1 2 3 4 5 6

Stærðfræði 2

# Kennsluleiðbeiningar

Kennsluleiðbeiningar

8-tíu

14. mars 2006

# Átta – tíu

**Stærðfræði 2**
**Kennsluleiðbeiningar**



Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir


1. útgáfa 2006
Námsgagnastofnun

# Efnisyfirlit

# Inngangur

Í inngangi að kennsluleiðbeiningum með *Átta-tíu, 1* er gerð grein fyrir þeirri hugmyndafræði um stærðfræðinám og -kennslu sem þessi námsefnisflokkur byggist á. Þar má lesa um hugmyndir fræðimanna um skipulagningu kennslu og hlutverk stærðfræðikennarans.

## Um bókaflokkinn

*Átta-tíu* er námsefnisflokkur sem ætlað er að styðja við stærðfræðinám í 8.–10. bekk. *Átta-tíu* er sjálfstætt framhald af námsefnisflokkunum *Eining* og *Geisli*. Miðað er því við að nemendur hafi kynnst þeim vinnubrögðum við stærðfræðinám að það feli í sér að rannsaka, ræða, túlka, vinna hlutbundið, skrá og leysa þrautir.

Í flokknum eru sex grunnbækur. Á heimasíðu námsefnisins má finna kennsluleiðbeiningar og ýmislegt ítarefni, s.s. eyðublöð, gagnvirk verkefni og slóðir fyrir nemendur og kennara. Einnig verða sett upp forrit og önnur verkfæri fyrir nemendur. Lausnir við viðfangsefni hverrar bókar er að finna á heimasíðunni en þær eru líka gefnar út í sérhefti. Námsmatsverkefni eru gefin út á geisladiski.

Ætlunin er að gefa út nokkur þemahefti og eru tvö þeirra væntanleg á þessu ári (2006). Annað fjallar um notkun töflureiknis og eru viðfangsefnin valin af ýmsum sviðum stærðfræðinnar. Í hinu heftinu er gullið snið skoðað og nemendur kynnast dæmi um hvernig stærðfræði og listir tengjast.

Bókin *Átta-tíu, 2* er framhald af bókinni *Átta-tíu, 1*. Í bókinni eru átta meginkaflar. Auk þess eru nokkrir minni kaflar og milliblaðsíður. Kaflaheiti segja til um stærðfræðilegt inntak. Meginkaflarnir heita: Brot, Líkindi, Jöfnur og línurit, Hnitakerfi og flutningar, Prósentureikningur, Tölur, Reglur og Reikningur og tölfræði. Í seinni bókum er haldið áfram með umfjöllun um þessa þætti og reynt að mynda samfellu milli bókanna. Gott er því að taka mið af umfjöllun í fyrri bók. Millikaflar eru: Hvenær eru páskarnir?, Þrautir, Stærðfræði í atvinnulífinu og KappAbel-stærðfræðikeppnin.

Í kennsluleiðbeiningum er umfjöllun um efni hvers kafla og rætt um val á efnisatriðum. Þar má finna hugmyndir að nálgun og framkvæmd kennslu. Hafa verður þó í huga að alltaf þarf að skipuleggja kennslu miðað við þann hóp sem unnið er með og aðstæður á hverjum stað.

## Kennsluleiðbeiningar við millikafla

Verkefnið *Hvenær eru páskar?* er dæmi um reiknirit. Meginmarkmið verkefnisins er að nemendur kynnist reikniriti og prófi að nota það. Í reikniritinu eru nokkuð mörg skref og sýna þarf nákvæmni. Reiknirit af þessum toga hafa lengi verið notuð við útreikninga og er tímatalið gott dæmi um viðfangsefni. Stærðfræðingar fyrr og nú hafa fengist við að leita að og greina reiknirit og þar með setja fram reglu sem nota má almennt. Áhugavert gæti verið fyrir nemendur að sannprófa hvort sömu dagsetningar koma í raun fram í dagatölum.

Á blaðsíðu 52 og 65 eru nokkrar þrautir. Á fyrri síðunni eru vísbendingaþrautir en á þeirri seinni þrautir þar sem reikna má og prófa sig áfram. Allar þrautirnar reyna á rökhugsun nemenda og eru krefjandi. Úthald og einbeiting margra nemenda eykst ef þeir fá tækifæri til að vinna með öðrum í litlum hópum að lausn þrauta. Margir nemendur hafa gaman af svona glímu og er því kjörið að bæta við þrautum. Á heimasíðu námsefnisins er að finna gagnvirkar þrautir sem heita *Brúsarnir*. Við lausn þeirra reynir á að nemendur geti hugsað fram í tímann, þ.e. sett upp áætlun. Þessar þrautir má nota í kennslu á ýmsa vegu, t.d. taka eina á viku eða nemendur velja sér eina eða fleiri þegar þeir hafa lokið kaflanum á undan. Mikilvægt er að nemendur fái tækifæri til að ræða um lausnir sínar og kynnast því hvernig aðrir nemendur leystu þrautirnar.

Í kaflanum um stærðfræði í atvinnulífinu eru tekin tvö dæmi þar sem einstaklingar lýsa því hvaða stærðfræði þeir nota í vinnu sinni. Markmiðið er að nemendur átti sig á að víða í samfélaginu er fólk að nota þá stærðfræði sem það lærði í skóla. Einnig er gott að þeir geri sér grein fyrir hvernig sömu þættir stærðfræðinnar eru nýttir í ólíku samhengi, eins og til dæmis í störfum hársnyrta og vélstjóra. Heppilegt getur verið að nemendur lesi kaflana saman í litlum hópum og skrái niður hvers konar stærðfræði fjallað er um og beri saman. Einnig gæti verið gott að bekkur og kennari lesi textann saman og ræði um hvaða stærðfræði kemur fram og hvort fleiri þættir stærðfræðinnar gætu komið við sögu í störfum hársnyrta og vélstjóra.[1]

KappAbel-keppnin[2] er bekkjarkeppnin sem haldin er árlega fyrir 9. bekki. Keppnin er kynnt í kaflanum og sýnd dæmi um viðfangsefni. KappAbel-keppnin byrjaði að frumkvæði áhugasams kennara á unglingastigi í Suður-Noregi. Hann hafði áhyggjur af því að nemendum gengi illa í fjölþjóðlegum könnunum og að þeir hefðu ekki gaman af stærðfræði. Og hann vildi gera sitt til að efla með þeim kraft og áhuga. Hann tók saman verkefni og lagði fyrir í sínum skóla og svo næsta ár í fleiri skólum í fylkinu. Eftir það leitaði hann til Samtaka stærðfræðikennara í Noregi, LAMIS, og bað um aðstoð við að gera KappAbel að landskeppni. Hann fékk neitun en fékk skýringu á henni.

1 Frásagnirnar eru byggðar á viðtölum. Viðtal við hársnyrti tók Stefanía Malen Stefánsdóttir og viðtal við vélstjóra tóku Eggert Björgvinsson og Hulda Líney Magnúsdóttir. Þau leyfðu góðfúslega að viðtöl þeirra væru notuð og eru þeim færðar þakkir fyrir.

2 Anna Kristjánsdóttir, prófessor og stjórnandi KappAbel-keppninnar á Íslandi, skrifaði um tilurð keppninnar og áherslur í henni.

Í fyrsta lagi vildi LAMIS ekki beita sér fyrir keppni með dæmum eins og hann hafði valið, heldur aðeins ef um raunverulegar stærðfræðiþrautir væri að ræða. Í öðru lagi vildi LAMIS ekki beita sér fyrir keppni þar sem einstaklingar sætu þögulir og kepptu hver við annan, heldur aðeins keppni sem ræktaði samstarf og rökstuðning, skapandi tilgátur og umhugsun. Í þriðja lagi vildi LAMIS einungis beita sér fyrir stærðfræðikeppni sem legði áherslu á að setja stærðfræði á einhvern hátt í víðara samhengi en nemendur fengju í venjulegri kennslu. En það var vilji fyrir að styðja keppni þar sem nemendur glímdu einnig við þemaverkefni þar sem stærðfræði væri sett í samhengi við aðrar greinar, önnur svið og nemendur ynnu nokkra rannsóknavinnu við að kynna sér slíkt, allur bekkurinn að sjálfsögðu.

Þessar tillögur hefðu ekki orðið að veruleika, hefði ekki svo heppilega viljað til að Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000 var á næsta leiti. Það kom í hlut Vísinda og tækniháskólans í Þrándheimi að annast framkvæmd stærðfræðiársins í Noregi og þar með varð KappAbel, í þeirri mynd sem íslenskir nemendur og kennarar þekkja, að árvissum viðburði innan Noregs. Tveimur árum síðar slóst Ísland í hópinn og nú er hlutfallsleg þátttaka innan Norðurlandanna mest á Íslandi. En keppnin varð norræn skólaárið 2003–2004. Norðurlandakeppnin var haldin á Íslandi 2005 og svo ánægjulega vildi til að sigurvegararnir þar voru íslenskir, frá Lundarskóla á Akureyri.

KappAbel er dæmigert fyrir framtak þar sem þeir sem að standa vita hvað er mikilvægt í stærðfræðinámi og leita markvisst leiða til þess að kennarar geti skapað nemendum námsumhverfi sem býður upp á mikilvægt inntak og gefur kost á að rækta vönduð og árangursrík vinnubrögð. Í raun er keppnin ekki meginatriðið, heldur hvers konar verkefni og vinnubrögð keppnin býður og gerir kröfur um. Tökum nokkur dæmi um þetta.

Kennarar mega ekki blanda sér í lausnir þrautanna sem nemendur fá og nemendur eiga að vinna saman í smáum hópum og síðan að komast að sameiginlegum niðurstöðum í bekkjarumræðum í lokin. En þetta veldur einmitt því að kennarar leyfa nemendum að fást við þrautir sem þeir eru ekki búnir að ákveða hvernig eigi að leysa á „besta veg“, og einnig þrautir sem kennarar eru e.t.v. óöruggir um. Kennarar fá tækifæri til að hlusta á nemendur rökræða og finna lausnaleiðir. Þetta kunna kennarar mjög vel að meta og margir tugir íslenskra stærðfræðikennara hafa einmitt haft á orði ótilkvaddir að þeir hafi aldrei heyrt nemendur sína rökræða stærðfræði af jafnmiklum áhuga og hæfni og í glímunni við KappAbel-þrautirnar.

Nokkur hópur íslenskra unglinga hefur gegnum árin tekið þátt í stærðfræðikeppni sem framhaldsskólar standa fyrir. Þeir keppa þar sem einstaklingar og keppnin fer ekki fram í bekknum, því að aðeins fáir taka þátt. Þótt verkefnin sem lögð eru fyrir nemendur séu mörg góð og raunhæf, hafa þau engin áhrif á stærðfræðinámið í bekkjunum eða vinnubrögð í stærðfræðikennslunni. Það er hins vegar ljóst markmið með KappAbel að liðsinna kennurum og nemendum við að þróa stærðfræðikennsluna og námsumhverfið í stærðfræði.

Margir unglingar og fullorðnir eiga erfitt með að sjá tengsl stærðfræði við daglegt líf og önnur svið, umfram hið einfaldasta eins og peninga og tíma- eða fjarlægðarreikninga. Þótt fæstum þyki þetta gott hefur verið minna um markvisst starf til að útvíkka hugmyndir nemenda. Verkefnasöfn hafa að vísu verið samin, sem tengdu stærðfræði við útilíf og íþróttir og annað sem tengdi stærðfræði við sjó, en þau fengu ekki mikla útbreiðslu. Þemaverkefni hafa verið fátíð í stærðfræði og markvissar rannsóknaspurningar og samstarf hafa þótt tímafrek og e.t.v. ekki svara kostnaði. En bekkjarverkefnið í KappAbel er vísbending til kennara og nemenda um hvernig vinna megi að þessum málum og hversu miklu máli skiptir að treysta nemendum og hvetja þá til að hugsa út fyrir síður bókanna og töflu kennarans. Eftir fyrstu fimm árin sem KappAbel er starfrækt á Íslandi munu um 50 bekkir hafa unnið bekkjarverkefni og tengt stærðfræði við íþróttir, tækni, tónlist, líkamann og nú síðast við samskipti. Verkefnin hafa verið sýnd á Reykjavíkurtorgi Borgarbókasafns Reykjavíkur.

KappAbel er keppni, en keppni sem eykur samhug og sameinar krafta nemenda. Það er rúm fyrir alla nemendur í henni og það er rúm fyrir alla bekki. Í ljósi þess sem að ofan er skrifað má sjá að um annað og meira er að ræða en keppnina, þótt hún gefi skemmtilegt yfirbragð og skapi áhuga. KappAbel er í raun verkfæri til að þróa stærðfræðikennslu, m.a. með því að gefa kennurum kost á og tóm til að sjá hvers nemendur eru megnugir og hvernig hlutverk kennarans breytist við slíkar aðstæður, gefur kost á að bregðast við nemendum á raunhæfari hátt og að dýpka með þeim skilning og efnistök.

Nánar má lesa um KappAbel-keppnina á síðunni Stærðfræðin hrífur (http://staerdfraedin-hrifur.khi.is/).

# Kennsluleiðbeiningar

## Brot

### Inntak

Markmið að nemendur:

- Beri saman stærð brota og kanni hvort þau eru jafngild.
- Kynnist leiðum til að finna samnefnara og þjálfist í samlagningu og frádrætti brota.
- Geti breytt almennum brotum í tugabrot og kynnist því að sum tugabrot eru endanleg en önnur ekki.
- Kynnist óformlegum leiðum við að margfalda saman almenn brot og við að deila með almennu broti í annað almennt brot.
- Þjálfist í reikningi með tugabrotum.
- Geri sér grein fyrir að sama niðurstaða fæst t.d. með því að margfalda tölu með $\frac{4}{5}$, 0,8 og með því að finna 80% af tilteknum fjölda.

### Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Lesi og túlki stærðfræðilegan texta.
- Nýti sér myndir og hlutbundin námsgögn við nám sitt.
- Kynnist verklegum vinnubrögðum og rannsóknum í stærðfræði.

### Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Brot, og þá sérstaklega almenn brot, er viðfangsefni sem nemendur eru lengi að ná tökum á. Það er því nauðsynlegt að koma að brotum aftur og aftur og fást við þau á fjölbreyttan hátt. Nemendur byggja upp brotaskilning sinn með hlutbundinni vinnu svo sem notkun brotabúta, talnalínu, brotarenninga og með því að tengja brot við daglegt líf og umhverfi.

Í þessum kafla er megináherslan á almenn brot en einnig er lögð áhersla á tengsl almennra brota, tugabrota og prósenta. Sem dæmi þá eru 20%, 0,2 og $\frac{1}{5}$ skráning á sama hlutfalli og ef finna á $\frac{1}{5}$, 0,2 eða 20% af tiltekinni stærð verður niðurstaðan hin sama. Mikilvægt er að nemendur átti sig á þessu samhengi og geti nýtt sér það við útreikninga. Það getur farið eftir stærðinni sem fengist er við hvaða skráningarform er best að nota.

Sérhvert almennt brot má skrá sem endanlegt tugabrot eða lotubundið tugabrot. Í þessum kafla kynnast nemendur því að sum tugabrot hafa óendanlegan fjölda aukastafa. Hugtakið lotubundið tugabrot er ekki kynnt á þessu stigi en reynt að beina sjónum nemenda að því hvort þeir sjá reglu í aukastafarunum þar sem aukastafir eru margir.

Nemendur hafa töluvert fengist við reikning með brotum og hafa kynnst ýmsum leiðum við að reikna með brotum. Þegar fengist er við brot, hvort sem verið er að bera þau saman eða reikna með þeim, er yfirleitt auðveldara að vinna með samnefnd brot. Því er mikilsvert að nemendur nái góðum tökum á því að gera brot samnefnd og sjái hagræðið af því að vinna með minnsta samnefnara. Í flestum tilvikum er tiltölulega auðvelt að finna samnefnara með því að skoða nefnarana og skrá nokkur margfeldi af hvorum nefnara fyrir sig líkt og gert er í dæmi 16. Ef um hærri tölur er að ræða getur verið gott að grípa til frumþáttunar sem nemendur eiga að hafa náð nokkuð góðum tökum á. Búa má til samnefnara úr öllum frumþáttum hvers nefnara fyrir sig. Í minnsta samnefnara verða að vera allir frumþættir nefnaranna og þeir verða að koma fyrir eins oft og þeir koma oftast fyrir.

Dæmi:
$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 18 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Minnsti samnefnari verður $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Margfeldið af 8 og 18 er 144 og er það líka samnefnari en minnsti samnefnarinn er 72.

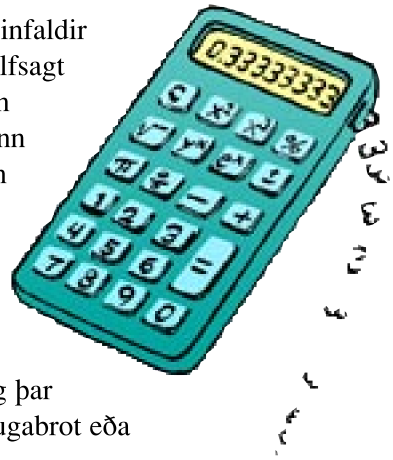
Dæmi:
$$\begin{aligned} 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 54 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Minnsti samnefnari verður $540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

Margfeldið af 60 og 54 er 3240 og er það líka samnefnari sem og 1620 og 1080 en minnsti samnefnarinn er 540.

Í tengslum við margföldun og deilingu almennra brota er haldið áfram að leggja grunn að skilningi nemenda á þessum aðgerðum. Nemendur þurfa að átta sig á að ýmsar forsendur sem þeir hafa áður gengið út frá í reikningi breytast þegar margfaldað er eða deilt með tölum sem eru á milli 0 og 1. Gott er að þeir áætli svör áður en þeir reikna. Ekki eru kynnt sérstaklega þau reiknirit sem hingað til hefur víða verið lögð megináhersla á, á unglingastigi. Þó má gera ráð fyrir að margir nemendur hafi komið auga á að þegar tvö almenn brot eru margfölduð saman eða þegar fundinn er $\frac{1}{3}$ af $\frac{3}{4}$ þá eru það $\frac{3}{12}$ eða $\frac{1}{4}$ ef brotið er stytt. Í raun má margfalda teljara saman og nefnara saman til að fá út svarið en æskilegt er að nemendur komi auga á þetta samhengi sjálfir. Það er einmitt líklegt að það gerist ef nemendur eru hvattir til að ræða og gera grein fyrir þeim leiðum sem þeir fara til að leysa viðfangsefnin eins og t.d. á blaðsíðu 13.

Í deilingu er áfram lögð áhersla á endurtekinn frádrátt og að auðveldara er að sjá hversu oft má taka tiltekið brot af öðru broti ef brotin eru gerð samnefnd. Í dæmi 47 er nemendum bent á að þeir geta einnig nýtt sér að margföldun og deiling eru andhverfar aðgerðir. Ef finna á hve oft má taka $\frac{3}{27}$ af $\frac{12}{27}$ er hægt að finna hvaða tala það er sem margfalda þarf $\frac{3}{27}$ með til að fá út $\frac{12}{27}$ og ætti að vera nokkuð augljóst að það eru 4. Í 9. bekk verður það síðan skoðað nánar að í stað þess að deila með broti má margfalda með margföldunarandhverfu brotsins. En til þess að það hafi merkingu fyrir nemendur verður að fjalla nánar um andhverfur og hlutleysu og er það látið bíða þar til í 9. bekk.




Vasareiknar nemenda geta verið mjög mismunandi. Einfaldir vasareiknar hafa margir hverjir prósentutakka sem sjálfsagt er að kenna nemendum að nota, þó að hann geri í raun ekkert annað en deila í prósentutöluna sem slegin er inn með 100 og margfalda síðan með tugabrotinu. Notkun prósentutakkans er þó þeim annmörkum háð að fyrst verður að slá inn töluna sem myndar heildina og ýta síðan á margföldunartakkann og því næst á prósentutöluna. Ef tugabrotsformið er notað skiptir ekki máli hvort heildin eða tugabrotið er slegið inn fyrst. Öflugir vasareiknar hafa fæstir prósentutakka og þar verða nemendur því að fara aðrar leiðir, t.d. að nota tugabrot eða margfalda með prósentu og deila síðan með 100.

Á öflugri gerðum vasareikna er yfirleitt brotatakki. Hann má nota til að reikna með almennum brotum og sjálfsagt er að nemendur læri að nýta sér brotatakkann. Þegar slá á inn almenna brotið $2\frac{3}{5}$ þarf að ýta á brotatakkann fyrir hvern lið brotsins. Fyrst er ýtt á 2, síðan á brotatakka, síðan á 3, síðan aftur á brotatakka og að lokum á 5. Á skjánum birtist táknið sem afmarkar hvern lið.

Nota má brotatakkann til að breyta almennu broti í tugabrot og öfugt. Þá er tugabrotið eða almenna brotið slegið inn í vasareikninn, síðan er ýtt á jafnaðarmerkið og því næst á brotatakkann, þá birtist brotið sem almennt brot ef slegið hefur verið inn tugabrot og öfugt.

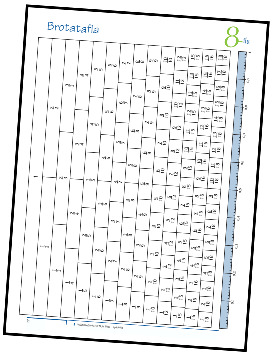
Að sjálfsögðu má einnig breyta almennu broti í tugabrot með því að deila með nefnara í teljara. Þó oft geti verið gott að breyta almennum brotum í tugabrot er mikilvægt að nemendur átti sig á að það er ekki alltaf heppilegt þegar reikna á með þeim, sérstaklega þegar almennu brotin verða að óendanlegum tugabrotum.

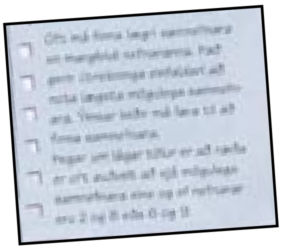
Á Netinu má finna ýmis forrit sem geta stutt við nám nemenda í þessum þætti. Á heimasíðu *Átta 10* http://www.nams.is/atta-tiu/atta-tiu.htm er að finna forritið *Almenn brot* og forritið *Prósentur* sem geta nýst til þjálfunar og upprifjunar. Á vefsíðunni *National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics* http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html er að finna nokkur forrit sem bæði geta stutt nemendur við að byggja upp brotaskilning og skilning á reikningi með brotum. Rétt að benda sérstaklega á forritið *Fractions – Rectangle Multiplication*.

Á Netinu er einnig að finna ýmiss konar reiknivélar sem nemendur geta notað við útreikninga með brotum. Dæmi um slíka síðu er http://www.calculator.com/ en finna má fleiri síður með því að nota leitarorðin *fraction calculator*. Hefðbundnar reiknivélar á Netinu hafa yfirleitt ekki brotatakka en ýmsir hafa sett upp sérstakar reiknivélar þar sem nemendur geta slegið inn brot og látið reiknivél reikna þau. Dæmi um eina slíka má finna á þessari slóð http://www.geocities.com/millers_math/fr_calc/fr_calc.html.

## Kennsluhugmyndir

Kaflinn skiptist í nokkur meginviðfangsefni. Í fyrsta hluta kaflans er einkum fengist við samanburð á stærð brota og stærðarröðun þeirra. Hópverkefnið á blaðsíðu 5 er góð kveikja og mætti útvíkka það með því að nemendur finni og skrái tugabrot og prósentur sem jafngilda hlutfalli almennu brotanna. Þeir geta skráð þetta á spjöld og fest við talnalínurnar á réttum stað. Til að auðvelda nemendum samanburðinn getur verið gott að þeir fái í hendur brotarenning (sjá eyðublöð). Nemendur ættu síðan að geta unnið dæmi 1–5 upp á eigin spýtur.
Í dæmum 6 og 7 er æskilegt að nemendur séu annaðhvort með rúðunet eða punktanet og rétt er að nemendur prófi að skipta ferningunum upp á mismunandi vegu, bæði með þeim brotum sem tiltekin eru í dæmi 6 og einnig með öðrum brotum. Verkefnið snýst í raun um það hvernig fá má út summuna 1 með því að nota þriðju hluta, sjöttu hluta og tólftu hluta. Á blaðsíðu 6 eru sýndar nokkrar leiðir sam fara má til að finna hvort almenn brot eru jafngild. Gott er að taka þær þrjár mismunandi leiðir sem bent er á efst á blaðsíðunni til skoðunar og umræðu með nemendum. Í framhaldi af því ættu nemendur að geta leyst dæmin sjálfir.



Á blaðsíðu 7–8 er meginviðfangsefnið samnefnari og eru kynntar nokkrar leiðir til að finna samnefnara. Þessar leiðir eru kynntar í glósubókum á síðunum. Benda þarf nemendum á að í glósubókunum er að finna stærðfræðilegan texta sem nauðsynlegt er að lesa vel og ræða saman um. Þar geta nemendur fundið hjálp og vísbendingar sem geta auðveldað þeim að leysa dæmin. Byrja mætti á því að lesa með nemendum glósubókina efst á blaðsíðu 7 og ræða síðan um textann með þeim. Þá mætti beina sjónum nemenda að tölum sem þeir telja að auðvelt sé að finna samnefnara fyrir og einnig hvort og hvers vegna æskilegt sé að finna minnsta samnefnara. Að því loknu er æskilegt að nemendur vinni tveir og tveir saman, lesi dæmin og texta og leysi viðfangsefnin í sameiningu.

Á blaðsíðu 9 er gert ráð fyrir að vasareiknir sé notaður, meðal annars við að breyta almennum brotum í tugabrot og einnig við að reikna með almennum brotum ef nemendur eru með vasareikna með brotatakka. Rétt er að byrja á að skoða þá vasareikna sem nemendur eru með og hvaða möguleika þeir bjóða upp á.

- Hve margir tölustafir komast fyrir í glugganum?
- Hvað er hægt að reikna með mörgum aukastöfum?
- Er prósentutakki á vasareikninum?
- Er brotatakki á vasareikninum?

Verkefnin á blaðsíðunni snúast fyrst og fremst um að nemendur noti vasareikninn til að breyta almennum brotum í tugabrot og rétt er að beina sjónum þeirra að því að sum almenn brot eru þess eðlis að þeim má breyta í endanleg tugabrot en önnur ekki. Ef aukastafir eru mjög margir, eða ef tugabrotin eru óendanleg, þá getur það valdið ónákvæmni í útreikningum og því er oft hentugra að nota almennu brotin.

Verkefnin á blaðsíðu 10–12 eru fyrst og fremst hugsuð sem þjálfun í reikningi með almennum brotum, tugabrotum og prósentum. Þeim er líka ætlað að benda nemendum á tengslin á milli mismunandi skráningarforma. Rétt er að nemendur hafi vasareikni við höndina og noti hann þegar þeim finnst það henta vel en íhugi jafnframt hvenær aðrar leiðir eru hugsanlega hentugri eða fljótlegri. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir að þó notaður sé vasareiknir þá þurfa þeir að geta útskýrt svarið og gera grein fyrir hvernig farið var að. Æskilegt er að skrá niður hvernig var reiknað þó svo að vasareiknirinn sé notaður.

Neðst á blaðsíðu 11 er hópverkefni sem gert er ráð fyrir að nemendur vinni í litlum hópum. Nemendur eru væntanlega missterkir þegar kemur að brotareikningi og gera má ráð fyrir að verkefnið taki hópana mislangan tíma. Það skiptir máli hvaða tölur eru valdar. Það er t.d. mikill munur á því að finna $\frac{4}{5}$ af 80 eða af 73. Gott er að kennari sé búinn að velta fyrir sér hvaða tölur á bilinu frá 1–100 eru góðar í þessu samhengi og hverjar ekki og geti beint nemendum á að skoða mismunandi tölur. Þeir hópar sem eru fljótir geta skoðað tölur sem eru hærri en 100 eða annað hlutfall.

Hér eru dæmi um nokkur hlutföll sem mætti skoða:

$\frac{2}{5}$ 0,4 40% $\frac{3}{10}$ 0,3 30% $\frac{9}{10}$ 0,9 90% $\frac{1}{20}$ 0,05 5%

Í dæmum 34 og 37 er gert ráð fyrir að nemendur reikni verð á ávöxtum og kjötvörum út frá þyngd. Hér reynir bæði á þekkingu nemenda á metrakerfinu og einnig skilning á reikniaðgerðum. Þessi dæmi gætu verið ágæt heimaverkefni. Nemendur geta velt fyrir sér hvaða vörur er yfirleitt greitt fyrir eftir þyngd og búið til hliðstæð dæmi út frá verðupplýsingum sem þeir afla sjálfir í verslunum eða á Netinu. Verðin sem gefin eru í bókinni eru byggð á verði í nóvember 2005 og geta nemendur kannað verðbreytingar og mismun á vöruverði milli verslana. Hugsanlega þarf að rifja upp metrakerfið með nemendum.

Dæmi 35 og 36 er mikilvægt að taka til sameiginlegrar skoðunar og umræðu. Hér gefst tækifæri til að ræða þýðingarmikil hugtök eins og sætisgildi, fjölda aukastafa, tengsl reikniaðgerða og víxlreglu. Gott er að safna saman hugmyndum nemenda og skrá á veggspjald eða töflu.

Verkefnin á blaðsíðu 13 og 14 eru þjálfun í margföldun og deilingu brota. Nemendur ættu að geta unnið þessi dæmi sjálfstætt. Byggt er á því sem gert var í *Átta-tíu 1* og er mikilvægt að nemendur hafi aðgang að brotabútum, brotarenningum, brotaferningum á glærum (sjá eyðublöð), þeim sé bent á að teikna eða nota kubba eða spilapeninga eins og í dæmi 44. Einnig er rétt beina sjónum að tengslunum á milli deilingar og margföldunar og á hvern hátt má nýta sér að þetta eru andhverfar aðgerðir.

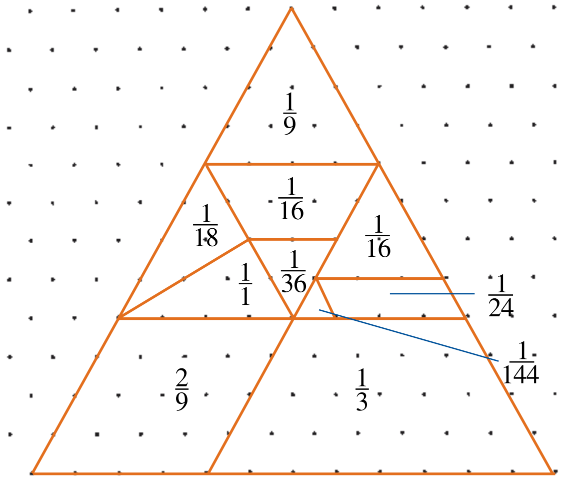
Á síðustu blaðsíðu kaflans eru verkefni sem nýta má sem námsmatsverkefni. Verkefni 49 reynir á að nemendur geti reiknað með brotum og fundið hlutföll af heild. Í verkefni 50 er nemendum bent á að velta fyrir sér meginatriðum kaflans og hvort þeir telja sig hafa náð nægilega góðum tökum á þeim.

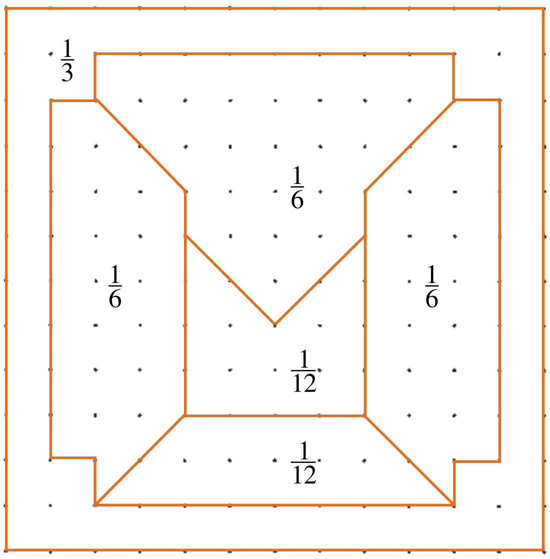
Ýmsar aðrar leiðir má fara við yfirferð á efni þessa kafla. Byrja mætti á því að skoða vasareikninn og möguleika hans. Nemendur ættu síðan alltaf að hafa vasareikni við höndina þegar þeir leysa verkefni og velta fyrir sér hvenær er stuðningur af því að nota hann og hvenær ekki.

Á blaðsíðu 8 og 10 eru þrautir sem mætti nota sem kveikju og geta gefið tilefni til skemmtilegra athugana og vangaveltna.

Verkefni 5–7 geta gefið tilefni til skemmtilegrar og fjölbreyttrar vinnu. Í dæmum 6 og 7 er gert ráð fyrir að heildin sem skipt er, sé ferningslaga en einnig mætti hafa hana þríhyrningslaga og nota þríhyrningapunktanet sem grunn. Á slóðinni http://www.nottingham.ac.uk/education/MARS/tasks/g8_3/ má finna svipað verkefni og nokkur dæmi um úrlausnir nemenda.

**Dæmi:**




36 rúður

$\frac{1}{3} = 12$

$\frac{1}{6} = 6$

$\frac{1}{12} = 3$

Nemendur gætu fengið það verkefni að skrifa stutta ritgerð þar sem þeir greina frá því sem læra má af því að lesa glósubækurnar í kaflanum.

# Líkindi

## Inntak

Markmið að nemendur:

- Skilji hvað felst í hugtakinu líkindi og átti sig á að sumir hlutir eru háðir líkum og aðrir ekki.
- Geti reiknað út einfaldar líkur og skráð sem almennt brot, prósentur eða tugabrot á kvarðanum frá 0–1.
- Kynnist notkun líkindatrés við að skrá alla útkomumöguleika og við að finna samsettar líkur.
- Átti sig á muninum á fræðilegum líkum og líkum byggðum á tilraunum.
- Kynnist því hvernig nýta má töflureikni til að líkja eftir teningakasti.
- Kynnist því hvernig ýmsar ákvarðanir eru byggðar á mati á líkum.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Temji sér að skrá niðurstöður sínar skipulega.
- Geti tekið þátt í samræðum um stærðfræði.
- Geti dregið ályktanir á grundvelli eigin athugana.

## Umfjöllun

Líkindareikningur er notaður í ýmsu samhengi. Margs konar ákvarðanir í samfélaginu eru teknar á grundvelli mats á líkum og útreikningum byggðum á líkum. Mikilvægt er því að nemendur nái góðum skilningi á meginhugmyndum líkindafræðinnar.

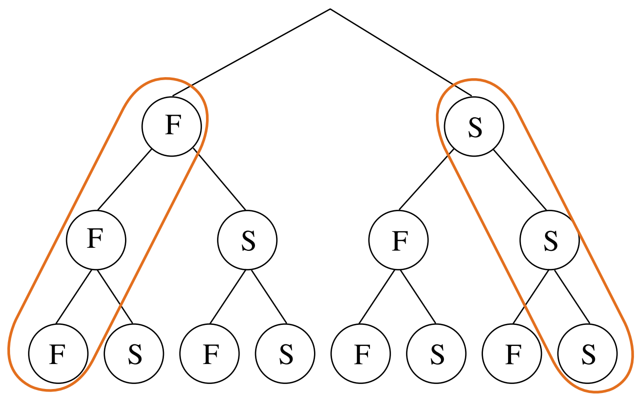
Meginviðfangsefni líkindafræðinnar er að reikna út líkur á að útkoma komi fyrir í tilraun. Tilraun er ferli sem má endurtaka og getur gefið mismunandi niðurstöðu. Sú útkoma sem kemur fram er hlutmengi í mengi mögulegra útkoma. Líkur á útkomu má finna með því að skoða hlutfall útkoma sem leitað er eftir af öllum mögulegum útkomum.

$$P(E) = \frac{\text{Fjöldi útkoma sem gefa óskaða niðurstöðu}}{\text{Heildafjöldi mögulegra útkoma}}$$

Dæmi: Ef finna á líkur á að fá slétta tölu á venjulegum teningi er fyrst skoðað hve margar sléttar tölur eru á teningi. Þær eru þrjár, 2, 4, 6. Heildarfjöldi mögulegra útkoma er 6. Líkur á að fá slétta tölu ef teningi er kastað eru því $\frac{3}{6}$.

Líkur eru skráðar með tölum á bilinu 0–1. Ýmist eru notuð almenn brot, tugabrot eða prósentur. Þeim mun hærri sem talan er þeim mun meiri líkur eru á að útkoma komi fram.

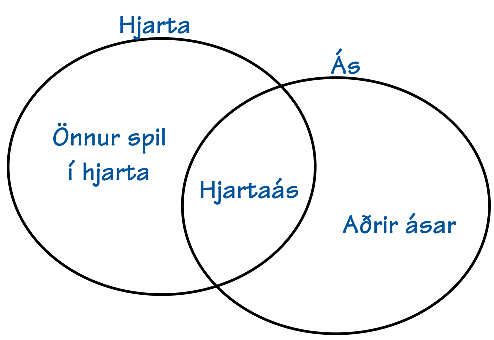
Þegar skoða á hve stór hluti útkoma gæti dugað til að fá æskilega niðurstöðu þarf að finna heildarfjölda útkoma. Vandi getur verið að finna heildarfjöldann. Í líkindareikningi eru oft notuð spil, peningar og teningar. Þá er tiltölulega auðvelt að skrá útkomumöguleika. Hentugt getur verið að nota líkindatré til að skrá alla möguleika, sérstaklega ef mögulegar útkomur á hverju stigi eru ekki margar. Það á t.d. við um peningakast. Útkomumöguleikar eru tveir í hverju kasti, þ.e. fiskur eða skjaldarmerki.




Líkur á hverri einstakri útkomu eru jafnar en ef köstin eru skoðuð saman sést að líkur á að fá alltaf sömu útkomu (FFF eða SSS) eru $\frac{2}{8}$ en líkur á að fá tvo fiska eru $\frac{3}{8}$ . Heildarfjöldi útkoma er átta, þ.e. SSS, SSF, SFS, FSS, FFS, FSF, SFF, FFF. Líkur á hverri og einni eru $\frac{1}{8}$ en sumir innihalda sömu niðurstöðu, t.d. að það séu a.m.k. tveir fiskar. Líkur á a.m.k. tveimur fiskum eru $\frac{1}{2}$.

Oft er þægilegra að finna líkur á að útkoma komi ekki fram og draga þær þá frá einum. Einn hlýtur alltaf að vera summa allra möguleika. Ef finna á til dæmis möguleikana á að upp komi bæði fiskur og skjaldarmerki ef peningi er kastað þrisvar getur verið einfaldara að finna líkurnar á að fá alltaf það sama og draga þær líkur frá einum. Líkur á að fá þrjá fiska eru $\frac{1}{8}$ og líkur á þremur skjaldarmerkjum eru líka $\frac{1}{8}$. Líkur á að fá bæði eru því $1-\frac{2}{8}$ eða $\frac{6}{8}$ .

Ef finna á líkur á að útkoma A eða útkoma B komi fyrir getur verið hagkvæmt að teikna mengjamynd (vennmynd), til dæmis ef finna á líkur á að fá hjarta eða ás ef spil er dregið úr spilastokki.



Líkur á hjarta eru $\frac{13}{52}$ því 13 hjörtu eru í hverjum spilastokki. Í spilastokki eru fjórir ásar en hafa þarf í huga að einn þeirra er hjartaásinn og að ekki má tvítelja. Mögulegar útkomur eru því 4 + 13 – 1 = 16 og heildarfjöldi mögulegra útkoma er 52. Ef möguleikarnir skarast ekki er nóg að finna summu þeirra. Ef þeir skarast þarf að draga möguleikana í sniðmenginu frá öllum möguleikum í sammenginu.

Ef finna á líkur á að útkoma A og útkoma B komi fyrir þarf að finna sniðmengi útkomanna. Í tilfellinu með hjarta og ás væru líkurnar því $\frac{1}{52}$ því aðeins í einu spili eru þessi skilyrði uppfyllt, þ.e. í hjartaás.

Ef skoða á líkur á að fá einhverjar tvær tilteknar útkomur í röð, t.d. tvo ása eða sexu og þrist þarf að skoða líkur á hvorum atburði fyrir sig. Líkur á að fá ás eru $\frac{4}{52}$ í fyrsta drætti en $\frac{3}{51}$ í öðrum drætti. Þetta getur verið erfitt fyrir nemendur að skilja því auðvitað kemur ekki alltaf ás ef spil er dregið úr spilastokki en í hugsun um líkur er hugsað út frá því. Hér er miðað við að spilið sé ekki sett aftur í stokkinn. Ef spilið er sett aftur í stokkinn eru líkur jafnar fyrir hvorn drátt. En af hverju eru líkurnar svo margfaldaðar saman þegar finna á líkur á tiltekinni röð útkoma? Það byggist á skoðun á samsetningarmöguleikum. Ef skoðaðir eru möguleikar á að draga tvo ása kemur í ljós að þeir eru 12. Ásarnir eru fjórir þannig að í fyrsta drætti eru möguleikarnir fjórir og í þeim seinni þrír. Ef dreginn er hjartaás getur verið spaðaás, tígulás eða laufaás í seinni drætti. Á sama hátt má skoða hina ásana.

| | Hjartaás | Spaðaás | Tígulás | Laufás |
|---|---|---|---|---|
| Hjartaás | X | ♡ ♠ | ♡ ◊ | ♡ ♣ |
| Spaðaás | ♠ ♡ | X | ♠ ◊ | ♠ ♣ |
| Tígulás | ◊ ♡ | ◊ ♠ | X | ◊ ♣ |
| Laufás | ♣ ♡ | ♣ ♠ | ♣ ◊ | X |

Á sama hátt má færa rök fyrir því að til þess að finna fjölda möguleika á að draga tvö spil úr 52 spilum megi margfalda 52 með 51 og finna þannig að það megi gera á 2652 vegu. Líkurnar á að fá tvo ása eru því í $\frac{12}{2652}$ eða $\frac{1}{221}$. Mikilvægt er að gera sér vel grein fyrir samlagningar- og margföldunarreglunum sem mikið eru notaðar í líkindareikningi og styðja nemendur við að byggja upp skilning sinn á líkum og samsetningarmöguleikum áður en farið er að nota þessar reglur.

Oft má meta líkur á grundvelli skoðunar. Til dæmis eru 6 möguleikar á útkomu á teningi og 2 möguleikar á útkomu á peningi. Jafnar líkur eru á hverri útkomu. Fræðilegar líkur eru metnar á grundvelli slíkrar skoðunar og sjá má að líkur á sérhverri útkomu á teningi eru $\frac{1}{6}$ . Ekki verður því alltaf komið við að skoða allar mögulegar útkomur. Þá eru oft gerðar tilraunir eða tekin sýni úr safni og líkur metnar út frá niðurstöðum þeirra. Áhugavert er að skoða hve margar tilraunir þarf að gera til að niðurstöður séu í samræmi við líkur. Það getur eflt skilning nemenda að prófa að kasta teningi eða peningi og bera saman niðurstöður og líkur. Ef slíkum verplum er kastað yfir hundrað sinnum má gera ráð fyrir að niðurstöður nálgist fræðilegar líkur. Nemendur geta gert tilraunir í töflureikni og geta þá endurtekið þær mörgum sinnum. Því er kjörið að nota tölvutæknina við slíkar tilraunir.

Spil og leikir eru góð dæmi um viðfangsefni þar sem byggt er á líkum. Skemmtilegt er að rannsaka niðurstöður og reikna út líkur ef það nýtist í leik. Spurningar á borð við: Hvaða leið er vænlegust til sigurs? Hvernig spil get ég búið til þar sem allir hafa jafnar líkur á að vinna? Get ég búið til spil þar sem reglurnar virka á þátttakendur sem réttlátar en líkur mínar til að vinna eru meiri en andstæðingsins? Það að leita svara við slíkum spurningum getur orðið til þess að nemendur kafa í viðfangsefnið og mynda sér traustan skilning á meginhugmyndum. Einnig er gaman að sjá að mat sem byggt er á hugboði reynist ekki vera í samræmi við reiknaðar líkur. Það gefur tilefni til umræðna um hve mikilvægt er að þróa hugmyndir sínar um líkur.

Í líkindafræði gefst tækifæri til að vinna með ýmsa þætti stærðfræðinnar. Oft þarf að reikna með almennum brotum og skoða þrívíð form svo dæmi séu tekin. Mörgum nemendum finnst áhugavert og gaman að glíma við líkindafræði og er hún því hentug þegar vinna á að því að efla jákvæð viðhorf nemenda til greinarinnar.

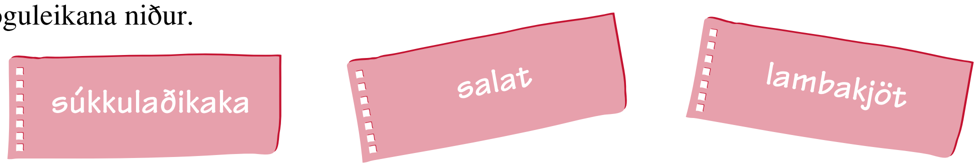
## Kennsluhugmyndir

Í kaflanum eru fjölbreytt verkefni þar sem nemendur eiga að gera rannsóknir og draga ályktanir af þeim. Hentugt getur verið að velja viðfangsefni úr kaflanum fyrir einstaka nemendur og/eða nemendahópa. Mörg verkefnanna eru heppileg í stöðvavinnu.

Ein leið í gegnum efni kaflans er að byrja á umræðum um hugtakið líkur og hvernig það er notað. Gaman getur verið að taka til umræðu nýlegt dæmi úr fréttum eða spár um þróun mannfjölda í heimabyggð næstu 20 árin. Einnig má ræða um líkur almennt eins og að við kaup á hlutabréfum meti fólk fjárfestingarkosti miðað við líkur og að ákvörðun um stærð skólabyggingar sé tekin á grundvelli spár um barnafjölda í sveitarfélaginu. Í framhaldi af slíkum umræðum má setja upp fjórar stöðvar.

- Stöð 1 – Spil og verkefni á blaðsíðu 17.
- Stöð 2 – Rannsókn á blaðsíðu 18.
- Stöð 3 – Hópverkefni á blaðsíðu 21.
- Stöð 4 – Skoðun og greining á spám um þróun í eigin sveitarfélagi. Upplýsingar má sækja til sveitarfélagsins. Einnig má nota dæmi 19 á blaðsíðu 22. Þar er fengist við að skoða samsetningarmöguleika.

Að lokinni stöðvavinnu eða samhliða henni geta nemendur glímt við viðfangsefni á blaðsíðu 19. Kennari þarf að ræða hvernig skrá megi líkur og útkomumöguleika. Líkindatré er ein leið til þess og er það notað sem dæmi um skráningarleið. Gott er að ræða þetta með öllum hópum. Á blaðsíðu 22 er skemmtilegt viðfangsefni þar sem fundinn er fjöldi samsetningarmöguleika. Gaman gæti verið að nemendur í þriggja manna hópum skráðu hvern rétt á miða. Þeir geta síðan skráð alla möguleikana niður.




Síðan má velta fyrir sér hve möguleikunum fækkar ef aðeins eru tveir aðalréttir eða ef aðeins er um aðalrétt og eftirrétt að ræða. Dæmi 15, 16, 17, 20 og 21 eru æfingadæmi sem nemendur geta t.d. fengið sem heimadæmi.

Í bókinni *Furðulegt háttalag hunds um nótt*[2] er sögupersónan að glíma við ýmiss konar stærðfræðileg vandamál og nýtir hann stærðfræði á skemmtilegan hátt. Á blaðsíðu 23 og 24 eru sýnd dæmi um þá umræðu sem er í bókinni. Það gæti því verið áhugavert að lesa meira úr bókinni fyrir nemendur. Í umfjöllun um Monty Hall vandamálið eru gefin dæmi um viðhorf til stærðfræði og hvernig hugboð reynast ekki alltaf rétt sem gagnlegt er fyrir nemendur að kynnast. Frekari umfjöllun um Monty Hall-vandamálið má finna á Netinu. Á slóðunum sem hér fylgja er bæði umfjöllun og gagnvirkt forrit þar sem hægt er að prófa leikinn og skoða niðurstöður úr leikjum annarra. http://www.shodor.org/interactivate/activities/monty3/ http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/Montytitle.html

Dæmi 26, 27 og 28 reyna á skilning og ályktunarhæfni nemenda. Mikilvægt er því að ræða um þau þegar nemendur hafa glímt við þau á eigin spýtur. Gott getur verið að ræða um lausnir og rökstuðning út frá hugmyndum einhverra nemenda.

Hópverkefni á blaðsíðu 26 er gott að skipuleggja þannig að allir nemendur vinni að því í einu. Best er að hafa tvo samliggjandi tíma. Fyrst gerir hver hópur sínar tilraunir og síðan eru niðurstöður hópanna settar saman og ræddar. Megininntak umræðunnar þarf að snúast um hvað þurfi að hafa í huga við sýnatöku. Umræðuspurning gæti verið verið: Hvort skiptir meira máli við sýnatöku, stærð sýnis eða fjöldi sýna?

Með því að nota töflureikni má auðveldlega gera margar tilraunir. Á blaðsíðum 27–29 er skoðað hvernig margar slíkar tilraunir leiða til þess að tilraunalíkur nálgast fræðilegar líkur. Það breytir miklu að geta notað töflureikni. Ef erfitt er að komast með hópinn í tölvur gæti verið góð hugmynd að leita samstarfs við tölvukennara. Í mörgum skólum er til tölva og skjávarpi sem kennarar geta tekið með sér í kennslustundir og er hér verkefni sem hentar vel að leysa með nemendum á þennan hátt.

2 Haddon, M. 2003. *Furðulegt háttalag hunds um nótt*. Reykjavík, Mál og menning.

Dæmi 34–35 má líta á sem samantektardæmi úr meginefni kaflans. Nemendur gætu skilað úrlausnum þessara dæma til kennarans.

Ýmsar leiðir má fara í gegnum efni kaflans en í lok hans er nemendum ætlað að gera tilraunir í töflureikni. Vel má hugsa sér að byrja á því og nota töflureikni við ýmsar tilraunir. Nemendur geta þá líkt eftir köstum með einum og tveimur teningum, skoðað summur og margfeldi og tíðni þeirra. Þar nýtast verkefni 5–8, 28, 29 og 30–33. Með þessu væri búið að skoða mat á líkum, fræðilegar líkur og tilraunalíkur. Nemendur geta skerpt hugsun sína með því að glíma hver í sínu lagi við dæmi 9, 10, 15, 16, 17, 20, 21, 26 og 27. Kennari getur kynnt og rætt leiðir við skráningu með því að skoða líkindatré (sjá dæmi 13 og 14). Dæmi 18 gæti verið námsmatsverkefni úr kaflanum. Nemendur gætu unnið saman í pörum. Skemmtilegar og áhugaverðar umræður gætu skapast í kringum lestur úr bókinni *Furðulegt háttalag hunds um nótt*.

Í kaflanum eru ýmis spil og leikir. Í sumum nemendahópum skapast miklar vangaveltur og umræður á grundvelli leikja. Leikir og spil hafa þann kost að endurgjöf kemur strax og þau ýta undir rökhugsun og sköpun. Kennari getur valið að byrja umfjöllun um efni kaflans á því að skoða Monty Hall-vandamálið (sjá bls. 23) og síðan geta nemendur prófað leikinn. Nemendur geta síðan spilað ýmis spil t.d. bæði þau sem eru í kaflanum og búið til sín eigin spil. Einnig er til fjöldinn allur af spilum sem nota má. Með því að endurtaka spil má fá fram skoðun á og samanburð á fræðilegum líkum og tilraunalíkum. Í framhaldi af slíkum vangaveltum hentar vel að skoða summur útkoma á tveimur teningum (dæmi 5–8). Áherslu þarf að leggja á að nemendur nái valdi á að hvenær hægt er að meta líkur á tilteknum atburði með því að finna allar mögulegar útkomur og telja hve margar þeirra uppfylla skilyrði á þeim tiltekna atburði sem valinn var.

Í kaflanum eru nokkur ályktunarverkefni svo sem dæmi 9 og 27 þar sem kjörið væri að nemendur ræddu saman í hópum. Gott er að kynna líkindatré fyrir nemendum og þá mætti biðja þá að skoða eigin hóp og skrá í líkindatré ýmislegt út frá hópnum. Sem dæmi má taka: Líkur á að í tveggja manna nefnd verði drengur og stúlka, tvær stúlkur eða tveir drengir. Einnig mætti flokka fæðingardaga miðað við vor, sumar, vetur og haust og athuga líkur á að ef dregin verði nöfn þriggja að þeir væru þeir allir fæddir að vetri. Nemendur gætu skoðað ólíka þætti varðandi hópinn og búið til lítil veggspjöld sem þeir kynntu fyrir bekkjarfélögum.

# Jöfnur og línurit

## Inntak
Markmið að nemendur:

- Kynnist ýmsum leiðum við að einfalda og leysa einfaldar jöfnur með einni óþekktri stærð.
- Geti skráð samhengi stærða með því að nota jöfnur með einni óþekktri stærð.
- Geti nýtt sér jöfnur við lausn viðfangsefna.
- Kynnist því hvernig nota má línurit til að finna lausnir á jöfnum með tveimur óþekktum stærðum.

## Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Geti valið hentugar leiðir við lausnir verkefna og þrauta.
- Lesi og skrifi stærðir með tölum og öðrum táknum.
- Æfi sig í að rökstyðja fullyrðingar og meta sanngildi þeirra.
- Þýði verkefni úr daglegu lífi yfir á táknmál stærðfræðinnar.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð
Jöfnur eru mikilvægur þáttur algebru. Í algebru hefur verið þróaður skráningarmáti sem gerir kleift að skrá nákvæmlega þó stærðir séu óþekktar. Frakkinn Francois Viete (1540–1603) setti fram hugmyndina um að nota bókstafi sem nöfn á óþekktum stærðum við útreikninga. Þannig mátti skrá samhengi og reikna síðan aftur á bak. Í jöfnum og stæðum er samband stærða skráð með því að gefa hverri óþekktri stærð nafn. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að bókstafir tákna stærðir en ekki hluti. Skoða má formúluna fyrir flatarmáli rétthyrnings sem dæmi. Þar er lengd hliða gefið nafn og formúlan verður því $l \cdot b$ þar sem l stendur fyrir lengd og b fyrir breidd.

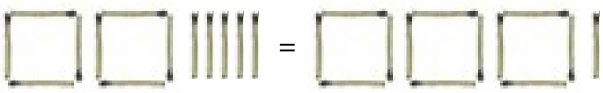
Bókstafir hafa mismunandi hlutverk í jöfnum. Þeir geta táknað óþekkta stærð, breytu eða haft alhæfingargildi. Í jöfnum eins og $2x + 4 = 10$ táknar x töluna 3. Í $2x + 3 = y$, eru breyturnar x og y háðar hvor annarri. Í formúlunni $F = l \cdot b$ er skráð samband á milli hliðarlengda rétthyrnings og flatarmáls. Sýna má fram á að víxlregla gildir um samlagningu með því að skrá $a + b = b + a$. Þar eru bókstafir notaðir til að sýna að sambandið sem er sýnt gildir um allar tölur. Nemendur þurfa að kynnast öllum þessum möguleikum.

Margir kennarar hafa fengið spurninguna hvers vegna allir þurfi að læra algebru. Í því samhengi má hugsa um tilganginn með stærðfræðinámi. Í mörgum reikningsdæmum sem verða á vegi okkar liggja ekki allar tölur fyrir og leita þarf að óþekktri stærð. Margs konar viðfangsefni daglegs lífs má skoða með því að nota jöfnur, t.d. vexti, efnismagn og kostnað. Með tilkomu töflureiknis verður þetta augljósara því þar skapast þægilegur möguleiki til að skoða samsetningarmöguleika ef samband er þekkt. Auðvelt er að skoða mismunandi gildi fyrir breytur og rannsaka útkomur. Mikilvægt er að nemendur átti sig á samhengi milli talnareiknings og algebru og gefur glíman við jöfnurnar góð tækifæri til þess. Algebra á að vera verkfæri til að leysa vandamál, tungumál sem getur létt samskipti, hugsun og rökleiðslu, auk þess að vera brunnur til að uppgötva ný samhengi.

Miklu máli skiptir að nemendur átti sig á merkingu jafnaðarmerkisins. Þeir þurfa að skilja að alltaf þurfa að vera jafngildar stæður sitt hvorum megin við jafnaðarmerki. Það vill brenna við að nemendur telji að jafnaðarmerkið þýði að framkvæma eigi útreikninga og fá eina tölu sem svar. Þá er hætt við að þeir gæti þess ekki að hafa jafnt báðum megin við jafnaðarmerkið og haldi áfram með útreikninga. Þá skrifa þeir eitthvað á þessa leið 2 + 8 = 10 : 5 = 2.

Það einfaldar lausn ýmissa þrauta og dæma að setja upp jöfnur. Nemendur þurfa að átta sig á merkingu jafna. Þeir þurfa að geta gefið dæmi um hvaða sambandi er lýst og gera sér grein fyrir að sama samband getur verið á milli stærða í allt öðru samhengi. Sem dæmi má nefna að jafnan $2x + 1 = 11$ getur snúist um að finna fjölda epla ef um er að ræða tvo poka af eplum og eitt í viðbót. Sama jafna getur líka snúist um þyngd, vegalengd eða kostnað.

Jöfnur má skrá með myndum, orðum, tölum og táknum. Margar leiðir má fara við að leysa jöfnur. Ekki er ástæða til að láta nemendur beita sömu aðferðum við lausn allra jafna heldur styðja þá við að ná valdi á nokkrum leiðum svo þeir geti valið hagkvæma leið hverju sinni. Í kaflanum eru kynntar nokkrar leiðir við lausnir á jöfnum. Lausn einfaldra jafna, eins og $x – 3 = 7$, má finna án mikilla útreikninga. Jöfnulausnir snúast almennt um að einfalda og fækka táknum. Ein leið við það er að hugsa sér að miði sé yfir óþekktu stærðinni og fyrst séu aðrir liðir einfaldaðir (sjá nánari lýsingu í glósubók á bls. 36 í kennslubókinni). Þægilegt getur verið að setja jöfnuna upp eins og múrsteina í vegg þar sem hver liður hefur sinn stein og jafngildar stæður hafa jafnstóra steina (sjá nánari lýsingu á bls. 37 í kennslubók). Nemendur hafa töluvert unnið með jafnvægisvog sem myndgervingu á jöfnum. Út frá þeirri mynd er auðvelt að hugsa sér að taka af eða bæta jafnmiklu við þar til óþekkta stærðin stendur ein eftir á annarri skálinni og þyngd hennar á hinni. Gott er að nemendur sjái jafnvægisvog og hvernig leysa má jöfnur beint með henni. Ekki þurfa allir nemendur að prófa að leysa með voginni. Kennari og nemendur geta til dæmis skoðað saman nokkrar slíkar lausnir. Kennari getur líka sett fram jöfnur með því að setja sama fjölda af tannstönglum í nokkur umslög og verið svo með lausa tannstöngla.



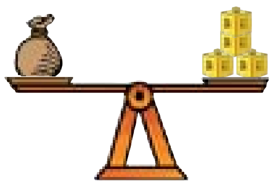
Hve margir tannstönglar eru í hverju umslagi?

Hönnuð hafa verið forrit til að styðja við ólíkar leiðir að lausn á jöfnum. Á slóðinni http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/ er til dæmis að finna margs konar smáforrit. Þar má m.a. finna forrit þar sem leysa á jöfnur með miðaaðferðinni sem fyrr var nefnd (*Solving equations with plate strategy*) og annað þar sem leysa á jöfnur með hugmyndinni um jafnvægisvog (*Solving equations with balance-strategy: game*). Að lokum er hér slóð þar sem notuð er jafnvægisvog:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_117_g_3_t_2.html

Ein leið til að leysa jöfnur er að teikna línurit. Þá má oft lesa margar lausnir á sömu jöfnu ef tvær stærðir eru óþekktar. Ef um er að ræða að finna eina óþekkta stærð í jöfnu beinnar línu er aðeins ein lausn. Gott er að ganga skipulega til verks, búa til gildistöflur og fá þannig fram hnit punkta á línunni. Með því að merkja punktana í hnitakerfi fæst fram stefna línunnar. Heppilegt getur verið að einfalda teikningar með því að nýta sér tölvutæknina. Þá er líka mun einfaldara að skoða áhrif hallatölu og fastastuðuls. Á eftirfarandi slóð má finna margs konar smáforrit: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html. Þar er meðal annars að finna forrit þar sem nemendur geta slegið inn jöfnu og fengið línu hennar teiknaða. (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_109_g_3_t_2.html?open=activities)

## Kennsluhugmyndir

Línurit eru mikið notuð til að koma upplýsingum til almennings. Þess vegna getur verið gagnlegt að byrja á að skoða línurit í fjölmiðlum eða af heimasíðum. Mikilvægt er þá að sýna einnig línurit sem hafa beina línu og bera þau saman við önnur sem hafa ekki línulegan vöxt. Hvers konar upplýsingar eru settar fram með línuriti? Hvernig er hægt að nota línurit til að spá fyrir um framhald? Hvernig er hægt að gefa töflureikni skipanir um að teikna línurit? Hvernig er best að skrá regluleika? Spurningum af þessu tagi má kasta fram og ræða við hópinn. Í framhaldi má skoða nánar einhverja jöfnu fyrir beina línu og velta fyrir sér leið til að finna gildi annarrar breytunnar ef gildi hinnar er þekkt. Þetta má skoða á línuriti og síðan með því að setja jöfnuna upp á jafnvægisvog. Það hjálpar mörgum að nota jafnvægisvog til að skilja mikilvægi þess að jafngildar stæður séu báðum megin jafnaðarmerkisins. Kennari getur t.d. sett teninga sem óþekkta stærð og sentíkubba (sem eru gramm að þyngd) sem ígildi fastastuðlanna. Gott getur verið að prófa nokkrar jöfnur og leysa þær með því að taka jafnt af báðum skálum. Nemendur geta síðan unnið dæmi 1–5 sjálfstætt en ástæða er til að leggja áherslu á að þeir teikni stæðurnar upp.



Á blaðsíðu 31 er meginviðfangsefnið að æfa lestur jafna og að nemendur geri sér grein fyrir mikilvægi þess að skoða sanngildi út frá mismunandi gildum. Meðan nemendur vinna hópverkefni gefst kennara tækifæri til að átta sig á skilningi nemenda á skráningarmáta og jafnframt að ræða við þá um sanngildi. Dæmi 8 og 9 eru upprifjun á viðfangsefnum úr *Átta-tíu, 1*. Gott getur verið að nemendur vinni þau dæmi og dæmin á blaðsíðu 32 í pörum. Safna má saman þeim sögum sem koma fram um jöfnuna $y = 6 \cdot x$ og fá fram sem fjölbreyttastar hugmyndir um úr hvaða samhengi þessi jafna gæti verið sprottin. Á blaðsíðu 33 og 34 eru dæmi um hvernig jöfnur geta sprottið úr daglegu lífi. Þar gefst gott tilefni til að nemendur finni fleiri dæmi og yfirfæri. Þannig æfa þeir sig í að gefa stærðum nöfn og skrá sambönd.

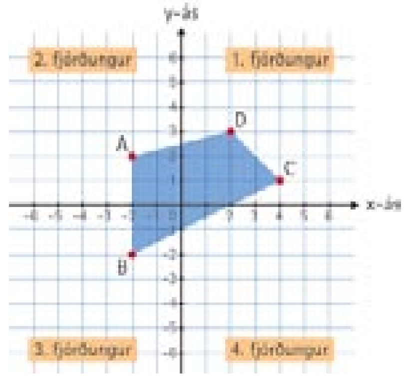
Dæmi 21–29 snúast um að leysa jöfnur með einni óþekktri. Í upphafi er gert ráð fyrir að nemendur reyni að sjá út lausnina en síðan eru kynntar tvær leiðir. Þar með hafa þeir kynnst þremur leiðum, þ.e. jafnvægisvoginni, miðaleiðinni og veggnum. Kjörið er að nýta tölvutæknina svo nemendur geti æft sig (sjá slóðir í umfjöllun um inntak og vinnubrögð). Þeir geta leyst dæmin í bókinni í tölvunni. Ræða þarf um þessar mismunandi leiðir og hvenær hver þeirra sé hentug. Á blaðsíðu 38 er heildstætt verkefni þar sem jöfnur, og útreikningar með þeim, eru notaðar til að leggja grunn að ákvörðun og rökstuðningi fyrir henni. Dæmin á þessari blaðsíðu gætu hentað vel til að meta skilning nemenda og eru því góð umræðuverkefni milli kennara og nemenda. Þau gætu líka hentað sem skilaverkefni sem síðan væru rædd í minni hópum í bekknum þar sem kennari fylgdist með umræðunum.

Á blaðsíðu 39–40 er farið yfir hvernig teikna má jöfnu beinnar línu með því að finna nokkra hnitpunkta. Nota má forritið *Winplot* eða *Flott föll* sem gefið er út af Námsgagnastofnun. Einnig má nýta forritið *Grapher* á eftirfarandi slóð. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_109_g_3_t_2.html?open=activities. Forritin geta líka nýst kennara vel þannig að hann noti skjávarpa og skoði með nemendahópi sínum hvað gerist ef hallatölu er breytt og hvað gerist ef fastastuðli er breytt.

Megináhersla í kaflanum er á að nemendur átti sig á gagnsemi jafna og nái nokkru valdi á að leysa fyrsta stigs jöfnur. Í lok kaflans eru verkefni þar sem nemendur eiga að velta fyrir sér ólíkum leiðum við lausn viðfangsefnis. Þar er mikilvægt að draga fram hvernig jöfnur geta stytt lausnaferli. Nemendur gætu haft mikið gagn af því að fara yfir efni kaflans og skerpa skilning sinn á meginhugtökum. Spurningar í lok kaflans gætu verið heppilegar í hópumræður.

Meginviðfangsefni kaflans eru tvö, þ.e. að setja fram og leysa jöfnur. Við yfirferð á efni hans má nýta tölvur mikið, ekki síst töflureikni. Hér að framan hefur verið vísað í nokkur smáforrit en þau má nota við lausnir ýmis konar viðfangsefna. Þau gefa nemendum tækifæri til að leysa dæmin í bókinni með hjálp tölvunnar. Hvetja ætti þá til að prófa að leysa sömu jöfnuna með mismunandi aðferðum til að auðvelda sér samanburð á leiðum.

# Hnitakerfi og flutningar




## Inntak

Markmið að nemendur:

- Geti skráð punkta í öllum fjórðungum hnitakerfisins.
- Fáist við einfalda flutninga, svo sem hliðranir, snúninga og speglanir mynda í sléttum fleti.
- Geti skráð flutninga í hnitakerfi.
- Skoði og greini flutninga í mynstrum og mynsturborðum.
- Kynnist mynsturgerð frá ýmsum menningarheimum og tímabilum.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geti lesið og túlkað stærðfræðilegan texta.
- Beiti námkvæmni við lausn viðfangsefna.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Upphafsmaður hnitakerfisins var stærðfræðingurinn og heimspekingurinn Rene Descartes (1596–1650). Hnitarúmfræðin gerði stærðfræðingum kleift að breyta jöfnum í myndir og myndum í jöfnur. Hnitakerfi Descartes er með tvo eða þrjá ása, eftir því hvort það er tvívítt eða þrívítt, og eru ásarnir hornréttir hver á annan. Í tvívíðu hnitakerfi er hægt að segja til um staðsetningu punkts út frá fjarlægð frá x-ás annars vegar og y-ás hins vegar. Staðsetningunni er því lýst með einu talnapari (x,y) þar sem fyrri talan segir til um fjarlægð frá x-ás og seinni talan um fjarlægð frá y-ás. Þegar um þrívítt hnitakerfi er að ræða þarf þrjár tölur (x,y,z) til að lýsa staðsetningu punkts. Rétthyrnt tvívítt eða þrívítt hnitakerfi er kennt við Decartes og kallað Kartetískt hnitakerfi.

Til eru fleiri gerðir hnitakerfa og það staðsetningarkerfi sem notað er í landafræði, þar sem staðsetningu er lýst út frá neti lengdar- og breiddarbauga, er dæmi um eitt þeirra. Nemendur munu síðar kynnast því hvernig nota má pólhnit til að lýsa staðsetningu punkts í tvívídd.

Nemendur hafa áður kynnst hnitakerfinu og fengist við að skrá hnit punkta í öllum fjórðungum hnitakerfisins. Rétt er að rifja upp með nemendum á hvern hátt fjórðungar hnitakerfisins eru merktir og hvað einkennir hnit punkta í hverjum fjórðungi fyrir sig.

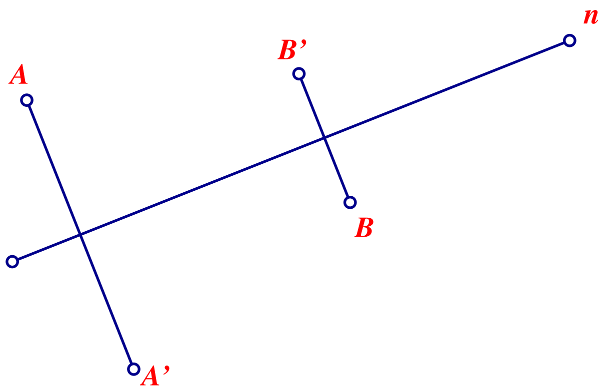
Í þessum kafla fá nemendur nokkra þjálfun í að lesa og skrá hnit punkta í hnitakerfinu en megináhersla er lögð á flutninga. Í því samhengi er sjónum nemenda m.a. beint að því á hvern hátt hnit punkts breytast þegar honum er speglað um ásana, honum hliðrað í tiltekna stefnu eða snúið um upphafspunkt hnitakerfisins.

**Um flutninga**[3]

Flutningur er tilfærsla á öllum punktum plansins þannig að allar fjarlægðir varðveitist. Það hefur í för með sér að flutningur breytir aldrei lögun myndar. Hér verður fjallað stuttlega um helstu gerðir flutninga, þ.e. speglun, snúning, hliðrun og rennispeglun.

SPEGLUN (LÍNUSPEGLUN)
Látum $n$ tákna línu. Við lýsum *speglun* um línuna $n$ með því að tilgreina hvert sérhver punktur plansins færist. Punktur sem ekki er á $n$ speglast í punkt sem er hinum megin við $n$, „beint á móti", jafnlangt frá $n$. Punktur sem er á $n$ færist ekki. Þessu má lýsa nánar á eftirfarandi hátt.

Við *speglun* í $n$ gildir:
- i) Punktur sem er á $n$ færist ekki.
- ii) Punktur, $A$, sem er ekki á $n$, færist í punktinn $A'$, sem er þannig að línan $n$ er miðnormall striksins milli $A$ og $A'$.




Mynd 1

Við speglun um línuna $n$ færist $A$ í $A'$, $B$ í $B'$ o.s.frv.

Línan sem speglað er um er oft kölluð *spegilás* eða *spegillína* eða einfaldlega *spegill*. Ýmist er talað um speglun í línu eða speglun um línu.

3 Umfjöllun um flutninga er byggð á kaflanum Rúmfræði, Flutningar í *Stærðfræði í kennaranámi*. Höfundar Friðrik Diego og Kristín Halla Jónsdóttir. Kennaraháskóli Íslands 2001.

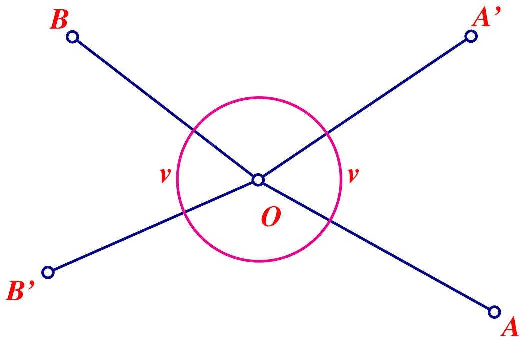
SNÚNINGUR

Við *snúning* er einum punkti í planinu haldið föstum, en öllum öðrum punktum snúið um hann, um eitthvert tiltekið fast horn. Punkturinn sem snúið er um er jafnan kallaður *snúningspunktur* eða *snúningsmiðja*. Nánar mætti lýsa snúningi, um punkt $O$, um $v$ gráður, á eftirfarandi hátt.

Við *snúning* um $O$ um $v°$ gildir:

i) $O$ flyst ekki úr stað.

ii) Punktur $A$, $A \neq O$, færist í punkt $A'$ sem er þannig að fjarlægð $A'$ frá $O$ er jöfn fjarlægð $A$ frá $O$ og þannig að hornið $AOA'$ er $v°$.




Mynd 2

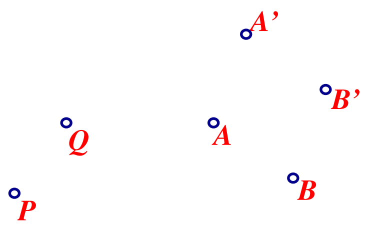
Við snúning um $O$, um $v°$, færist $A$ í $A'$, $B$ í $B'$ o.s.frv.

Ef tilgreina á ákveðinn snúning þarf því að gefa upp snúningsmiðjuna og hornið sem snúið er um (snúningshornið). Samkvæmt venju er jafnan átt við snúning rangsælis sé ekki annað tiltekið.

HLIÐRUN

*Hliðrun* nefnist sú vörpun sem færir alla punkta plansins jafnlangt í sömu stefnu.

Ákveðinni hliðrun er því lýst með hliðrunarstefnu og hliðrunarvegalengd. Hliðrun má líka lýsa með ör sem þá ákvarðar bæði stefnu og vegalengd. Enn fremur mætti lýsa hliðrun með því að tiltaka hvert einn ákveðinn punktur færist, allir aðrir punktar færast (hliðrast) þá jafnlangt og í sömu átt.



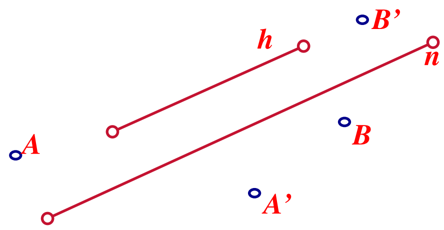

Mynd 3

Við hliðrunina sem færir $P$ í $Q$ færist $A$ í $A'$, $B$ í $B'$ o.s.frv.

RENNISPEGLUN

*Rennispeglun* nefnist sá flutningur sem felst í því að spegla um tiltekna línu og hliðra síðan samsíða línunni.

Sami flutningur fæst með því að hliðra fyrst og spegla svo. Þannig er heitið á þessari gerð flutnings til komið, þ.e. renna (hliðra samsíða línunni) og spegla (um línuna). Línan sem speglað er um kallast jafnan ás rennispeglunarinnar. Tiltekin rennispeglun ákvarðast þá af ásnum og hliðruninni.




Mynd 4

Við rennispeglun sem hefur ás $n$ og hliðrun $h$ færist $A$ í $A'$, $B$ í $B'$ o.s.frv.

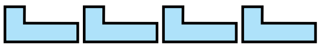
Mikilvægt er að nemendur gerir sér grein fyrir að við flutning haldast allar fjarlægðir óbreyttar sem hefur í för með sér að lögun myndar helst óbreytt við flutning þó stefna hennar geti breyst.

Nemendur hafa fengist við helstu gerðir flutninga, þ.e. hliðrun, speglun og snúning bæði í hnitakerfi og með því að greina og búa til myndir og mynstur. Ekki hefur verið fjallað um rennispeglun sérstaklega og er það ekki heldur gert hér enda má líta á hana sem samsetningu tveggja flutninga, speglunar og hliðrunar. Nemendur halda áfram að búa til og greina mynstur og sjá að með tiltölulega einföldum mynstureiningum og samsetningum nokkurra flutninga má búa til fjölbreytt og falleg mynstur. Þeir kynnast því jafnframt að maðurinn hefur í árþúsundir haft auga fyrir mynstrum og regluleika og að mismunandi mynstur einkenna ólíka menningarheima þó lögmálin við að búa þau til séu þau sömu.

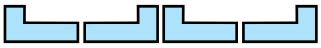
Nemendur hafa lítið fengist við að búa til mynstur með snúningum. Snúningar geta reynst þeim erfiðir og gott er að nota gegnsæjan pappír og draga myndir í gegn og snúa þeim síðan til að skoða hvar þær eiga að lenda. Gæta þarf þess að halda snúningspunktinum föstum og má gera það með oddhvössum blýanti.

Skoðað er sérstaklega hvernig mynda má mynsturborða út frá einni mynstureiningu og ólíkum samsetningum flutninga. Mynsturborðar eru lengjur sem geta haldið áfram óendanlega í eina átt og hægt er að greina mynstureiningu sem endurtekur sig sífellt. Mynstureininguna má mynda með einu formi með speglun, hliðrun, snúningi eða rennispeglun. Síðan er einingunni hliðrað til að mynda endurtekið mynstur eða mynsturborða. Þetta má gera á sjö mismunandi vegu.

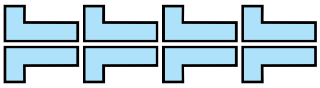
a. Mynstrið er myndað með hliðrun eingöngu.



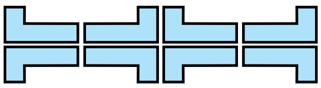
b. Mynstureiningu er speglað um lóðréttan ás og síðan er báðum einingum hliðrað.



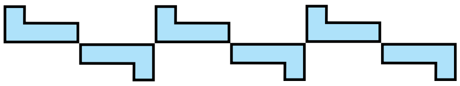
c. Mynstureiningu er speglað um láréttan ás og síðan er báðum einingum hliðrað.



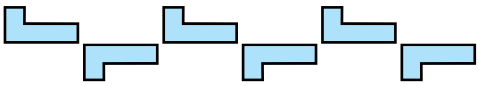
d. Mynstureiningu er speglað um lóðréttan ás og síðan um láréttan ás eða öfugt. Öllum fjórum einingum er síðan hliðrað.



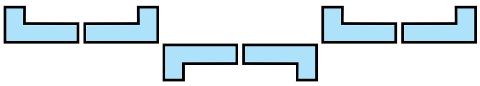
e. Mynstureiningu er snúið um 180° og báðum einingum síðan hliðrað.



f. Mynstureiningu er speglað um láréttan ás og henni síðan hliðrað. Báðum einingum síðan hliðrað.



g. Mynstureiningu er speglað um lóðréttan ás. Báðum einingum er speglað yfir láréttan ás og þeim síðan hliðrað.

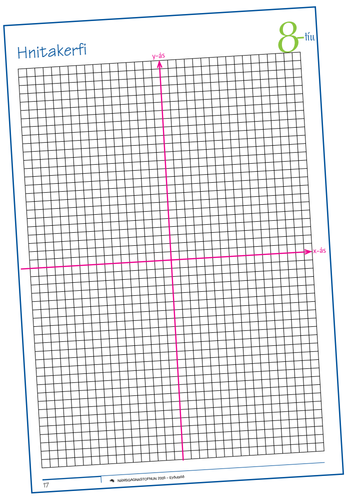


Flóknari mynstur eru mynduð með því að flytja mynstureiningar í báðar áttir. Í kaflanum eru nokkur dæmi um slík mynstur frá ólíkum tímabilum og menningarheimum. Meginmarkmiðið með þessum viðfangsefnum er að nemendur fái smávegis innsýn í á hvern hátt flóknari mynstur eru mynduð og hefðir við mynsturgerð í mismunandi menningarheimum. Ágæta umfjöllun um flutninga, mynsturborða og fleira er að finna á þessari síðu: http://www.geometer.mb.dk/tess/index.htm. Þar má einnig sjá á hvern hátt nýta má forrit eins og *The Geometer's Sketchpad* við vinnu með flutninga.

Íslömsk mynstur og rangolí-mynstur eru skoðuð sérstaklega. Mynstur eru nátengd ýmsum trúarbrögðum og bera oft með sér ákveðna merkingu. Hægt er að finna ýmsar upplýsingar og fleiri hugmyndir að vinnu með þessi mynstur á Netinu með því að nota leitarorðin rangoli patterns og islamic patterns. Tilvalið er að tengja umfjöllun um mynstur og tákn við nám nemenda í trúarbragðafræði.

## Kennsluhugmyndir

Byrja má þennan kafla með upprifjun á rétthyrndu tvívíðu hnitakerfi og skráningu hnita í öllum fjórðungum þess. Fyrsta verkefni kaflans getur þjónað þeim tilgangi. Á eyðublaði sem finna má á 8-tíu vefnum er hnitakerfi sem setja má á glæru og nota við upprifjun. Einnig geta nemendur notað það þegar þeir vinna sum verkefni í stað þess að teikna sjálfir upp hnitakerfi eins og gert er ráð fyrir í kaflanum. Nemendur þurfa sjálfir að setja tölur inn á ásana og geta þeir valið hve stórt hvert bil á ásunum er eftir því hvert viðfangsefnið er.




Verkefnunum á blaðsíðu 42–45 er ætlað að beina sjónum nemenda frekar að flutningum og eiginleikum þeirra. Þau krefjast töluverðrar teiknivinnu og skráninga af nemendum og er rétt að ítreka við þá að þeir séu nákvæmir og vandi vinnubrögð. Í tengslum við vinnu með snúninga er nauðsynlegt að nemendur fái í hendur gegnsæjan pappír til að þeir eigi auðveldara með að átta sig á hvar mynd lendir eftir tiltekinn snúning. Í umræðum er nauðsynlegt að ræða um flutningana og skilgreiningar þeirra. Hér eru dæmi um spurningar sem ræða má við nemendur eða þeir geta rætt um saman í hópum.

- Hvers vegna er talið nauðsynlegt að skilgreina stærðfræðileg hugtök nákvæmlega?
- Hvaða merking er lögð í hugtökin speglun, hliðrun og snúningur í daglegu máli?
- Er sú merking í samræmi við hinar stærðfræðilegu skilgreiningar?
- Hvaða ávinningur er af því að fást við flutninga í hnitakerfinu?
- Er hægt að segja til um hvaða flutningur hefur verið framkvæmdur með því að skoða hnit myndar fyrir og eftir flutning?

Æskilegt er að nemendur staðnæmist t.d. eftir að hafa fengist við hvern flutning fyrir sig og ígrundi og skrái hjá sér hvaða lærdóm má draga af vinnunni og hvað einkennir flutningana sem þeir voru að fást við. Skrá má í leiðabækur hvers og eins eða á sameiginlegt veggspjald bekkjarins eða hópsins ef nemendur vinna saman.

Á blaðsíðum 46–49 er fengist við að greina og búa til mynstur með samsettum flutningum. Skipta má verkefnunum á milli hópa, bæði þeim sem merkt eru sérstaklega sem hópverkefni og hinum. Einnig er hægt að leggja áherslu á að allir nemendur vinni saman hópverkefnin á blaðsíðum 47 og 48 og hin verkefnin vinni þeir hver í sínu lagi. Mynstrin á blaðsíðu 49 eru á eyðublaði og geta nemendur notað það til að auðvelda sér að afmarka mynstureiningu og greina á hvern hátt mynstið er myndað.

Í lok kaflans er valið að skoða nánar rangólí-mynstur og íslömsk mynstur. Þessar mynsturgerðir eru unnar út frá tiltölulega einföldum grunnhugmyndum sem síðan má þróa áfram í flóknari mynstur. Þau bjóða því upp á ýmsa útfærslumöguleika og einnig tengjast þau tilteknum trúarbrögðum sem gera má ráð fyrir að nemendur í 8. bekk séu að læra um. Hér eru því ýmsir samþættingarmöguleikar, til dæmis við myndlist, trúarbragðafræði og menningarsögu. Hvetja má nemendur til að leita upplýsinga og skoða nánar ýmis mynstur á Netinu.

# Prósentureikningur

## Inntak

Markmið að nemendur:

- Efli skilning sinn á prósentuhugtakinu.
- Geri sér grein fyrir að hlutfall má skrá sem prósentur, almennt brot eða tugabrot.
- Kynnist ýmsum leiðum við prósentureikning.
- Kynnist prósentujöfnunni $\boxed{\text{heild} \cdot \text{prósenta} = \text{hluti}}$ og geti notað hana til að finna heild, hluta eða prósentu.
- Fáist við algengan prósentureikning svo sem hækkun, lækkun, minnkun, aukningu og afslátt.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Greini upplýsingar og nýti þær við útreikninga.
- Takist á við stærðfræðileg viðfangsefni tengd daglegu lífi.
- Dragi ályktanir út frá tölulegum upplýsingum.
- Skrifi skýrslu byggða á útreikningum og tölulegum gögnum.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

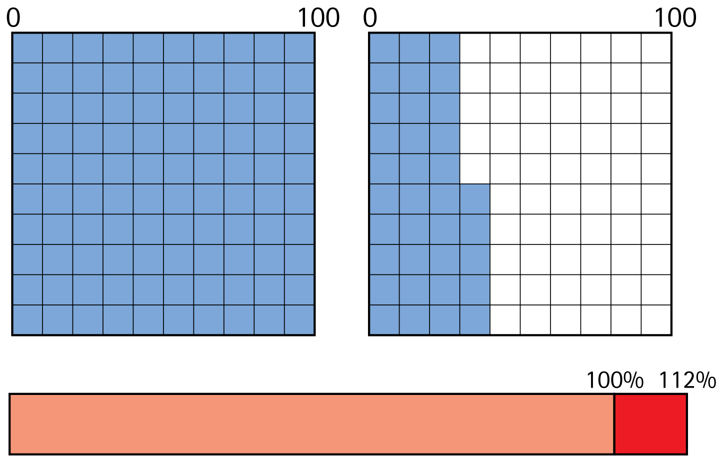
Prósentureikningur er viðfangsefni sem skipar stóran sess á unglingastiginu. Forsenda þess að nemendur nái góðum tökum á prósentureikningi er góður skilningur á prósentuhugtakinu. Hugtakið prósenta merkir af hundraði og sérhvert prósentuhlutfall má einnig skrá sem almennt brot eða tugabrot. Stærðfræðilega séð eru prósentur því aðeins ein leið til að skrá brot. Nemendur þurfa að átta sig á að 20%, 0,2 og 1/5 er allt skráning á sama hlutfallinu. Í kaflanum um almenn brot var töluverð áhersla lögð á þessi tengsl og að það að finna 20%, 1/5 og 0,2 af tilteknum fjölda eða upphæð gefur sömu niðurstöðu.

Nemendur hafa kynnst ýmsum óformlegum leiðum við að finna prósentur. Þar má nefna að nota prósentureit og jafnframt að finna eitt prósent og margfalda síðan með prósentunni. Einnig ættu margir nemendur að hafa áttað sig á að ef prósentunni er breytt í tugabrot má finna prósentur af tiltekinni upphæð með því að margfalda með tugabrotinu. Á mörgum einföldum gerðum vasareikna er prósentutakki og nemendur þurfa að læra að nota hann. Á öflugum vasareiknum er yfirleitt ekki prósentutakki og þá er nauðsynlegt að fara aðrar leiðir svo sem eins og að breyta prósentu í tugabrot.

Í þessum kafla er prósentujafnan kynnt í fyrsta sinn. Prósentujafnan er notuð til að sýna samband milli prósentu, hluta, heildar, þ.e. $\boxed{\text{heild} \cdot \text{prósenta} = \text{hluti.}}$ Í prósentudæmum eru yfirleitt tvær breytur þekktar og leitað er að þeirri þriðju. Í sumum námsbókum eru settar fram þrjár jöfnur eftir því hvaða þáttur er óþekktur.

Hér er valið að leggja áherslu á að í raun er þetta bara ein jafna þar sem einhver ein stærð er óþekkt. Þegar jafnan er leyst þarf síðan að einangra óþekktu stærðina.

Nemendur eiga oft í erfiðleikum með að greina hvað er óþekkt, hvort það er heildin eða hlutinn. Þetta reynist nemendum sérstaklega erfitt þegar hlutinn er stærri en heildin eins og þegar um prósentuaukningu er að ræða eða þegar þekkt prósentuhlutfall er stærra en hundrað. Myndræn framsetning, eins og prósentureitur eða hundraðrúðunet, getur hjálpað nemendum að sjá þetta fyrir sér. Einnig er gott að nemendur ræði og rökstyðji hver fyrir öðrum hver óþekkta stærðin er.




Í kaflanum er hvatt til að nemendur nýti sér að margfalda með einni tölu þegar finna á prósentuhækkun eða prósentulækkun í stað þess að finna fyrst prósentuna og leggja síðan við eða draga frá. Það reynir á skilning nemenda á því að skrá má prósentu sem tugabrot og að 100% má því skrá sem 1. Þannig má reikna út verð með 20% afslætti með því að margfalda með 0,8 og verð með 20% álagningu með því að margfalda með 1,2. Það er mun einfaldara en að finna fyrst 20% og draga síðan frá eða leggja við.

Eitt af því sem gerir erfitt að fást við prósentur er að þær eru hlutfall af heild og því háðar henni. 25% af upphæð geta því bæði verið há og lág tala allt eftir því hver upphæðin er. Það skiptir til dæmis sölumann miklu máli hvort hann fær í sölulaun 15% af söluverði vöru eða innkaupsverði hennar. Þetta má einnig sjá á því að ef vöruverð er hækkað um tiltekna prósentu, t.d. 8%, og síðan lækkað aftur um sömu prósentu þá fæst ekki aftur upphaflega verðið. Þetta er gaman að skoða og ræða við nemendur.

Í kaflanum eru skífurit skoðuð en algengt er að sýna skiptingu á skífuritum í prósentum. Algengast er að skífurit séu gerð með töflureikni og vafalaust hafa nemendur prófað það. Nauðsynlegt er að nemendur skilji á hvern hátt prósentureikningur er notaður við að búa til skífurit. Við gerð skífurits er gengið út frá því að hringur er 360°. Fundin er stærð hvers geira í gráðum út frá prósentuhlutfalli eins og sýnt er á blaðsíðu 6 í kennslubókinni. Þegar skífurit er gert í höndunum er því nauðsynlegt að nota gráðuboga.

## Kennsluhugmyndir

Prósentur eru mikið notaðar í samfélaginu og því er sjálfsagt að tengja umfjöllun þessa kafla við daglegt líf og umhverfi nemenda. Þess vegna væri tilvalið að byrja á að biðja nemendur að finna dæmi um notkun prósentna í fjölmiðlum. Áhugavert er að skoða á hvern hátt prósentur eru notaðar, hvort verið er að lýsa hlutfalli, reikna með prósentum eða bera saman með því að nota prósentur. Oft er t.d. greint frá breytingum í prósentum en erfitt getur verið að átta sig á hvort um er að ræða prósentuhlutfall eða prósentustig. Sem dæmi má nefna að þegar vextir lækka úr 5% í 4% þá er stundum talað um að þeir hafi lækkað um 1% en það er í raun 20% lækkun eða lækkun um 1 prósentustig. Mikilvægt er því að gera greinarmun á þessu. Þetta má t.d. skoða í tengslum við fyrsta dæmið í kaflanum.

Verkefnin á blaðsíðu 53 og 54 er rétt að nemendur glími við á eigin spýtur og getur kennari notað þau til að greina kunnáttu og skilning nemenda á efninu. Í dæmi 2 og 3 mætti biðja nemendur að skrá hlutfallið bæði sem prósentu, almennt brot og tugabrot. Kennari getur velt fyrir sér spurningum eins og:

- Hvaða leiðir nota nemendur við að leysa dæmi 5–6?
- Notar sami nemandi alltaf sömu leiðina eða velur hann leið sem á einhvern hátt er háð þeim tölum sem hann er að fást við?

Á blaðsíðum 55–56 eru dregnar fram þær lausnaleiðir í prósentureikningi sem nemendur hafa kynnst til þessa. Þær eru að nota prósentureit, að deila með 100 til að finna 1% og margfalda síðan með prósentutölunni, breyta prósentunni í tugabrot og margfalda síðan með tugabrotinu og nota vasareikni. Allar eru þessa leiðir að sjálfsögðu nátengdar og mikilvægt er að ræða það og draga fram kosti þeirra og galla eins og gert er ráð fyrir í dæmi 21.

Á blaðsíðu 57 er prósentujafnan kynnt til sögunnar. Nauðsynlegt er að kynna jöfnuna vel fyrir nemendum og það samband sem hún sýnir. Í framhaldi af því þarf að ræða hvaða leiðir má fara við að leysa prósentujöfnu þegar búið er að setja inn í hana þekktar og óþekktar stærðir. Mestu máli skiptir þó að nemendur greini hver óþekkta stærðin er, þ.e. hvort það er heildin, hlutinn eða prósentan. Það reynist nemendum einna erfiðast þegar prósentan er óþekkt og hlutinn er stærri en heildin. Dæmi: Hve mörg prósent eru 500 af 400? Nokkur slík dæmi er að finna í dæmi 29 og þar mætti byrja á að greina í hvaða liðum hlutinn er stærri en heildin og síðan hvaða leiðir má þá fara til að finna prósentuna.

Af svipuðum toga eru dæmi þar sem hlutinn og prósentan eru þekkt og prósentan er hærri en 100%. Í dæmum 31–32 er gert ráð fyrir að nemendur prófi sig áfram. Þeir geta nýtt sér prósentureit eða það að deila með fjölda prósentna og margfalda síðan með 100 til að finna heildina.

Margir unglingar hafa áhuga á tölvum og ýmsum tækjum sem tengjast þeim. Á blaðsíðu 59–60 eru viðfangsefni sem tengjast þessum heimi. Kjörið er að nemendur geri verðsamanburð á grundvelli

eigin athugana. Þar nota þeir prósentureikning í eðlilegu samhengi. Ræða má hvar og á hvern hátt prósentur eru notaðar og á hvern hátt má nýta þær til að bera saman verð og gæði. Í tölvuheiminum eru stærðir mældar í bætum og einingarnar sem þar eru notaðar eru kílóbæti, megabæti og gígabæti. Tilvalið er að skoða hvernig þær eru hluti af metrakerfinu og að kílóbæti eru hliðstæð við kílógrömm eða kílómetra. Megabæti eru 1000 sinnum stærri en kílóbæti og gígabæti eru 1000 sinnum stærri en megabæti. Stærstu hörðu diskarnir í dag eru með um 500 GB geymslurými. Það er því líkast til ekki langt undan að fram komi harðir diskar sem taka 1 tarabæti eða 1000 GB.

Í tengslum við verkefnin um skífurit er tilvalið að nemendur geri eigin kannanir og setji niðurstöður þeirra upp í skífurit. Þeir geta einnig fundið skífurit sem gefa upplýsingar um umhverfi og/eða áhugasvið þeirra. Ef skipting á skífuriti er gefin upp í prósentum getur verið áhugavert að reyna að finna hve mikill fjöldi býr að baki hverjum geira. Ef fjöldinn er gefinn upp má finna hve mörg prósent af heildarfjöldanum hann er. Æskilegt er að ræða muninn á því að gera skífurit í höndunum og með því að nota töflureikni og á hvern hátt gráður og gráðubogi tengjast gerð skífurita.

Á blaðsíðu 62 er sýnt hvernig nota má hundraðrúðunet til að skrá prósentufjölda til að auðvelda sér að greina hvaða upplýsingar eru þekktar. Gott er að hvetja nemendur til að nýta sér þetta en það sem veldur þeim oft erfiðleikum er að greina þekktar og óþekktar stærðir. Verkefnin á síðustu tveimur blaðsíðunum má líta á sem æfingadæmi eða samantektarverkefni. Einnig geta þau nýst sem námsmatsverkefni.

# Tölur

## Inntak

Markmið að nemendur:

- Þjálfist í meðferð talna og efli talnaskilning sinn.
- Fáist við ýmsar hugmyndir úr talnafræði svo sem veldi, frumtölur, samsettar tölur, Fibonacci tölur, ferningstölur og ferningsrætur.
- Geti greint og talið möguleika á að raða saman nokkrum stökum.
- Kynnist helstu talnamengjunum.
- Kynnist hugmyndinni á bak við hugtakið tölugildi.
- Nýti sér hugtökin sammengi, sniðmengi og stak.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

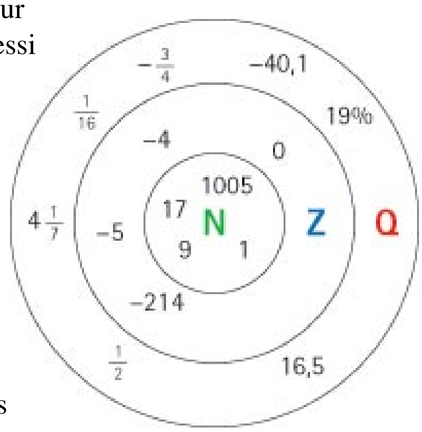
- Lesi og skrifi tölur á fjölbreyttan hátt.
- Efli hæfni sína í að ræða um stærðfræði og rökstyðja hugmyndir sínar.
- Lesi og túlki stærðfræðilegan texta.
- Noti rannsóknarnálgun við lausn verkefna.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Bókin *Talnapúkinn* eftir Hans Magnús Enzenberger kom út hjá bókaforlaginu Máli og menningu árið 1998, í íslenskri þýðingu Arthúrs Björgvins Bollasonar. Í bókinni er fjallað um margvísleg stærðfræðileg fyrirbæri en megináherslan er þó á viðfangsefni talnafræðinnar. Bókin byggist upp á draumum 12 ára drengs sem leiðist í stærðfræðitímum og hefur ekki mikla trú á sjálfum sér í stærðfræðinámi. Það er því heppilegt að ræða um viðhorf til stærðfræði og stærðfræðináms í tengslum við lestur bókarinnar. Talið er að viðhorf hafi mikil áhrif á hvort og hvernig nemendur takast á við nám sitt. Bókina má nota á ýmsa vegu í stærðfræðikennslu.

Mikilvægt er að nemendur nái góðu valdi á að skrá stærðir og geti lesið og skilið mismunandi framsetningarmáta þeirra. Þeir þurfa að ná góðu valdi á táknmáli stærðfræðinnar til að geta beitt því við skráningu eftir því sem við á. Gaman er að skoða hve tölur hækka hratt ef notaður er veldisvísir. Maðurinn hefur verið að þróa ýmsar leiðir við skráningu stærða gegnum aldirnar og er gaman að skoða hve margar mismunandi leiðir hafa verið þróaðar. Í kaflanum er rómversk talnaritun borin saman við arabíska og áður hafa margir nemendur sjálfsagt heyrt um fleiri leiðir. Í námsefni yngsta stigs og miðstigs eru sýnd nokkur dæmi. Í *Einingu 8* er sýnt skráningarkerfi Maya og greint er frá fleiri kerfum í kennarabók, t.d. skráningarmáta Babýlóníumanna og Egypta til forna. Í *Geisla*-námsefninu er rómversk talnaritun skoðuð. Víða má finna upplýsingar um talnaritun, m.a. á Vísindavef HÍ og Wikipedia-alfræðiritinu (slóð: http://is.wikipedia.org/)

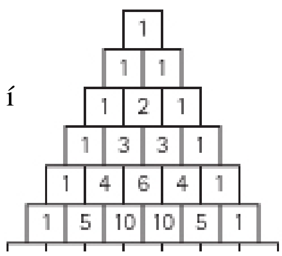
Í kaflanum *Tölur* er hugmyndin að baki hugtakinu tölugildi kynnt stuttlega sem skráning á fjarlægð milli punkta á talnalínu. Ekki er gert ráð fyrir að tölugildishugtakið sjálft sé notað beint eða skoðað í öðru samhengi og ritháttur þess er ekki notaður. Tölugildi er eitt af því sem bætist við námsefni grunnskólans við styttingu framhaldsskólans og verður farið nánar í það í námsefni 9. og 10. bekkjar. Sama má segja um mengjahugtök. Gert er ráð fyrir að nemendur þekki hugtökin mengi, sammengi, sniðmengi og stak. Þessi hugtök má skoða í ýmsu samhengi. Í námsefni miðstigs hafa þeir aðeins kynnst því í rökfræðiverkefnum. Í kaflanum er þessum hugtökum beitt í talnafræði og í tengslum við umfjöllun um talnamengi. Skráning í mengi getur auðveldað nemendum að gera sér grein fyrir tengslum talna og einkennum þeirra. Hvert talnamengi hefur ákveðin einkenni. Nemendum er ætlað að átta sig á mengi náttúrlegra talna (N), mengi heilla talna (Z) og mengi ræðra talna (Q). Mikilvægt er að þeir þekki hvernig flokka má tölur og að talnamengi eins og N er hlutmengi í bæði Z og Q.




Í talnafræði er fengist við heilar tölur. Mikilvæg viðfangsefni í talnafræði eru til dæmis deilanleiki og frumþáttun. Glíma við slík viðfangsefni eflir mjög talnaskyn og skilning á eðli reikniaðgerða. Áhugavert er að skoða áhrif deilingar með neikvæðum tölum. Í talnafræði eru tölur skoðaðar í ýmsum flokkum svo sem frumtölur – samsettar tölur, oddatölur – sléttar tölur, ferningstölur og ferningsrætur, þríhyrningstölur og Fibonacci-tölur. Leonardo Bonacci var stærðfræðingur sem var uppi á 13. öld. Töluvert hefur verið skrifað um hann og má finna ýmsar upplýsingar um hann og þá stærðfræði sem hann glímdi við á eftirfarandi slóðum. (http://www.answers.com/topic/leonardo-fibonacci, http://www.matematikk.org/artikkel/biografi/index.html). Hann greindi talnamynstur í náttúrunni og skráði talnarunu, Fibonacci-tölurnar, á þeim grunni.

Nemendur þurfa að ná góðu valdi á bæði tugabrotum og almennum brotum. Þeir þurfa að geta skráð stærðir á hvorn veginn sem er. Þægilegt er að nota vasareikna við að breyta almennum brotum í tugabrot. Vasareiknar geta sýnt mismunandi fjölda aukastafa en ná ekki alltaf að sýna alla aukastafi tugabrots. Gæta þarf þess að nemendur átti sig á þessum takmörkunum vasareikna. Öll almenn brot má skrá sem tugabrot en ekki er hægt að skrá öll tugabrot sem almenn brot. Þegar almennum brotum er breytt í tugabrot koma stundum fram óendanleg tugabrot. Einkenni þeirra er að ávallt má finna mynstur í röðun aukastafanna. Mynstureiningin er kölluð lota og slík óendanleg tugabrot kallast lotubundin tugabrot.

Stærðfræðingurinn Blaise Pascal var uppi á 17. öld. Hann gerði ýmsar stærðfræðilegar uppgötvanir, m.a. bjó hann til fyrstu reiknivélina og lagði grunn að líkindafræði. Hann rannsakaði samhengi milli talnanna í Pascal-þríhyrningnum. Í þríhyrningnum er einn á jöðrunum og tölurnar á milli eru summur af tölum í tveimur reitum í röðinni fyrir ofan. Í þríhyrningnum má finna margs konar mynstur og regluleika. Inni í



þríhyrningnum má finna marga minni þríhyrninga. Áhugavert er að skoða mynstur sem koma fram ef litaðar eru allar sléttar tölur, tölur í tiltekinni margföldunartöflu, summa í hverri röð eða þríhyrningstölur. Nota má eyðublöð sem finna má á heimasíðu námskeiðsins eða smáforrit: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_181_g_4_t_5.html?open=activities

Skoðun á fjölda samsetningarmöguleika, s.s. í hópverkefni á bls. 75, er áhugavert stærðfræðifræðilegt viðfangsefni. Samsetningarmöguleikum fjölgar hratt eftir því sem þeim hlutum fjölgar sem á að raða. Ef raða á tveimur hlutum í beina línu má setja AB og BA, þ.e. möguleikarnir eru tveir. Ef hins vegar á að raða þremur hlutum eru möguleikarnir ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, þ.e. möguleikarnir eru sex. Finna má fjölda möguleika með því að skrá eða reikna þá út. Ef skoða á samsetningarmöguleika með fjórum stökum er ágætt að miða við sætin. Við val á hlut í fyrsta sætið eru möguleikarnir fjórir, þá eru þrír möguleikar á að velja í annað sætið, tveir í þriðja sætið og einn í fjórða sætið. Þetta gildir fyrir öll stökin fjögur. Fjölda möguleikanna má finna með því að margfalda saman $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ eða með öðrum orðum finna 4!

Nemendur hafa fengist töluvert við reikning með almennum brotum. Mikilvægt er að þeir efli skyn sitt á stærðum skráðum sem almenn brot, summu þeirra og mismun. Það er gott fyrir nemendur að geta nýtt sér mismunandi leiðir og notað bæði myndir og hluti. Nemendur þurfa að vera leiknir að fara bæði með heilar tölur og brot. Skoðun og greining á talnarunum og sambandi milli talna í talnarunu er gott að skoða í tengslum við umfjöllun um brot. Gullinð?? snið er það hlutfall sem flestum finnst fallegast. Viðhorf manna til útlits hluta miðast m.a. af hlutfalli í lögun hlutanna. Það er líka gott að fá upplýsingar um hlutföll þegar verið er að átta sig á útliti.

Stærðir má skrá á margvíslegan hátt. Nota má heilar tölur, almenn brot, tugabrot, summur, mismun, margfeldi og veldi svo dæmi séu tekin. Veldaritháttur er þægilegur þegar unnið er með mjög háar eða mjög lágar tölur. Nemendur hafa verið að kynnast slíkum rithætti og í kaflanum Tölur er unnið áfram með skoðun á veldum. Kynning er á núllta veldi og settar fram talnagátur. Meginmarkmiðið er að viðhalda og bæta við það sem á undan er komið.

## Kennsluhugmyndir

Eins og fram kemur í námsbókinni er þessi kafli saminn með skírskotun í bókina *Talnapúkinn* eftir Hans Magnus Enzenberger. Í bókinni eru 12 kaflar og í kaflanum *Tölur* eru tólf blaðsíður. Hver blaðsíða hefur að geyma viðfangsefni sem hentar að vinna að loknum lestri eins kafla. Það er kjörið að kennari lesi einn kafla fyrir nemendur og að þau viðfangsefni sem fram koma séu skoðuð, rædd og prófuð. Í framhaldi af því passar vel að vinna verkefni á viðkomandi blaðsíðu. Önnur leið er að nemendur skipti bókinni á milli sín og 2–3 nemendur kynni einn kafla fyrir bekkjarfélögum sínum. Einnig má velja nokkra kafla úr bókinni og fara sérstaklega í þá. Bókin er skemmtileg aflestrar en búast má við að nemendur þurfi stuðning við vangaveltur um viðfangsefnin. Í tengslum við þennan kafla er einnig hentugt að skjóta inn umfjöllun um ýmsa stærðfræðinga. Það verkefni mætti vinna í samstarfi við enskukennara því lítið er til af upplýsingum á íslensku um stærðfræðina. Þó má finna nokkuð um forngríska stærðfræðinga í bókinni *Og ég skal hreyfa jörðina – forngrísku stærðfræðingarnir og áhrif þeirra* eftir Jón Þorvarðarson. Slóðir að upplýsingum um einstaka stærðfræðinga: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Einnig má lesa um stærðfræðinga á norsku á slóðinni: http://www.matematikk.org/artikkel/biografi/index.html

Verkefnin í kaflanum eru af ýmsum toga en flest snúast þó um tölur. Glíman við verkefnin ætti því að efla talnaleikni og tilfinningu fyrir stærðum. Dæmin á blaðsíðu 66 og 67 eru frekar létt og fela í sér skoðun á stærðum. Nemendur eiga að bera saman endurtekna samlagningu og endurtekna margföldun og skoða skráningu. Þannig rifja þeir upp veldarithátt sem þeir hafa lítillega kynnst áður. Á blaðsíðu 68 er í glósubók fjallað um hvers vegna ekki er hægt að deila með núlli. Mikilvægt er að ræða þetta við nemendur og skoða einnig hvað gerist þegar deilt er með neikvæðri tölu.

Á blaðsíðu 69 eru upplýsingar skráðar í mengjamynd. Hentugt getur verið að skrá upplýsingar á þennan hátt en væntanlega þurfa nemendur á umræðu að halda um grunnhugtök eins og sammengi, sniðmengi og stak. Á blaðsíðu 70 eru talnamengi náttúrlegra, heilla og ræðra talna skoðuð. Gott getur verið að skoða hvernig tölur í þessum mengjum raðast á talnalínu. Mikilsvert er að nemendur átti sig á að til eru fleiri gerðir talna en rúmast í þessum talnamengjum þó megináherslu beri að leggja á þau. Einnig þurfa þeir að gera sér grein fyrir að mengi náttúrlegra talna er hlutmengi í heilum tölum og heilar tölur eru hlutmengi í ræðum tölum.

Dæmi 24–30 eru æfingadæmi um skráningu stærða sem tugabrot og almenn brot. Hugmyndir um lotubundin tugabrot eru kynntar nemendum. Ef almennu broti er breytt í tugabrot kemur annaðhvort fram endanlegt tugabrot eða lotubundið. Ef ekkert mynstur er í röð aukastafa í tugabroti er ekki um ræða tölu að ræða.

Tölur eru flokkaðar á margvíslegan hátt og settar saman eftir tilteknum sameiginlegum einkennum. Talnamengin eru ágætt dæmi en einnig koma fyrir í kaflanum frumtölur, þríhyrningstölur, ferningstölur og Fibonacci-tölur. Áhugavert getur verið að safna saman þessum hugtökum og finna sem flest dæmi um hvernig tölur eru flokkaðar saman. Hópverkefni á blaðsíðu 72 gefur tilefni til ýmissa vangaveltna og getur verið gagnlegt að nemendur fái að gera fleiri en eina atlögu að því. Búast má við að þeir komist mislangt með það og oft kemur fólk auga á mynstur og reglu þegar það kemur aftur að viðfangsefninu. SuDoku-þrautirnar reyna á svipaða þætti. Kjörið er að gefa nemendum tækifæri til að glíma við slíkar þrautir. Í dagblöðum og ýmsum tímaritum er slíkar þrautir að finna og ýmsir hafa sett upp SuDoku-þrautir í gagnvirk forrit. Dæmi má finna á slóðinni http://www.websudoku.com/.

# 8-tíu

Á blaðsíðu 73 eru viðfangsefni þar sem nemendur skoða hvernig Fibonacci-talnarunan birtist og hvernig Fibonacci-tölurnar raðast. Á næstu síðu er Pascal-þríhyrningurinn skoðaður. Þessi verkefni eru hugsuð sem skoðun á tölum og fróðleikur um ýmislegt sem stærðfræðingar eru að velta fyrir sér.

Samsetningarmöguleikar aukast hratt ef einingum er bætt við. Í tengslum við blaðsíðu 75 er um að gera að hvetja nemendur til að skoða hvernig möguleikunum fjölgar og bæta við einingum. Hvað gerist í hvert skipti sem einum er bætt við? Eins eru settar fram þrautir og spurt um fjölda hluta ef fjöldi röðunarmöguleika er þekktur. Mikilvægt er að nemendur noti hluti við skoðun sína.

Viðfangsefnin á bls. 76 eru hugsuð til að bæta tilfinningu fyrir samlagningu og frádrætti almennra brota. Á blaðsíðu 77 er unnið með hlutföll, bæði milli talna og vegalengda. Gott er að ræða um hugtakið hlutföll við nemendur og gefa þeim tækifæri til að setja fram skilgreiningar á hugtakinu. Mörgum reynist erfitt að átta sig á stórum tölum og stærðum skráðum með veldarithætti. Á blaðsíðu 78 er fengist við veldi. Í dæmi 54 er sagt frá því hvernig einstaklingur hugsaði lausn svipaðs verkefnis og verkefnin í dæmi 55. Gaman getur verið að biðja nemendur að búa til fleiri dæmi þar sem veldisvísir er þekktur og einnig tölustafafjöldi í tölu.

Á blaðsíðu 79 eru samantektarverkefni. Í dæmi 56 reynir á hvort nemendur geta lesið stærðfræðilegan texta og notfært sér inntak hans við lausn verkefnis. Í verkefni 57 eiga nemendur að skoða eigið nám og meta það. Í síðasta verkefninu er stungið upp á því að nemendur geri ritgerð um einhvern stærðfræðing. Á Netinu má finna æviágrip margra stærðfræðinga, til dæmis á slóðinni:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html.
Þessi verkefni henta ágætlega í einstaklingsvinnu.

# Reikningur og reiknireglur


## Inntak

Markmið að nemendur:

- Nái tökum á reiknireglum, svo sem víxlreglu, tengireglu og dreifireglu og geti nýtt sér þær við útreikninga.
- Kynnist sérstöðu talnanna 0 og 1 í reikniaðgerðum.
- Öðlist góða tilfinningu fyrir tölum og geti lagt mat á hvort útkoma í reikningsdæmi er sennileg.
- Þjálfist í fjölbreyttum leiðum við reikning með ræðum tölum.
- Átti sig á deilanleika talna og afgangi sem myndast við deilingu.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geti metið sanngildi fullyrðinga og rökstutt niðurstöður.
- Geti túlkað reglur sem settar eru fram á táknmáli stærðfræði.
- Átti sig á notkun reiknireglna í daglegu lífi.

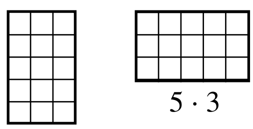
## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Mikilvægt er að nemendur öðlist góðan skilning á eðli og tengslum reikniaðgerðanna. Reikniaðgerðirnar samlagning og margföldun hafa ákveðna sérstöðu og búa yfir eiginleikum sem frádráttur og deiling búa ekki yfir. Mengi er lokað með tilliti til tiltekinnar aðgerðar ef tekin eru tvö stök úr menginu og aðgerðin er framkvæmd á þeim og útkoman verður stak í sama mengi. Ef teknar eru tvær tölur úr mengi náttúrlegra talna og þær lagðar saman eða margfaldaðar saman verður útkoman alltaf náttúrleg tala. Þetta á ekki við um frádrátt og deilingu.
Dæmi: $3 - 5 = -2$ sem er ekki náttúrleg tala.
$6 : 5 = \frac{6}{5}$ eða $1\frac{1}{5}$ sem er ekki náttúrleg tala.
Mengi heilla talna er hins vegar lokað með tilliti til frádráttar, samlagningar og margföldunar en ekki deilingar.

**Víxlregla**

**Ef a og b eru heilar tölur þá gildir að $a + b = b + a$ og $a \cdot b = b \cdot a$**

Samkvæmt víxlreglunni skiptir ekki máli í hvaða röð tvær tölur eru lagðar saman eða margfaldaðar saman. Víxlregla gildir því um samlagningu og marföldun fyrir allar tölur, náttúrlegar tölur, heilar tölur, ræðar tölur og óræðar tölur.



$3 \cdot 5$ $5 \cdot 3$

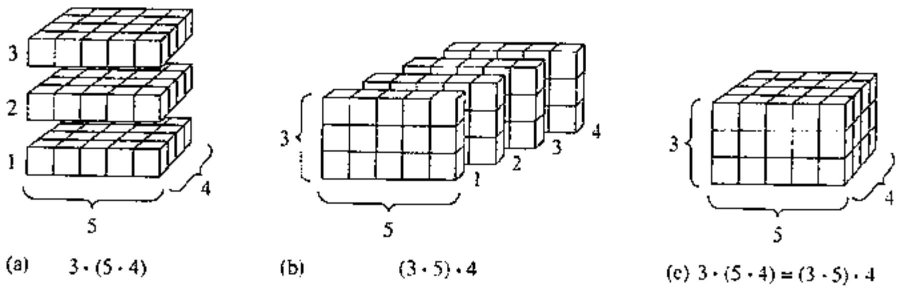
Víxlreglan gildir hins vegar ekki fyrir reikniaðgerðirnar frádrátt og deilingu.

Dæmi: 7 – 4 ≠ 4 – 7 7 : 4 ≠ 4 : 7

**Tengiregla**

**Ef a, b og c eru heilar tölur þá er a + ( b + c) = ( a + b ) + c og a · (b · c) = (a · b ) · c**

Tengiregla segir að þegar þrjár tölur eru margfaldaðar eða lagðar saman má setja sviga um hvaða samliggjandi tölur sem er. Tengiregla gildir um samlagningu og margföldun fyrir allar tölur.

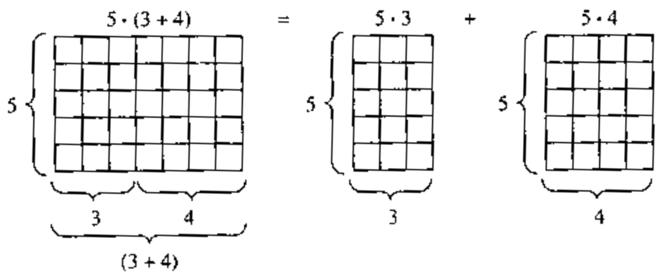



Tengiregla gildir ekki fyrir reikniaðgerðirnar frádrátt og deilingu.
7 – ( 4 – 2 ) ≠ ( 7 – 4 ) – 2 7 : ( 4 : 2 ) ≠ ( 7 : 4 ) : 2

**Dreifiregla**

**Ef a, b og c eru heilar tölur þá er a · ( b + c ) = a · b + a · c og**
**(a + b) · c = a · c + b · c**

Í dreifireglunni felast tvær aðgerðir, samlagning og margföldun. Það skiptir ekki máli í hvaða röð þær eru framkvæmdar, þ.e. hvort margfaldað er fyrst og síðan lagt saman eða öfugt.



Tölurnar 0 og 1 hafa sérstöðu í samlagningu og margföldun. Talan 0 er hlutleysa í samlagningu. Í því felst að ef 0 er lagt við tiltekna tölu eða ef tiltekin tala er lögð við 0 þá verður útkoman talan sjálf. $0 + a = a + 0 = a$

Talan 1 er hlutleysa í margföldun. Ef tiltekin tala er margfölduð með einum eða einn er margfaldaður með tiltekinni tölu þá verður útkoman talan sjálf.
$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Í reikniaðgerðunum frádrætti og deilingu er hins vegar engin hlutleysa vegna þess að þær aðgerðir eru ekki víxlnar. $0 - a \neq a - 0$ $1 : a \neq a : 1$

Þegar nemendur eru að einfalda stæður, leysa jöfnur og framkvæma ýmsa útreikninga eru þeir sífellt að beita ýmsum reiknireglum. Æskilegt er að beina sjónum nemenda að því og hvetja þá til að greina skref fyrir skref hvaða reiknireglum þeir eru að beita. Í kaflanum er gert ráð fyrir að nemendur lýsi ýmsum reiknireglum með eigin orðum og búi til dæmi sem eiga við reglurnar. Nauðsynlegt er að ræða og bera saman lýsingar nemendanna og dæmi þeirra.

Margföldun og deiling eru andhverfar aðgerðir og það sama á við um samlagningu og frádrátt. Tengsl reikniaðgerðanna gera það að verkum að þegar nemendur hafa leyst eitt tiltekið dæmi má út frá því draga ýmsar aðrar ályktanir um önnur samhengi sem tengjast aðgerðinni og þeim tölum sem fengist er við. Sem dæmi má taka að ef nemandi er búinn að komast að þeirri niðurstöðu að 45 + 397 = 442 þá veit hann líka að 442 – 397 = 45 og að 442 – 45 = 397. Af þessu samhengi má einnig sjá að 445 – 400 = 45. Þekking á tugakerfinu nýtist til að átta sig á að 4420 – 3970 = 450. Mikilvægt er að benda nemendum á að nýta sér samhengi og ígrunda hvað þeir vita af glímu við fyrri verkefni og hvernig þeir geta nýtt sér það.

Þegar nemendur reikna með tugabrotum er æskilegt að þeir námundi eða áætli svör. Þannig geta þeir öðlast tilfinningu fyrir af hvaða stærðargráðu niðurstaða gæti verið. Það getur komið í veg fyrir að k omman gleymist við útreikninga eða að hún sé sett á rangan stað. Í kaflanum er leitast við að beina sjónum nemenda að því hvað gerist þegar margfaldað eða deilt er með ræðum tölum lægri en einn. Margir nemendur hafa enn þá þann skilning að ef margfaldaðar eru saman tölur komi alltaf hærri tala út og að ef deilt er verði útkoman alltaf lægri tala en deilistofninn eins og gerist þegar fengist er við heilar tölur.

Í lok kaflans er sjónum beint að deilingu. Þar er einkum skoðað hver afgangur verður við deilingu og hvert samhengið er milli afgangsins, tölunnar sem deilt er með og tugabrotsins sem nota má til að skrá afganginn. Ef deilt er með átta getur afgangur orðið 1 – 7. Ef afgangurinn er 1 má skrá hann sem almenna brotið 1/8 eða sem tugabrotið 0,125. Ef skrá má afganginn sem endanlegt tugabrot má skrá deilingu sem endanlegt tugabrot. Mikilvægt er að nemendur sjái þetta samhengi. Gott er að þeir átti sig á að þegar deilt er með 2, 4, 5 eða 8 er alltaf hægt að skrá útkomu úr deilingu sem endanlegt tugabrot en ef deilt er með tölum eins og 3 og 7 verði útkoman alltaf óendanleg tugabrot. Þá þarf að ákveða fjölda aukastafa út frá því samhengi sem unnið er með hverju sinni.

## Kennsluhugmyndir

Gott getur verið að byrja umfjöllun um efni kaflans á umræðum um víxlreglu og tengireglu sem eru hugtök sem nemendur hafa áður kynnst. Nemendur geta rætt saman í hópum um verkefni 1 og 2. Heppilegt fyrirkomulag gæti verið að hver hópur læsi upp lýsingar sínar á reglum og kennari dragi fram hvað er líkt og hvað ólíkt. Auk þess er áhugavert fyrir nemendur að heyra hvernig dæmi aðrir hópar bjuggu til.

Áður en nemendur vinna verkefni á blaðsíðu 83 er kjörið að leggja fyrir nokkur hugarreikningsverkefni sem ýta undir að nemendur noti svipaðar leiðir og þær sem sýndar eru í bókinni. Nota má dæmi eins og:

| | |
|---|---|
| 996 + 236 | 204 + 96 |
| 88 – 19 | 82 – 23 |
| $8 \cdot 19$ | $8 \cdot 21$ |

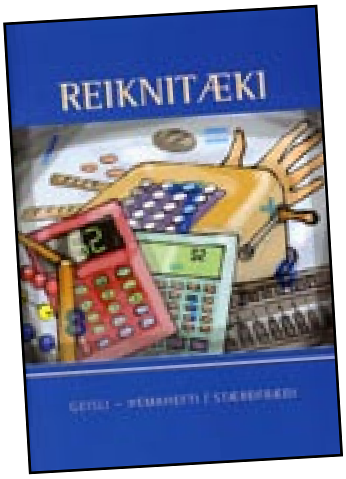
Þá gefst tækifæri til að ræða hvernig gera má dæmi léttari með því að breyta tölum en halda samhengi. Í samlagningardæmum er oft hentugt að hækka aðra töluna en lækka hina. Í frádrætti eru hins vegar báðar tölur annaðhvort hækkaðar eða lækkaðar. Í verkefnunum eiga nemendum meðal annars að lýsa reglum með eigin orðum. Þar er eðlilegt að gera mismiklar kröfur til nemenda og brýna sterka nemendur til að skila góðum úrlausnum.

Verkefnin á bls. 84–86 er kjörið að nemendur vinni saman í pörum. Þannig má ýta undir umræður meðal þeirra um leiðir og hvaða stærðfræðilega þekking getur nýst til að létta leitina að svarinu. Mörg dæmanna eru sprottin úr daglegu lífi og því má hvetja nemendur til að finna fleiri dæmi. Neðst á blaðsíðu 86 eru dæmi á litaflötum og eiga nemendur að velja hvert þeirra hentar við lausn orðadæmisins. Þeir geta einnig búið til orðadæmi út frá hinum talnadæmunum.

Nemendur hafa kynnst dreifireglu fyrr og beitt henni við útreikninga. Myndin efst á blaðsíðu 87 er til dæmis úr *Einingu 7* (námsefni fyrir yngsta stig). Þeir hafa þó ekki notað sjálft hugtakið dreifiregla eða kynnst almennri framsetningu reglunnar. Í dæmi 22 ættu nemendur að sýna hvernig þeir nota dreifiregluna við útreikninga sína. Á blaðsíðum 87–89 eiga nemendur að nota námundun og áætla og rökstyðja svör. Í verkefnum 26 og 27 er fengist við margföldun en síðan er deilingu beitt á sömu tölur í dæmum 29 og 30. Það gefur gott tilefni til að ræða um mat á útkomum. Þessi viðfangsefni reyna töluvert á talna- og aðgerðaskyn nemenda.

Á blaðsíðu 88–89 eru tvær þrautir. Í fyrri þrautinni reynir á úthald og útsjónarsemi. Nemendur þurfa góðan tíma til að leysa þrautina og það þarf að hvetja þá til að skrá skynsamlega og skipulega hjá sér. Seinni þrautin er leikur þar sem reynir á tilfinningu fyrir margföldun tugabrota og rökhugsun til að ná fjórum í röð. Gott er að nota vasareikni til að reikna dæmin eða sannreyna svör.

Á blaðsíðum 90–91 er fengist við deilanleika og afgang. Í heftinu *Reiknitæki*[4] er ágætur leikur þar sem fengist er við afgang. Hann hentar vel sem kveikja að vangaveltum um afgang.




## Leikur með deilingu:

Byrjið á að skrá hjá ykkur á blað tölurnar frá 1 til 20
Annar leikmaðurinn slær inn í vasareikninn tölu á bilinu 40 til 120.
Hann velur svo eina af tölunum frá 1 til 20 til að deila í töluna. Hann merkir við hana á blaðinu því það má aðeins nota hverja tölu einu sinni

Hann skráir hjá sér afganginn sem fæst þegar búið er að deila. Það eru stigin sem hann fær fyrir þennan leik.
Dæmi: Ég vel töluna 65 og deili í hana með 7. Þá fæ ég afganginn 2.

Nú á hinn þátttakandinn leik og velur tölur á sama hátt, deilir og skráir hjá sér afgang.

Leikið leikinn nokkrum sinnum. Sá vinnur sem fær fleiri stig.

Heppilegt er að nemendur vinni dæmi 31-36 á eigin spýtur og kennari reyni að átta sig á hvort þeir geri sér grein fyrir því samhengi sem fram kemur í dæmunum. Í dæmi 33 stendur $n = 4 \cdot 38 + 2$ og af því má sjá að ef deilt er með 4 í töluna n verður útkoman 38 og afgangurinn 2. Ef hins vegar er deilt í töluna n með 38 verður útkoman 4 og afgangur 2. Gaman er að skoða hvaða aukastafir koma fram í hvoru tilviki ef svarið er skráð sem tugabrot. Í dæmi 37 er nemendum ætlað að rannsaka dæmin á undan nánar með vasareikni. Þar er skoðað hvaða aukastafir koma fram ef deilt er með eins stafs tölunum og það borið saman við afganginn hverju sinni. Áhugavert er líka að bera saman hvaða afgangur og hvaða tugabrot kemur fram ef deilt er í n með 38, y með 77, x með 67 og m með 147. Nemendur glíma svo áfram við verkefni um deilanleika. Skoðað er hvaða afgangur getur komið fram ef deilt er með 5, 8 og 7. Nemendur gætu unnið í hópum að því að skoða skipulega mögulegan afgang og aukastafi ef deilt er með tölum, t.d. 1-20. Þá gæti verið gott að nota þriggja stafa tölur og hvetja nemendur til að finna fyrst tölu sem deilirinn gengur upp í og finna svo aðrar tölur út frá því. Beina má sjónum nemenda að því að sumir deilar gefa alltaf endanleg tugabrot en aðrir ekki.

Síðustu dæmi kaflans eru viðfangsefni úr daglegu lífi þar sem reynir á að nemendur geti notað tugabrot við útreikninga.

4 Jónína Vala Kristinsdóttir. 2005. *Reiknitæki*. Reykjavík, Námsgagnastofnun (bls. 11).

# Tölfræði

## Inntak

Markmið að nemendur:

- Geti lesið úr og túlkað tölulegar upplýsingar.
- Geti sett fram tölulegar upplýsingar á fjölbreyttan hátt.
- Fáist við háar tölur.
- Geti nýtt sér ýmsa gagnagrunna.
- Geti nýtt sér töflureikni við úrvinnslu og framsetningu gagna.
- Nái tökum á hugtökum sem lýsa miðsækni.
- Kynnist hugtakinu úrtak.

## Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geti notað töluleg gögn sem lið í rökstuðningi.
- Geri sér grein fyrir mikilvægi stærðfræðilegrar þekkingar fyrir hinn almenna þjóðfélagsþegn.
- Taki þátt í umræðum um niðurstöður úr gagnasafna.
- Kynni niðurstöður úr eigin athugun munnlega.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

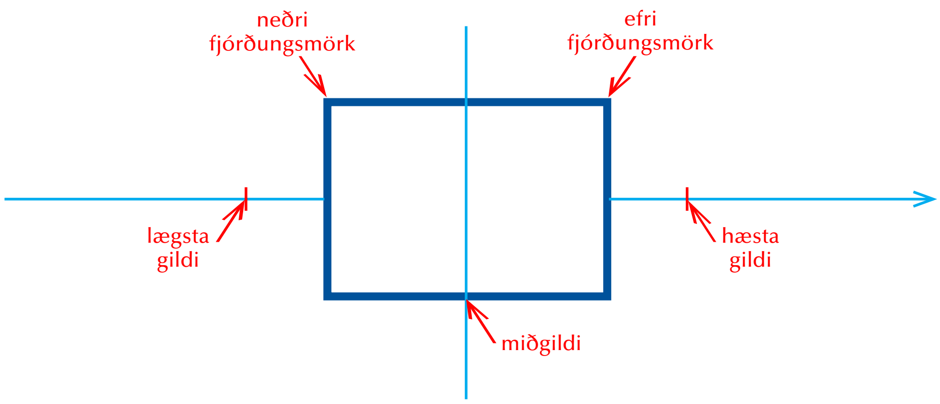
Í kaflanum er ríkisbúskapurinn notaður sem viðfangsefni Þar er að finna margar athyglisverðar tölulegar upplýsingar sem telja má gagnlegt fyrir unglinga að kynnast. Fjármálaráðuneytið heldur úti skemmtilegum vef: http://www.rikiskassinn.is þar sem finna má nýjar upplýsingar sem settar eru fram á aðgengilegan hátt. Þegar fjallað er um fjármál ríkisins eru tölur háar og því gefst gott tækifæri fyrir nemendur til að efla talnaskilning sinn. Í fréttum er oft rætt um milljarða króna og stundum er eins og það skipti ekki máli hvort um er að ræða einn eða tvo milljarða. Einn milljarður er 1000 milljónir og ef skrá á milljarð með tölustöfum þarf níu núll, 1 000 000 000. Stærðfræðiþekking skiptir því miklu fyrir fólk þegar það ræðir þjóðfélagsmál. Sumum finnst að ríkið ætti að taka meiri þátt t.d. í kostnaði við heilsugæslu. Oft gerir fólk sér þó ekki grein fyrir því hvaða kostnaður fylgir hverri læknisaðgerð og að um 45% af ríkisútgjöldunum fara til heilbrigðis- og tryggingakerfisins. Á ríkiskassavefnum er flipinn **Hvað kostar…?** þar sem gefin eru dæmi um kostnað sem fylgir bæði einstökum læknisaðgerðum, menntun o.s.frv. Tækifærin til að skoða töluleg gögn eru því mörg á þessum vef og um leið ættu nemendur að fá betri tilfinningu fyrir ríkisrekstrinum og geta byggt afstöðu sína til mála á einhverri þekkingu á ríkisfjármálum.

Innflutningur og útflutningur eru mikilvægar breytur í þjóðarbúskapnum. Á vef Hagstofu Íslands (http://www.hagstofan.is) er að finna upplýsingar bæði um inn- og útflutning til og frá Íslandi og einnig til og frá einstökum löndum. Margir unglingar hafa gaman af að velja sjálfir lönd og skoða viðskiptasambönd við þau.

Ísland tengist viðskiptaböndum við ótrúlega mörg lönd í heiminum og er auðvelt að finna það á vef Hagstofunnar.

Tölulegar upplýsingar má setja fram á mismunandi hátt. Töflur og myndrit eru algengasta formið. Oftast fer það eftir eðli upplýsinganna hvaða gerð myndrits hentar en stundum eftir því hvað sá sem setur upplýsingarnar fram vill leggja mesta áherslu á. Val á litum, kvarða og gerðum myndrits hefur áhrif á hvernig lesandi les og túlkar nema hann sé gagnrýninn og hafi næga stærðfræðiþekkingu.

Nemendur hafa kynnst margs konar myndritum, s.s. línuritum, súluritum, stuðlaritum og skífuritum. Þeir hafa einnig unnið lítillega með laufrit. Ef gögn eru sett fram í laufriti er oft auðvelt að fá yfirsýn yfir þau. Þau henta sérstaklega vel þegar verið er að bera saman tvo hópa, t.d. stelpur – stráka, unglinga – börn, sveit – borg. Í þessum kafla eru rammarit (box-plot) kynnt. Rammarit henta vel til að gefa yfirsýn yfir dreifingu og miðsækni. Athyglinni er beint að einkennum gagnasafns og eru meginupplýsingar rammaðar inn. Rammarit hafa ekki verið mikið notuð á Íslandi en eru gott dæmi um myndrit sem nú eru notuð í vaxandi mæli. Við gerð rammarits er unnið með fimm lykiltölur. Þrjár þeirra eru hæsta gildi, miðgildi og lægsta gildi. Til að afmarka þau 50% gagnanna sem liggja næst miðgildinu er annars vegar fundið miðgildi milli hæsta gildis og miðgildis og hins vegar fundið miðgildi milli lægsta gildis og miðgildis. Þessar tölur eru kallaðar fjórðungsmörk.




Nota má smáforrit við gerð rammarita: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_200_g_3_t_5.html?open=instructions
Í þessu forriti má setja inn töluleg gögn og skoða þau bæði sett fram í stuðlariti og rammariti.
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_145_g_3_t_5.html?open=instructions

Þessar fimm lykiltölur gefa góða hugmynd um dreifingu gagnanna. Ef dreifing er nokkuð jöfn eru miðgildi staðsett nálægt miðju hverju sinni. Ef mikil þjöppun er á gögnum rétt ofan við miðgildi verða efri fjórðungsmörk lág. Ef ramminn er breiður er dreifingin jafnari. Þannig stuðla rammarit að því að lesið sé heildstætt úr gögnum.

Mikið er til af gagnasöfnum og margir þurfa að nýta sér slík söfn við vinnu sína eða þegar þeir sinna áhugamálum eða baráttumálum sínum. Slík gagnasöfn hafa orðið mun aðgengilegri við tölvuvæðinguna. Á vefjum Hagstofunnar og fjármálaráðuneytis sem hér hafa verið nefndir liggur mikið af gögnum. Tölulegar upplýsingar af vef Hagstofunnar er einfalt að flytja í töflureikni og auðveldar það alla úrvinnslumöguleika. Víða má finna gagnasöfn og er gott að nemendur geti haft áhrif á af hvaða sviði og um hvaða málefni gögnin eru sem þeir skoða. Seinlegt er að safna gögnum og til þess að fá áreiðanlegar upplýsingar þarf athugandi að hafa aðferðafræðilega þekkingu. Það er því oft góður kostur að nota viðurkennd gagnasöfn þegar unglingar eru að ná valdi á flokkun, framsetningu gagna og túlkun þeirra. Við skoðun á gagnasöfnum er stuðst við meginhugtök eins og dreifingu og miðsækni.

Nemendur þurfa þó einnig að þekkja aðeins til þess hvernig hægt er að afla gagna og hvaða algeng vandamál koma í ljós. Þeir þurfa að skoða hvaða leiðir má fara við að velja úrtak, við flokkun gagna og framsetningu þeirra. Ef ekki liggja fyrir gögn þurfa nemendur að gera eigin kannanir og mörgum þeirra þykir það áhugavert, t.d. að kanna hug jafnaldra til ýmissa mála. En þá er spurningin hvort hægt er að gera könnun sem er áreiðanleg. Hvað þarf að hafa í huga? Hve stórt þarf úrtak að vera? Nemendur geta velt þessu fyrir sér og þannig þjálfað upp gagnrýna hugsun varðandi kannanir.

Flestir nemendur hafa unnið með töflureikni við gerð myndrita. Nota má töflureikni á mun fjölbreytilegri hátt til að vinna úr gögnum. Þægilegt er að finna meðaltal með því að nota töflureikni. Á blaðsíðu 105 í kennslubókinni er sýnt hvernig fara má að. Einnig má nota forritið: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_183_g_3_t_5.html?open=activities

Í töflureikni má setja skipanir inn beint og fá þannig fram helstu tölur um gagnasafn. Þá þarf að fara fyrst í *Tools, Add-Ins* og velja *descriptive statistics*.

- Meðaltal = **AVERAGE(Na:Nb)**
- Miðgildi = **MEDIAN(Na:Nb)**
- Tíðasta gildi = **Mode(Na:Nb)**
- Hæsta gildi = **Max(Na:Nb)**
- Lægsta gildi = **Min(Na:Nb)**
- Fjórðungsmörk = **QUARTILE(Na:Nb;1)**

Mikilvægt er að nemendur kynnist sem fjölbreytilegastri tölvunotkun við stærðfræðinám sitt. Þeir þurfa að sjá hvernig nota má tölvur í stærðfræðinámi. Með því að útreikningar fari fram í tölvum geta nemendur betur beint athygli sinni að mati á niðurstöðum. Áhugavert getur líka verið að gera kannanir á rafrænu formi. Námsgagnastofnun gaf út fyrir nokkrum árum forritið Spurnir sem auðvelt er að nota í tengslum við skoðanakannanir.

Í þessari umfjöllun hefur verið vísað á nokkur smáforrit af vef Utah State University. Þar er að finna mörg áhugaverð smáforrit sem flokkuð eru eftir inntaki og aldurshópum. Kjörið er að skoða þennan vef, t.d. þegar finna á verkefni við hæfi ólíkra einstaklinga. Slóðin er: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

## Kennsluhugmyndir

Í fyrsta hluta kaflans eru tekin dæmi um notkun tölfræði í samfélaginu, þ.e. ríkisreksturinn og millilandaviðskipti. Búast má við að sumum nemendum finnist útgjöld og tekjur ríkisins háar tölur og því er mikilvægt að gefa þeim tækifæri til að átta sig á stærð þeirra. Jafnframt er æskilegt að þeir fái tilfinningu fyrir hlutfallslegri skiptingu tekna og útgjalda. Auðvelt væri að tengja þessi viðfangsefni umfjöllun um þjóðfélagsfræði. Nemendur ættu að fá að skoða sjálfir og leita frekari og nýrra gagna, á vef fjármálaráðuneytisins, Hagstofunnar og annars staðar. Viðfangsefnin á bls. 96-99 eru dæmi um úrvinnslu úr tölulegum gögnum sem eru aðgengileg hverjum sem er. Nemendur gætu líka valið sér önnur gögn til að vinna með og sett þau fram á myndrænan hátt. Líta má á þessar blaðsíður sem kveikju að efni kaflans.

Blaðsíðu 100 er tilvalið að vinna þannig að fyrst glími hver nemandi við dæmi 9 og 10, síðan beri nokkrir nemendur sig saman og setji fram sameiginlega úrlausn sem verði ræddar í bekknum. Koma þarf fram að stundum er hægt að velja á milli myndrita en oft hentar eitt form betur en annað. Hlutfallslega skiptingu er gott að sýna á skífuriti og þróun með línuriti.

Á blaðsíðu 101–102 eru gagnasöfn skoðuð með tilliti til miðsækni. Nemendur hafa töluvert fengist við hugtökin meðaltal, miðgildi, tíðasta gildi, lægsta gildi og hæsta gildi. Líta má á dæmi 10–13 sem æfingu og upprifjun sem æskilegt er að nemendur vinni saman tveir og tveir.

Á blaðsíðu 103–104 er sýnt hvernig búa má til rammarit og laufrit. Þessi myndrit sýna vel dreifingu og miðsækni gagna. Rammarit eru til dæmis notuð þegar sýnd er dreifing einkunna á samræmdum prófum. Nemendur þurfa að fá að glíma við að búa til rammarit og laufrit bæði í höndunum og með því að nýta sér tölvutæknina (sjá smáforrit sem fjallað var um hér að framan). Einnig þurfa þeir að fá þjálfun í að lesa úr myndritum og þá má nýta slík rit frá bekkjarfélögum. Safna mætti gögnum sem hentar að setja fram í laufriti og rammariti. Það gæti verið aldur foreldra, skóstærð, aldur nemenda í mánuðum, hitastig, langstökk, o.s.frv.

Gert er ráð fyrir að nemendur vinni dæmi 19–21 í töflureikni. Þeir þurfa að fá æfingu í að nota það tæki þannig að það verði þeim eðlilegt hjálpartæki við úrvinnslu gagna og útreikninga. Hvetja ætti nemendur til að finna margvíslegar upplýsingar og vinna úr þeim. Á vef Hagstofunnar er auðvelt að sækja upplýsingar og vista þær í töflureiknisskjali.

Í verkefni 22–27 er komið inn á ýmsa þætti sem mikilvægt er að hafa í huga þegar gerðar eru kannanir. Áhersla er lögð á að vanda þarf til spurninga ef vinna á úr þeim á tölfræðilegan hátt. Einnig er sjónum beint að ýmsum þeim þáttum sem hafa þarf í huga þegar tekið er úrtak. Nemendur þurfa að vinna verkefnin einir eða með öðrum. Í framhaldinu (í verkefni 28) er gert ráð fyrir að þeir geri eigin könnun þar sem vandað er til verka. Ætla má að þetta verkefni taki drjúgan tíma og er kjörið að nýta það einnig sem námsmatsverkefni.

# Metrakerfið

## Inntak
Markmið að nemendur:
- Efli skilning sinn á uppbyggingu metrakerfisins.
- Geti framkvæmt útreikninga með einingum úr metrakerfinu.

## Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Vinni með einingar í metrakerfinu í tengslum við daglegt líf.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð – kennsluhugmyndir
Í þessum stutta kafla er meginviðfangsefnið metrakerfið. Þar er uppbygging þess rifjuð upp. Síðan eru nokkur dæmi þar sem viðfangsefnin eru þyngd, flatarmál og hraði og viðeigandi mælieiningar.

Meginmarkmið með þessu kafla er efla skyn nemenda á metrakerfinu og þekkingu þeirra á uppbyggingu þess. Þeir þurfa líka að skoða tengsl eininga og þau forskeyti sem notuð eru í metrakerfinu og merkingu þeirra. Í dæmunum þurfa nemendur að beita þekkingu sinni á prósentum og hlutföllum í glímu við viðfangsefni í metrakerfinu. Kjörið er að nemendur skoði umhverfi sitt og búi til sín eigin verkefni sambærileg og eru í dæmum 5–8. Þannig gefst þeim tækifæri til að tengja stærðfræðiþekkingu sína við skoðun á eigin umhverfi.