefni 7. bekkjar



Tákn

Í nemendaefni eru eftirfarandi tákn noturð.



Þú skalt nota vasareikni við lausn verkefna.

Þú skalt vinna verkefnið með öðrum.

Þú skalt nota töflureikni við lausn verkefna.

Reglur og fróðleikur um stærðfræðina.

Um námsefnið

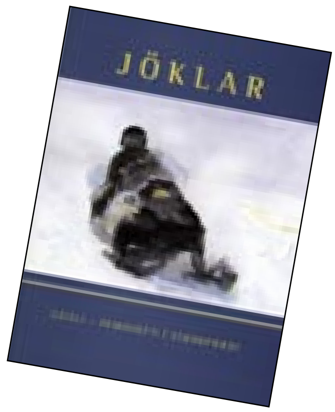
Námsefnið *Geisli 3* er samið með hliðsjón af *Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði*. Einkum er stuðst við markmið fyrir miðstig og lokamarkmið fyrir 7. bekk. Námsefnið er sjálfstætt framhald af námsefninu *Geisli 1* og *2* og er miðað við að nemendur þekki það námsefni og hafi tileinkað sér þau vinnubrögð sem þar er beitt.

Grunnnámsefni 7. bekkjar er samsett af einni grunnbók, tveimur vinnubókum, þremur þemaheftum, verkefnamöppu og kennsluleiðbeiningum sem finna má á heimasíðu Námsgagnastofnunar (http://www.nams.is/geisli/geisli.htm). Auk þess er ýmiss konar efni á vef Námsgagnastofnunar og til eru margs konar kennsluforrit og annað ítarefni sem nota má með grunnefninu.

Í grunnbókinni eru 19 kaflar ýmist um einstaka efnisþætti eða viðfangsefni daglegs lífs. Aftast í grunnbókinni er hugtakalisti. Grunnbókin er fjölnota og er að jafnaði gert ráð fyrir að nemendur skrái lausnir í vinnuhefti. Grunnbókinni fylgja tvær vinnubækur. Kaflar í vinnubókum tengjast köflum í grunnbók og er gert ráð fyrir að nemendur fáist við viðfangsefnin í þessum bókum samhliða.

Í kennsluleiðbeiningum er almennur inngangur um stærðfræðinám á miðstigi. Meginefni kennsluleiðbeininganna er umfjöllun um og kennsluhugmyndir fyrir hvern kafla í grunnbók. Þar er fjallað um megininntak og áherslur í viðkomandi kafla og á hvaða hugmyndum efnisval og framsetning eru byggð. Rétt er að ítreka að eingöngu er um hugmyndir að ræða en nauðsynlegt er að hver kennari byggi upp kennsluferli og aðlagi hugmyndir að sínum nemendahóp og aðstæðum hverju sinni.

Á *Geislavefnum* er að finna sérstaka umfjöllun um námsmat. Hugmyndir að námsmatsverkefnum er að finna í verkefnamöppu. Auk þess eru í möppunni ýmiss konar verkefni. Þar eru m.a. hugmyndir að verklegum viðfangsefnum og spilum. Á heimasíðunni eru einnig margs konar eyðublöð sem nýtast við lausnir verkefna og yfirlit yfir námsgögn sem nauðsynlegt er að skólar hafi aðgang að.



Með *Geisla 3* munu fylgja þrjú þemahefti. Þau heita: *Jöklar*, *Rökfræði* og *Siglingar*. Þau má velja að nota hvenær vetrar sem er. Verkefnin þar eru óháð yfirferð á *Geisla 3.* Við lausn viðfangsefna í þemaheftunum gefst nemendum tækifæri til að kynnast nýjum þáttum í stærðfræði og beita stærðfræðiþekkingu sinni á ný svið. Verkefnin í heftunum eru miðuð við stærðfræði en auðvelt er að víkka þau svo að þau fleiri svið og henta þau því vel við samþættingu námsgreina. Kennsluleiðbeiningar með hverju þemahefti verða gefnar út á *Geislavefnum*.

Inngangur

Við lok miðstigs er munur á líkamlegum þroska nemenda oft áberandi. Mikill munur er líka á andlegum þroska og viðhorfum nemenda. Í stærðfræðikennslu þarf að bjóða upp á ögrandi og fjölbreytt viðfangsefni fyrir alla nemendur. Á hverju ári þurfa þeir að kynnast nýjum atriðum og þáttum í stærðfræði. Í *Geisla 3* koma nýir þættir í algebru og rökfræði auk þess sem nemendur þurfa að tengja saman þekkingu sína á efnisþáttum stærðfræðinnar og beita henni á viðfangsefni. Nemendur þurfa að kynnast nýjum möguleikum við lausnir og gera þarf auknar kröfur um röksemdafærslu. Efla þarf sjálfstæði þeirra bæði í hugsun og verki. Þeir þurfa að æfa sig í að færa rök fyrir máli sínu og tala saman um það sem þeir eru að brjóta heilann um og reyna að efla skilning sinn á. Með auknum aldri og þroska er nauðsynlegt að meðvitund um eigin þekkingu og skilning eflist. Ýmsa þætti stærðfræðinnar hafa nemendur fengist við lengi og í *Geisla 3* eru viðfangsefni sem hafa það markmið að styðja nemendur í að draga saman og setja fram meginatriði t.d. hvað varðar reikniaðgerðir, formskoðun og mælingar.

Viðhorf nemenda til stærðfræði og stærðfræðináms hafa mikil áhrif á hvernig þeir nálgast viðfangsefni og á hvern hátt þeir taka þátt í kennslu. Nauðsynlegt er að ræða um viðhorf nemenda til stærðfræði og að þeir velti fyrir sér hvernig þeir hugsa um hana. Viðhorf nemenda mótast í gegnum margs konar áhrif í samfélaginu bæði í skólanum og utan hans. Hugmyndir um stærðfræði breytast hægt samanber hugmyndir um að stærðfræði sé fyrst og fremst blaðreikningur sem enn þá er ríkjandi í samfélaginu þó að fæstir reikni mikið á blaði. Þær hafa áhrif á hvað nemendum finnst mikilvægt og hvað forráðamenn þeirra leggja áherslu á. Viðhorf til kennsluhátta hafa áhrif á væntingar. Lífseig hugmynd um hlutverk kennarans er t.d. að hann útskýri hvernig fara á að við að leysa dæmi, viti réttu svörin og geti leiðbeint hverjum og einum. Hugmyndin um kennarann sem leiðbeinanda og verkstjóra þar sem nemendur glíma sjálfir við verkefni og leita eigin leiða er mörgum ókunn. Væntingarnar verða því um að kennari setji fyrir dæmabálka og það að standa sig vel felist í að reikna þá hratt og rétt. Hugmyndir um viðfangsefni eru líka oft takmarkaðar við að um sé að ræða dæmi sem taki innan við tvær mínútur að leysa. Allar þessar hugmyndir hafa mikil áhrif á hvernig nemendur takast á við námið og að hverju þeir keppa. Í *Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði* er sett fram sú hugmyndafræði sem skólunum er ætlað að vinna eftir. Þar er rætt um að nemendur þurfi sjálfir að leita leiða við lausn verkefna og áhersla er lögð á að nemendur byggi upp heildstæða þekkingu á völdum þáttum stærðfræðinnar.

Áhugavert er að skoða hvernig notkun stærðfræði í samfélaginu hefur þróast og breyst. Með aukinni tækniþróun hefur gildi stærðfræði við hönnun og uppbyggingu bæði kerfa og mannvirkja styrkst. Gott getur verið að nemendur ræði við fullorðið fólk í kringum sig um hvaða stærðfræði það notar í störfum sínum og hvernig það beitir henni. Einnig má fá starfsfólk úr ýmsum starfsstéttum í heimsókn eða fara í vettvangsferð og fá fyrirlestur um notkun stærðfræði á vinnustöðum. Margir vinnustaðir

koma til greina og má þar nefna: sveitastjórnarskrifstofur, verksmiðjur, veitustofnanir, sjúkrahús, slökkviliðsstöðvar, frystihús, togara, verkstæði og hárgreiðslustofur. Á vinnustöðum hafa verið skipulögð vinnuferli þar sem byggt er á rökfræði, lesa þarf úr bókhaldi og byggja upp hvernig á að færa það, gera þarf fjárhagsáætlanir, skipuleggja rými, áætla viðhald og slit og fleira. Á flestum vinnustöðum nú til dags eru notaðir töflureiknar við útreikninga. Skoðun á notkun stærðfræði í atvinnulífinu getur því víkkað sýn nemenda á stærðfræði og gildi hennar.
Nemendur þurfa að fá opin viðfangsefni að glíma við því þau gefa þeim tækifæri til að vinna á eigin forsendum. Mikilvægt er við lausn þeirra að kennarar geri ólíkar kröfur til nemenda sinna og ögri hverjum og einum. Allir nemendur þurfa að geta tekið verkefni sjálfstæðum tökum, greint hvaða upplýsingar eru gefnar, eftir hverju skuli leitað og fundið leið til lausnar. Stærðfræðiþekking kemur fyrst að gagni þegar nemendur geta sjálfir séð hvenær hentar að beita henni.

Námsmatsverkefni

Yfirlit

Tölfræði	Dagbók	Einstaklingsverkefni
Að nota tölur	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Rúmmál	Verklegt verkefni	Hópvinna
Brot	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Líkur	Skriflegt verkefni	
Flatarmyndir og rúmmál	Skriflegt verkefni	Sjálfsmat
Flatarmyndir og rúmmál	Skriflegt verkefni	Para-og einstaklingsverkefni
Flatarmyndir Þríhyrningar	Skriflegt og verklegt verkefni	Para- og einstaklingsverkefni
Flatarmyndir Flatarmál	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Flatarmyndir	Skriflegt verkefni	Paraverkefni
Flatarmyndir	Verklegt verkefni	Hópvinna
Flatarmyndir	Skriflegt verkefni	Para og einstaklingsverkefni
Talnafræði	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Stærðfræði í daglegu lífi		
Dagblöð	Skriflegt verkefni	Hópverkefni
Hlutföll	Skriflegt verkefni	Hópverkefni
Mynstur og algebra	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Mynstur og algebra	Skriflegt verkefni	Einstaklings- og paraverkefni
Mynstur og algebra	Skriflegt verkefni	Einstaklings- og paraverkefni
Stærðfræði í daglegu lífi	Verklegt verkefni	Hópverkefni
Prósentur	Skriflegt verkefni	Sjálfsmat
Prósentur	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Rökfræði	Skriflegt verkefni	Hópverkefni
Stærðfræði í daglegu lífi		
Á Englandi	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Hnitakerfi	Skriflegt verkefni	Einstaklingsverkefni
Reikniaðgerðir	Skriflegt verkefni	Hópvinna

Tölfræði

Markmið

Að nemendur

- kynnist hugtökunum gagnasafn, tíðni og tíðasta gildi
- geti fundið miðgildi og meðaltal fyrir gagnasafn
- safni gögnum og skrái upplýsingar í töflur og myndrit
- kynnist punktaritum, þjálfist í að lesa úr þeim og túlka niðurstöður
- túlki upplýsingar sem birtar eru með myndritum og dragi af þeim ályktanir
- leiti upplýsinga í tölvuunnu gagnasafni, vinni úr þeim og dragi ályktanir af niðurstöðum sínum
- kynnist því að myndræn framsetning getur gefið rangar og misvísandi upplýsingar

Umfjöllun

Í tölfræði felst gagnasöfnun, úrvinnsla, framsetning og túlkun. Þegar gögnum hefur verið safnað þarf að ákveða hvernig á að vinna úr þeim. Þá vakna spurningar eins og hverjir eiga að kynna sér gögnin? Hvað kemur fram í þeim sem mikilvægt er að koma á framfæri? Hvaða birtingarform gefur skýrasta mynd af gögnunum? Nauðsynlegt er bæði að vera læs á upplýsingar sem birtar eru á myndrænu formi og að geta sjálfur vegið og metið hvernig skynsamlegast er að birta niðurstöður úr gagnasöfnun. Þegar nemendur safna gögnum og birta niðurstöður með myndriti læra þeir ekki bara að gera myndrit og skrá upplýsingar í þau, heldur líka að túlka niðurstöður sínar. Þeir þekkja gögnin og vita hvaða upplýsingar koma fram í þeim. Það auðveldar þeim að skynja að myndrit getur gefið gagnlegar upplýsingar og einnig að taka afstöðu til hvers konar myndrit gefa skýrastar upplýsingar hverju sinni. Nemendur þurfa því að kynnast fjölbreyttum gerðum myndrita og þjálfist í að skrá upplýsingar á ólíkan hátt. Þegar unnið er með lítið gagnasafn er oft eðlilegast og fljótlegast að teikna myndritið sjálfur. Þegar mikið af gögnum liggur fyrir er hins vegar nauðsynlegt að nota rafræn hjálpargögn og nemendur þurfa snemma að kynnast þeim. Umræða um það sem birt er á myndritinu og hvernig er hægt að túlka þær upplýsingar sem lesa má úr því eru mikilvægasti þátturinn í tölfræðináminu.

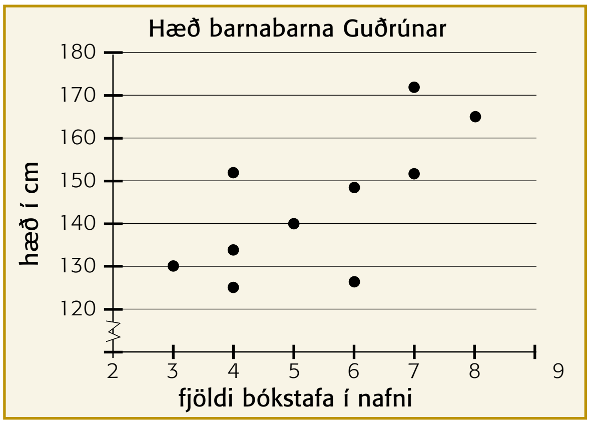
Þó að myndrit gefi yfirleitt lýsandi upplýsingar um gagnasafn gefa þau ekki alltaf nægjanlegar upplýsingar til að geta túlkað niðurstöður. Gögnin þarf að flokka og reikna gildi sem gefa upplýsingar um safnið. Það sem oftast er skýrt með tölum er dreifingin, þ.e. munurinn á hæsta og lægsta gildi og einhvers konar mæling á hvar miðjan er. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir því hvaða upplýsingar þessir útreikningar gefa um gögnin og bera saman niðurstöður ólíkra útreikninga til að öðlast skilning á hvernig tölfræði nýtist við að túlka gögn sem safnað hefur verið.

Hugtökin meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi eru oft notuð þegar gagnasafn er skoðað. Meðaltal er orð sem mikið er notað í daglegu tali og er þá oft átt við að eitthvað sé í meðallagi þó ekki sé um nákvæma útreikninga að ræða. Meðaltal er reiknað með því að leggja saman stærðirnar sem koma fyrir í safni og deila í summuna með fjölda þeirra. Miðgildi er gildið sem lendir í miðjunni ef gögnum er raðað eftir stærð. Tíðasta gildi er það gildi sem oftast kemur fyrir í gagnasafni.

Í gagnasafninu: 3, 3, 4, 5, 8, 9, 10 er meðaltalið 6 ((3+3+4+5+8+9+10)/7=6). Miðgildið er 5 og tíðasta gildið er 3. Ef lýsa á hvað einkennir safnið fæst ólík niðurstaða eftir því hvaða gildi er reiknað. Nauðsynlegt er að kunna skil á þessum hugtökum og bera skynbragð á í hvaða tilvikum hvert þeirra gefur skýrastar upplýsingar um gagnasafnið. Með því að gera eigin rannsókn, reikna mismunandi gildi og bera niðurstöður saman við þær upplýsingar sem liggja fyrir ættu nemendur að öðlast skilning á hvaða gildi gefa bestar upplýsingar um gagnasafnið.

Í verkefnum á síðum 5 og 6 þarf að reikna meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi fyrir gagnasöfn. Sjónum nemenda er beint að því að bera saman þær upplýsingar sem þessi gildi gefa og kanna hvaða áhrif frávik hafa á gagnasafn. Æskilegt er að gefa nemendum tækifæri til að ræða þessar rannsóknir sínar og skoða gagnrýnum augum hvernig niðurstöður könnunar eru túlkaðar.

Í verkefnum á síðum 7–9 og síðu 2 í vinnubók 3A eru birtar niðurstöður úr gagnagrunni Hagstofu Íslands. Nemendur eru hvattir til að greina þær upplýsingar sem þar er að finna, túlka þær og draga af þeim ályktanir. Mikilvægt er að vera læs á gögn sem birt eru opinberlega og vita hvar hægt er að finna þau. Þess vegna er nauðsynlegt fyrir nemendur að læra að leita í gagnabanka sem þessum og spreyta sig á að túlka þær upplýsingar sem gefnar eru. Við slíka vinnu gefst líka tækifæri til að ræða hvað eru áreiðanlegar heimildir og hvernig hægt er að vita hvort treysta megi þeim upplýsingum sem gefnar eru á prenti eða á vefsíðum.



Punktarit eða dreifirit *(scatter plot)* er myndrit sem gagnlegt er að nota ef bera á saman tvö gagnasöfn eða tvo eiginleika til að kanna hvort fylgni er á milli þeirra. Þá eru pöruð saman gögn úr báðum söfnum, gögn úr öðru safninu skráð á x-ás og hinu á y-ás. Hægt er tala um að fylgni sé á milli gagnanna í söfnunum ef punktarnir liggja nálægt beinni línu. Áhugaverðara er þó að geta vitað hvert sambandið milli gagnanna er og hvort hægt er að segja fyrir um gildi í öðru safninu ef vitað er um samsvarandi gildi í hinu. Í verkefnum á síðum 10 þurfa nemendur að greina hvort samhengi er á milli skóstærðar og hæðar fólks og álykta út frá því um skóstærð einstaklings af tiltekinni hæð. Nemendur eru líka hvattir til að gera eigin rannsókn, kanna fylgni og draga ályktun af niðurstöðum sínum. Þá er sjónum þeirra beint að því að ekki er alltaf hægt að draga ályktun af niðurstöðum um samband milli tveggja gagnasafna þó fylgni virðist vera milli þeirra.

Í verkefni á síðu 12 kynnast nemendur hvernig hægt er að villa um fyrir fólki með myndrænni framsetningu. Nemendur sjá víða myndrit og þau eru gjarnan notuð í auglýsingum til að selja vöru eða telja fólki trú um gildi ákveðins málstaðar. Nauðsynlegt er að vera fær um að túlka þær upplýsingar sem gefnar eru með myndritum og varast að oftúlka þær. Hér er varpað fram spurningum til nemenda til að fá þá til að taka rökstudda afstöðu byggða á greiningu sinni.

Kennsluhugmyndir

Æskilegt er að byrja umfjöllun um tölfræði á upprifjun á því sem nemendur hafa þegar lært. Upplagt er að byrja á hugstormun þar sem nemendur rifja upp það sem þeir vita um tölfræði. Listann sem þá verður til er svo hægt að flokka. Þá er ekki ólíklegt að til verði að minnsta kosti fjórir flokkar, þ.e. um gagnasöfnun, myndrit, útreikningar og túlkun á niðurstöðum. Nemendur geta svo unnið saman í hópum og skráð hjá sér það sem þeir vita um hvað hafa þarf í huga þegar unnið er að hverjum þessara þátta. Upplýsingunum má svo safna saman á einn lista sem hengdur er upp í skólastofunni. Þegar nemendur gera könnun eða rannsókn þar sem safna þarf gögnum er gott að hafa listann til viðmiðunar. Gagnlegt er líka fyrir nemendur að skrá þessar hugmyndir í vinnuhefti sín til að geta flett upp í þeim. Það getur líka verið góð hugmynd að nemendur hafi sérstakt hefti þar sem þeir skrá hjá sér minnisatriði sem þessi. Þeir búa sér þá til eins konar alfræði- eða uppflettirit um stærðfræði.

Kaflinn skiptist í fjóra hluta (reiknuð gildi, gagnasöfnun og úrvinnsla, punktarit og blekkingar með myndritum). Sama er í hvað röð þeir eru unnir og ekki er nauðsynlegt að vinna öll verkefnin í kaflanum. Verkefni í vinnubók tengjast ekki neinum sérstökum verkefnum í grunnbókinni og þarf því ekki nauðsynlega að leysa jafnhliða þeim. Þau henta ágætlega til heimavinnu, en mikilvægt er að taka þau til umræðu í skólanum eins og önnur verkefni sem nemendur leysa heima. Á síðu 2 í vinnubók 3A eru nemendur beðnir að bera fjölda 12 ára barna í nokkrum sveitarfélögum árið 2002 saman við fjölda 12 ára barna í eigin sveitarfélagi. Auðvelt er að finna upplýsingar um fjöldann á vef Hagstofu Íslands eða hjá viðkomandi sveitarfélagi. Mikilvægt er að nemendur læri að leita sér slíkra upplýsinga og átti sig á hvaða heimildir eru traustar.

Þegar unnið er með lítið úrtak, eins og að safna gögnum frá nemendum í bekknum eða nánasta umhverfi, verður gagnasafnið lítið og erfitt að draga almenna ályktun af niðurstöðum. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir að ekki er víst að svipuð niðurstaða fáist ef gerð er könnun í öðrum sambærilegum nemendahópi. Það er því nauðsynlegt að kynnast því að leita gagna í gagnagrunnum til að geta borið saman við eigin niðurstöður.

Í framhaldi af verkefni um villandi framsetningu á síðu 12 gæti verið spennandi að takast á við að gera myndrit sem ætluð eru til að villa um fyrir fólki. Nemendur geta þá valið sér viðfangsefni, vöru sem þeir vilja selja eða málstað sem þeir vilja styðja. Við slíka vinnu þurfa nemendur að notfæra sér þekkingu sína á tölfræði til að geta gert sem mest sannfærandi myndrit.

Að nota tölur

Markmið

Að nemendur geti

- lesið og skrifað jákvæðar og neikvæðar tölur
- rætt um gildi talna og mikilvægi þeirra við upplýsingagjöf
- lesið úr tölulegum gögnum og dregið rökstuddar ályktanir af þeim
- gert grein fyrir útreikningum sínum bæði munnlega og skriflega
- beitt stærðfræði til að leysa viðfangsefni daglegs lífs
- beitt ýmsum talningaraðferðum til að átta sig á fjölda
- skilið skráningu á bókhaldsfærslum
- sýnt vald á reikniaðgerðum og valið hentugar leiðir við reikning

Umfjöllun

Gott er að velta fyrir sér tilgangi talna. Hvenær eru tölur notaðar og hvaða upplýsingar gefa þær? Þegar keypt er bensín veltir fólk fyrir sér verði upp á krónu en þegar keypt er húsnæði eða bílar er hugsað um tugi eða jafnvel hundruð þúsunda. Nemendur geta velt þessu fyrir sér og skráð dæmi um hvenær krónur, tugir króna, hundruð, þúsundir o.s.frv. skipta máli. Í tengslum við þessa umræðu má ræða um námundun. Þá eru skoðuð tengsl á milli þess hvaða sæti er hugsað um í námundun og hvaða sæti teljast skipta máli við verðlagningu eða mælingu. Stundum er unnið með stórar tölur og samt er þörf fyrir nákvæmni, t.d. í byggingum eða geimferðum. Áhugavert getur verið að skoða einhverjar framkvæmdir sem unnið er að. Tölur geta líka verið mjög smáar með marga aukastafi, t.d. í vísindatilraunum. Fjárhagsáætlanir eru oft gerðar bæði af einstaklingum og fyrirtækjum. Kjörið er að skoða slíkar áætlanir og láta nemendur gera áætlanir fyrir sig eða ímyndaðan rekstur. Slík verkefni er gott að vinna í töflureikni.

Í þessum kafla eru rifjuð upp ýmis einkenni reikniaðgerðanna. Vangaveltur um þau efla skyn nemenda á áhrifum aðgerðanna og tengslum þeirra innbyrðis. Hugarreikning er gott að æfa og setja nemendur í þá aðstöðu að þurfa að meta upphæðir. Oft eru gerðar verðkannanir og er gert ráð fyrir að almenningur geti lesið úr þeim. Kjörið er að skoða nýlegar kannanir og fá nemendur til að draga ályktanir af þeim. Á heimasíðu Samkeppnisstofnunar er alltaf að finna nýlegar kannanir og Neytendasamtökin safna líka oft upplýsingum um verð og gæði.

Mikilvægt er að nemendur nái góðu valdi á sætiskerfinu og uppbyggingu þess. Þeir þurfa að þekkja vel tengsl sæta. Í verkefnum á blaðsíðu 17 er gengið út frá því að þeir séu vanir að vinna með sætisgildiskubba. Þeir ættu því að geta séð fyrir sér hvernig sætisgildin tengjast með því að ímynda sér hvernig röðin, kubbur, stöng, plata, endurtekur sig endalaust. Gott er því að hafa sætisgildiskubba til taks fyrir nemendur.

Í kaflanum er fengist við stórar jákvæðar tölur og neikvæðar tölur. Nemendur þurfa að geta lesið tölurnar og reiknað með bæði jákvæðum og neikvæðum tölum. Bankareikningar, ekki síst kortareikningar, geta verið góð dæmi um hvernig staða getur verið bæði jákvæð og neikvæð. Áhugavert er að skoða hvernig útreikningar eru gerðir á slíkum daglegum færslum.

Kennsluhugmyndir

Í kennslu eru alltaf margar leiðir færar en mikilvægt er að byggja upp kennsluferli sem hentar þeim nemendahópi sem unnið er með hverju sinni. Mörg verkefni í þessum kafla geta nemendur unnið einstaklingslega eða í hópum. Nauðsynlegt er að meginviðfangsefnin séu rædd, þ.e. gildi talna, uppbygging sætiskerfisins og jákvæðar og neikvæðar tölur. Hér á eftir verða gefin dæmi um hvernig byggja má upp vinnu út frá námsbókinni. Í vinnubók eru fleiri verkefni af sama toga. Æskilegt er að nemendur skoði tölur og notkun þeirra í eigin umhverfi.

Kennsluhugmynd A

Í upphafi getur verið gott að fá nemendur til að velta fyrir sér hvenær þeir nota tölur. Einnig geta þeir skoðað notkun talna í tengslum við áhugamál sitt eða aðrar námsgreinar. Á hvaða talnabili eru tölur sem notaðar eru þegar talað er um öflugar tölvur? Hvað finnst skátum löng gönguferð? Hvaða tölur eru notaðar í frjálsum íþróttum? Hvað með heimilisútgjöld? Launamál?

Nemendur reikna dæmin á blaðsíðu 13. Gott er að hvetja þá sérstaklega í dæmi 5 og 6 til að para saman samsvarandi dæmi annars vegar plús- og mínusheiti og hins vegar fald- og deiliheiti. Einnig gefa dæmin tilefni til umræðna um tengsl reikniaðgerðanna. Í dæmum 8–11 er fengist við almenn brot. Nemendur þurfa að hafa greiðan aðgang að námsgögnum svo sem brotabútum og brotatöflum.

Á blaðsíðum 15–16 er stærðfræði skoðuð út frá sjónarhóli neytandans. Hér er kjörið að nemendur skoði verð í nærliggjandi verslunum, í auglýsingum, í blöðum eða á Netinu. Þeir geta búið til verkefni hver fyrir annan til að færa vettvang viðfangsefnanna nær veruleika sínum. Einnig má nota niðurstöður nýlegra neytendakannana sem kveikju.

Á blaðsíðu 17 er sætiskerfið skoðað og sjónum beint að því hvernig það getur stækkað endalaust. Sætisgildi eru borin saman. Þessi verkefni getur verið heppilegt að vinna með nemendahópnum sameiginlega og skipta nemendum síðan í smærri hópa sem velta þá fyrir sér fjöldanum milljón.

Sætisgildisleikinn (á bls. 18) geta nemendur notað til að þjálfa sig í að lesa stórar tölur og meta gildi hvers tölustafs.

Leiðir við talningu geta verið margar og því gagnlegt að velta fyrir sér hvernig maður myndi telja ólíka hluti. Gott heimaverkefni gæti verið að nemendur í litlum hópum fyndu eitthvað sem til væri meira en 500 af og gerðu skriflega greinargerð um hvernig þeir töldu og hver niðurstaða talningarinnar var. Til greina kæmi að hvetja þá til að nota tvær ólíkar aðferðir við talninguna og bera niðurstöður saman. Áður en niðurstöður eru kynntar eru hlutir hvers hóps látnir standa til sýnis og allir giska á fjöldann. Hver hópur kynnir svo niðurstöður sínar og ef vill má tilkynna hver var næstur því að giska á réttan fjölda.

Í upphafi vinnu með neikvæðar tölur getur verið gott að skoða talnalínu og finna mismun á jákvæðum og neikvæðum tölum, nálægt núlli. Nemendur geta síðan leyst verkefnin í námsbókinni sjálfstætt.

Kennsluhugmynd B

Umræður um leiðir við reikning og hugmyndir sem fram koma eru skráðar.
Nemendur reikna sjálfstætt fyrstu 11 dæmin. Þeir velja síðan eitt þeirra til að segja frá í fimm manna hópi. Hinir nemendurnir í hópnum segja líka hvernig þeir reiknuðu viðkomandi dæmi. Þegar lokið hefur verið við að skoða lausnir frá öllum í hópnum velja nemendur eina lausn til að segja frá.

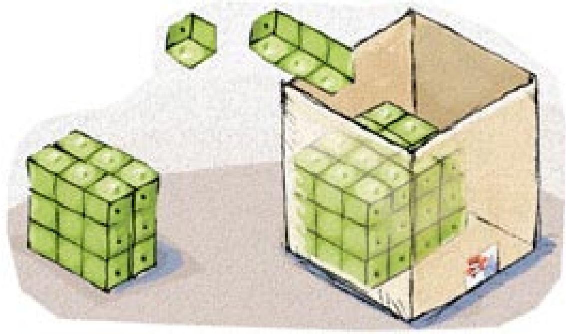
Kennari kemur með nokkrar pakkningar undan nýlenduvörum. Nemendur skoða magn innihalds og finna út hvernig væri hægt að finna kílóverð eða lítraverð ef verð á þessari vöru væri þekkt. Nemendur vinna síðan dæmi 12–14 og bekkurinn ræðir saman um hvað ræður innkaupum fólks. Nemendur skoða heimasíðu Samkeppnis-stofnunar og velja sér könnun til að gera skriflega greinargerð um. Þeir geta nýtt sér verkefnin á blaðsíðu 16 sem viðmið um að hverju er gott að huga.

Nemendur vinna sjálfstætt blaðsíðu 17 og vinna verkefnið um milljón sem heima-verkefni. Þeir fara í sætisgildisleikinn og setja fram tilgátur um leiðir til að auka líkur á að vinna leikinn. Ef tekst að kveikja áhuga geta umræður um leikinn orðið til þess að efla rökhugsun og skilning á áhrifum reikniaðgerða.

Skipuleggja má getraun meðal nemenda og stilla upp nokkrum krukkum fullum af smáhlutum, t.d. skrúfum, sykurmolum, baunum, tölum, perlum og nöglum. Allir nemendur giska á fjöldann. Í litlum hópum fara svo nemendur yfir ágiskanir og telja úr krukkunum.

Í tengslum við lestur á háum tölum getur verið áhugavert að skoða háar tölur, t.d. í fjárlögum íslenska ríkisins. Stundum verður fjárlagahalli og má tengja það umfjöllun um neikvæðar tölur. Oft er talað um skuldir heimilanna á Íslandi og tengist sú umræða ágætlega færslum á debetkortareikningi sem sýnd eru dæmi á blaðsíðu 20. Þegar reiknað er með jákvæðum og neikvæðum tölum má búast við að mörgum nemendum þyki gott að nota talnalínu og því kjörið að skoða þá leið þegar dæmi 27 er reiknað.

Rúmmál



Markmið

Að nemendur

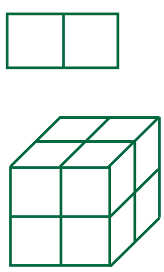
- geti fundið rúmmál réttstrendinga
- kynnist algengum mælieiningum sem notaðar eru við rúmmálsmælingar svo sem rúmsentímetrum, rúmmetrum, l, dl og ml
- kynnist tengslum milli rúmsentímetra og lítra og desílítra.
- beri skyn á rúmmálsstærðir

Umfjöllun

Nemendur hafa lítið fengist við rúmmálsmælingar áður ef undan eru skildar mælingar á rúmmáli vökva í lítrum og desílítrum. Hér kynnast nemendur fleiri mælieiningum sem notaðar eru við mælingar á rúmmáli svo sem rúmsentímetrum og rúmmetrum. Einnig er hugað að tengslum milli rúmsentímetra og lítra. Nemendur þurfa að fá góða tilfinningu fyrir þeim mælieiningum sem notaðar eru við að mæla rúmmál. Þeir þurfa að handleika hluti sem eru einn rúmsentímetri að stærð t.d. sentíkubba og búa til mismunandi rúmmyndir með þeim. Einnig þurfa nemendur að fá tækifæri til að skynja stærð rúmmetra með því að búa til líkön sem eru einn rúmmetri að stærð.

Í kaflanum er mikil áhersla lögð á verklega vinnu nemenda enda er hún lykilatriði þegar fengist er við hvers kyns mælingar. Nemendur þurfa að öðlast færni og skilning sem gerir þeim kleift að framkvæma ýmsar athuganir og bera skynbragð á upplýsingar sem settar eru fram á grundvelli mælinga. Gott er að finna sér einhver viðmið í umhverfinu. Hvað mælum við í rúmmetrum? Hve mörg 12 ára börn skyldu komast inn í kassa sem er einn rúmmetri að stærð. Hvað er við hæfi að mæla í rúmsentímetrum eða lítrum?

Þegar fengist er við mælingar á rúmmáli réttstrendinga eða kassa þarf að hafa í huga hvað það er sem verið er að mæla. Er verið að mæla hve mikið kemst ofan í kassann? Er verið að mæla hve mikið rými kassinn tekur? Eða er ef til vill verið að velta fyrir sér rúmmáli þess efnis sem fór í kassann. Ekki er ástæða til að fara ofan í saumana á þessu á þessu stigi en nemendur þurfa þó að gera sér grein fyrir hvort þeir eru að fást við innanmál eða utanmál og að það er munur á þessu tvennu.



Þegar fengist er við rúmmál er verið að fást við þrjár víddir. Ef hliðarlengdir fernings eru tvöfaldaðar þá fjórfaldast flatarmálið en ef hliðarlengdir tenings eru tvöfaldaðar þá áttfaldast rúmmálið. Því er nauðsynlegt að vera nákvæmur í mælingum á rúmmáli. Smávægileg skekkja í lengdarmælingu á brún kassa getur haft mikil áhrif á rúmmálsmælingu. Kjörið er að nemendur geri athuganir og tilraunir þar sem þeir fá tækifæri til að skynja rúmmálsaukningu t.d. með því að byggja misstóra teninga og finna út rúmmál þeirra . Samanburður nemenda á rúmmálsútreikningum á grundvelli mælinga á sama kassa er einnig vel til þess fallinn að vekja athygli á nauðsyn þess að vera nákvæmur þegar fengist er við mælingar.

Daglega handleika nemendur alls kyns ílát með vökva svo sem vatnsglös, bolla, könnur, drykkjarfernur, gosflöskur og jógúrtdósir. Rúmmál sumra þessara íláta er nemendum vel þekkt en annarra ekki. Oft á tíðum eru nemendum ekki ljós tengslin milli þeirra mælieininga sem notaðar eru til að gefa upp rúmmál. Því er gott að skoða hvernig rúmmál vökva er gefið upp á mismunandi umbúðum og bera það saman. Einnig þurfa nemendur að fá tækifæri til að mæla rúmmál mismunandi íláta og kanna hvort rétt er mælt. Æskilegt er að finna einhver viðmið sem oft er hægt að grípa til. Hve mikið tekur t.d. eitt vatnsglas? Er hægt að nota það sem viðmið? Nemendur gætu fengið það sem heimaverkefni að mæla nákvæmlega rúmmál glasa sem notuð eru daglega heima hjá þeim. Er mikill munur á rúmmálinu? Hvað með þau vatnsglös sem notuð eru í skólanum?

Eitt af viðfangsefnunum sem fengist er við í kaflanum er um tengsl rúmsentímetra og lítra. Einn lítri samsvarar 1000 rúmsentímetrum. Þessu samhengi þurfa nemendur að kynnast. Það má meðal annars gera með því að mæla og reikna rúmmál drykkjarferna sem taka einn lítra. Hér ber þó að hafa í huga að yfirleitt er reiknað rúmmál tómrar fernu minna en 1000 rúmsentímetrar. Það er vegna þess að fernan þenst aðeins út þegar vökvi er settur í hana og við það eykst rúmmálið: Yfirleitt er reiknað með því við hönnun umbúðanna.

Nemendum kann að þykja það ótrúlegt að einn rúmmetri sé 1 000 000 rúmsentímetrar. Þeir geta kannað þetta með því að raða saman sætisgildiskubbum. Þar er kubburinn sem sýnir eitt þúsund 1000 rúmsentímetrar. Hvað þarf marga slíka til að búa til einn rúmmetra? Hve löng yrði hver hlið í sentímetrum ef allar hliðar væru jafnlangar?

Kennsluhugmyndir

Eins og fram hefur komið skiptir verkleg vinna nemenda miklu máli í tengslum við þetta viðfangsefni og hana þarf að skipuleggja vel. Æskilegt er að nemendur vinni að verklegu viðfangsefnunum í hópum. Mjög mikilvægt er að ræða og draga saman niðurstöður úr athugunum þeirra. Hér eru gefin tvö dæmi um hvernig fást megi við viðfangsefni kaflans.

Kennsluhugmynd A

Kveikja – Könnun á forhugmyndum

Í tengslum við verkefni 1 í grunnbók er tilvalið að láta nemendur búa til ferstrendinga úr sentíkubbum. Þeir skrá lengd, breidd og hæð þeirra og reyna að finna rúmmálið.

Kennari fylgist með og athugar hvaða leiðir nemendur fara við að ákvarða rúmmálið. Telja þeir kubbana eða nýta þeir sér margföldun? Í lok tímans eru nokkrir nemendur sem fara mismunandi leiðir látnir lýsa hvernig þeir fara að.

Hópvinna

Gögn: Kassar, sentíkubbar, málbönd
Hver hópur fær í hendur réttstrenda kassa af ýmsum stærðum og gerðum. Viðfangsefni þeirra er að leita leiða til að finna rúmmál þeirra. Gott er að byrja á að giska á rúmmál og raða kössunum eftir stærð. Kennari fylgist með vinnu nemenda og ræðir við þá um mismunandi leiðir. Einhverjir nemendur hafa líkast til þörf fyrir að skynja rúmmálið með því að raða sentíkubbum inn í kassana. Fyrir suma nemendur má velta upp spurningum um innanmál og utanmál og þá hvert sé rúmmál efnis sem fer í einhverja tiltekna kassa.
Hóparnir gera grein fyrir niðurstöðum og bera þær saman ef þeir hafa verið með sams konar gerðir af kössum. Nemendur skrá hjá sér mismunandi leiðir við að finna rúmmál.

Þraut

Ég veit að rúmmál kassa er 60 rúmsentímetrar.
Lengdin er 4 cm og breiddin 3. Hver er hæðin?

Nemendur glíma við þetta verkefni tveir og tveir saman í stutta stund og síðan gera nokkrir grein fyrir niðurstöðum sínum. Að því loknu leysa nemendur verkefni á blaðsíðu 22. Fyrir suma er ef til vill nóg að glíma við verkefni 3 og 4 meðan þeir sem ráða vel við að reikna rúmmál geta sleppt þeim og farið beint í verkefni 5 og 6.

Nemendur eru hvattir til að safna saman og koma með í skólann ýmiss konar ílát og umbúðir undan vökva.

Hópvinna

Nokkrir hópar athuga ílát út frá spurningum í verkefni 7.
Aðrir gera athugun á drykkjarfernum samkvæmt verkefni 9.

Hópar kynna niðurstöður sínar og í framhaldi af því er rætt um samhengið milli mælieininganna l, dl, cl, ml (talnahús) og samhengið milli 1000 rúmsentímetra og 1 lítra.

Einstaklings- eða paravinna

Nemendur vinna verkefni á blaðsíðu 24. Fyrir suma nemendur er nóg að skoða hve margir rúmsentímetrar 20 lítrar eru og reyna síðan að koma með tillögur að lengd breidd og hæð búrs sem tekur 20 lítra. Aðrir hafa gott af að glíma við öll verkefnin. Sjálfsagt er að nemendur hafi vasareikni til að prófa sig áfram.

Bekkjarverkefni – Hve stór er einn rúmmetri?

Nemendur búa til líkan af rúmmetra sameiginlega eða í hópum samkvæmt verkefni 16. Bekknum er skipt í hópa og nota hóparnir mismunandi efnivið.

Í framhaldi af vinnu nemenda er rætt um rúmmál ýmissa rýma t.d. í skólanum eða á heimilinu og nemendur ræða um leiðir til að finna rúmmál. Að því loknu vinna nemendur verkefni 17–20 og þá gefst kennara tækifæri til að fylgjast með og kanna hvort þeir geta beitt þekkingu sinni við að finna rúmmál í ýmsu samhengi.

Kennsluhugmynd B

Við mörg verkefnanna í kaflanum þarf ýmsan efnivið og gögn og því getur verið gott að setja þau upp sem stöðvavinnu. Það gerir það að verkum að minna þarf af gögnum.
Hér eru settar fram hugmyndir að fimm stöðvum út frá viðfangsefnum kaflans. Gert er ráð fyrir að vinnan á hverri stöð taki um það bil tvær kennslustundir. Kennarar þurfa að reyna jöfnum höndum að ræða við nemendur, draga saman með þeim reynslu þeirra og lærdóm af vinnu á stöðvum og draga fram meginatriði í lokin.

Stöð 1

Byggja úr sentíkubbum út frá verkefni 1.

Stöð 2

Finna rúmmál mismunandi kassa út frá verkefni 2.

Stöð 3

Athugun á ílátum og drykkjarfernum út frá verkefni 7–10.

Stöð 4

Hönnun á fiskabúrum út frá verkefnum 11–14.

Stöð 5

Gerð líkans af rúmmetra út frá verkefni 16.

Vinnan á stöðvum 1 og 2 tekur líkast til skemmri tíma en vinna á hinum stöðvunum Nemendur á þeirri stöð geta því jafnhliða fengist við viðfangsefnin á blaðsíðu. 23 og verkefni í vinnubók. Að lokinni stöðvavinnu er æskilegt að nemendur leysi síðustu verkefni kaflans upp á eigin spýtur. Þá gefst kennara tækifæri til að ræða við nemendur og kanna skilning þeirra á efninu.

Bílar

Markmið

Að nemendur geti

- lesið sér til og nýtt sér upplýsingar við útreikninga
- metið niðurstöður útreikninga og tekið afstöðu á grundvelli þeirra
- nýtt stærðfræðiþekkingu sína í viðfangsefnum daglegs lífs
- reiknað með stórum tölum og smáum
- aflað sér tölulegra upplýsinga

Umfjöllun

Ýmislegt í daglegu lífi kallar á að fólk beri saman stærðir og geri útreikninga. Verkefni sprottin úr daglegu lífi gefa nemandanum oft mynd af því hvernig stærðfræði er hagnýtt. Bílar eru almenningseign og á síðustu árum hafa skapast fleiri möguleikar á að hafa einkabíl til afnota. Rekstrarleiga er orðin almenn og auðvelt er fyrir flesta að fá bílalán. Raunhæft viðfangsefni verður því að bera saman kosti og galla þess að staðgreiða bíl, taka lán eða taka bíl á rekstrarleigu. Þar gefst tækifæri til að vinna með nokkuð stórar tölur og nemendur þurfa að taka tillit til ýmissa þátta við útreikninga. Á vefum bílafyrirtækja má oft finna reiknivél sem reiknar afborganir af bílalánum og kjörið er að nota.

Töluverður kostnaður fylgir því að eiga og reka bíl. Í kaflanum er fengist við útreikninga á bensíneyðslu og rekstrarkostnað bíls á ársgrundvelli. Þar þurfa nemendur að reikna með brotum og nýta sér upplýsingar sem gefnar eru í textanum. Þegar skoðaður er heildarrekstrarkostnaður bíls á ársgrundvelli eru tekin tvö dæmi sem miðast við verðlag ársins 2003. Nemendur geta aflað upplýsinga um fleiri bíla og fengið nýjar tölur um rekstrarkostnað. Tryggingafélög, félög bifreiðaeigenda og neytendasamtök hafa á heimasíðum sínum ýmsar upplýsingar sem nýst geta. Einnig er kjörið að nemendur ræði við fólk sem vinnur í þessum geira.

Bílar eru ólíkir og misjafnt er hvað fólki finnst skipta máli í sambandi við bíla. Sumum finnst mestu máli skipta að bíllinn sé sparneytinn á meðan aðrir leggja mikið upp úr rými. Nemendur eru beðnir að velta fyrir sér kostum og göllum þriggja bíla sem þeir hafa ýmsar upplýsingar um. Það er mikilvægt að þeir fái hvatningu til að ræða þetta og hugsa málið þannig að þeir hafi góð rök fyrir vali sínu. Þá er gagnlegt er að tengja saman orsök og afleiðingu og styrkja þannig rökhugsun.

Þessi umfjöllun um bíla gefur tilefni til að nemendur rannsaki á eigin spýtur einhver viðfangsefni sem þeir koma auga á í samfélaginu. Markmiðið er að nemendur átti sig á hvernig stærðfræðin getur nýst þeim til að skoða og greina samfélagsleg fyrirbæri. Einnig er brýnt að nemendur verði meðvitaðir um hvaða þáttum stærðfræðinnar þeir eru að beita og hvaða þekkingu þeir nýta sér. Umræður um ólíkar leiðir geta styrkt þessa meðvitund.

Kennsluhugmyndir

Í upphafi gæti verið áhugavert að fá bílasala í heimsókn eða fara í heimsókn á bílasölu. Eins má skoða heimasíður bílasala og senda fyrirspurnir til fyrirtækja. Þannig mætti afla upplýsinga um hvernig bílaviðskipti fara fram, hvað sölumaður hefur í huga, hvað hann telur að viðskiptavinurinn hafi í huga, hvað er á markaðinum og hvaða upphæðum má búast við í bílaviðskiptum. Eftir slíkan inngang gætu nemendur unnið verkefnin í kaflanum einir eða í litlum hópum. Að því loknu gætu þeir valið sér viðfangsefni innan þessa sviðs. Sem dæmi um viðfangsefni sem nemendum gætu dottið í hug mætti nefna

- gera skoðanakönnun á vinsældum bíla
- teikna bíl í réttum hlutföllum
- kanna verð á nokkrum bílategundum
- skoða mynstur á hjólbörðum
- skoða flutninga í hjólkoppum og teikna ólík dæmi
- kanna bílaeign
- bera saman spyrnu bíla
- leigubílarekstur
- akstur áætlunarbifreiða
- vetnisbílar
- skoða hönnun bílmerkja

Slík verkefni gefa nemendum tækifæri til að greina viðfangsefni sín og beita eigin hugsun og þekkingu við lausn þeirra. Kennarar geta hjálpað nemendum við að koma auga á stærðfræðileg verkefni og dýpka stærðfræðilegar vangaveltur.

Vinnu með viðfangsefni kaflans má einnig skipuleggja þannig að nemendur fáist við þau hver fyrir sig. Þegar þeir hafa tekið afstöðu til þess hvaða bíl þeir myndu velja (dæmi 13) má mynda hópa í kringum hvern bíl. Góð hugmynd gæti verið að halda málfund þar sem hver hópur reynir að sannfæra hina um gæði þess bíls sem þeir völdu. Gagnlegt er síðan að nemendur fáist við eigin rannsóknir. Þeir gætu t.d. í litlum hópum skoðað nákvæmlega einn bíl og gert um hann skýrslu.

Brot

Markmið

Að nemendur

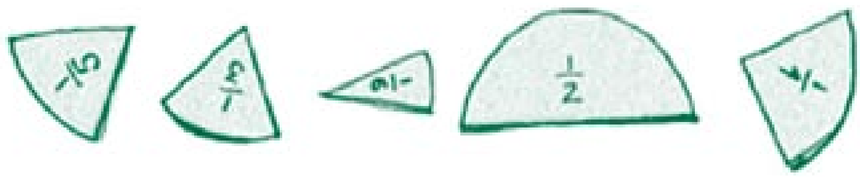
- öðlist tilfinningu fyrir stærð brota og geti nýtt sér margs konar líkön við brotareikning
- beri saman almenn brot og tugabrot
- geti skráð sama brotið bæði sem almennt brot og tugabrot
- viti hvenær tvö almenn brot eru jafnstór, geti stytt og lengt almenn brot og fundið samnefnara brota
- geti lagt saman og dregið frá ósamnefnd brot með því að nota líkön
- noti talnalínu við margföldun og deilingu heillar tölu með broti
- þjálfist í að reikna með tugabrotum

Umfjöllun

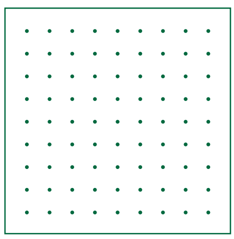
Til að nemendur geti öðlast færni í brotareikningi þurfa þeir að hafa góðan skilning á brotum, stærð, röðun og birtingarformi (almennt brot/tugabrot). Hlutbundin vinna þar sem stærð brots er rannsökuð á áþreifanlegan hátt með því að bera saman misstór brot og bera saman við heilar tölur er mikilvæg reynsla að byggja á þegar fengist er við reikninga með brotum. Nemendur þurfa að fá að þróa sínar eigin leiðir við útreikninga með brotum líkt og við reikning með heilum tölum. Nemendur þurfa að læra að nýta sér ólíkar gerðir af brotalíkönum og greina hvers konar líkön koma að bestum notum eftir því hvers eðlis verkefnin eru.

Til eru margar gerðir af líkönum sem henta vel til brotareiknings. Þau eru gjarnan flokkuð í svæðalíkön, lengdarlíkön og mengjalíkön allt eftir eðli þeirra.

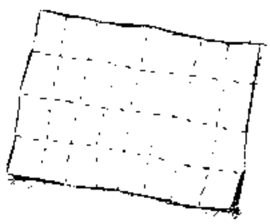
- Brotabútar eru algengasta gerðin af **svæðalíkani** og það sem nemendur hafa



væntanlega kynnst best. Brotabútar fást bæði með námsefninu *Einingu* og Geisla. Einingin er þar hringur og brotin misstórir hlutar úr honum. Brotabútar henta afar vel við samanburð á brotum og við samlagningu og frádrátt brota.

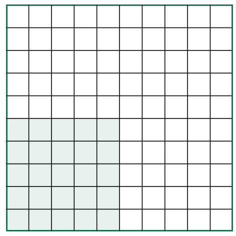


Pinnabretti er líka gagnlegt svæðalíkan. Þá er afmarkaður reitur með teygju sem getur verið annað hvort heild eða hluti og hlutinn eða heildin sýnd með annarri teygju.



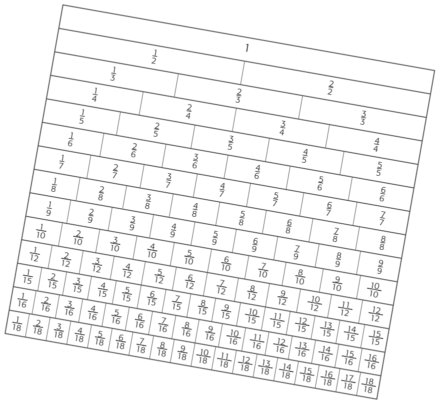
Blað sem brotið er saman getur líka komið að góðum notum sem svæðalíkan. Það getur verið gagnlegt að brjóta blað þegar lengja þarf brot. Með því að brjóta blað endurtekið er auðvelt að sjá hvernig teljari og nefnari stækka í sama hlutfalli. Á sama hátt má nota það til að skoða hvernig hægt er að stytta brot.

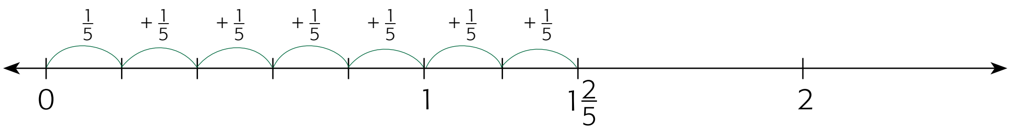
Hundrað reita tafla er enn ein gerðin af svæðalíkönum. Henni hafa nemendur kynnst í tengslum við samanburð á almennum brotum, tugabrotum og prósentum. Teikningar geta líka nýst sem svæðalíkön. Þegar nemendur teikna mynd sem þeir búta niður eru þeir að gera sér svæðalíkan.



$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

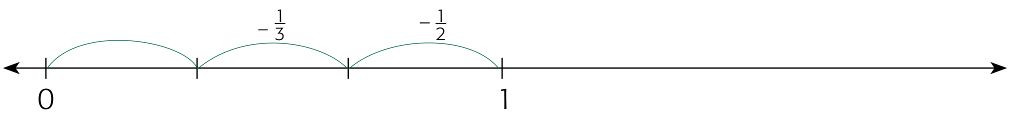
- Þau **lengdarlíkön** sem nemendur þekkja best eru talnalína og brotarenningar. Brotarenningar eru gagnleg líkön við samanburð á brotum og einnig samlagningu og frádrátt. Brotarenningar koma líka að góðum notum við margföldun og deilingu en þar er talnalína ef til vill enn gagnlegri. Auðvelt er að fara fram og til baka á talnalínunni, taka jafn stór skref nokkrum sinnum og telja skrefin til að vita hve oft hefur verið margfaldað eða deilt með broti.





Talnalína 1: frá 0 til 2 og hoppað í 7 skrefum

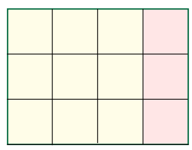
$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Skrá við $7 \cdot \frac{1}{5} = 1\frac{2}{5}$.



Talnalína 2: frá 0–1. Hoppað í 3 skrefum frá 1 til 0.

$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$. Skrá við $1 : \frac{1}{3} = 3$

- Dæmi um **mengjalíkan** er þegar ákveðinn fjöldi hluta, gjarnan í tveimur litum eða með mismunandi táknum, notaður til að tákna heild. Þá er fjöldi hluta í hvorum lit hluti af heildinni. Við hlutfallareikning henta mengjalíkön oft betur en svæða- eða lengdarlíkön. Nemandi gæti til dæmis valið að tákna lausn á eftirfarandi verkefni með mengjalíkani: Tólf krakkar voru í fótbolta. hluti þeirra voru stelpur. Hve margar voru þær? Heildin er hér táknuð með 12 kubbum. $\frac{3}{12}$ hlutar af kubbunum eða $\frac{1}{4}$ eru rauðir. $\frac{9}{12}$ hlutar eða $\frac{3}{4}$ eru gulir.



Megináherslan í þessum kafla er á reikning með brotum. Lögð er áhersla á að nemendur skoði hvernig tákna má sama brot á mismunandi vegu til að þeir eigi auðveldara með að leggja saman og draga frá ósamnefnd brot. Hugtökin lenging og stytting brota og samnefnari eru hér fyrst kynnt í námsefninu. Þá eru einnig nokkur verkefni um margföldun og deilingu með broti. Byrjað er á einföldum verkefnum um viðfangsefni sem nemendur þekkja og geta auðveldlega fundið lausn á með því að sjá fyrir sér í huganum eða nota brotalíkön sér til hjálpar. Nauðsynlegt er að rifja hér upp að margföldun og deiling eru andhverfar aðgerðir. Til að finna hve margar $\frac{1}{5}$ lítra fernur þarf að kaupa til að eiga einn lítra er verið að leita eftir með hvaða tölu þarf að margfalda $\frac{1}{5}$ til að fá 1. Dæmið er þá skráð: $\frac{1}{5} \cdot x = 1$. Það má líka skoða þetta sem deilingu. Hve oft get ég skipt 1 í $\frac{1}{5}$ hluta, eða hve oft er hægt að taka $\frac{1}{5}$ af 1? Dæmið er þá skráð: $1 : \frac{1}{5}$. Mikilvægt er að nemendur kynnist verkefnum um margföldun og deilingu með brotum sem koma fyrir í daglegu lífi þeirra til að gera sér grein fyrir að sömu lögmál gilda um það og þegar deilt er eða margfaldað með heilli tölu. Talnalínan er mjög gagnsætt hjálpartæki við slíka útreikninga.

Tengsl almennra brota og tugabrota eru líka til umfjöllunar í kaflanum. Nauðsynlegt er að þekkja algeng brot bæði sem almennt brot og tugabrot. Hér eru svæðalíkön sýnd til að beina sjónum nemenda að þessu sambandi. Við hvers kyns útreikninga, til dæmis prósentureikning, er afar gagnlegt að hafa á valdi sínu staðreyndir um ólík heiti á sama broti.

Dæmi: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{10}{40} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%$.

Það getur auðveldað margföldun og deilingu með tugabroti í huganum að þekkja ólík heiti fyrir sama brot og að kunna að nýta sér að margföldun og deiling eru andhverfar aðgerðir. Ef margfalda þarf tölu með 0,25, eða finna 25% af tölu, er einfaldast að deila í hana með 4. Ef deila þarf í tölu með 0,25 er auðveldast að margfalda hana með 4. Nemendur þurfa að bæta þessum þekkingarforða við aðrar staðreyndir um tölur og reikniaðgerðir sem þeir hafa áður tileinkað sér. Til að slík þekking nýtist nemendum þurfa þeir að skilja í hverju tengslin eru fólgin. Sá skilningur kemur best með því að rannsaka þau í eðlilegu samhengi og nota hjálpargögn sem varpa ljósi á þessi tengsl.

Í daglegu lífi sínu rekast nemendur ekki oft á viðfangsefni þar sem reikna þarf með tugabrotum, nema helst við hvers kyns mælingar. Verðgildi íslensku krónunnar er svo lágt að aurar eru aðeins notaðir í gengisviðskiptum. Nemendur hafa því væntanlega lítið kynnst því að nota tugabrot við reikninga með peningum nema ef til vill í erlendum gjaldmiðli. Nauðsynlegt er þekkja gjaldmiðla í þeim löndum sem við höfum mest tengsl við. Í einni evru eru 100 sent, í einum dollar eru 100 sent, í einni krónu 100 aurar og í einu pundi 100 pens. Það er því auðvelt að framkvæma útreikninga í þessum gjaldmiðlum með því að nota sér þekkingu á tugakerfinu.

Verkefni í vinnubók 3A sem fylgja þessum kafla eru hugsuð til að varpa frekara ljósi á þau viðfangsefni sem til umfjöllunar eru. Þar eru myndir af líkönum til að auðvelda nemendum útreikninga og kynna fyrir þeim hvernig ólík líkön gagnast við lausn verkefnanna. Þau þarf ekki nauðsynlega að vinna jafnhliða verkefnum í grunnbók.

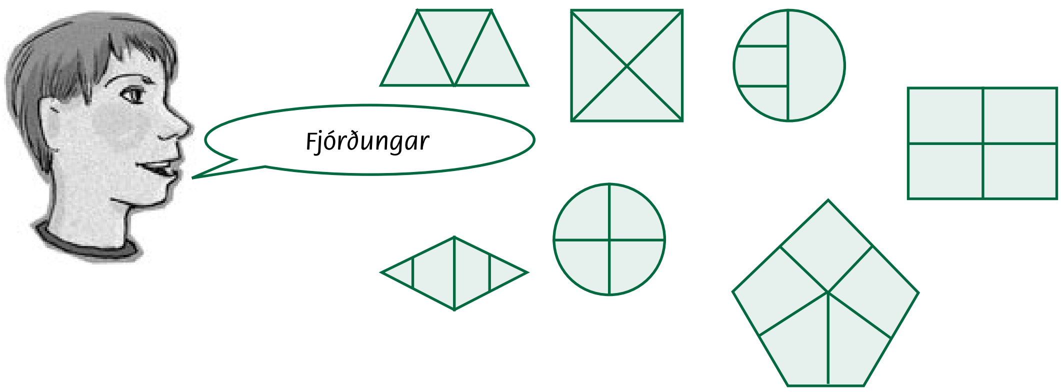
Kennsluhugmyndir

Gott er að byrja á upprifjun um brot. Varpa má fram eftirfarandi spurningum til nemenda:

- Hvers konar tölur eru brot?
- Hver er munurinn á almennum brotum og tugabrotum?
- Hvaða hjálpargögn þekkið þið sem gagnlegt er að nota við brotareikning?
- Hvað vitið þið um samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu með brotum?

Nemendur geta rætt hugmyndir sínar í litlum hópum og skráð þær. Þeim má svo safna saman og skrá þannig að þær séu aðgengilegar öllum nemendum, t. d. á spjald til að hengja upp á vegg eða á heimasíðu bekkjarins. Gott getur líka verið að skrá þær í vinnuhefti sitt eða sérstakt stærðfræðihefti eins og minnst var á í leiðbeiningum með tölfræðikaflanum á blaðsíðu 2.

Önnur nálgun er að leggja fyrir eftirfarandi verkefni:
Á myndinni sérðu nokkra fleti sem skipt hefur verið í minni hluta.
Hvaða flötum hefur verið skipt í fjórðunga?
Hverjum þeirra hefur ekki verið skipt í fjórðunga?
Reyndu að skipta þeim í fjóra jafna hluta.
Hvaða flötum er hægt að skipta á fleiri en einn veg í fjórðunga?
Hvaða myndum geturðu ekki skipt þannig að hlutarnir verði jafnir. Hvers vegna er erfitt að skipta þeim nákvæmlega þannig?



Rannsókn sem þessi hjálpar nemendum að styrkja hugmyndir sínar um brot og að $\frac{1}{4}$ getur táknað ólíka hluti.

Gagnlegt er fyrir nemendur að finna fleiri leiðir til að sýna brot. Það má hvetja þá til að finna mismunandi líkön til að tákna brot, t.d. $\frac{1}{5}$.

Það er líka góð þjálfun að telja með brotum.

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{2}{3},\ 2,\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3\ \ldots$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{2}{4},\ 1\frac{3}{4},\ 2,\ 2\frac{1}{4}\ \ldots$$

$$\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1,\ 1\frac{1}{5},\ 1\frac{2}{5}\ \ldots$$

Það má líka nota vasareikni til að skoða talningu með brotum. Ef nemendur hafa aðgang að vasareikni með brotatakka geta þeir borið talningu sína saman við tölurnar sem birtast á skjá vasareiknisins. Til að festa aðgerðina í minni vasareiknisins er ýtt á + 1 ab/c 3 = Þá kemur brotið $\frac{1}{3}$ í glugga vasareiknisins. Ef aftur er ýtt á + 1 ab/c 3 = festist aðgerðin og nægir þá að ýta á = til að halda áfram með talninguna. Nemendur geta spreytt sig á að segja fyrir um hvaða tala kemur næst í glugga vasareiknisins áður en hún birtist og sannreynt svo svar sitt.

Þá er hægt að bera talningu með almennu broti saman við talningu með tugabroti af sömu stærð.

$\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$ 3 0,5 1 1,5 2 2,5 3

Eru þetta sömu tölur?

Þetta er líka hægt að skoða á vasareikni. + 1 ab/c 2 = + 1 ab/c 2 =. Ef notaður er vasareiknir með brotatakka þarf væntanlega að festa aðgerðina á sama hátt. + þegar talið er með tugabrotinu. 0 • 5 = + 0 • 5 = = = ...

Ef notaður er einfaldur vasareiknir nægir að ýta á

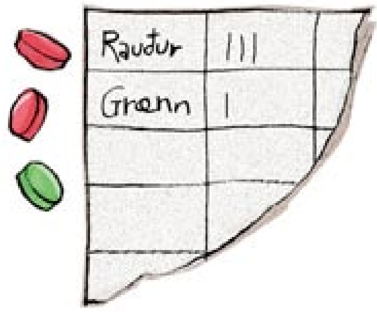
0 • 5 + + = = = ...

Efni kaflans skiptist í stórum dráttum í fjóra hluta. Á fyrstu tveimur síðunum er efni til upprifjunar sem nemendur ættu að geta unnið nokkuð sjálfstætt. Svo tekur við kafli um reikning með almennum brotum. Mikilvægt er að kennari ræði efni hans við nemendur. Þeir þurfa að fá tækifæri til að skýra frá hvernig þeir leysa verkefnin og rökstyðja lausnir sínar. Fyrstu dæmin í hverjum hluta eru orðadæmi. Þau er sett fram til að gefa nemendum tækifæri til að móta sinn eigin skilning á eðli reikninganna sem verið er að kynna. Það er ekki flókið að finna út hve $\frac{1}{4}$ úr pítsu og $\frac{3}{8}$ úr annarri jafnstórri pítsu eru samtals stór hluti úr pítsu. Nemendur sjá væntanlega fyrir sér að $\frac{1}{4}$ úr pítsu er jafn mikið og $\frac{2}{8}$ eða geta notað brotabúta til að finna það út. Það er góður undirbúningur undir að lengja brot og að finna samnefnara fyrir ósamnefnd brot. Á sama hátt koma orðadæmi um margföldun og deilingu áður en talnadæmi eru sett fram.

Næsti hluti er um tengsl almennra brota og tugabrota. Það er líka mikilvægt að kennari ræði efni hans við nemendur og hjálpi þeim að draga saman niðurstöður rannsókna sinna.

Síðasti hlutinn er um reikning með tugabrotum. Þann kafla ættu nemendur að geta unnið nokkuð sjálfstætt. Þeir geta hugsanlega skipt með sér verkum við útreikninga á dæmum um vatnskaup á Spáni og svo borið saman niðurstöður sínar.

Líkur



Markmið

Að nemendur

- geri sér nokkra grein fyrir merkingu líkindahugtaksins og geti notað einfalda líkindakvarða til lýsa líkum á að einhverjir tilteknir viðburðir gerist
- geti metið líkur með tilraunum í einföldum tilvikum svo sem með verplum eða peningum
- geti tengt fjölda flata hvers verpils við líkur á einstökum viðburði
- geti reiknað út líkur í einföldum tilvikum þar sem endanlega margar útkomur koma til greina t.d. í sambandi við spil

Umfjöllun

Í daglegu tali eru notuð ýmis orð sem fela í sér mat á líkum. Notuð eru orð eins og ólíklegt, líklegt, öruggt, ómögulegt um ýmsa viðburði og ýmsar ákvarðanir eru byggðar á mati á líkum. Eitt af því sem ræður miklu varðandi ýmsar ákvarðanir er veðrið. Veðurspá er gott dæmi um eitthvað sem byggt er á vísindalegum mælingum og athugunum og útreikningum á líkum sem grundvallast á þessum mælingum. Þeim mun lengri tími sem spáin nær til þeim mun fleiri eru óvissuþættirnir og líkurnar á að spáin reynist rétt minnkar.

Sumu er hægt að ganga út frá með nokkuð mikilli vissu eins og til dæmis því að það verði fréttir í sjónvarpinu á morgun. Það er þó ekki hægt að segja að það sé alveg öruggt. Það gæti t.d. orðið alvarlegt rafmagnsleysi eða fréttamenn gætu lagt niður störf. Líkurnar á slíku eru ekki miklar en þetta er samt sem áður möguleiki. Það er í rauninni ekki margt sem maður getur sagt fyrir með algjörri vissu og gaman getur verið að velta slíkum spurningum upp með nemendum.

- Hvað er það sem við getum verið alveg viss um að gerist?
- Er eitthvað sem við teljum alveg útilokað að gerist?

Í kaflanum er fyrst notaður kvarði þar sem sett eru inn algeng orð sem notuð eru í daglegu lífi til að lýsa líkum. Þessum kvarða er síðan breytt í tölur á talnabilinu 0–1 en það eru þær tölur sem yfirleitt eru notaðar til að lýsa líkum. Talan 1 stendur fyrir eitthvað sem er öruggt og talan 0 fyrir eitthvað sem ekki getur gerst.

Margar ákvarðanir sem teknar eru í samfélaginu af einstaklingum, fyrirtækjum og stofnunum byggjast á mati á líkum. Matið byggist oft á tíðum á aflestri úr gagnasafni. Ýmsar áætlanir byggja á tölulegum upplýsingum og spám byggðum á líkum á grundvelli þeirra. Má þar nefna áætlanir um íbúaþróun, kosningaspár, líkur á eldgosum og jafnvel fjárhagsáætlanir. Því er brýnt að gera sér grein fyrir hvað lagt er til grundvallar þegar teknar eru ákvarðanir sem að einhverju leyti byggjast á líkum. Stundum eru óvissuþættir margir og grundvöllur ákvarðana því veikur en í öðrum tilvikum getur verið um litla óvissu að ræða og grunnurinn því traustari. Þetta getur verið gaman að ræða við krakka.

Getum við spáð fyrir um íbúafjölda á Íslandi eftir 100 ár af einhverju öryggi? Á hverju getum við byggt spá okkar og hverjir eru óvissuþættirnir? Hvaða máli skiptir tíminn? Getum við spáð fyrir um íbúafjölda árið 2010 af meira öryggi? Hvers vegna?

Þegar fundnar eru fræðilegar líkur á tilteknum viðburði, t.d. því að fá upp slétta tölu þegar venjulegum teningi er kastað er fyrst skoðað hve margar mismunandi tölur er hægt að fá. Þær eru sex. Því næst er skoðað hve margar þeirra eru sléttar tölur. Þær eru þrjár. Líkurnar á að fá slétta tölur eru því 3 af 6 möguleikum eða $\frac{3}{6}$ sem er jafnt og $\frac{1}{2}$ eða 0,5. Jöfnum líkum má því lýsa með tölunni 0,5. Atburður sem er líklegt að gerist fær því hærra gildi en 0,5 en lægra en 1 og atburðir sem er ólíklegt að gerist fær gildi sem er lægra en 0,5 en hærra en 0. Í sumum tilvikum er hægt að reikna út líkurnar nákvæmlega eins og í teningakastinu en í öðrum tilvikum verður alltaf um matsatriði að ræða.

Þó hægt sé að reikna út líkur nákvæmlega er ekki þar með sagt að niðurstöður verði í samræmi við þær þegar út í raunveruleikann kemur. Þegar peningi er kastað eru jafnar líkur á að fá báðar hliðar peningsins út frá fræðilegum líkum. Framkvæmi maður tilraun og kasti peningnum upp 10 sinnum er líklegt að líkurnar á að fá upp skjaldarmerkið verði einhvers staðar á bilinu 0,3–0,7. Séu gerðar fleiri tilraunir er líklegt að líkurnar fari nær fræðilegu líkunum en fremur ólíklegt er að fá út nákvæmlega 0,5 nema gerðar séu mjög margar tilraunir.

Í stað þess að framkvæma tilraunir eins og peninga- og teningakast er hægt að notfæra sér þá möguleika sem töflureiknir gefur á að velja tölur af handahófi úr afmörkuðum fjölda af möguleikum.

Nota má ýmsa töflureikna. Í því dæmi sem hér er tekið er miðað við töflureikninn Excel. Þegar forritið hefur verið opnað er nauðsynlegt af fara í *Tools* og velja þar *Add-Ins* og haka við *Analysis ToolPak*. Þá eru aðgengilegar þær formúlur sem nauðsynlegar eru.

Síðan er ágætt að skrá texta sem lýsir þeirri tilraun sem gera á í efstu línuna t.d. teningakast. Þar fyrir neðan er gott að skrá mögulegar niðurstöður í tilrauninni eins og sýnt er hér fyrir neðan

Teningakast

Tala á teningi	1	2	3	4	5	6
Tíðni						

Nú þarf að setja inn reglu sem velur af handahófi tölur á bilinu 1–6 ef um teningakast er að ræða. Það er gert með því að setja inn í einhvern reit, t.d. A10, eftirfarandi

reglu =RANDBETWEEN(1;6). Síðan má afrita þessa reglu yfir í tilekinn fjölda reita til dæmis frá A10 til A59. Þá fást niðurstöður eins og úr 50 teningaköstum.
Síðan má finna út tíðni hverrar tölu fyrir sig. Tíðnina er ágætt að setja inn í reiti fyrir neðan þá reiti sem gefa til kynna mögulegar útkomur. Það er gert með því að setja eftirfarandi reglu inn í hvern reit =COUNTIF(A10:A59;x) þar sem x stendur fyrir þá útkomu sem er verið að telja hverju sinni og A10:A59 vísar til þeirra reita sem niðurstöður teningakastsins birtast í. Fyrir neðan 1 kemur því reglan =COUNTIF(A10:A59;1) og fyrir neðan 2 kemur =COUNTIF(A10:A59;2) og svo framvegis. Þannig kemur fram tíðni hverrar tölu fyrir sig.

Ef óskað er eftir fleiri niðurstöðum þarf að afrita fyrstu regluna yfir í fleiri reiti og breyta tilvísun í þá reiti í seinni reglunni. Ef breyta á tilrauninni þannig að hún sýni útkomur þegar verpli með 12 hliðar er kastað þá þarf að breyta tölunum í fyrri reglunni þannig að valdar séu af handahófi tölurnar frá 1 upp í 12. Þá er reglan =RANDBETWEEN(1;12).

Í kaflanum eru nokkur verkefni þar sem reynt er að styðja við skilning nemenda á því að það getur verið munur á fræðilegum líkum og raunlíkum. Einnig eru þar verkefni þar sem nemendur eiga að reikna út fræðilegar líkur en reka sig jafnframt á að ekki er hægt að reiða sig á slíka útreikninga. Þetta kemur vel fram í spilinu hærra eða lægra?

Kennsluhugmyndir

Kveikja

Nemendur gera tilraunir og athuganir þar sem upp koma ýmis álitamál varðandi líkur.

Dæmi:

Teningakast.
Spil fyrir tvo. Tveimur teningum er kastað og summa þeirra fundin. Annar þátttakandi fær stig ef upp koma 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12. Hinn ef upp koma 5, 6, 7, 8, 9.
Eru þetta réttlátar reglur?

Spil

Nemendur eru með spilastokk. Þeir draga spil til skiptis úr stokknum. Annar fær stig ef dregið er mannspil en hinn ef ekki er dregið mannspil. Eru þetta réttlátar reglur?

Spilaturn

Góður vinningur er í boði ef þú getur búið til 10 hæða turn úr spilum. Hve miklar líkur telur þú á því að þú fáir vinninginn? Gerðu eina tilraun. Breytist mat þitt? Gerðu nokkrar tilraunir í viðbót. Hvaða áhrif hefur það á mat þitt?

Fötukast

Þú færð vinning ef þú getur hent borðtenniskúlu 7 sinnum í ruslafötu í 10 tilraunum á 5 metra færi.
Næsta dag er borðtennisboltinn týndur og því er ákveðið að nota eigi tennisbolta í stað hans. Ertu sáttur við þessa breytingu? Telur þú að þetta minnki eða auki líkur á vinningi?

Þegar nemendur hafa lokið tilraunum sínum er rétt að ræða þau álitamál sem upp hafa komið. Í framhaldi af því má ræða um líkindakvarða og nemendur geta síðan fengist við viðfansgefnin á blaðsíðu 42–43.

Á blaðsíðu. 44–45 eru ýmis viðfangsefni þar sem nemendur gera tilraunir og bera saman raunlíkur og fræðilegar líkur. Mikilvægt er að nemendur framkvæmi sem flestar tilraunirnar þó ekki sé nauðsynlegt að allir gerir þær allar. Hægt er að setja verkefnin upp sem stöðvavinnu.

Í spilinu *hærra eða lægra* er mikilvægt að nemendur fái spil að vinna með. Þeir þurfa að prófa að spila það nokkrum sinnum áður en þeir fara að skoða það kerfisbundið og reikna út líkur í hvert skipti sem spili er snúið við.

Í vinnubók eru verkefni sem nemendur geta unnið sjálfstætt hver og einn eða tveir og tveir saman. Æskilegt er að þeir fái tækifæri til að framkvæma sjálfir tilraunir eins og þær sem eru á blaðsíðu 20 og 21 í vinnubók.

Þrautir

Markmið

Að nemendur
- tengi saman upplýsingar og beiti rökhugsun
- vinni skipulega og dragi ályktanir

Umfjöllun

Mannfólkið hefur lengi haft gaman af því að glíma við þrautir af ýmsum gerðum. Hér eru á ferðinni vísbendingaþrautir þar sem nemendur þurfa að setja saman upplýsingar. Gott er að hvetja þá til að skrá skipulega tilraunir sínar til að finna lausnir. Í þrautinni um krakkana á lúðrasveitamótinu er heppilegt að búa til töflu til að skrá upplýsingar. Einnig þarf að hvetja nemendur til að prófa sig áfram og taka þá áhættu að hugmyndir þeirra að lausn gangi ekki upp. Þá þurfa þeir að hafa kjark og þor til að halda áfram að leita nýrra leiða. Áherslu ber að leggja á rökhugsun við leit að lausn fremur en rétt svar. Það styrkir oft skilning nemenda að segja öðrum frá lausn sinni og þurfa að rökstyðja hana.

Á Geislavefnum er að finna fleiri áhugaverðar þrautir sem hugsaðar eru fyrir miðstig. Einnig má víða finna þrautir t.d. á Netinu. Nemendur geta oft lesið sér til á ensku og því úr miklu að moða ef leitað er undir leitarorðinu, *brainteasers*.

Kennsluhugmyndir

Nota má viðfangsefni kaflans öll í einu eða skjóta þeim inn í kennsluna eftir því sem kennari telur henta. Nemendur geta glímt við þrautirnar í röð eða valið sér eina til að byrja á. Mikilvægt er að skoða lausnaferlið og rökstuðning nemenda fyrir lausn sinni. Kennari þarf að gæta þess að taka ekki glímuna við þrautirnar frá nemendum og gefa góðan tíma til vangaveltna.

Flatarmyndir

Markmið

Að nemendur geti

- notað formhugtök til að lýsa ýmsum fyrirbrigðum nákvæmlega
- lýst nákvæmlega mismunandi gerðum ferhyrninga og þríhyrninga
- notað hæð og grunnlínu til að finna flatarmál þríhyrninga
- fundið flatarmál marghyrninga og óreglulegra flata með því að skipta þeim upp í þríhyrninga og/eða rétthyrninga

Umfjöllun

Þegar lýsa á ýmsum fyrirbrigðum í umhverfinu gefur oft góða mynd að nota formhugtök. Hugtökin þurfa hins vegar að vera vel skilgreind svo ekkert fari á milli mála. Það er til dæmis mikill munur á því hvort notað er hugtakið ferningur eða ferhyrningur. Hugtakið ferhyrningur segir sáralítið annað en að formið hefur fjögur horn. Hugtakið ferningur segir hins vegar bæði til um hornastærðir og lengd hliðanna. Eigi lýsing hins vegar að vera nákvæm er ekki nóg að nota rétt formhugtök. Ferningar geta til dæmis verið mjög mismunandi stórir og því er ekki nóg að gefa upp lögun ef lýsing á að vera nákvæm. Það þarf líka að tilgreina stærðir. Við nákvæmar lýsingar þarf einnig að nota ýmis staðsetningarhugtök svo sem fyrir ofan, fyrir neðan, við hliðina á, lárétt og lóðrétt.

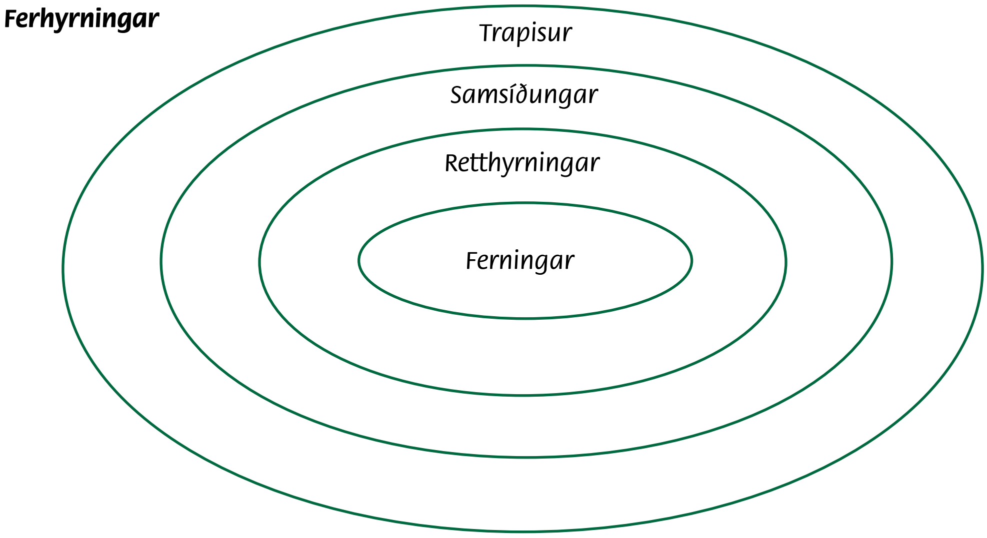
Mikilvægt er að nota rétt hugtök eftir því hvort verið er að lýsa þrívídd eða tvívídd. Þegar lýst er mynd af byggingu eins og er í kaflanum er hægt að nota tvívíð formhugtök en þegar lýsa á þrívíðum hlut þarf að nota þrívíddarhugtök eins og t.d. réttstrendingur eða pýramídi. Á þessu stigi ættu flestir nemendur að geta notað hugtök fyrir mismunandi ferhyrninga og þríhyrninga, greint aðra marghyrninga á grundvelli hornafjölda og sagt til um hvort þeir eru reglulegir eða ekki. Einnig eiga þeir að geta notað rétt algeng þrívíddarhugtök eins og hugtökin teningur, réttstrendingur, kúla, keila og strýta (píramídi).

Verkefnin í fyrri hluta kaflans miða að því að nemendur átti sig á nauðsyn þess að vera nákvæmir og nota formhugtökin rétt. Í hugtakalistanum aftast í bókinni eru öll helstu formhugtök skilgreind. Rétt er að taka fram að ekki eru allir á einu máli um hvað felst í skilgreiningunum og á það t.d. við skilgreininguna á trapisu. Trapisa er oft skilgreind á þennan hátt.

***Trapisa** er ferhyrningur sem hefur annað par mótlægra hliða samsíða.*

Hvað felst í þessari skilgreiningu? Er átt við að það sé einungis eitt par af mótlægum hliðum samsíða eða er nóg að þessu skilyrði sé fullnægt þ.e. það geti líka verið fleiri pör af mótlægum hliðum samsíða. Ef skilyrðið er að það þurfi að vera eitt en það geti verið fleiri þá eru samsíðungar, rétthyrningar og ferningar líka trapisur. Ýmsir stærðfræðingar líta þannig á málið. Það má t.d. sjá á svari á vísindavefnum (http://www.visindavefur.is) við spurningunni: Hvernig er trapisa skilgreind?

Í *Geisla* hefur fram til þessa verið stuðst við þá skilgreiningu að trapisa sé með einungis eitt par af mótlægum hliðum samsíða. Ef notuð er hin túlkunin mætti draga upp mynd eins og þessa af ferhyrningum og tengslum þeirra.



Hér eru samsíðungar, rétthyrningar og ferningar hlutmengi í mengi trapisa, þ.e. þessi form eru líka trapisur því þau uppfylla skilyrðið að hafa eitt par af mótlægum hliðum samsíða. Þetta er gott dæmi um að túlkun á skilgreiningum getur verið álitamál og að ekki er allt óvéfengjanlegur sannleikur innan stærðfræðinnar.

Á bls. 53 er verkefni þar sem fengist er við ummál og flatarmál rétthyrninga. Nemendur byrja á að búa til rétthyrninga með tiltekið ummál og átta sig þannig á að flatarmálið getur verið mjög mismunandi þó ummálið sé hið sama. Síðan búa þeir til rétthyrninga með tiltekið flatarmál og skynja þannig að þegar miðað er við tiltekið flatarmál þá getur ummálið einnig verið mismunandi. Í framhaldi af því má velta fyrir sér hvenær maður fær stærsta flötinn en minnsta ummálið sem getur verið hagnýtt eins og dæmið um húsdýragarðinn sýnir. Í vinnubókinni á bls. 26–27 eru tvö verkefni þar sem fengist er við flatarmál og ummál sem æskilegt er að nemendur glími við í þessu samhengi.

Nemendur hafa kynnst reglunni um það hvernig finna má flatarmál rétthyrninga með því að margfalda saman lengd og breidd. Þeir geta einnig velt fyrir sér hvernig setja má fram reglu um ummál rétthyrninga út frá lengd og breidd þeirra. Verkefni sem þessi er tilvalið að leysa í töflureikni.

Í verkefnum á bls. 54 eiga nemendur að teikna þríhyrninga út frá gefnum upplýsingum. Hér þurfa nemendur að nota gráðuboga og getur þurft að rifja upp með þeim hvernig hann er notaður og einnig þarf að brýna fyrir þeim að gæta fyllstu nákvæmni. Á þessu stigi er ástæða til að leggja mikla áherslu á nákvæmni í vinnubrögðum við hvers kyns mælingar og á það ekki síst við um hornamælingar.

Á blaðsíðu 55 er verkefni þar sem nemendur athuga hliðarlengdir þríhyrninga. Hér er sjónum beint að því að samanlögð lengd tveggja hliða í þríhyrningi verður að vera lengri en þriðja hliðin til þess að þríhyrningur myndist. Nemendur þurfa að hafa pappírsstrimla til að vinna með. Æskilegt er að þeir séu ekki of breiðir og því er gott að klippa strimla sem gerðir eru úr fersentímetrarúðuneti í tvennt.

Í *Geisla 2* voru þó nokkur verkefni þar sem nemendur fundu flatarmál þríhyrninga með því að teikna rétthyrninga utan um þá. Þeir ættu því að hafa fengið nokkuð góða tilfinningu fyrir því að flatarmál þríhyrnings er helmingur af flatarmáli umritaðs rétthyrnings. Hér eru hugtökin grunnlína og hæð kynnt og þau tengd hliðarlengdum umritaðs rétthyrnings. Í framhaldi af því er reglan um flatarmál þríhyrnings kynnt.
Sjálfsagt vakna einhverjar spurningar um hvaða hlið það er sem er grunnlína þríhyrnings og mikilvægt er að nemendur átti sig á að það getur í raun verið hvaða hlið sem er. Hæðin þarf alltaf að vera hornrétt á grunnlínuna sem þýðir að í sumum tilvikum lendir hún utan þríhyrningsins eins og í verkefninu efst á bls. 57.

Í vinnubók eru nokkur verkefni þar sem nemendur fá æfingu í að finna flatarmál ýmiss konar flatarmynda. Þeir þurfa að beita smá útsjónarsemi. Í sumum tilvikum liggur best við að finna flatarmál flatanna sjálfra með því að skipta þeim upp í einingar eða finna hæð þeirra og grunnulínu. Í öðrum tilvikum liggur beint við að finna flatarmál umritaðra rétthyrninga og draga síðan frá þeim flatarmál flata sem eru annaðhvort utan eða innan þeirrar flatarmyndar sem þarf að finna flatarmálið á.

Kennsluhugmyndir

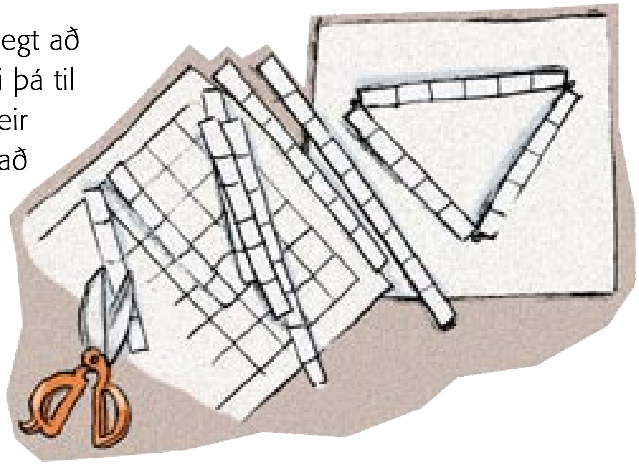
Sem kveikju að viðfangsefnum þessa kafla geta nemendur farið út með stafræna myndavél til að taka myndir af byggingum í nágrenni skólans. Þeir geta farið út í litlum hópum og hver hópur valið sér byggingu til að lýsa. Þeir taka mynd af byggingunni frá því sjónarhorni sem þeir vilja lýsa henni frá. Síðan má prenta út nokkrar myndir og nemendur lýsa þeim eins nákvæmlega og þeir geta. Hóparnir geta haldið því leyndu hvaða byggingu þeir eru að fást við og síðan má kanna hvort hinir hóparnir þekkja byggingarnar á grundvelli lýsinganna.

Góð æfing er að lýsa mynd eins nákvæmlega og unnt er eins og verið sé lýsa henni í gegnum síma. Þá sér sá sem á að teikna eftir lýsingunni ekki myndina sem lýst er. Gott er að skrá lýsinguna hjá sér og fara síðan yfir hana með þeim sem teiknaði eftir henni og velta fyrir sér hvaða viðbótarupplýsingar eru nauðsynlegar til þess að hægt sé að gera nákvæmari eftirmynd.

Myndirnar í verkefni 4 á blaðsíðu 51 eru búnar til úr pappaformum sem fylgja með *Einingu*, námsefni fyrir yngsta stig, og er kjörið að nemendur raði saman pappaformum og lýsi hver fyrir öðrum. Þá gefst einnig tækifæri til að athuga hornasummu þar sem formin mætast og hvað einkennir form sem þekja flöt.

Skemmtilegt heimaverkefni gæti verið að kanna hvaða hugtök fullorðnir nota þegar þeir eiga að lýsa myndum af byggingum eða mynstrum.

Verkefni 9–12 henta vel til paravinnu. Þar skiptir máli að nemendur vinni skipulega og skrái athuganir sínar og niðurstöður og ræði þær sín á milli.



Verkefni 15 er hópvinnuverkefni. Þar er nauðsynlegt að nemendur klippi niður strimla úr rúðuneti og noti þá til að búa til mismunandi þríhyrninga. Einnig geta þeir unnið með bandspotta af tiltekinni lengd og prófað að búa til þríhyrninga með mismunandi hliðarlengdir. Í framhaldi af því má velta fyrir sér hvort flatarmál þríhyrninganna sem hægt er að búa til er mismunandi. Ekki er rétt að gera ráð fyrir að nemendur geti komist að nákvæmum niðurstöðum hvað það varðar en þeir ættu að sjá hvort það er breytilegt eða ekki.

Nemendur ættu sjálfir að geta unnið sig í gegnum verkefnin á blaðsíðu 56–57. Að lokinni vinnu þeirra er æskilegt að draga saman og ræða leiðir við að finna flatarmál þríhyrninga. Nemendur geta farið ýmsar leiðir við að finna flatarmál þríhyrninganna í dæmi 21. Ein leið er að finna flatarmál þríhyrninganna sem eru utan hvítu þríhyrninganna en innan umritaðs rétthyrnings og draga það síðan frá flatarmáli umritaða rétthyrningsins. Einhverjir komast líkast til að því að hér er í raun um að ræða þríhyrninga með grunnlínuna fjórar rúður og hæðina fjórar og flatarmálið er því átta rúður.

Viðfangsefni 24–26 er ætlað að beina sjónum að því að við hönnun garða og útivistarsvæða er margt sem þarf að hafa í huga bæði út frá fagurfræðilegum og efnahagslegum sjónarmiðum. Æskilegt er að nemendur fái að spreyta sig á slíku verkefni og verkefni 26 er dæmi um hvernig afmarka mætti þannig verkefni. Enn betra er að sjálfsögðu að gefa nemendum tækifæri til að hanna útivistarsvæði eða garð í eigin byggðarlagi. Yfirleitt er hægt að fá góð kort og uppdrætti hjá skipulagsyfirvöldum í viðkomandi byggðarlagi og þar má sjá hvaða svæði koma til greina. Einnig getur verið forvitnilegt að skoða kort af svæðum sem búið er að skipuleggja og velta fyrir sér táknum, mælikvörðum, vegalengdum og ýmsum stærðum.

Viðfangsefnin í lok kaflans eru hugsuð sem samantekt og könnun á hvort nemendur geti beitt þekkingu sem þeir hafa öðlast í gegnum vinnu með viðfangsefnin í kaflanum.

Talnafræði

Markmið

Að nemendur

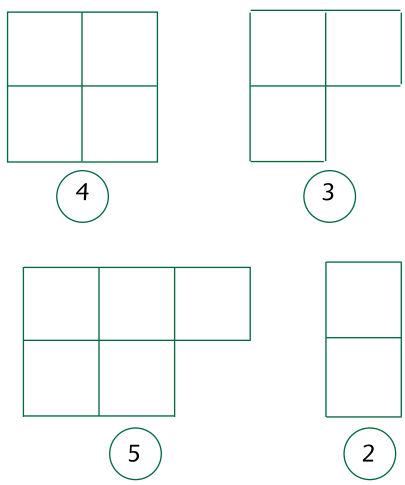
- geti greint mynstur og regluleika
- sýni úthald og einbeitingu við rannsóknir á tölum og skráningu á niðurstöðum
- þekki hugtökin frumtala, ferningstala og þáttur og geti sett fram skilgreiningar á þeim
- nái valdi á að þátta tölu
- sýni gott vald á deilingu og skilji hvað felst í deilanleika

Umfjöllun

Í þessum kafla er fengist við nokkur stærðfræðileg atriði sem eru ný fyrir flestum nemendum. Meginviðfangsefni eru frumtölur, þættir talna, ferningstölur, ferningsrætur og deilanleiki. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að rannsaka tölur, velta fyrir sér sambandi þeirra og gera grein fyrir niðurstöðum sínum. Hlutbundin nálgun gefur nemendum möguleika á að dvelja við viðfangsefnin og auðveldar umræður um þau hugtök og hugmyndir sem unnið er með. Mikilvægur þáttur stærðfræði er að skoða mynstur og regluleika. Nemendur þurfa að rækta með sér þann eiginleika að rýna í tölur og greina samhengi þeirra. Það krefst oft þolinmæði og úthalds að leita. Sumum hentar vel að vinna með öðrum en aðrir vilja frekar vinna út af fyrir sig. Því þarf að skapa tækifæri fyrir hvort tveggja.

Frumtölur eru tölur sem hafa aðeins tvo þætti, t.d. hefur talan sjö 1 og 7 sem þætti. Talan einn er ekki frumtala því hún hefur aðeins einn þátt, þ.e. töluna 1. Ef frumþættir tölu eru margfaldaðir saman fæst talan sjálf. Oft má búa til nýjar tölur með því að margfalda hluta af frumþáttunum saman. Frumþættir tölunnar tólf eru 1, 2, 2 og 3 því ef þessar tölur eru margfaldaðar saman fæst 12. Tölurnar 4 og 6 ganga líka upp í 12 og eru því líka þættir í 12. Ekki er gert ráð fyrir að nemendur nái fullu valdi á þessum hugtökum en kynnist þeim og geti ákvarðað hvort tveggja stafa tala er frumtala og fundið nokkra þætti í tölu.

Ferningstölur má skoða með því að prófa að raða fjölda og finna út hvaða fjölda má raða í ferning. Eingöngu er notað hugtakið ferningstala og talað um að finna hliðarlengdir í ferningi. Hugtakið ferningsrót er ekki notað en kennarar geta valið að nota það sjálfir. Mikilvægt er að nemendur læri að nota þá möguleika sem vasareiknar bjóða upp á. Einn af þeim er að finna ferningsrót. Það getur verið breytilegt eftir vasareiknum hvort ýtt er á ferningsrótartakkann á undan eða eftir tölunni.



Deilanleiki talna er mjög mismunandi og oft kemur sér vel að þekkja leiðir til að greina hann. Þáttun er ein leið til að átta sig á hvaða tölur ganga upp í einhverja tiltekna tölu. Heppilegt getur verið að búa til þáttatré og góð æfing er að skrá allar þær tölur sem mynda má út frá því. Áhugavert verkefni gæti verið að finna út upp í hvaða tveggja stafa tölu flestar tölur ganga. Áður hafa nemendur skoðað hvernig nota má þversummu til að greina hvort tölur eru í þrí-, sex- eða níu-töflunni. Þeir þekkja líka að tölur í tví-, fjór-, sex- og áttatöflunni eru alltaf sléttar og að tölurnar í fimmtöflunni enda alltaf á núll eða fimm. Ágætt getur verið að rifja þetta upp og annað sem nemendur þekkja á þessu sviði. Í námsbókinni á bls. 65 er leitað skýringa á því hvers vegna þversumma talna í níutöflunni er alltaf níu. Skoðuð eru tvö dæmi en gott getur verið að skoða fleiri. Hér fylgir eitt dæmi til viðbótar.

Ólafía skoðar töluna 483. Þversumman er 15 og 9 gengur ekki upp í 15.
Hún prófar að deila með níu í 483 $400 + 80 + 3$
Hún deilir í áföngum og byrjar á 400 $4 \cdot 100$
Þegar deilt er með 9 í 100 verður afgangur 1, því $9 \cdot 11 = 99$
Þegar deilt er með 9 í 400 verður afgangur því 4
Næst deilir hún í 80 $8 \cdot 10$
Þegar deilt er með 9 í 10 verður afgangur 1, því $9 \cdot 1 = 9$
Þegar deilt er með 9 í 80 verður afgangur því 8
Þá eru þrír eftir í einingasætinu. Afgangur af tugum var 8 og hundruðum 4.
Alls á því eftir að deila $3 + 8 + 4 = 15$
Það má því taka 9 einu sinni enn af og afgangur verður 6.

Kennsluhugmyndir

Námsbókin hefur að geyma mörg rannsóknarverkefni sem mikilvægt er að nemendur fái góðan tíma til að glíma við. Gott er að hvetja þá til að skoða meira en lagt er til í verkefnunum þannig að þeir fái betri yfirsýn. Niðurstöður þarf að ræða og meginniðurstöðum má safna saman og setja á veggspjald þannig að nemendur séu minntir á þær áfram.

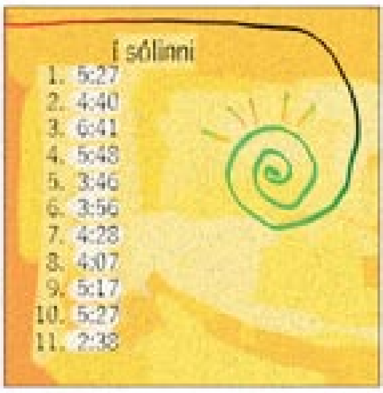
Í upphafi gæti verið gaman að ræða hvaða hugmyndir nemendur gera sér um hugtakið talnafræði. Verkefnin í kaflanum ættu að fylla inn í mynd nemenda af þessu hugtaki og því gott að nemendur skrifi við upphaf og lok kaflans um skilning sinn á hugtakinu.

Verkefnin á blaðsíðum 60–61 henta ágætlega til sjálfstæðrar vinnu í pörum eða sem einstaklingsverkefni. Á blaðsíðu 62 er fjallað um ferningstölur. Hugtakið ferningstala má ræða í byrjun með hópnum. Hægt er að skoða saman hvernig raða má fjöldanum 16 í ferning með hliðarlengdina 4. Nemendur geta síðan unnið sjálfstætt að könnun á tölunum upp í 100 og jafnvel farið hærra. Ferningsrótartakkann má kynna fyrir nemendum eftir því sem þeir ljúka rannsóknum sínum á ferningstölunum. Þá gefst tækifæri til að kanna óformlega skilning þeirra á þessu hugtaki.

Í umfjöllun um þætti talna getur verið gott að biðja nemendur að finna þætti nokkurra talna. Velja má mismunandi tölur eða láta þá draga og skoða síðan niðurstöður. Í framhaldi af þessari vinnu má skoða þáttatré sem leið til að skoða skipulega hvernig finna má alla þætti sérhverrar tölu. Hvetja má nemendur til að búa til fleiri sams konar verkefni og prófa fleiri tölur í dæmum 11–20.

Deilanleiki er viðfangsefni á blaðsíðum 65–67. Reynt er að gefa nemendum tækifæri til að efla skilning sinn á tölum og reikniaðgerðinni deilingu með því að þeir rannsaki og beiti niðurstöðum sínum á næstu viðfangsefni og við deilingu. Megináherslan liggur á rannsóknarnálgun og fyrir suma nemendur getur verið heppilegra að gera fleiri sams konar rannsóknir en að fara í gegnum allar þær rannsóknir sem stungið er upp á.

Geisladiskar



Markmið

Að nemendur

- skoði hvernig daglegt umhverfi getur verið uppspretta stærðfræðilegra viðfangsefna
- fáist við tímaútreikninga
- skoði hlutföll í hönnun og greini myndbyggingu
- sýni kunnáttu í að reikna flatarmál
- nýti sér tölulegar upplýsingar við eigin hönnun

Umfjöllun

Tónlist er ríkur þáttur í lífi flestra, ekki síst barna og unglinga. Margir 12 ára krakkar eiga sér uppáhaldshljómsveit og oft spila þeir sama diskinn aftur og aftur. Tónlist er því viðfangsefni sem getur vakið áhuga margra. Tónlistarsmekkur fólks er oft ólíkur og það gefur oft tilefni til mikilla rökræðna meðal barna.

Á geisladiskum er yfirleitt tilgreindur sá tími sem tekur að spila hvert lag. Nemendur þurfa að þekkja uppbyggingu mælikerfis okkar. Það er oft talað um 3 mínútu en hvers vegna er ekki hægt að skrifa það sem 3,5? Verkefnin í þessum kafla gefa tilefni til að skoða samhengi milli klukkustunda, mínútna, sekúndna og sekúndubrota.

Í kaflanum er hönnun líka skoðuð. Í verkefnum er sjónum beint að skiptingu flatar og hlutföllum. Einnig er áhugavert að skoða flutninga. Dæmi má finna um hliðrun, speglun og snúning. Nauðsynlegt er að kennari noti rétt hugtök þegar hann ræðir við nemendur um verk þeirra og að þeir séu hvattir til að nota þau líka. Varðandi flatarmálsútreikninga og hönnun á geisladiskahulstri er gott að ræða um nákvæmni í mælingum. Gert er ráð fyrir að nemendur velti fyrir sér því efnismagni sem þarf í eitt geisladiskahulstur og hve mörgum má ná úr stærðinni A2. Þá þurfa þeir að gera sér grein fyrir hvernig hagkvæmast er að sníða hulstrið. Gagnlegt gæti verið fyrir nemendur að skoða ýmis geisladiskahulstur. Gott er að þeir hafi bæði aðgang að hulstrum sem eru eingöngu úr pappa og svo plasthulstrum þar sem myndin er sett laus innan í. Í flestum skólum ættu að vera til margs konar hulstur en vettvangsferð í verslun eða leit á Netinu er líklegri til að kveikja áhuga nemenda á að skoða hönnun og velta myndbyggingu fyrir sér.

Kennsluhugmyndir

Ýmsar leiðir má fara við að byggja upp kennsluferli í kringum þennan kafla. Ástæða er til að hvetja til sjálfstæðrar vinnu nemenda og reyna að fá þá til að halda áfram með viðfangsefnin. Kjörið heimaverkefni er að nemendur skoði geisladiska og jafnvel plötuumslög sem til eru heima. Þeir geta skoðað lengd laga, velt fyrir sér hve lengi þeir væru að hlusta á tiltekið lag eða disk hundrað sinnum. Einnig er greining á hönnun hulsturs eða umslags gott verkefni.

Í framhaldi af þessu verkefni gætu nemendur kynnt sér ýmislegt, t.d. verðmyndun á diskum, kostnað við upptökur á lögum, skipulagningu tónlistarhátíða og hönnun á geisladiskahulstrum, veggspjöldum og bókarkápum. Margir nemendur eru áhugasamir um að taka viðtöl og tölvupósturinn hefur gert það að verkum að mun aðgengilegra er að senda fyrirspurnir. Flest fyrirtæki eru tilbúin að taka á móti nemendahópum og gaman getur verið fyrir nemendur að fara á eigin vegum í litlum hópum í heimsókn í fyrirtæki til að kynna sér viðfangsefnin sín og afla sér upplýsinga.

Hlutföll

Markmið

Að nemendur

- noti þekkt viðmið í umhverfi sínu til að áætla stærðir
- öðlist skilning á hlutfalli sem margfeldissambandi
- beri saman hlutföll
- finni hlutfall milli gefinna stærða
- stækki og minnki gefnar stærðir í réttum hlutföllum

Umfjöllun

Við allt stærðfræðinám þróast skilningur á hlutföllum. Þegar lítil börn skipta einhverju jafnt á milli sín eru þau að skipta í réttu hlutfalli. Þegar finna þarf hve mikið fimm blýantar kosta ef vitað er hvað einn blýantur kostar þarf líka að finna hlutfall. Hlutfallsleg hugsun þroskast þegar nemendur öðlast skilning á margföldun og deilingu. Hlutföll tengjast líka rúmfræði, mælingum, almennum brotum, tugabrotum, prósentum, algebru, tölfræði, líkindum og mörgu fleiru. Skilningur á tugakerfinu byggist jafnframt á hlutfallslegri hugsun þar sem tugakerfið er byggt á hlutfallasambandi. Nemendur hafa því verið að fást við hlutföll alveg frá því þeir byrjuðu að beita stærðfræðilegri hugsun.

Skilningur á hlutföllum þjálfast meðal annars við að fást við verkefni

- sem reyna á hlutfallslega hugsun
- sem örva tilfinningu fyrir hlutfallasambandi
- um skiptingu þar sem fengist er við raunverulegar aðstæður
- um sameiningu hluta úr heild
- þar sem nota þarf ræðar tölur, bæði heilar tölur og brot
- um breytingu á fjölda og magni

Skilningur á hlutföllum þróast á löngum tíma. Hann kemur ekki af sjálfu sér en með því að glíma við verkefni sem reyna á hlutfallslega hugsun styrkist hann. Að geta beitt hlutfallslegri hugsun felur ekki bara í sér að skilja hvað hlutfall er, heldur líka að geta borið saman hlutföll, spáð fyrir um hvernig eitthvað þróast í réttu hlutfalli og fundið stærðir í réttu hlutfalli. Mikilvægt er að viðfangsefnin hafi merkingu fyrir nemendur og þau fjalli um eitthvað sem nemendur eiga auðvelt með að gera sér mynd af. Nærtækast er að skoða hlutföll í umhverfi okkar, bæði í náttúrunni og manngerðu umhverfi. Hvers kyns viðfangsefni sem nemendur fást við í daglegu lífi sínu eru líka góð rannsóknarefni.

Þróun hlutfallaskilnings má lýsa með eftirfarandi hætti:

- Óformlegur skilningur á hlutfalli (innsæi). Nemendur geta leyst einföld hlutfalladæmi hlutbundið.
- Skilningur á mismunandi magni. Nemendur nota samlagningu í þrepum til að finna hlutfall.

- Skilningur á margfeldisáhrifum. Nemendur geta notað margföldun og deilingu til að finna hlutfall.

Hér eru gefin dæmi um hugsanlegar lausnir nemenda á verkefni 26 á bls. 77.

> Í hvalaskoðunarferð sáust 5 hnísur og 15 hrefnur. Gert er ráð fyrir að í næstu ferð sjáist sama hlutfall af hnísum og hrefnum.
> Hvað verða hrefnurnar margar ef 7 hnísur sjást?
> En ef 12 hnísur sjást?

Nemendi sem hefur óformlegan skilning á hlutfalli gæti hugsanlega leyst verkefnið með því að gera sér líkan af því, með teikningu eða hlutum. Hann gæti komið auga á það (t. d. með því að para saman) að 3 hrefnur eru á móti hverri hnísu. Fyrir hverja hnísu sem hann bætir við, bætir hann því við 3 hrefnum.

Nemandi sem skilur hlutfall sem mismunandi magn myndi væntanlega leggja saman í þrepum. Til að finna hve margar hrefnur verða á móti 12 hnísum gæti hann hugsanlega reiknað:

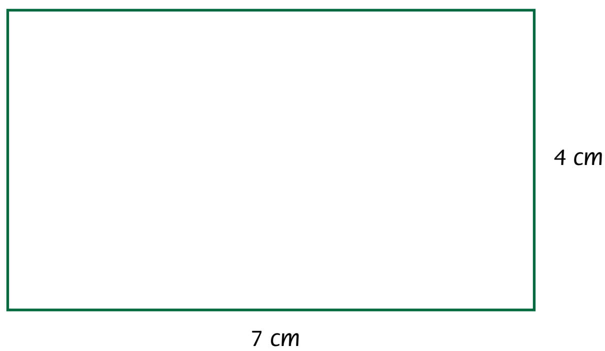
5 – 15
10 – 30
1 – 3
2 – 6

$30 + 6 = 36$

Nemandi sem skilur hlutfall sem margfeldi myndi skilja sambandið milli hlutfallanna þannig að hrefnurnar séu þrisvar sinnum fleiri en hnísurnar og því margfalda fjölda hnísa með þremur til að finna fjölda hrefna.

Mikilvægt er að örva nemendur til umræðna um rannsóknir sínar á hlutföllum. Þegar þeir skoða til dæmis hvort tvær myndir eru teiknaðar í sömu hlutföllum er mikilvægt fyrir nemendur að ræða hvaða viðmið þeir styðjast við og rökstyðja hvernig þeir komust að niðurstöðu. Við lausn á eftirfarandi verkefni myndi nemandi sem ekki hefur öðlast skilning á hlutföllum sem margfeldissambandi álykta að lengja þyrfti báðar hliðarnar um jafn marga sentímetra þ. e. 2 cm og fá því að lengd rétthyrningsins ætti að vera 9 cm.

> Teiknaðu annan rétthyrning í sama hlutfalli og rétthyrningurinn á myndinni. Breidd hans á að vera 6 cm. Hvað þarf hann að vera langur til að hlutfallið haldist?



Til að rökstyðja niðurstöðu sína þarf nemandi að útskýra hvaða viðmið hann notaði til að finna lausn sína. Hann myndi væntanlega segja að það ætti að bæta jafn miklu við báðar hliðar. Nemandi sem hefur skilið að þarna er um margfeldissamband að ræða myndi nota annan rökstuðning. Hann gæti bent á að helmingur breiddarinnar bættist við og því ætti líka að bætast við helmingur lengdarinnar. Hann gæti líka bent á að breidddin væri margfölduð með $1\frac{1}{2}$ og því þyrfti að margfalda lengdina með $1\frac{1}{2}$. Umræður um ólík viðmið hjálpa báðum til að skerpa skilning sinn á viðfangsefninu. Sá sem ekki hefur áttað sig á hlutfallinu gæti hugsanlega komið auga á það með því að reyna að skilja rökstuðning bekkjarfélaga síns. Hinn nemandinn styrkir skilning sinn með því að þurfa að gera öðrum grein fyrir hvernig hann hugsaði.

Verkefni um hlutföll geta reynst nemendum miserfið eftir því hvert samhengið er og hversu auðvelt er að gera sér mynd af hlutfallinu. Það sem hefur áhrif á hversu auðvelt nemendum reynist að leysa verkefni um hlutföll er

- samhengi í texta
- talnasamband
- fjöldi

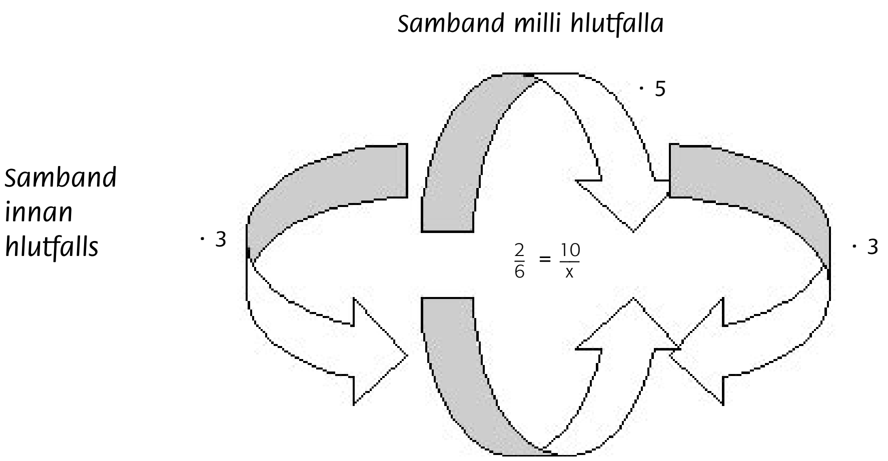
Innbyrðis samband þátta sem verið er að leita að hefur líka áhrif á hversu auðvelt viðureignar verkefnið reynist. Ef annar þátturinn er heiltölumargfeldi af hinum reynist nemendum auðveldara að leysa verkefnið en ef ekki er um heiltölusamband að ræða.

Í eftirfarandi verkefni er heiltölusamband bæði innan hlutfalls og milli hlutfalla ($2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$).

> Jónas blandar ávaxtadrykk. Í uppskriftinni eru 2 dl af mysu og 6 dl af appelsínusafa. Hann ætlar að nota 10 dl af mysu. Hve mikinn appelsínusafa þarf hann?

Hér er sambandið milli hlutfalllanna heiltölusamband ($2 \cdot 5 = 10$) og því auðvelt að margfalda sex með fimm. Hér er líka heiltölusamband innan hlutfallsins þar sem þrisvar sinnum meira þarf af appelsínusafa en mysu. Þess vegna er líka hægt að finna lausnina með því að margfalda tíu með þremur. Ef Jónas ætlaði að nota 7 dl af mysu er ekki lengur heiltölusamband milli hlutfallanna. Þá er nærtækast að nýta sér sambandið innan hlutfallsins og margfalda sjö með þremur.

Sambandi milli þátta í verkefninu má lýsa með eftirfarandi skýringarmynd.



Í kaflanum eru verkefni um pítsu uppskrift.

4 dl hveiti
1 dl vatn
$1\frac{1}{2}$ tsk. ger
1 msk. olía
$\frac{3}{4}$ tsk. salt

Fyrsta verkefnið er um að þrefalda uppskriftina og ætti því að reynast nemendum auðvelt þar sem einungis þarf að margfalda með heilli tölu. Í öðru verkefninu þarf að stækka uppskriftina þannig að nota þurfi 6 dl af hveiti. Nú er ekki um heiltölusamband að ræða milli hlutfalla og því flóknara að finna hve mikið þarf af hinum efnunum. Sambandið milli hveitis og vatns er 4:1 og því heiltölusamband innan hlutfallsins. Það er því auðvelt að reikna að það þarf fjórum sinnum minna vatn en hveiti. Það er hins vegar ekki heiltölusamband milli 4 og $1\frac{1}{2}$ og því flóknara að reikna það. Mikilvægt er að nemendur reyni sig við þessi verkefni og leysi þau sem þeir ráða við. Pítsuverkefnin ættu að reynast flestum nemendum auðveld og í þeim felst ekki mikil ögrun fyrir nemendur sem komnir eru á stig óhlutbundinnar hugsunar. Fyrir þá sem skemmra eru á veg komnir getur verið gagnlegt að gera sér töflu líkt og Kári gerði. Það er gott að þekkja leiðir til að auðvelda sér útreikninga á hlutföllum og því gagnlegt að kynnast því hvernig tafla sem þessi getur komið að gagni.

Kaflinn byrjar á verkefni um að áætla stærðir út frá þekktum viðmiðum. Nemendur vita nokkurn veginn hve hár fullorðinn maður er og geta því notað það sem viðmið til að áætla hæð manngerðra hluta á myndinni.

Verkefni um A4 blöð á bls. 72 er rannsókn sem hugsuð er til að hjálpa nemendum að koma auga á rétt hlutfall og auðvelda þeim að leysa verkefnin sem á eftir koma. Blöð í A - stærðum eru þannig gerð að þegar þau eru helminguð helst hlutfallið milli lengdar og breiddar og því eru þau heppileg til slíkrar rannsóknar.

Kennsluhugmyndir

Áður en byrjað er á kaflanum getur verið gott að fara í gönguferð um nágrenni skólans og áætla hæð mannvirkja í nánasta umhverfi hans. Þá þarf að finna viðmið sem geta hjálpað til við að áætla stærðir. Hvað er stöðumælir eða girðingastaur hár? Get ég notað eigin líkama til að giska á það? Hvað nær hann mér hátt? Hve stór hluti er það af hæð minni? Á sama hátt má áætla hæð skólans. Hve mörgum sinni hærri en ég er hann?

Námsgagnastofnun hefur gefið út myndband sem nefnist *Undraheimur stærðfræðinnar.* Það getur verið góð kveikja að vinnunni við þennan kafla að skoða það. Þar er umfjöllun um hlutföll í náttúrunni og mannvirkjum, tónlist og myndlist. Áhugavert er að skoða fyrst hluta úr myndbandinu og ræða það sem þar er til umfjöllunar. Seinna má svo taka annan hluta og ræða efni hans og bera saman við það sem nemendur hafa verið að fást við. Það getur líka verið gagnlegt að skoða myndbandið þegar nemendur hafa lokið við kaflann og ræða hvernig það tengist efni hans. Væntanlega verða þá til hugmyndir að spennandi viðfangsefnum sem hægt væri að vinna til dæmis í samráði við mynd- eða tónmenntarkennara.

Verkefnin í kaflanum eru öll þess eðlis að nauðsynlegt er fyrir nemendur að ræða við aðra um hvernig þeir leysa þau. Það getur hentað vel að vinna tveir til þrír saman. Þá geta nemendur ef til vill skipt með sér verkum við að finna lausn og borið svo lausnir sínar saman. Þetta á sérstaklega við um verkefni um götumynd sem er á bls. 70–71 og fána á bls. 74–75.

Það á við um verkefnin í þessum kafla, líkt og flest önnur, að kennari þarf að ræða efni hans við nemendur. Þeir þurfa að fá tækifæri til að skýra hvernig þeir leystu verkefni sín og einnig hlusta á rökstuðning annarra. Þetta getur gerst í bekkjarumræðum og einnig í minni hópum þar sem kennari ræðir við nokkra einstaklinga. Þá fær kennari líka tækifæri til að átta sig á hver skilningur nemenda á viðfangsefninu er og getur þá tekið afstöðu til þess hvaða verkefni hentar að leggja næst fyrir nemendur.

Hér fylgja nokkur verkefni um hlutföll sem hægt er að leggja fyrir nemendur. Þau fyrstu eru frekar einföld. Seinni liðurinn í sumum þeirra er erfiður og ættu nemendur sem leysa verkefnin í kaflanum fyrirhafnarlítið að geta leyst þá ásamt dæmunum í seinni hlutanum.

1. Hannes hefur gaman af að lesa. Hann les einn kafla á um það bil 30 mínútum. Hvað er hann lengi að lesa bók með 14 köflum ef gert er ráð fyrir að allir kaflarnir séu álíka langir?

2. Bíll eyðir 10 lítrum af bensíni á 120 kílómetrum. Hvað eyðir hann mörgum lítrum á 360 kílómetrum? Hvað eyðir hann miklu á 100 km?

3. Sex menn byggja hús á þremur dögum. Hvað þyrfti marga menn til að byggja húsið á einum degi ef gert er ráð fyrir að allir vinni á sama hraða?

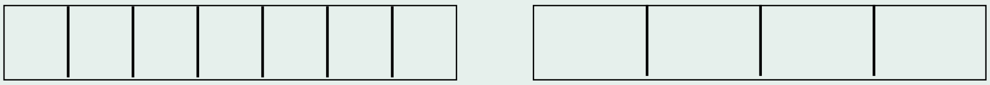
4. Hanna og Þór eiga samtals 32 kubba. Þór á þrisvar sinnum fleiri kubba en Hanna. Hvað á hvort þeirra marga kubba?

5. Ef þrjú súkkulaðistykki kosta 75 krónur, hvað kosta þá 12 stykki?

   En 13 stykki?

6. 15 kubbum er skipt á milli tveggja barna í hlutfallinu 2:3. Hvað fær hvert þeirra marga kubba?

7. Tveir krakkar í þriðja bekk voru að bera þessar myndir saman. Sara sagði að $\frac{7}{7}$ væri meira en $\frac{4}{4}$ af því að það eru fleiri hlutar. Sigurþór sagði að $\frac{4}{4}$ væri meira af því að hlutarnir eru stærri. Hvað finnst þér?



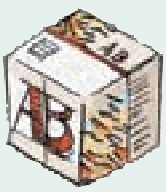
8. Petra tók pakka af kókómjólk ($6 \cdot \frac{1}{4}$ l) með sér í útilegu. Hún kom með $\frac{2}{3}$ hluta af honum til baka. Hve mikla kókómjólk kom hún með heim?

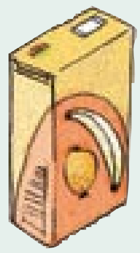
   Hér sérðu tvö ólík svör.
   Alda: $1\frac{1}{2}$ lítra
   Björn: 4 pakka

   Hvort svarið telur þú vera betra? Rökstyddu svar þitt.

9. Hvort er hagstæðara að kaupa morgunkorn í 200 g pökkum eða 500 g pökkum? Rökstyddu svar þitt.

   200g kosta 175 kr.





   500g kosta 425 kr.

   Dag nokkurn var 10% afsláttur af 200 g pökkum. Hvort var þá hagstæðara að kaupa?

10. Þrír vinir fóru í bíó. Þeir borguðu samtals 2250 krónur.
    Hve mikið kosta þá átta miðar?

    Hve mikið kostar fyrir alla krakkana í bekknum þínum að fara í bíó miðað við þetta verð? Hvað kostar það ef veittur er 10% hópafsláttur?

11. Björg er að undirbúa afmælisveislu. Hún ætlar að blanda ávaxtadrykk og miðar við að tveir lítrar dugi fyrir 3 krakka. Hve mikið þarf hún að blanda af drykk fyrir sig og 15 gesti?

    Björg notar appelsínusafa, mysu og gosvatn í safann. Hún notar 1 hluta af mysu á móti 2 hlutum af appelsínusafa og 2 hlutum af vatni. Hve mikið þarf hún af hverri tegund af vökva?

    Hún ætlar að baka 6 pítsur. Hve stóran hluta úr pítsu fær þá hver krakki? Hvað eru það margar sneiðar ef hver pítsa er skorin í 8 sneiðar?

Mynstur og algebra

Markmið

Að nemendur

- geri sér grein fyrir gildi jafnaðarmerkisins
- þekki merkin $\leq$ og $\geq$ gildi þeirra
- þjálfist í að greina mynstur og bæta við þau
- hafi orðað almenna reglu um vaxandi mynstur með fastri aukningu, skráð hana sem jöfnu og teiknað graf hennar
- geri sér grein fyrir hvernig nýta má talnalínu til að leysa jöfnur

Umfjöllun

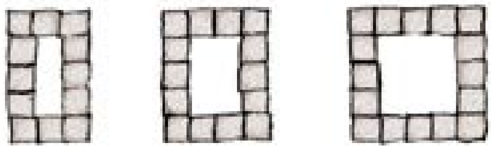
Stærðfræðileg hugsun byggist á að geta séð mynstur og skipulag í raunverulegum fyrirbrigðum og alhæft um þau. Það er nauðsynlegt að ræða athuganir sínar á regluleika til að verða síðar fær um að skrá þær á táknmáli algebrunnar. Rannsóknir á mynstrum og alhæfingar út frá þeim eru góður undirbúningur fyrir að nota bókstafi sem breytur.

Listina að alhæfa, þ. e. að fara frá hinu sértæka til hins almenna, læra börn smám saman með máltökunni. Bíll er alhæfing fyrir allar gerðir af bílum en ekki bara heiti á bílnum hennar mömmu eða rauða leikfangabílnum sem barnið leikur sér að. Á sama hátt læra börn smám saman ýmsar almennar reglur sem gilda í stærðfræði út frá rannsóknum á einstökum tilvikum. Þegar barn uppgötvar að $2 + 3 = 3 + 2$ og að $5 + 8 = 8 + 5$ gerir það sér grein fyrir að ekki skiptir máli í hvaða röð tölur eru lagðar saman. Endurtekin slík reynsla hjálpar því að átta sig á að víxlregla gildir almennt um samlagningu. Ef nemendum er einungis sýnt eitt dæmi til að kynna fyrir þeim almenna reglu er hætt við að þeir geri sér ekki grein fyrir að reglan gildir ekki bara um þetta eina dæmi heldur almennt um öll dæmi af sömu gerð.

Í umhverfi okkar, bæði náttúrulegu og manngerðu, má alls staðar finna regluleika. Maðurinn virðist alltaf leitast við að skapa regluleika á sambærilegan hátt og náttúran. Rannsókn á mynstrum í umhverfinu er góð þjálfun í að greina regluleika og setja fram alhæfingar um hann. Með því að útskýra mynstur með orðum þjálfast nemendur enn frekar í að greina þau og nota tungumálið til að tjá skipulag mynstursins stærðfræðilega. Börn búa sér til reglur þegar þau leika sér, þau endurtaka hlutina eftir ákveðnu mynstri, raða perlum, byggja úr kubbum, sandi og fleiru eftir eigin skipulagi. Þau öðlast því snemma reynslu af alhæfingu þó að þau geri sér ef til vill ekki grein fyrir því sjálf. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að byggja á þessari reynslu sinni þegar þeir læra um táknmál algebrunnar.

Í kennarabók með *Einingu 6* og kennsluleiðbeiningum með *Geisla 1A, Geisla 1B* og *Geisla 2* er umfjöllun um mynstur og algebru sem gagnlegt getur verið að kynna sér.

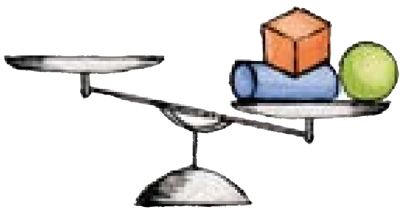
Meginháherslan í kaflanum er á að nemendur þjálfist í að greina mynstur og skrá almenna reglu um þau. Þeir hafa áður kynnst hvernig nota má bókstafi sem breytur og þjálfast í að greina mynstur og skrá það. Viðfangsefnin felast í að greina reglu sem gildir um mynstur, halda áfram með það, orða regluna og skrá svo með táknmáli. Þá eru nemendur hvattir til að skrá athuganir sínar skipulega í töflu og hnitakerfi. Að lokum bera þeir skráningu sína saman við útreikninga með eigin reglu. Með slíkum rannsóknum og samanburði leggja nemendur grundvöll að skilningi sínum á fallhugtakinu og hvernig skrá má jöfnu sem graf.



Beð 1 Beð 2 Beð 3

Þegar regla sem gildir um mynstur er fundin er mikilvægt að skoða hvert þrep í mynstrinu til að greina hver breytingin er. Fyrsta þrepið er grunneiningin og það sem bætist við í hverju þrepi fer eftir ákveðinni reglu sem erfitt getur verið að greina nema skoða hvert þrep fyrir sig. Ef dæmi um blómabeð á síðu 81 er skoðað getur verið erfitt að átta sig á hver grunneiningin er. Á myndinni sést að það bætast tvær hellur við í hverju þrepi. Í beði 1 eru 12 hellur, beði 2 eru 14, í beði 3 eru 16 o.s.frv. Grunneiningin er því 10 hellur. Ef n táknar númer myndar verður reglan 10 + 2n eða 2n + 10. Verkefni í vinnubók eru hugsuð til að hjálpa nemendum að vinna skipulega að því að finna regluna og er því æskilegt að vinna þau samhliða verkefnum í grunnbókinni.

Í upphafi kaflans eru nokkrar skálavogir til að minna á að til að jafnvægi náist þarf að vera jöfn þyngd báðum megin á voginni en það þurfa ekki endilega að vera sömu hlutir. Það gildir einnig um jöfnu að sama stærð þarf að vera báðum megin við jafnaðarmerkið þó hún sé ekki táknuð á sama hátt. Þá eru merkin $\leq$ og $\geq$ kynnt. Nemendur þekkja vel merkin $<$ og $>$ og hafa vanist notkun þeirra. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir muninum á þessum merkjum. Þeir þurfa líka að átta sig á að jafnaðarmerkið er tákn um að jafnvægi sé milli beggja hliða jöfnunnar. Það má því ekki nota nema sama stærð sé beggja megin við það.



Á bls. 83 eru fleiri verkefni um skálavogir. Nemendur þurfa að finna þyngd þeirra hluta sem eru á voginni með því að bera saman við lóðin sem notuð eru. Hér þarf líka að setja fram almenna reglu sem gildir um jafnvægið, bæði með orðum og táknmáli. Áhersla er fyrst og fremst á að rannsaka samhengi og tákna það á táknmáli stærðfræðinnar. Nemendur ættu að geta leyst jöfnurnar með því að rekja sig áfram að lausn þó ekki sé gert ráð fyrir að allir geti það.

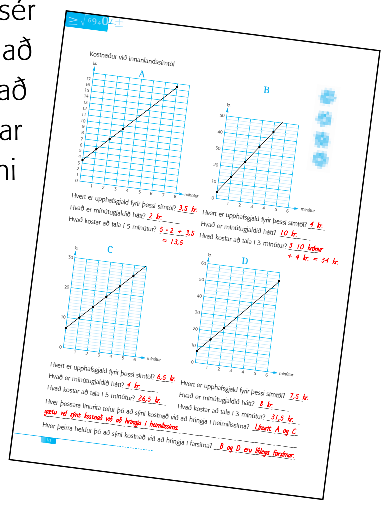
Verkefni um mynstur í margföldunartöflunum eru ætluð til að hjálpa nemendum að átta sig á hvernig þeir geta nýtt sér einfalt mynstur eins og kemur fram í tíu sinnum töflunni til að vera fljótir að finna margfeldi af öðrum tölum. Hægt er að setja fram almenna reglu sem gildir fyrir margfeldi annarra talna á sama hátt og reglu fyrir margfeldi af 8 og 9.

Dæmi: $9 \cdot 12 = 9 \cdot 10 + 9 \cdot 2$

Á talnalínu á bls. 84 má greina enn eitt mynstrið. Þar kemur skýrt fram hvernig skoða má margföldun sem endurtekna samlagningu og deilingu sem endurtekinn frádrátt.

Nemendur þurfa hér að orða greiningu sína á mynstrinu og síðan skrá dæmið sem jöfnu.

Í verkefnum á bls. 85 eru gefnar upplýsingar um samband tveggja eininga af sömu gerð. Nemendur þurfa að finna lausn og skrá svo dæmið sem jöfnu. Gert er ráð fyrir að nemendur byrji á að finna lausn á dæminu og velti svo fyrir sér hvernig þeir geta skráð jöfnuna. Nauðsynlegt er að hafa aðgang að hjálpargögnum til að hlutgera lausnina eða hvetja nemendur til að skrá með teikningu þær upplýsingar sem eru gefnar. Það auðveldar þeim að sjá tengslin milli viðfangsefnisins og skráningar á lausninni á formi jöfnu.



Síðasta verkefnið er um algenga útreikninga í daglegu lífi þar sem bæði þarf að reikna með föstum kostnaði og breytilegum eftir því hve notkun er mikil. Í *Geisla 2* kynntust nemendur slíkum útreikningum í tengslum við verkefni um kaup á konfekti. Hér þarf bæði að lesa upplýsingar úr töflu og línuritum (vinnubók) til að geta reiknað kostnað.

Kennsluhugmyndir

Til að rifja upp gildi jafnaðarmerkisins getur verið gott að gera nokkrar tilraunir með skálavog. Finna má hluti í kennslustofunni til að leggja á skálavogina og nota sentíkubba til að bæta á skálarnar svo að vogin verði í jafnvægi. Hvað vegur pennaveski marga kubba? Hvað vegur reiknihefti marga kubba? Ef pennaveskið er lagt á aðra skálina og reikniheftið á hina, hvað þarf þá að bæta mörgum kubbum við á aðra skálina til að vogin verði í jafnvægi? Tilraunirnar má svo skrá annars vegar með teikningum og hins vegar með táknmáli. Þá gefst tækifæri til að ræða notkun jafnaðarmerkisins. Hvaða skilyrði þurfa að vera fyrir hendi til að nota megi jafnaðarmerkið? Hvernig má skrá sambandið á milli þyngdar pennaveskis og reikniheftis?

Dæmi: Tákna má þyngd pennaveskisins með x og reikniheftisins með y.
Ef pennaveskið er þyngra en reikniheftið má skrá það $x > y$ eða $y < x$.
Ef bæta þarf þrettán kubbum á skálina með reikniheftinu til að vogin verði í jafnvægi er hægt að skrá það $y + 13 = x$.

Tilraunina er hægt að gera sameiginlega til dæmis í heimakrók, þar sem kennari stýrir umræðu, en nemendur koma með hugmyndir og hjálpa til við að finna hluti og leggja á skálavogina. Kennari eða nemandi skráir þær hugmyndir sem koma fram. Nemendur geta líka gert þessa rannsókn í litlum hópi (væri hægt að setja upp sem eina stöð í svæðavinnu). Mikilvægt er þá að kennari taki þátt í umræðu nemenda um tilraunir þeirra, eða fái þá til að segja bekkjarfélögunum frá tilraunum sínum.

Verkefnin í kaflanum þarf ekki endilega að taka fyrir í þeirri röð sem þau eru í bókinni og ekki er nauðsynlegt að vinna þau öll. Kennari getur valið hvaða verkefni hann telur henta nemendum að vinna með tilliti til hvers og eins. Hjálpargögn þurfa að vera tiltæk þegar mynstur eru rannsökuð og getur því verið heppilegt að skipuleggja lausn verkefna á síðu 80–81 sem svæðavinnu, eða að einstakir hópar leysi ákveðin verkefni og allir kynni svo niðurstöður sínar í lokin. Æskilegt er að vinna verkefni í vinnubók samhliða þessum viðfangsefnum.

Heppilegt er að nota töflureikni þegar reikna þarf fjölda eftir ákveðinni reglu. Mikilvægt er að nemendur kynnist því hve gagnlegt það er að nýta töflureikni sem hjálpargagn og því upplagt tækifæri að skrá í töflureikni regluna sem þeir hafa fundið. Til þess að töflureiknir komi að notum þarf að kunna að skrá regluna sem notuð er við útreikninga og sjá þá nemendur augljóslega gildi þess að geta skráð hana á táknmáli stærðfræðinnar.

Töflureiknir er mjög gagnlegur til að skoða mynstur í margföldunartöflunum. Þegar búið er að skrá tölur í A–dálk má gefa skipanir í næstu dálkum um að skrá margfeldi af þeim.

	A	B	C	D	E	F
1	1	=A1*10	=A1*8	=A1*9	=A1*11	=A1*12
2	2					
3	3					

Þannig má á fljótlegan hátt kalla fram margföldunartöflur og rannsaka þær. Í verkefni á síðu 82 er nemendum bent á einfalda leið til að nýta sér þekkingu sína á tíu sinnum töflunni til að vera fljótir að finna margfeldi af tölum sem eru aðeins lægri eða hærri en tíu. Þessa reglu má líka skrá í töflureikninn og rannsaka hvort sömu niðurstöður fást.
(töflureiknir)

	A	B	C	D	E	F
1	1	=A1*10	=B1–A1	=B1–A1*2	=B1+A1	=B1+A1*2
2	2					
3	3					
4	4					

Töflureikninn má líka nota til að kanna kostnað við símtöl á síðu 86. Nemendur geta aflað upplýsinga um kostnað við símtöl hjá ólíkum símafyrirtækjum og reiknað út hvar hagstæðast er að kaupa þjónustu miðað við ólíka notkun (fá og löng símtöl, mörg en stutt símtöl o.s.frv.). Þá er auðvelt að kalla fram línurit en lestur af því auðveldar samanburð á kostnaðinum.

	A	B	C	D	E F
1	1	Dagtaxti: Hringt í heimilissíma hjá Bellu	Dagtaxti: Hringt í heimilis-síma hjá öðru fyrirtæki	Dagtaxti: Hringt í farsíma hjá Bellu	Dagtaxti: Hringt í farsíma hjá öðru fyrirtæki
2	2	=3,60+1,80*A1	=4+2,05	=3,60+15	=4+20,50
3	3				
4	4				

Verkefni á síðum 83–85 eru öll um greiningu á reglum og skráningu þeirra. Þar þurfa nemendur bæði að skrá jöfnur fyrir atburði og að finna hvaða atburði jöfnur sem gefnar eru geta táknað. Gaman getur verið að spreyta sig á að túlka jöfnurnar á ólíka vegu og einnig að bera túlkun sína saman við túlkun annarra á sömu jöfnu. Nemendur geta líka skráð nýjar jöfnur og beðið bekkjarfélagana að leysa þær. Það getur orðið skemmtilegur leikur þar sem ef til vill er hægt að skipta í lið og keppa um að finna sem fjölbreyttastar og skemmtilegastar lausnir.

Knattspyrna

Markmið

Að nemendur

- skoði hönnun á þrívíðum hlutum
- teikni líkön í gefnum hlutföllum
- geti reiknað með stórum tölum og brotum
- geti lesið úr töflum og nýtt sér upplýsingar úr þeim við útreikninga
- beiti rökhugsun við skipulagningu

Umfjöllun

Knattspyrna er ein vinsælasta íþrótt í heimi. Í öllum fréttatímum og dagblöðum berast fréttir af úrslitum knattspyrnuleikja. Margir nemendur á miðstigi æfa fótbolta og fara á leiki. Viðfangsefnin í kaflanum beinast að því að skoða ýmsa þætti svo sem fótboltann, völlinn, áhorfendafjölda, stigatöflu og skipulagningu knattspyrnumóts. Ef áhugi í nemendahópnum er meiri á öðrum boltagreinum er auðvelt að breyta verkefnum til samræmis við það. Einnig má ná markmiðum kaflans með því að skoða aðrar íþróttagreinar.

Við hönnun þrívíðra hluta er mikilvægt að hafa í huga hvaða skilyrði þurfa að vera til staðar til að fá fram það form sem óskað er eftir. Við hönnun á fótbolta eru notaðar tvær gerðir af tvívíðum formum, þ.e. reglulegir sexhyrningar og reglulegir fimmhyrningar. Hægt er að búa til bolta úr reglulegum fimmhyrningum og stundum eru boltar, t.d. körfuboltar, búnir til úr öðrum formum. Á *Geislavefnum*, undir eyðublöð, er að finna snið af fótbolta sem nemendur geta notað til að hanna mynstur á og búa til fótbolta. Í viðfangsefnum kaflans um fótbolta er gert ráð fyrir að nemendur velti fyrir sér gerð hans og stærð. Í mörgum íþróttahúsum eru til boltar af ýmsum stærðum. Þá má mæla bæði ummál og þyngd og skoða samhengi milli mismunandi stærða. Einnig má skoða hvernig þeir eru skreyttir.

Nemendur hafa fengið talsverða þjálfun í mælingum. Í þessum kafla er bæði fengist við viðfangsefni um lengd og flatarmál. Hugtökin þvermál og ummál eru rifjuð upp og er ástæða til að skerpa skilning á þeim. Knattspyrnuvellir eru af mismunandi stærðum og er heppilegt viðfangsefni fyrir nemendur að stækka teikningar. Þá þurfa þeir að reikna út hlutföll og sjá dæmi um áhrif breytinga á hliðarlengd á flatarmál rétthyrninga. Oft er erfitt að mæla af nákvæmni og máli skiptir að geta metið hvað sé hæfileg nákvæmni hverju sinni. Í tengslum við dæmi 5 á bls. 88 er gott að nemendur mæli misstóra hluti og velti nákvæmni fyrir sér.

Mikil tölfræði er sett fram í tengslum við íþróttir. Lærdómsríkt getur verið að skoða ýmsar töflur og lesa úr þeim. Áherslu þarf að leggja á að skoða framsetningu í heild, svo sem heiti dálka og raða, áður en byrjað er lesa einstakar niðurstöður. Enski boltinn er vinsæll á Íslandi og margir fylgjast vel með framvindu í úrvalsdeildinni þar. Upplýsingarnar sem settar eru fram á bls. 89 má nýta á ýmsa vegu. Gera má alls kyns samanburð og velta mætti fyrir sér líklegu hlutfalli milli stuðningsmanna tveggja liða, t.d. Newcastle og Charlton, ef þessi lið spiluðu saman. Þá reynir á að nemendur geti greint samhengi í töflunni og notað það til að finna og rökstyðja niðurstöðu sína.

Staða í íþróttakeppnum er oft gefin upp í stigatöflu. Ákveðinni rökhugsun er beitt við hönnun slíkrar töflu og þekking á viðeigandi íþrótt styður við ákvarðanir um hvaða upplýsingar þurfa að koma fram. Stigaútreikningar byggjast á ákveðnum föstum og breytum. Lesa má úr töflum um stöðu á knattspyrnumóti hvernig gengi tiltekins liðs hefur verið og nota þær upplýsingar til að spá fyrir um áframhaldandi gengi. Þegar verið er að skipuleggja atburði reynir oft mikið á útsjónarsemi, rökhugsun og skipulega hugsun. Nemendur hafa margir tekið þátt í mótum án þess að hugsa um hvernig þau hafi verið skipulögð. Gott er að þeir skoði fyrir hverju þarf að hugsa og hvaða þættir stærðfræðinnar koma þar við sögu. Lærdómsríkt væri fyrir nemendur að fá tækifæri til að skipuleggja íþróttamót. Ef ekki er tækifæri til að framkvæma það, má nota svipaðar aðferðir og stungið er upp á í verkefni 9 bls. 90, til að fá fram niðurstöðu.

Kennsluhugmyndir

Viðfangsefni kaflans er í fimm hlutum, þ.e. boltinn, völlurinn, áhorfendur, stigatöflur og mótahald. Við uppbyggingu kennsluferlis getur verið hentugt að taka mið af því. Nemendur þurfa að temja sér að gefa sér góðan tíma til að hugsa um verkefnin og leysa þau. Verkleg vinna og eigin upplýsingaöflun gefur nemendum tækifæri til þess.

Í upphafi er gott að skoða misstóra fótbolta og mæla þá á eins marga vegu og nemendum dettur í hug. Í framhaldi af því vinna nemendur dæmi 1, 2 og 3. Í umræðum um þá bolta sem nemendur hönnuðu er gott að draga fram hugtök eins og hliðrun, speglun og snúning.

Nemendur teikna upp knattspyrnuvelli. Mikilvægt er að styðja við þá varðandi vinnulag. Gott getur því verið að ræða í byrjun hvaða leiðir má fara við stækkunina. Verkefnin má vinna hver fyrir sig eða í litlum hópum. Gaman gæti verið að skoða keppnisvöll og mæla hann upp.

Áhugavert getur verið að allur bekkurinn vinni saman tölfræðina um áhorfendafjölda. Þá má deila út smærri verkefnum sem vakna við umræðuna og spinna áfram út frá spurningum sem settar eru fram í dæmum 6 og 7. Verkefni 8 krefst töluverðrar umhugsunar en er afmarkað og því gott að krefjast vel rökstuddra svara. Í lok kaflans er hópverkefni þar sem gert er ráð fyrir að nemendur skipuleggi mót og láti sköpunarkraftinn blómstra við að hanna útbúnað fyrir stuðningsmannalið. Þetta verkefni tekur töluverðan tíma en gefur um leið kennara tækifæri til að kanna stöðu nemenda og beina athygli þeirra að beitingu stærðfræðinnar við verkið.

Prósentur

Markmið

Að nemendur

- skilji hvað orðið prósenta þýðir
- geti fundið 1%, 5%, 10%, 25% og 50% af heild og geti nýtt sér það til að finna aðrar heiltöluprósentur af heild
- skilji hvað prósentuhækkun og prósentulækkun þýðir og geti reiknað dæmi þar sem finna á afslátt af vöruverði
- þekki tengsl prósentu við almenn brot og tugabrot og geti nýtt sér almenn brot og tugabrot sem viðmiðun þegar finna á einfaldar prósentur eins og 10%, 20%, 25%, 50% og 75%

Umfjöllun

Prósentur eru notaðar víða í samfélaginu og nemendur hafa flestir einhverjar hugmyndir umhvað átt er við þegar talað er um prósentur. Í *Geisla* 1 og 2 eru nokkur verkefni þar sem fengist er við prósentur. Þar er í flestum tilfellum um að ræða verkefni þar sem beita má námundun og vel þekktum viðmiðunarprósentum eins og 10%, 50% og 25% við að finna prósentur af tiltekinni heild eða fjölda.

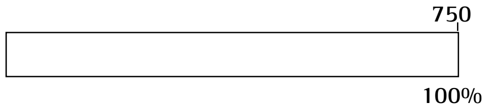
Orðið prósent kemur úr latínu og merkir af hundraði og hafa nemendur litað hundrað reita töflu til að gera sér grein fyrir hvað átt er við með t.d. 45%.

Í þessum kafla, sem er fyrsti heildstæði kaflinn um prósentur, er haldið áfram á svipaðri braut og í *Geisla* 1 og 2. Verkefnunum á fyrstu tveimur síðunum er ætlað að beina sjónum nemenda og kennara að því hvaða hugmyndir nemendur hafa um prósentur nú þegar. Mikilvægt er að nemendur fái að koma hugmyndum sínum á framfæri og ekki er gert ráð fyrir að kennarar leggi áherslu á réttu svörin. Ætla má að fram komi mismunandi hugmyndir og æskilegt er að ræða þær í nemendahópnum. Sjálfsagt hafa margir þeirra nokkuð góðan grunn en skilningur getur einnig verið takmarkaður og er verkefnum ætlað að varpa ljósi á það. Kennarar geta þá haft það til hliðsjónar við skipulagningu kennslunnar.

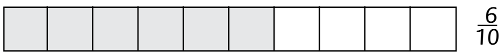
Ekki eru kynntar ákveðnar reglur til að fara eftir þegar finna á prósentur en fremur reynt að leggja fyrir nemendur verkefni þannig að skilningur þeirra á prósentuhugtakinu eflist. Nemendur komast að raun um að með því að nota ákveðnar viðmiðunarprósentur má finna nánast hvað prósentu sem er af heild eða fjölda. Þó svo að ekki fáist alltaf hárnákvæm svör á þennan hátt er í flestum tilvikum um nægjanlega nákvæmni að ræða.

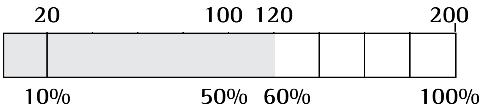
Prósentureitur er kynntur til sögunnar en hann er einfalt og gott hjálpartæki við prósentureikning.

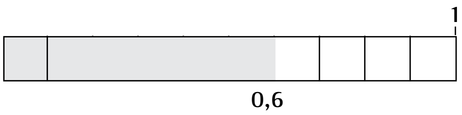
Prósentureitur



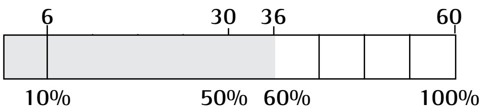
Í fyrstu má nota prósentureitinn til að sýna ákveðnar prósentur og til að átta sig á tengslum almennra brota og prósenta líkt og gert er í verkefni 14. Ástæða er til að leggja mikla áherslu á tengsl 10%, 20%, 25%, 50%, 75% við almennu brotin $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. Það má til dæmis gera með því að láta nemendur skrá þessi brot og jafnvel fleiri á talnalínu og tengja síðan viðeigandi prósentur við og jafnvel tugabrot. Einnig er gott að nota brotarenninga sem finna má á eyðublöðum á *Geislavefnum* og merkja inn á þá hve margar prósentur tiltekin brot eru.



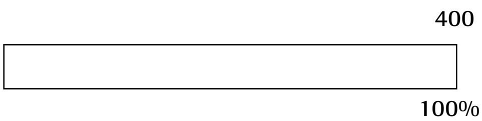


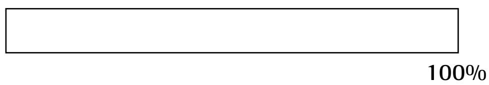


Með prósentureitnum má einnig með nokkurri nákvæmni finna prósentur af tiltekinni upphæð eða fjölda. Heildarfjöldinn er 100% og með því að hluta prósentureitinn niður má fá nokkuð nákvæmt svar.



Prósentureitinn má líka nota þegar finna á hve mörg prósent tiltekinn fjöldi er af heildarfjölda eða þegar vitað er t.d. hve 60% eru mikið.





Hve mörg prósent eru 80 af 400?

60% af tölu er 300. Hver er talan?

Rétt er að ítreka að í mörgum verkefnanna er ekki verið að leita að nákvæmu svari heldur er gert ráð fyrir að nemendur noti námundun og reyni að komast sem næst réttu svari. Það fer bæði eftir prósentunum sem fengist er við hverju sinni og þeim upphæðum eða fjölda sem um er að ræða hve nákvæm svörin verða.

Kennsluhugmyndir

Nemendur byrja á að leysa verkefnin á bls. 91–92 upp á eigin spýtur. Æskilegt er að nemendur vinni tveir og tveir saman. Eins og fram hefur komið er mikilvægast hér að kennari fylgist með vinnu nemenda og reyni að átta sig á hvaða skilning nemendur hafa á prósentum. Gera má ráð fyrir að vinna nemenda við þessi viðfangsefni taki að minnsta kosti tvær kennslustundir. Síðan þarf að gera ráð fyrir einni kennslustund í umræður og samantekt og þá er mikilvægt að ræða hvar og hvenær prósentur eru notaðar í samfélaginu. Gott heimaverkefni væri að skoða dagblöð og auglýsinga-bæklinga sem berast inn á heimili nemenda og safna dæmum um notkun prósenta í samfélaginu. Þetta mætti síðan setja upp á veggspjöld.

Ef kennara finnst grunnur nemenda veikur þarf að gefa viðfangsefnum á blaðsíðu 93–94 góðan gaum. Leggja þarf áherslu á prósentureitinn samanber það sem sagt var hér að framan. Á eyðublaði x eru prósentureitir sem nemendur geta notað til að sýna ýmsar prósentustærðir. Efstu reitunum er skipt niður í 20 bil til að auðvelda nemendum að vera nákvæmir í afmörkun svæða en á neðri hluta blaðsíðunnar eru auðir reitir af sömu stærð. Reitina má nota bæði til að sýna tilteknar prósentustærðir og einnig við að finna ákveðna prósentu af heild. Í vinnubók eru þó nokkur verkefni þar sem nemendur fá æfingu í að nota prósentureit við úrlausnir viðfangsefna.

Verkefnin um íþróttahúsið er hægt að vinna í hóp- eða paravinnu. Víðast hvar eru samkomuhús og/eða íþróttahús sem nemendur þekkja og mætti hefja vinnuna með því að kanna hve mörg sæti hægt er að hafa þar miðað við mismunandi aðstæður og velta fyrir sér sætanýtingu við ýmsa atburði í sveitarfélaginu. Einnig getur verið forvitnilegt að kanna áhorfendafjölda á stærstu íþróttaviðburðum og tónleikum hér á landi og bera saman mismunandi fjölda.

Í verkefnunum á blaðsíðu 96 er gefið upp hvert hlutfallið er á milli stuðningsmanna tveggja liða á handboltaleik. Hér eiga nemendur af finna fjöldann í hvorum hópi fyrir sig ef miðað er við 100 áhorfendur. Þetta getur verið gott að setja upp í töflu.

Stuðningsmenn Hólaliðs	1	10	20				
Stuðningsmenn Víkurliðs	4	40	80				
Áhorfendur alls	5	50	100	600			

Þegar búið er að finna fjöldann miðað við hundrað er í raun búið að finna prósentu-tölur og þær má síðan nota til að finna fjölda miðað við 600 áhorfendur. Einnig er einfalt að finna hann með því að halda áfram með töfluna.

Verkefnin á blaðsíðu 98 eru hugsuð sem samantekt og mat.

Rökfræði

Markmið

Að nemendur geti

- prófað tilgátur og metið sanngildi þeirra
- sett einfaldar röksemdafærslur fram skiljanlega og skýrt í mæltu og rituðu máli
- tengt saman vísbendingar og komist að rökréttri niðurstöðu
- metið forsendur og ályktanir sem draga má af þeim
- lesið úr gagnasafni

Umfjöllun

Rökfræði hefur lengi verið stunduð af mannkyninu. Sókrates, Aristóteles og Platón eru allir frægir fyrir rökræðulist sína. Rökfræði fjallar um það hvenær unnt er að draga ályktanir af tilteknum forsendum sem eru jafnréttar og forsendurnar. Í rökfræðinni er gengið út frá að forsendur sem gefnar eru séu sannar og metið út frá þeim grunni hvort ályktun sé sönn. Rökfræðin fjallar um form ekki innihald. Í bók Guðmundar Arnlaugssonar, *Rökfræðin*, er ágæt umfjöllun um rökfræði sem gefur kennurum góðan grunn (sjá Guðmundur Arnlaugsson. 1984. *Rökfræði*, Iðnú, Reykjavík). Í þessum kafla er nemendum ætlað að beina sjónum að forsendum og binda sig við að álykta eingöngu á grundvelli þeirra. Einnig þurfa þeir að meta hvort nægar forsendur séu gefnar til að hægt sé að álykta. Í sumum verkefnunum þarf að bæta við forsendum. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að hugsun getur verið rökrétt án þess að vera sönn ef og aðeins ef forsendur sem gefnar eru í upphafi eru ekki sannar eða nægar. Dæmi um slíkt má finna í kaflanum. Nemendur geta spunnið upp skemmtilegar röksemdafærslur og æft sig að flytja þær. Þeir geta sett fram forsendur hver fyrir annan svipað og gert er á blaðsíðu 101.

Þegar leitað er nýrrar þekkingar eru oft settar fram tilgátur. Þessar tilgátur þarf að skoða og meta hvort raunhæft sé að prófa þær. Oft er þá leitað að réttlætingu eða hvort finna megi mótdæmi sem sýni að tilgáta geti ekki staðist. Í upphafi kaflans eru settar fram þrjár tilgátur á sviði talnafræði. Ekki er hægt að ætlast til að nemendur á miðstigi geti sett fram haldgóða sönnun en gott er fyrir þá að æfa sig í að setja fram réttlætingar á að tilgáta geti verið sönn. Gagnlegt getur verið fyrir nemendur að finna sjálfir stærðfræðilegt viðfangsefni sem þeir geta sett fram á sama hátt og skoðað hvernig þeir gætu rökstutt eða hafnað tilgátu.

Í kaflanum eru nokkrar þrautir sem reyna á að greina forsendur og beita þarf rökhugsun við lausn þeirra. Þrautir ganga oft milli manna og jafnvel leikir þar sem greina þarf reglu og þær forsendur sem gefnar eru. Kennarar þurfa að vera vakandi fyrir því að taka slík viðfangsefni til umræðu í skólastofunni. Sem dæmi um þrautir má nefna þrautina um ísbirnina og vakirnar, þrautir þar sem sumir segja satt og aðrir ósatt og ýmsa landamæraleiki.

Í spilum reynir oft á rökhugsun. Á undanförnum árum hafa spil eins og *Þrenna* og *Mastermind* verið töluvert notuð í grunnskólum. Skák og mylla hafa lengi verið spiluð. Ný spil koma líka á markaðinn og má þar nefna *Tantrix*. Það eflir rökhugsun að spila slík spil og beinir athygli nemenda að samhengi milli orsaka og afleiðingar. Gott er að nemendur greini orsakasamhengi og skrái gang leiks t.d. í *Myllu*. Þá eru þeir komnir með efni í röksemdafærslu fyrir úrslitum leiksins.

Kennsluhugmyndir

Í upphafi er gott að ræða við nemendur um hugtakið tilgáta. Kennari getur sett fram nokkrar tilgátur úr daglegu lífi og stærðfræði. Hann biður nemendur að finna mótrök eða réttlætingu. Sem dæmi um tilgátur má nefna:

- Í mars eru 28 dagar (sem er satt þó það séu enn þá fleiri dagar).
- Kennarinn segir alltaf góðan daginn þegar hann kemur inn í skólastofuna á morgnana.
- Það eru jafnmargir stólar og borð í skólastofunni.
- Það eru fleiri nemendur í skólanum en starfsfólk.
- Það kemur alltaf upp sex á teningi ef hann er látinn snúast mikið.
- Þríhyrningar eru alltaf jafnarma.
- Sjöhyrningur hefur sex horn.
- Enginn nemandi í þessum bekk á afmæli 29. febrúar.
- Bein lína er stysta fjarlægð milli tveggja punkta.

Nemendur geta sett fram fleiri tilgátur hver fyrir annan til að réttlæta eða hrekja. Þeir geta síðan unnið verkefni 1–3 og rætt saman um lausnir.

Leikir geta verið góðir til að hópur sameinist um að finna forsendur. Fara má í landamæraleik. Ein gerð af slíkum leik er að orðið gangi og allir segi eitt orð. Stjórnandinn er búinn að ákveða reglu sem þátttakendur eiga að greina. Sem dæmi um reglu má nefna, fyrsti stafur í orði á að vera sá sami og er fyrsti stafur í nafni viðkomandi. Stjórnandinn byrjar og segir síðan við hvern og einn hvort hann hafi komist yfir landamærin þegar þeir segja eitthvert orð sem þeim dettur í hug. Reglan gæti líka verið annar stafur í föðurnafni eða fyrsti stafur í lit á sokkum hvers og eins. Áherslu ber að leggja á rökstuddar lausnir við verkefnum á blaðsíðu 100. Gagnlegt er fyrir nemendur að heyra rökstuðning frá nokkrum og bera saman við eigin rökstuðning.

Niðurstöður er oft settar fram á grundvelli þess að forsendur eru tengdar saman. Í dæmi 10 eru settar fram forsendur og hugmynd að niðurstöðu. Í fyrstu tveimur tilvikunum eru forsendur ekki nægar en í þriðja tilfellinu er ályktun rökrétt. Með því að breyta fyrstu forsendu í “Sigurbjörn hefur lesið allar sakamálasögur”, verður niðurstaða rökrétt. Einnig þurfa nemendur að æfa sig í að finna hvaða rök gætu legið að baki fullyrðingum. Spyrja má t.d. hvaða rök má finna fyrir því að hærra hlutfall af þeim sem ganga í skóm númer 34 gangi í skóla en þeim sem nota skó númer 44. Dæmi 11 og 12 styðja við það.

Í lok kaflans er unnið með gagnasafn. Þegar nemendur hafa lokið við að vinna verkefnið er kjörið að þeir skoðið fleiri gagnasöfn, t.d. frá Hagstofu Íslands.

Rafmagn

Markmið

Að nemendur

- nýti sér tölulegar upplýsingar
- reikni með brotum, bæði tugabrotum og prósentum
- lesi úr niðurstöðum annarra

Umfjöllun

Hverju heimilishaldi fylgja útgjöld. Rafmagnskostnaður er einn af þeim útgjaldaliðum sem hvert heimili hefur. Rafmagnsnotkun á Íslandi er mikil og hver einstaklingur getur haft áhrif á notkun. Fróðlegt er því að kynna sér hvernig rafmagnsnotkun skiptist milli þátta og hver rafmagnskostnaður fjölskyldna er. Þetta viðfangsefni gefur tækifæri til að skoða hvaða myndrit henta til að skoða skiptingu. Nemendur hafa lært að gera skífurit með því að nota strimil með þeim fjölda rúða sem heildin er. Gott getur verið að rifja það upp en það var í *Geisla 1A*. Ekki er síðra að nota töflureikni. Nemendur geta líka búið til langa súlu eða hvað sem þeim dettur í hug til að sýna skiptingu.

Við útreikninga á fjölda kílówattstunda fyrir notkun einstakra þátta raforkunotkunar er ekki ástæða til að ætlast til mikillar nákvæmni. Rafmagnsnotkun heimilanna er áætluð nokkuð gróflega og því nóg að nemendur áætli. Þeir geta notfært sér að gera prósentureit við útreikningana eða þá að finna eitt prósent og síðan þann fjölda prósenta sem um ræðir hverju sinni. Markmiðið er að nemendur öðlist tilfinningu fyrir hvað prósenta merkir og að meiri munur er á 17% og 19% af háum tölum en lágum þó munurinn sé hlutfallslega hinn sami.

Mikilvægt má telja fyrir hvern þjóðfélagsþegn að skilja þá reikninga sem þeir fá senda. Rafmagnsreikningur er gott dæmi um slíka reikninga. Þar eru gefnar þær breytur og þeir fastar sem unnið er út frá. Útreikningar eru ekki sýndir en niðurstöður þeirra eru settar fram. Hver einstaklingur þarf að skoða og meta hvort þær forsendur sem miðað er við og niðurstöður útreikninga geti staðist. Hér er líka gott dæmi um hvernig algebra er notuð í samfélaginu.

Kennsluhugmyndir

Töluverð vinna liggur í þeim útreikningum sem gert er ráð fyrir að nemendur framkvæmi. Heppilegt getur því verið að nemendur vinni saman í hópum og skili niðurstöðum sínum munnlega. Gaman getur verið að fá nokkra rafmagnsreikninga og bera saman við reikninginn í bókinni. Neðst á blaðsíðu 104 er listi yfir orkunotkun ýmissa tækja. Nemendur gætu reiknað út hve margar kílówattstundir þeir nota á viku til þessara hluta. Einnig gætu þeir gert könnun og beðið fólk að giska á, t.d. hve lengi ein kílówattstund endist til að halda sjónvarpi í gangi.

Hnitakerfi

Markmið

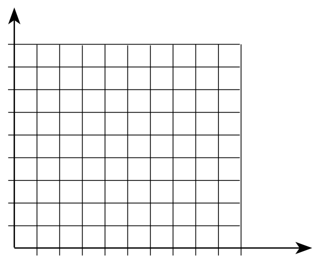
Að nemendur

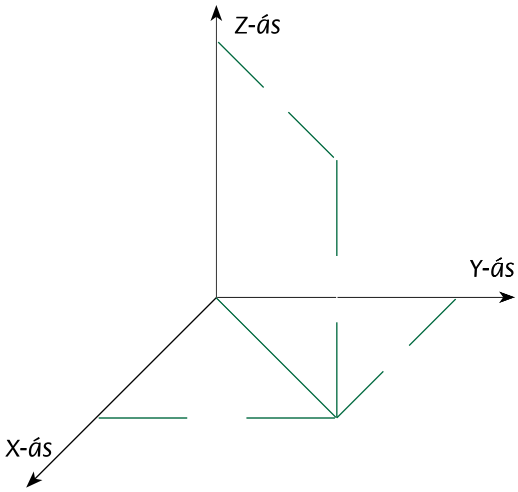
- þekki lengdar- og breiddargráður sem hnit til að lýsa staðsetningu á jörðinni
- þekki rétthyrnt hnitakerfi í sléttum fleti
- geti skráð staðsetningu punkta í öllu fjórðungum hnitakerfisins
- þekki flutninga í hnitakerfi eins og hliðranir, speglanir og snúninga
- geti lesið úr línuritum

Umfjöllun

Heimspekingurinn og stærðfræðingurinn René Descartes sem var uppi á 17. öld var frumkvöðull að því að nota hnitakerfi til að kanna og lýsa rúmfræðilegum eiginleikum. Honum tókst með uppgötvun sinni að tengja saman sígilda rúmfræði og algebru. Með tilkomu hnitarúmfræðinnar urðu miklar framfarir innan stærðfræðinnar. Hér gefst tækifæri til að fjalla um sögu stærðfræðinnar með nemendum. René Descartes (1596–1650) hafði bæði mikil áhrif á heimspeki og stærðfræði og sumir kalla hann föður nútíma stærðfræði. Auðvelt er að finna frekari upplýsingar um hann á Netinu eða í alfræðiorðabókum.

Til eru margs konar hnitakerfi. Það hnitakerfi sem flestir þekkja er væntanlega rétthyrnt hnitakerfi í tveimur eða þremur víddum.





Flest staðsetningarkerfi, svo sem lengdar- og breiddarbaugar og GPS staðsetningarkerfi, byggjast á einhvers konar hnitakerfi. Flestir nemendur hafa líkast til kynnst bauganeti jarðar þó þeir hafi ef til vill ekki skoðað nákvæma staðsetningu út frá því. Til að geta skráð staðsetningu í lengd, breidd og mínútum þarf að nota hlutföll til að áætla mínútur út frá þeim bilum sem gefin eru upp á kortunum. Miklvægt er því að nota nákvæm kort eins og þau sem vísað er til í *Kortabók handa grunnskólum*.

Hugsanlegt er að einhverjir nemendur eða foreldrar þekki vel til GPS staðsetningarkerfisins og gaman getur verið að setja sig lítillega inn í það kerfi ef aðstæður leyfa.

Nemendur þurfa að fá fjölbreytt tækifæri til að tileinka sér grunnhugmyndina að baki hnitakerfi. Þeir þurfa að fá æfingu í að notfæra sér hnitakerfi til að gefa upplýsingar um staðsetningu og seinna meir við að teikna gröf og skrá flutninga. Nota má leiki eins og *sjóorustu* og einnig má benda á gagnvirkt vefefni á *Geislavefnum*, *Hnitakerfi* (http://www.nams..is/geisli/geisli.htm)
Einnig er gott að nota pinnabretti, t.d. plastpinnabretti með 1–2 cm á milli pinna.

Nemendur hafa ekki áður fengist við skráningu hnita í alla fjóra fjórðunga hnitakerfisins. Æskilegt er að beina sjónum þeirra að samhengi milli formerkja hnita og staðsetningu í fjórðungum hnitakerfisins þannig að þeim verði strax ljóst að ef bæði hnitin eru með neikvæðum formerkjum þá er punkturinn staðsettur í 3. fjórðungi hnitakerfisins en ef x-hnitið er neikvætt og y-hnitið jákvætt þá er punkturinn staðsettur í 4. fjórðungi. Einnig má skoða punkta sem hafa sama x-hnit en mismunandi y-hnit. Hvað er hægt að segja um staðsetningu þeirra? En ef y-hnitið er það sama og x-hnitið mismunandi. Á bls. 108–109 eru nokkur verkefni þar sem sjónum er beint að þessu. Athuganir sem þessar eru mikilvægur grunnur að vinnu með jöfnur og gröf.

Í vinnubók eru verkefni þar sem fengist er við flutninga í hnitakerfi og þau áhrif sem flutningar hafa á hnit punkta tiltekinnar myndar. Hvernig breytast hnitin ef speglað er um x-ás? En ef speglað er um y-ás? En ef mynd er snúið um 90° um upphafspunktinn (0,0)? Benda má á þjálfunarefni á *Geislavefnum* sem heitir *Speglun*.

Á blaðsíðu 111 eru verkefni þar sem ákveðnir eiginleikar eru tengdir ásunum. Í verkefni 24 táknar x-ásinn tíma og y-ásinn hæð lyftunnar. Hér er mikilvægt að beina sjónum að því að það þarf að skoða báða eiginleikana samtímis. Hvað segir lóðrétt lína? Samkvæmt henni breytist hæðin en tíminn stendur í stað. Það er mjög ólíklegt að það geti yfirleitt gerst. Lárétt lína segir okkur hins vegar að tíminn líður en hæðin breytist ekki sem gerist t.d. þegar lyftan stöðvast á tiltekinni hæð. Það er því í raun hægt að útiloka öll línuritin með lóðréttum línum. Þá koma einungis tvö línurit til greina og því þarf að greina hvaða upplýsingar þau gefa. Skálínan segir að lyftan fer með jöfnum hraða en sú bogadregna að hún fer hægt af stað en síðan eykst hraðinn og hann er í raun orðinn töluvert mikill undir lok ferðarinnar. Velta má fyrir sér hvaða áhrif það hefði ef ferð lyftunnar væri með þeim hætti.
Velta má fyrir sér punktunum í punktaritinu á sama hátt. Hvað segir það okkur að punktar A og C liggja á láréttri línu en punktar E og C á lóðréttri?

Kennsluhugmyndir

Hefja mætti vinnuna með skáklýsingum. Í sumum skólum eru til veggtöfl en einnig er auðvelt að útbúa veggspjald með taflborði og nemendur geta síðan fengið það verkefni að búa til skákmenn úr kartoni sem passa inn í reitina og festa má upp með kennaratyggjó.

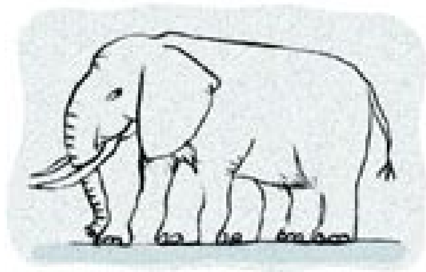
Að því loknu mætti vinna með kortabók. Fyrst er fengist við einföld staðsetningarverkefni eins og á blaðsíðu 105. Síðan þyrfti að skoða bauganet jarðar og nemendur geta fundið staði og staðsett þá nákvæmar út frá því. Kortin í kortabókinni henta misvel til nákvæmra staðsetninga og mikilvægt er að velja góð kort til þessa t.d. Íslandskortið á blaðsíðu 1–14. Æskilegt er að nemendur vinni tveir og tveir saman.

Þegar kemur að vinnu með hnitakerfið sjálft geta nemendur spreytt sig á að búa til myndir og skrá hornpunkta svo teikna megi upp sams konar myndir eða prófað að skrá niður nokkur hnit og merkja þau inn í hnitakerfið og síðan tengt punktana saman þannig að skemmtileg mynd eða mynstur myndist. Á eyðublöðum er bæði að finna hnitakerfi með einungis einum fjórðungi og hnitakerfi með öllum fjórum fjórðungum sem nemendur geta notað. Þeir geta líka teiknað sjálfir upp hnitakerfi í vinnuheftið sitt. Eyðublöðin má einnig nota til að búa til glærur sem gott er að nota þegar sjónum er beint að samhengi milli hnita og að formerkjum í mismunandi fjórðungum.

Nemendur geta unnið verkefnin á bls. 108–111 hver fyrir sig eða nokkrir saman. Mikilvægt er að taka lausnir þeirra til umræðu og að nemendur dragi ályktanir af vinnu sinni.

- Hvað eiga punktar í hnitakerfi sem liggja á láréttri línu sameiginlegt?
- En punktar sem liggja á lóðréttri línu?
- Á hvern hátt breytast hnit ef punkti er speglað um x-ás? En um y-ás?
- Hvaða áhrif hefur það á staðsetningu punkts í hnitakerfi ef hnit hans eru margfölduð með tiltekinni tölu?

Ekki er allt sem sýnist



Markmið

Að nemendur
- geri sér grein fyrir að innbyrðis afstaða strika á teikningu getur blekkt augað
- kynnist hugtökunum topphorn og grannhorn
- kynnist hugtakinu hornrétt á og viti að lína sem myndar 90° horn við aðra línu er hornrétt á hana
- geti áætlað flatarmál hrings með því að nýta sér flatarmál umritaðs fernings
- glími við stærðfræðileg viðfangsefni sem geta orðið uppspretta ánægju og vinnugleði

Umfjöllum

Margir listamenn hafa glímt við að teikna myndir sem blekkja augað. Skemmtilegt er að skoða slíkar myndir og greina hvað það er sem veldur blekkingunni. Hollendingurinn Escher og Svíinn Reutersvärd eru þekktir fyrir myndir þar sem þeir nýta sér að ögra túlkun fólks á því sem augað sér. Víða er að finna efni um verk þeirra á vefsíðum sem athyglisvert er að skoða. Dæmi um þær eru:
http://members.aol.com/webcarlos2/Optical/Artists/Reuter.htm og http://www.mcescher.com/.
Þá er líka víða að finna vefsíður um skynvillur. Á vefsíðunum
http://www.torinfo.com/illusion/directory.html og
http://psylux.psych.tudresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/index.html er að finna fróðlegar upplýsingar um slíkar myndir og túlkun mannshugans á þeim.

Þýskur stærðfræðingur Möbius, sem uppi var á 19. öld, uppgötvaði að það er hægt að gera flöt sem hefur aðeins eina hlið og eina brún. Þó að það sé ekki auðvelt að gera sér í hugarlund að slíkur flötur sé til er bæði auðvelt og skemmtilegt að gera Möbius renning. Vélaverkfræðingar notfæra sér þessa tækni og færibönd eru oft hönnuð eins og Möbius renningur.

Möbius hafði mikinn áhuga á grannmynstrum (topology). Árið 1840 samdi hann eftirfarandi þraut sem margir nemendur hafa væntanlega gaman af að glíma við og rökstyðja lausn sína.

> *Einu sinni var konungur sem átti fimm syni. Í erfðaskrá sinni mælti hann svo fyrir að við dauða hans ættu synir hans að skipta konungsdæminu í fimm svæði þannig að hvert svæði lægi að hverju hinna fjögurra. Er hægt að uppfylla erfðaskrána?*

Það er auðvelt að sýna fram á að þetta er ekki hægt, en fullkomin sönnun á því var þó ekki fundin fyrr en árið 1976 þegar sett var fram kenning um fjögurra lita svæði. Upplýsingar um Möbius og verk hans er að finna á vefsíðunni: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Mobius.html. Þar er einnig að finna upplýsingar um kennisetninguna um fjögurra lita svæði (the four color theorem). Í tengslum við rannsóknir á myndum sem blekkja er sjónum nemenda beint að hornum og hugtökin hornrétt á, topphorn og grannhorn kynnt í því samhengi.

Kennsluhugmyndir

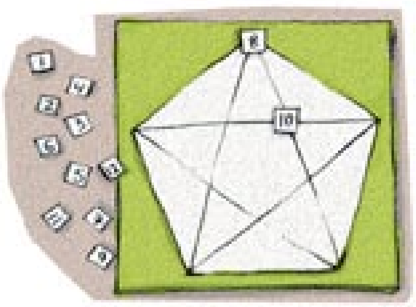
Efni þessa kafla er fyrst og fremst hugsað til að gefa nemendum tækifæri til að víkka sjónarhorn sitt á hvað stærðfræði er. Mikilvægt er að þeir fái að njóta þess að glíma við verkefnin og fái hvatningu til að skapa sjálfir og gera tilraunir í framhaldi af rannsóknum sínum.

Fyrsta verkefnið í kaflanum er hugsað sem kveikja að því sem á eftir kemur. Umræður um það hvernig nemendur skynja það sem fram kemur á myndunum ættu að geta orðið líflegar og skemmtilegar. Nauðsynlegt er að gefa þeim gott svigrúm.

Hér eru kynnt ný hugtök um horn og ekki ætlast til að nemendur geti skilgreint þau heldur einungis að þeir þekki þau.

Á bls. 115 eru nemendur hvattir til að áætla flatarmál hrings með því að notfæra sér flatarmál umritaðs fernings og ferninganna sem myndast af geisla hringsins. Þeir hafa ekki enn kynnst því hvernig flatarmál hrings er reiknað. Með því að rannsaka flatarmál hringsins á þennan máta ættu þeir að fá tilfinningu fyrir því hvernig reikna má flatarmál hrings.

Tilraunir með Möbius renning reyna bæði á ímyndunarafl og rökhugsun og ættu því að vekja áhuga flestra nemenda. Það sama má segja um verkefni á bls. 117 um fimmhyrning og fimmarma stjörnu.



Reikniaðgerðir

Markmið

Að nemendur

- sýni skilning á reikniaðgerðunum samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu
- beiti mismunandi leiðum við útreikninga
- noti stærðfræðihugtök við útskýringar og rökstuðning
- þekki nokkrar reiknireglur
- reikni með heilum tölum og brotum í huganum, á blaði og með vasareikni

Umfjöllun

Nemendur hafa lengi fengist við útreikninga og ýmiss konar talnameðferð. Reikniaðgerðirnar, samlagning, frádráttur, margföldun og deiling, eru viðfangsefni þessa kafla auk þess sem veldi eru kynnt. Mikilvægt er að nemendur séu meðvitaðir um hvað felst í reikniaðgerð og geti tjáð sig um það. Það virðist auðvelt að svara spurningu um hvað felist í samlagningu en það reynir töluvert á yfirsýn og meðvitaðan skilning. Líklegt er að nemendur vilji koma með dæmi og getur það verið ágæt byrjun. Gagnlegt er fyrir þá að fá hvatningu til að lýsa samlagningu með almennum orðum og þá getur verið gott að fá stuðning frá bekkjarfélaga.

Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir tengslum reikniaðgerðanna. Samlagning og frádráttur eru andhverfar aðgerðir og það sama má segja um margföldun og deilingu. Þessi tengsl má oft nýta til að létta sér útreikninga. Það er að margra mati oft auðveldara að margfalda heldur en deila, þess vegna er heppilegt að vera meðvitaður um að í stað þess að deila með $\frac{1}{2}$ má margfalda með tveimur eða margfalda með 5 í stað þess að deila með 0,2. Þessi þekking kemur ekki að raunverulegu gagni nema nemendur rannsaki sjálfir tengsl milli margföldunar og deilingar. Samlagning og margföldun tengjast líka því líta má á margföldun sem endurtekna samlagningu. Deilingu má bæði líta á sem skiptingu og endurtekinn frádrátt. Nemendur þurfa að hafa yfirsýn yfir þessi tengsl og geta nýtt sér þau við útreikninga.

Nemendur þurfa að vera meðvitaðir um að tilteknar reiknireglur gilda við útreikninga, t.d. að röð liða við samlagningu skiptir ekki máli eða röð þátta við margföldun. Þeir geta nýtt sér að koma með mótdæmi til að hrekja fullyrðingar. Ekki er hægt að ætlast til að þeir geti komið með sönnun en gera má kröfu um réttlætingu. Þeir hafa m.a. kynnst slíkum réttlætingum í kaflanum um rökfræði.

Reikningur með heilum tölum og brotum byggist á sömu reiknireglum. Gott getur verið að ræða það og bera saman, t.d. frádrátt með heilum tölum og brotum. Brotabútar eru gagnlegir og reikningur á talnalínu getur stutt við að nemendur skilji hvað gerist og geti því betur rökstutt lausnir sínar.

Reikniaðgerðirnar fjórar eru mikið notaðar í samfélaginu. Sífellt færist í vöxt að notaðar séu reiknivélar við útreikninga og þá þarf fólk fyrst og fremst að átta sig á hvort réttar tölur og reikniaðgerðir séu notaðar. Slíkt reynir mikið á skilning og yfirsýn og einnig þarf fólk að tileinka sér gagnrýna hugsun og greiningu á niðurstöðum. Þá snýst viðfangsefnið ekki um hvort rétt sé reiknað heldur hvort hugsunin á bak við dæmin sé rökrétt. Oft kemur sér þó vel að geta reiknað dæmi eða áætlað svör. Því er heppilegt að þróa hæfileika sinn til að meta svör og nýtast þá reiknireglur og skilningur á reikniaðgerðum vel. Getur oddatala margfölduð með oddatölu verið slétt tala? Ef tvær tölur eru margfaldaðar saman getur þá niðurstaðan orðið lægri en þættirnir í dæminu?

Röð reikniaðgerða skiptir miklu máli. Margir vasareiknar hafa forgangsröð aðgerða innbyggða og nemendur þurfa að vita hvort vasareiknir þeirra hefur það. Áhersla hefur verið lögð á að nemendur gætu búið til sögur við talnadæmi. Skilningur þeirra bæði skerpist og verður sýnilegur við það. Saga um dæmi eins og segir til um hvort nemendur skilja dæmið þannig að summa 4 og 5 sé margfölduð með 3 eða að 4 séu lagðir við margfeldi af 5 og 3.

$4 + 5 \cdot 3$

Reikniaðgerðin að hefja í veldi er kynnt stuttlega. Nemendur bera áhrif endurtekinnar margföldunar saman við áhrif af endurtekinnar samlagningar. Ekki er ætlast til að nemendur nái valdi á rithætti velda eða eðli reikniaðgerðarinnar heldur er þetta eingöngu kynning á þessu atriði sem um leið getur opnað augu nemenda fyrir því að reikniaðgerðirnar eru fleiri en fjórar.

$3^4 = 81$

Kennsluhugmyndir

Gott getur verið að byrja á að ræða um leiðir við reikning. Hvaða leið væri þægileg til að reikna 189 + 11? En 2458 + 367? Hvað þekkja nemendur margar aðferðir til að reikna dæmi af þessari gerð? Í hverju felst munurinn á ólíkum leiðum? Hvaða leið er þægileg til að reikna dæmi eins og $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$? En 14,03 + 2,3? Hvaða leiðir væri hægt að fara? Ræða má um hvort nemendur noti sömu leiðir við að reikna heilar tölur og brot.

Verkefnin í námsbókinni eru hugsuð til að hjálpa nemendum til að fá yfirsýn yfir þekkingu sína á reikniaðgerðunum, skerpa skilning sinn og meðvitund um hann. Mikilvægt er að kalla fram umræður milli nemendahópsins og kennarans en ekki síður milli nemenda innbyrðis og einstaklinga og minni hópa við kennara. Mörg reikningsdæmi eru í kaflanum og sumir nemendur gætu reiknað valin dæmi. Þegar flestir nemendur hafa leyst viðfangsefnin á fyrstu opnunni er gott að ræða um reikniaðgerðirnar samlagningu og frádrátt, einkenni þeirra og áhrif. Einnig þarf að ræða um hvernig nemendur fóru að því að sýna fram á að fullyrðing um röð talna í samlagningu stæðist og að tilgáta um röð talna í frádrætti stæðist ekki.

Heppilegt gæti verið að vekja svipaða umræðu um margföldun og deilingu og um samlagningu og frádrátt og velta fyrir sér leiðum við reikning. Nemendur hafa kynnst ýmsu um margfeldi sem skýjunum neðst á blaðsíðu 120 er ætlað að minna á. Deiling er sú reikniaðgerð sem búast má við að flestum nemendum finnist erfiðust.

Nauðsynlegt er því að ræða og skoða leiðir við deilingu bæði við einstaklinga og nemendahópinn. Skilningur og meðvitund um hann eykst mjög við tjáningu.

Gagnlegt getur verið fyrir nemendur að ræða við aðra um reikniaðgerðirnar fjórar. Því væri áhugavert verkefni að nemendur bæðu 2 eða 3 einstaklinga að útskýra hvernig þeir líta á reikniaðgerðirnar og hvaða leiðir þeir fara við hugareikning.

Í kaflanum eru nokkur viðfangsefni þar sem fengist er við að hefja í veldi og draga rætur. Margir nemendur hafa gaman af að fást við ný viðfangsefni og prófa sig áfram. Sumir gætu haft áhuga á að kafa dýpra og prófa háar tölur. Viðfangsefnin gætu líka orðið hvati að því að nemendur rannsökuðu vasareikninn sinn og prófuðu ýmsar aðgerðir.

Í lok kaflans er fengist við námundun. Í viðfangsefnum er nemendum beint inn á að beita henni við hugarreikning og við að áætla svör.

Nemendur þurfa að efla notkun sína á stærðfræðihugtökum og stærðfræðilegum textum. Gagnlegt gæti verið fyrir þá að búa til veggspjöld með skilgreiningum á reikniaðgerðunum og tengslum þeirra. Nemendur geta líka búið til litlar bækur þar sem þeir skrá skilgreiningar, reiknireglur og fleira varðandi reikniaðgerðir. Það mætti einnig nota þá hugmynd sem námsmatsverkefni. Þá mundu nemendur skila slíkum bókum til kennarans og hann getur þá séð á hvaða stigi skilningur og yfirsýn þeirra er.