1 2 3 4 5 6

Stærðfræði

Kennsluleiðbeiningar

Kennsluleiðbeiningar

8-tíu

NÁMSGAGNASTOFNUN
15. febrúar 2007

Átta – tíu

Stærðfræði 4
Kennsluleiðbeiningar

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2007
Námsgagnastofnun

Efnisyfirlit

Hlutföll

Inntak
Markmið að nemendur
- Öðlist færni í að fást við hlutföll í ýmsu samhengi og styrki hlutfallaskilning sinn.
- Geti notað hlutföll við samanburð á stærðum og í útreikningum.
- Styrki tök sín á prósentureikningi.
- Kynnist hugtakinu einslögun.

Aðferðir
Markmið að nemendur
- Skoði og kanni stærðfræðilega ýmis viðfangsefni.
- Þekki dæmi um notkun hlutfalla í daglegu lífi og geti beitt hlutfallareikningi við að leysa ýmis viðfangsefni.
- Geti rökstutt niðurstöður sínar og skýrt lausnaleiðir af nákvæmni, t.d. þar sem hlutföll koma fyrir.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

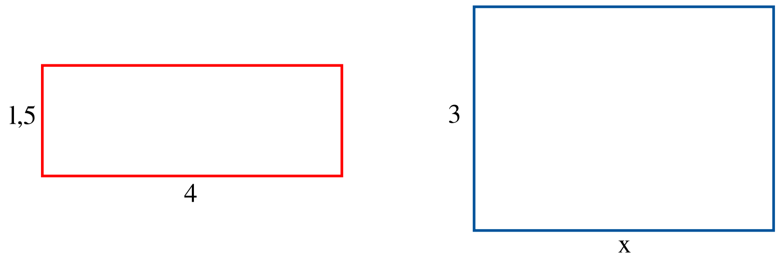
Hugtakið hlutfall er eitt af meginhugtökum stærðfræðinnar og kemur víða fyrir í ýmsu samhengi. Almenn brot og prósentur eru hlutföll, mælikvarðar lýsa hlutfallasambandi, í tölfræði er talað um hlutfallstíðni og hlutfallslega skiptingu, π er hlutfallið milli ummáls og þvermáls hrings svo örfá dæmi séu nefnd. Hlutfallaskilningur nemenda byggist upp smátt og smátt og mikilvægt er að nemendur kynnist hlutföllum í ýmsu samhengi og frá ýmsum hliðum.

Í *8-tíu 1* er kafli um hlutföll og í kennsluleiðbeiningum með þeirri bók er fjallað um hlutföll og hlutfallaskilning. Æskilegt að kennarar kynni sér það efni.

Hlutföll byggjast á margföldunarsambandi bæði innan hlutfalls og milli hlutfalla. Í hlutfallinu 3:5 er margföldunarstuðullinn innan hlutfallsins $\frac{5}{3}$ eða $1\frac{2}{5}$ eða 1,4. Ef skoðað er sambandið á milli 3:5 og 9:15 má sjá að margföldunarsambandið á milli hlutfallanna er 3.

Nemendur hafa mest fengist við viðfangsefni þar sem margföldunarsamband milli hlutfalla eða margföldunarsamband innan hlutfalls er heiltölusamband en einnig þarf að gefa því gaum að ekki er alltaf um heiltölusamband að ræða. Mikilvægt er að nemendur fáist bæði við verkefni þar sem skoðað er samband innan hlutfalls og samband milli hlutfalla.

Í dæmum þar sem fengist er við að finna hlutfall milli lengdar og breiddar í rétthyrningum er verið að finna samband innan hlutfalls.



Í þessu dæmi er mun auðveldara að notfæra sér hlutfallið milli einslægra hliða (margföldunarsamband milli hlutfalla) en hlutfallið milli lengdar og breiddar (margföldunarsamband innan hlutfalls) vegna þess að fyrra sambandið er heiltölusamband en hið seinna brot.

Í hlutfalladæmum er mikilvægt að nemendur geri sér grein fyrir hvaða stærðir eru þekktar og sambandinu á milli þeirra og átti sig jafnframt á sambandi milli óþekktrar stærðar og þekktra stærða. Ef hlutfallið milli breiddar og hæðar í sjónvarpsskjá er 1,33:1 og breiddin er þekkt (60 cm) en hæðin ekki, má skrá samband milli stærða á eftirfarandi hátt.

$$\frac{1,33}{1} = \frac{60}{x}$$

Hægt er að finna x með því að finna fyrst margföldunarsambandið á milli 1,33 og 1 (þ.e. milli breiddar og hæðar) eða þá tölu sem þarf að margfalda 1,33 með til að fá einn.

$$1,33 \cdot x = \frac{1}{1,33} \qquad x \approx 0,75$$

Sama samband er á milli 60 og x og er á milli 1,33 og 1. Það þarf því að margfalda 60 með 0,75 til að finna x.

Einnig má finna x með því að byrja á að finna margföldunarsambandið milli 1,33 og 60 (þ.e. milli breiddanna) eða þá tölu sem þarf að margfalda 1,33 með til að fá 60.

$$1,33 \cdot x = 60 \qquad x = \frac{60}{1,33} \approx 0,45$$

Sjálfsagt finnst flestum seinni leiðin augljósari en miklu skiptir að nemendur átti sig á að það er sama hvor leiðin er farin og að hér er alltaf um margföldunarsamband að ræða. Í báðum tilvikunum hér á undan þurfti að margfalda með broti en viðfangsefnin verða auðveldari þegar um heiltölusamband er að ræða.

Í hliðstæðu dæmi þar sem hlutfall milli breiddar og hæðar í sjónvarpsskjá er 1,33:1 og hæðin er þekkt en breiddin ekki má skrá sambandið á eftirfarandi hátt.

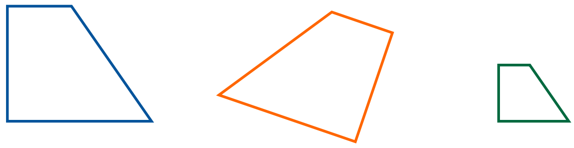
$$\frac{1,33}{1\ 40} = \frac{x}{\ }$$

Hér er sambandið á milli hæðanna heiltölusamband og sambandið á milli breiddanna er þá sama heiltölusambandið. Til að finna x þarf því að margfalda 1,33 með 40. En það má líka sjá að hlutfallið á milli breiddarinnar og hæðarinnar er 1,33.

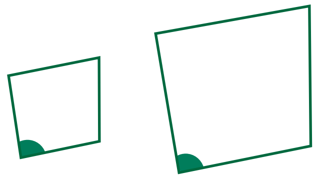
Það þarf að margfalda hæðina 1 með 1,33 til að fá breiddina 1,33. Ef hæðin er 40 má finna breiddina með því að margfalda hæðina með 1,33.

Mikilvægt er að beina sjónum nemenda að því að hlutföll eru margföldunarsamband. Ef dæmin eru leyst á hefðbundinn hátt sem jöfnur er hætta á að nemendur missi sjónar á því að um margföldunarsamband er að ræða og að þeir eru yfirleitt að leita að margföldunarstuðli.

Einslögun er hugtak sem nemendur eru að kynnast hér í fyrsta sinn. Þeir hafa fengist við að skoða form sem eru sams konar eða eins, *aljafna* (congruent). Þá eru einslæg horn jafn stór og einslægar hliðar jafn langar og formin verða því jafn stór. Hlutfallið milli einslægra hliða er einn þannig að í raun eru tvær sams konar myndir einslaga. En myndir sem ekki eru jafn stórar geta líka verið einslaga. Einslæg horn eru áfram jafn stór en í stað þess að hliðar séu jafn langar þá er hlutfallið á milli einslægra hliða það sama.

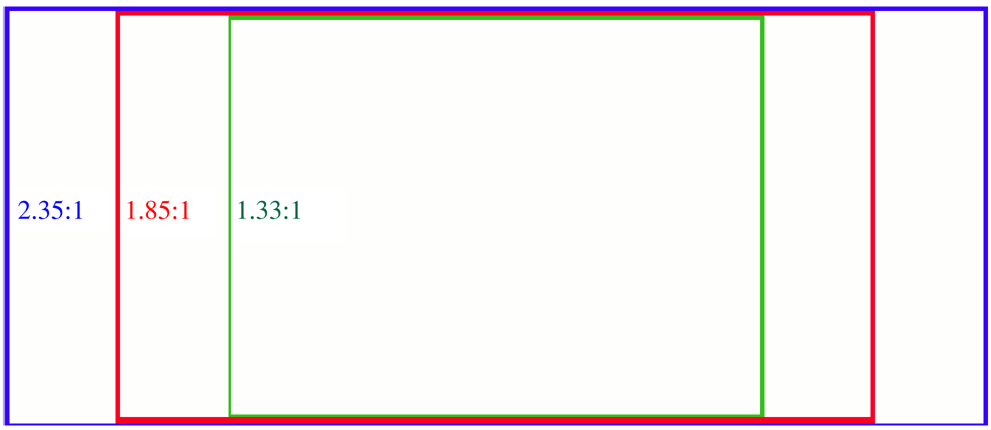


Í einslaga marghyrningum eru einslæg horn jafn stór og hlutfall milli einslægra hliða er jafnt.



Mikilvægt er að taka til umræðu með nemendum hugtökin einslaga, einslæg horn og einslægar hliðar. Þau eru mjög lík og hjálpa þarf nemendum að átta sig á hvað býr að baki hugtökunum, þannig að þeir geti greint á milli þeirra. Myndir og teikningar eru mjög mikilsverðar í því sambandi.

Hlutföll í kvikmyndum og ljósmyndum eru tekin til sérstakrar skoðunar í kaflanum. Flestir hafa örugglega veitt því athygli að þegar horft er á kvikmyndir á sjónvarpsskjá þá fylla þær misvel út í skjáinn. Margir vita sjálfsagt að það er vegna þess að kvikmyndir eru framleiddar í öðrum hlutföllum en sjónvarpsskjáir en fæstir vita hver þessi hlutföll eru nákvæmlega. Sjónvarpsskjáir voru yfirleitt framleiddir í hlutfallinu 1,33:1 (4:3) en nú til dags eru þeir yfirleitt í hlutfallinu 1,78:1 (16:9). Fyrstu kvikmyndirnar voru í hlutfallinu 1,33:1 en algeng hlutföll í kvikmyndum í dag eru 1,85:1 og 2,35:1.



Hlutföll í kvikmyndum virðast yfirleitt vera skráð sem hlutfall milli breiddar og hæðar þar sem hæðin er einn og breiddin er skráð sem tugabrot með tveimur aukastöfum.

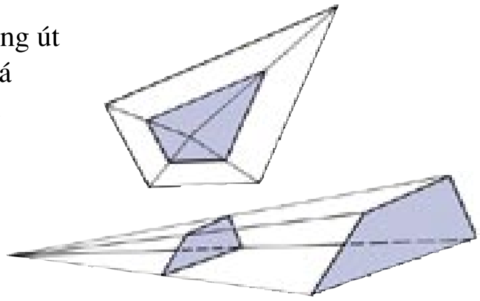
Eins og sjá má á þessari mynd skiptir miklu máli hvert sambandið er milli skjáhlutfalls og þess hlutfalls sem myndin er gerð í. Upp í 45% af upphaflegu myndinni fara forgörðum ef mynd sem tekin er í hlutfallinu 2,35:1 er aðlöguð til sýninga í hlutfallinu 1,33:1 með því að skera hana til eins og stundum er gert. Algengara er þó að reynt sé að breyta hlutföllum sem minnst en það þýðir að yfirleitt er svört rönd efst og neðst á skjánum eða til hliðanna.

Eitthvað er um að kvikmyndir séu framleiddar í hlutfallinu 1,55:1(14:9) til þess að auðveldara sé að aðlaga þær að sýningum í sjónvarpstækjum og kvikmyndahúsum. Í kvikmyndahúsum er kvikmyndum yfirleitt varpað á sýningartjaldið í þeim hlutföllum sem þær eru gerðar. Hægt er að fá ýmsar upplýsingar um hlutföll í sjónvarpstækjum og kvikmyndum á þessari slóð http://en.wikipedia.org/wiki/Television.

Hlutföll í ljósmyndum geta verið með ýmsu móti en algengt er að þau séu nálægt 1,5:1 (3:2). Þegar um ljósmyndir eða rétthyrninga er að ræða getur hærri talan allt eins verið hæðin og lægri talan breiddin. Þegar hlutföll eru borin saman skiptir miklu að skýrt sé hvort um er að ræða hlutfall milli hæðar og breiddar (lengdar og breiddar) eða öfugt.

Myndvinnsluforrit bjóða upp á ýmsa möguleika við vinnslu stafrænna mynda. Mikilvægt er að átta sig á að punktafjöldi myndar hefur áhrif á hversu stóra mynd er hægt að prenta þannig að myndgæði verði viðunandi. Ef nemendur hafa aðgang að myndvinnsluforritum er hægt að beina þeim inn í að skoða og breyta upplausn mynda og að stækka og minnka myndir, bæði þannig að hlutföll haldist og með því að breyta hlutföllum.

Þegar fengist er við rétthyrninga og talað um lengd og breidd þeirra er mikilvægt að átta sig á að lengdin vísar yfirleitt til lengri hliðarinnar og breiddin til þeirrar styttri. Ef hins vegar er rætt er um hæð og breidd þá er breiddin yfirleitt lárétta hliðin en hæðin lóðrétta hliðin.



Í verkefni 32 er fengist við að stækka marghyrning út frá tilteknum punkti innan marghyrningsins og fá þannig fram annan marghyrning sem er einslaga en stærri. Nota má sömu aðferð til að minnka marghyrninga þannig að hlutföll haldist óbreytt. Einnig er hægt að stækka eða minnka marghyrninga út frá tilteknum punkti sem er utan marghyrningsins eins og sýnt er á þessari mynd.

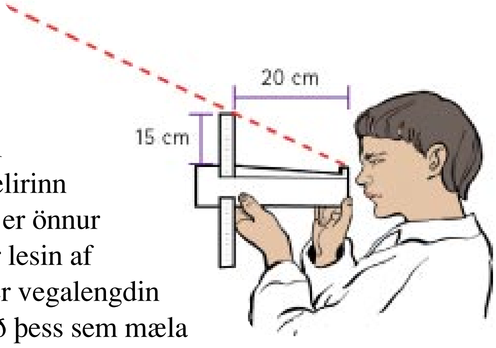
Stækkunina má ákveða með því að ákvarða lengd strikanna sem teiknuð eru út frá punktinum. Ef lengdin frá punktinum að hornpunkti er sú sama og lengdin frá hornpunkti að nýjum hornpunkti tvöfaldast hliðarlengdir og flatarmál fjórfaldast.

Hægt er að notfæra sér það að hlutföll milli einslægra hliða í einslaga þríhyrningum eru þau sömu á ýmsan hátt. Þetta má t.d. nýta sér við að mæla hæðir bygginga og mannvirkja.

Ef vitað er að manneskja sem er 1,6 m á hæð varpar frá sér skugga sem er 2,4 metrar á sama tíma og flaggstöng varpar frá sér 7,5 metra löngum skugga má nokkuð auðveldlega finna hæð flaggstangarinnar.

Þar sem ekki er alltaf hægt að treysta á sólina hefur verið reynt að búa til einföld mælitæki sem byggja á sömu hugmynd. Myndin í kennslubókinni gefur ekki alveg rétta mynd af því hvernig nota má hæðarmælinn því hún miðast eiginlega við að sá sem notar tækið liggi á jörðinni. Yfirleitt stendur sá sem mælir og þá þarf að bæta við hæðina sem svarar hæðinni frá jörðu að augnhæð þess sem mælir.

Myndin hér til hliðar sýnir mynd af hæðarmæli sem búa má til úr pappaspjaldi og 30 cm reglustiku.



Mælitækið byggist á þeirri hugmynd að búa til tvo einslaga rétthyrnda þríhyrninga. Hæðarmælirinn myndar skammhliðar minni þríhyrningsins og er önnur hliðin (sú lárétta) föst lengd en lengd hinnar er lesin af reglustikunni. Lárétt hlið hins þríhyrningsins er vegalengdin frá mælingarmanni til þess sem mæla á en hæð þess sem mæla á er lóðrétta skammhliðin. Með því að mæla vegalengdina frá mælingarmanni að því sem á að mæla má finna hlutfallið á milli einslægra hliða í þríhyrningunum. Út frá því hlutfalli og aflestri af reglustikunni má finna hæðina (óþekktu stærðina).

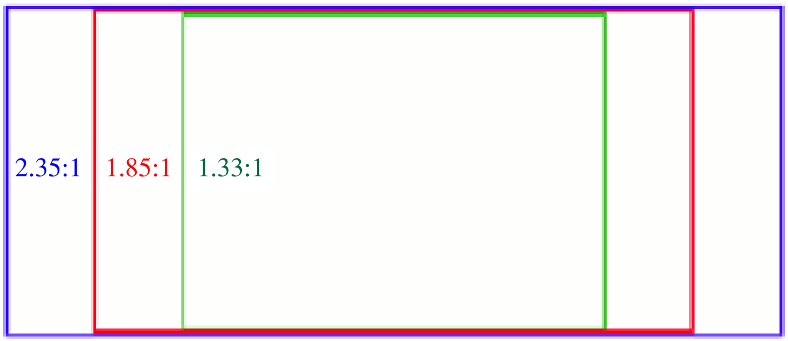
Dæmi: Mælingarmaður stendur í 20 m fjarlægð frá turni. Mælitækið er 20 cm á lengd. Mælingarmaður stillir reglustikuna þannig að það myndist bein sjónlína við efstu brún turnsins. Hæð reglustikunnar er 12 cm. Hlutfall milli einslægra hliða í þríhyrningnum er 0,2:20 eða 1:100. Hæð turnsins er því 0,12m · 100 eða 12 m.

Kennsluhugmyndir

Kaflinn skiptist í þrjá meginhluta. Á blaðsíðu 4–10 er fengist við *hlutföll* í sjónvarpskjám, kvikmyndum og ljósmyndum. Því næst er sjónum beint að *einslögun* og hvernig nýta má hlutföll í því samhengi. Í lok kaflans eru síðan nokkrar blaðsíður þar sem nemendur fá þjálfun í að *beita hlutfallareikningi* í ýmsu samhengi.

Æskilegt er að byrja vinnuna með hlutföll með því að nemendur mæli hæð og breidd nokkurra skjáa í umhverfi sínu eins og lagt er upp með fyrst í dæminu. Í flestum skólum ættu nemendur að hafa aðgang að nokkrum ólíkum skjáum, svo sem tölvuskjáum og sjónvarpsskjáum. Einnig gætu þeir farið í tölvu- og/eða raftækjaverslanir og fengið að mæla skjái þar. Ræða þarf við nemendur hvernig hlutföll eru skráð og að skrá má sama hlutfallið á ýmsa vegu. Í því samhengi er gott að lesinn sé með þeim textinn á blaðsíðu 4 og hann ræddur. Ef nemendur mæla marga skjái í umhverfi sínu og finna hlutfallið á milli breiddar þeirra er hægt að sleppa því að vinna dæmi 2.

Í verkefnum er verið að fást við hlutfallið 1,33:1 sem er líkast til enn sem komið er algengasta hlutfallið í skjáum í umhverfinu. Gott er að nemendur teikni skjá í því hlutfalli og hengi upp í stofunni ef þar er ekki að finna samsvarandi skjá. Tilvalið verkefni er að nemendur teikni líka upp skjái í hlutföllunum 1,85:1 og 2,35:1 svo þeir hafi öll þessi skjáform fyrir augunum. Gjarnan má miða við að skjáirnir séu allir með sömu hæð, t.d. 40 cm. Einnig gætu nemendur teiknað alla skjáina inn á eina og sömu myndina eins og gert er á þessari mynd. Slíkt verkefni væri mjög góður undanfari að hópverkefninu á blaðsíðu 6 og ætti að auðvelda þeim vinnuna.

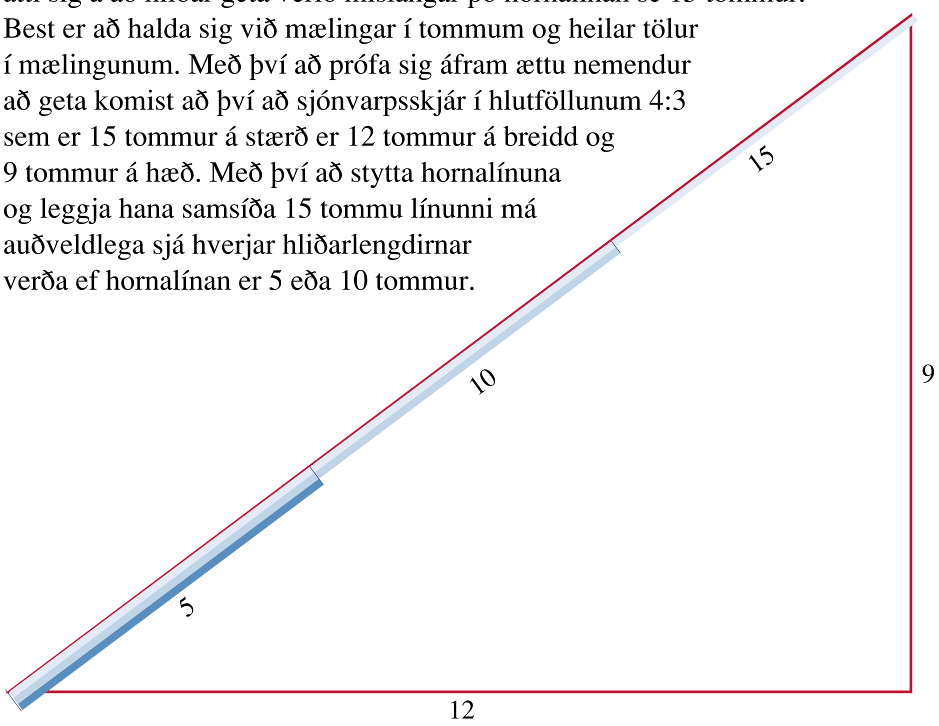


Í dæmum 9–10 er sjónum síðan beint að hlutfallinu 1,77:1 (16:9), þ.e.a.s. skjáhlutfalli sem er í nýjum sjónvarpstækjum eða flatskjám, og ættu þau verkefni að vera nemendum auðveld ef þeir hafa leyst verkefnin á undan.
Hópverkefnið á blaðsíðu 7 varpar ljósi á hvaða áhrif það hefur að klippa af myndum sem eru gerðar í hlutfallinu 1,85:1 þannig að þær falli inn í ramma sem

er í hlutföllunum 1,33:1. Sjá myndina í miðjunni á blaðsíðu 7 hér að framan. Nemendur þurfa að hafa aðgang að góðum myndum til að skoða. Á Netinu má einnig finna heimasíður þar sem sýnd eru nokkur dæmi um hvaða áhrif þetta hefur úr vel þekktum kvikmyndum, t.d. (http://www.thedigitalbits.com/articles/anamorphic/aspectratios/widescreenorama2.html)

Á blaðsíðu 8 eru verkefni þar sem nemendum er ætlað að uppgötva hvað átt er við þegar talað er um stærðir sjónvarpsskjáa í tommum. Væntanlega vita einhverjir nemendur að stærðin vísar til lengdar hornalínu í tommum og því er rétt að nemendur vinni dæmi 12 og 13 hver fyrir sig eða tveir og tveir saman. Í framhaldi af þeirri vinnu þurfa þeir síðan að ræða niðurstöður sínar og komast að niðurstöðu um hvað stærðin stendur fyrir.

Dæmi 14 er mikilvægt að nemendur vinni verklega þannig að þeir átti sig á að hliðar geta verið mislangar þó hornalínan sé 15 tommur. Best er að halda sig við mælingar í tommum og heilar tölur í mælingunum. Með því að prófa sig áfram ættu nemendur að geta komist að því að sjónvarpsskjár í hlutföllunum 4:3 sem er 15 tommur á stærð er 12 tommur á breidd og 9 tommur á hæð. Með því að stytta hornalínuna og leggja hana samsíða 15 tommu línunni má auðveldlega sjá hverjar hliðarlengdirnar verða ef hornalínan er 5 eða 10 tommur.



Forvitnilegt er að sjá að ef hornalínan er 5 tommur verða hliðarnar 4 og 3 tommur en ef hornalínan er 10 tommur þá verða hliðarnar 8 og 6 tommur og 12 og 9 tommur ef hún er 15 tommur eins og fram hefur komið. Dæmi 15 ætti að vera nemendum auðvelt ef þeir uppgötva þetta samhengi.

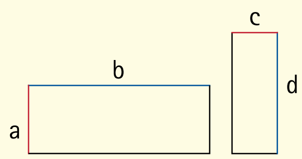
Verkefnin á blaðsíðum 9–10 fjalla um hlutföll í ljósmyndum. Þau gefa nemendum tækifæri til að þjálfa sig í hlutfallareikningi í nýju samhengi sem sumum nemendum þykir væntanlega áhugavert. Allir ættu að ráða nokkuð vel við dæmin á blaðsíðu 9. Dæmi 20–22 eru í sjálfu sér ekki erfið en nemendur þurfa að átta sig á að deila þarf með 300 eða 180 í punktafjöldann á hverri hlið til að fá út stærð myndar (lengd og breidd) í tommum og síðan þarf að margfalda þá tölu með 2,54 til að fá út stærðina í sentímetrum. Nemendur geta unnið dæmin saman eða skipt þeim á milli sín og síðan borið saman niðurstöður. Verkefni 23 krefst smávegis yfirlegu, sérstaklega c liðurinn, ef reikna á dæmið nákvæmlega en með því að setja upp hlutfallatöflu ættu nemendur að geta farið mjög nærri svarinu. Þetta má einnig skoða í myndvinnsluforriti.

upplausn	508	254	127	381	
breidd	8	16	32	12	
hæð	6	12	24	9	

Í tengslum við vinnu með ljósmyndir er sjálfsagt að beina nemendum inn á að skoða myndvinnsluforrit og prófa að minnka og stækka myndir, prenta þær út í mismunandi stærðum og skoða áhrif þess á upplausn myndanna. Einnig er hægt að breyta hlutföllum í myndum í myndvinnsluforritum og getur verið gaman að skoða áhrif þess á myndirnar.

Tvær rétthyrndar myndir teljast einslaga ef hlutfall milli einslægra hliða er jafnt.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$



Á blaðsíðu 11 er hugtakið einslaga kynnt. Nemendur skoða myndir og rétthyrninga og hlutfallið á milli lengdar og breiddar þeirra annars vegar og hlutfallið milli einslægra hliða í einslaga rétthyrningum. Í dæmum 25–29 er rétt að nemendur einbeiti sér að því að finna þær stærðir sem vantar út frá upplýsingum sem gefnar eru. Það er í sjálfu sér ekki erfitt ef nemendur skrá hjá sér þekktar stærðir og hlutföll sem gefin eru upp. Í dæmi 26 er til dæmis vitað að hlutfallið á milli einslægra hliða er í tveimur rétthyrningum 2:3. Breidd annars er 12 cm og gefið er að hann er minni en breidd hins er óþekkt. Þetta má skrá þannig $\frac{12}{x} = \frac{2}{3}$.
Með því að skoða tölurnar og margföldunarsambandið á milli þeirra er nokkuð auðvelt að finna hver óþekkta stærðin er jafnvel þó ekki sé um heiltölusamband að ræða eins og í þessu tilviki.

Þegar nemendur hafa reiknað dæmin er gott að draga saman og ræða um hugtakið einslaga og einslægar hliðar og horn. Í því samhengi geta nemendur unnið dæmi 30–31og 34–36. Einnig gefst gott tækifæri til umræðu um þessi hugtök í tengslum við verkefni 32 og 33. Þar skiptir miklu máli að nemendur prófi sjálfir að teikna marghyrninga og stækka þá og minnka samkvæmt þeim fyrirmælum sem eru í dæmunum. Hluti nemenda gæti unnið verkefnin samkvæmt lýsingunni í bókinni en aðrir gætu prófað að stækka og minnka marghyrninga út frá punkti sem er utan við marghyrninginn eins og sýnt er í umfjölluninni hér að framan.

Í dæmum 37–42 er sjónum beint að einslaga þríhyrningum. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að teikna ýmiss konar þríhyrninga sjálfir og leita leiða til að kanna hvort þeir eru einslaga eða ekki. Nemendur þurfa að átta sig á því að ef stærð tveggja horna í þríhyrningi er ákveðin þá er stærð þriðja hornsins það einnig og að lögun þríhyrninga ákvarðast af hornastærðinni. Því hljóta tveir þríhyrningar að vera einslaga ef tvö einslæg horn í þeim báðum eru jafn stór.

Um tvo einslaga þríhyrninga ABC og A´B´C´
þar sem $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $\angle C = \angle C'$ gildir einnig að $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Þetta hefur í för með sér að ef vitað er að hlutfallið milli einslægra hliða í tveimur þríhyrningum er það sama þá eru þríhyrningarnir einslaga. Það er því nóg að skoða annaðhvort einslæg horn eða einslægar hliðar þegar um þríhyrninga er að ræða en þegar um aðra marghyrninga er að ræða þarf að skoða bæði einslæg horn og einslægar hliðar.

Á blaðsíðu 16 eru dæmi um hvernig má nýta sér þá staðreynd að hlutfallið milli einslægra hliða í tveimur einslaga þríhyrningum er það sama, t.d. við hæðarmælingar. Í umfjöllun um efni kaflans er mynd af hæðarmæli sem auðvelt er að búa til og mikilvægt er að nemendur búi hann til og prófi sjálfir að framkvæma hæðarmælingar. Rétt er að hafa í huga að mælingar með slíkum hæðarmæli verða ekki nákvæmar en geta gefið nemendum vísbendingar um raunverulega hæð. Dæmunum á blaðsíðunni er fyrst og fremst ætlað að kynna þessa leið og hvetja til að nemendur búi sjálfir til hæðarmæli og framkvæmi hæðarmælingar. Slíkt verkefni er tilvalið að vinna í hópum.

Verkefnunum á blaðsíðu 17 er fyrst og fremst ætlað að beina sjónum að því að þegar hliðarlengdir tvöfaldast fjórfaldast flatarmálið (2^2), ef þær þrefaldast þá nífaldast (3^2) flatarmálið og svo framvegis. Nemendur hafa skoðað þetta áður og því er fyrst og fremst um upprifjun að ræða.

Á blaðsíðu 18–20 eru nokkur verkefni þar sem nemendur fá æfingu í að beita hlutföllum og hlutfallareikningi í tengslum við ýmiss konar viðfangsefni tengd daglegu lífi. Þeir geta valið 3–4 verkefni til að leysa á hverri blaðsíðu eftir áhuga og getu.

Stæður

Inntak

Markmið að nemendur

- Þjálfist í að vinna með algeng stærðfræðiheiti og tákn.
- Æfi sig í að nota algebru til að tákna samband stærða.
- Noti víxlreglu, tengireglu og dreifireglu til að einfalda táknasamstæður.
- Æfist í að skrá stæður og einfalda stæður.

Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Nái valdi á að nota táknmál stærðfræðinnar í bland við venjulegt mál.
- Þjálfist í notkun sviga og forgangsröð aðgerða.

Umfjöllun um inntak og kennslu

Alhæfingar eru mikið notaðar í daglegu máli manna. Hugtakið bíll er t.d. alhæfing yfir allar gerðir bíla. Allir sem hafa lært að tala hafa því jafnframt lært að vinna með undir- og yfirflokka. Heimspekingurinn Herbert Spencer fjallaði um táknræna færni og mikilvægi hennar fyrir stærðfræðinám. Hann sagði að liður í vitsmunalegum þroska væri að fara í þykjustuleik og láta hlut eða verknað vera tákn um eitthvað, t.d. að láta viðarkubb tákna dýr, bíl, bát eða flugvél. Bókstafir, orð og myndir geta líka verið tákn fyrir hluti. Skilningur á því styður tengingu á milli talna og tákna. Þessi skilningur er mikilvæg undirstaða fyrir það að geta skilið táknmál stærðfræðinnar og nýtt það til að skrá eigin skilning. Gott getur því verið að tengja tákn við t.d. myndir, þegar nemendur eru að glíma við að ná tökum á að skrá stæður og nota stærðfræðileg tákn. Í stærðfræði hefur verið þróað táknmál sem gerir kleift að setja alhæfingar fram þannig að vinna megi með þær á ýmsan hátt. Í þessum kafla er einföldun stæðna meginviðfangsefnið og mikilvægt að það sé alltaf haft í huga að hver stæða táknar stærð og/eða samband milli stærða.

Skapast hefur hefð um forgangsröð aðgerða.

1. Reikna út úr svigum.
2. Reikna veldi og rætur.
3. Margfalda og deila.
4. Leggja saman og draga frá.

Svigar eru notaðir til að gefa til kynna hvað eigi að reikna fyrst. Gott er að skrifa dæmi upp og byrja á því að strika undir liði. Hver liður er síðan reiknaður og að lokum lagt saman og dregið frá.

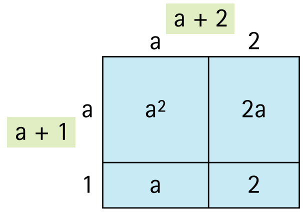
$$\underline{12 : 3} + \underline{4a \cdot 2} - \underline{6a} + \underline{8}$$
$$= 4 + 8a - 6a + 8$$
$$= 12 + 2a$$

Í stærðfræði hafa skapast ákveðnar hefðir við skráningu. Gott dæmi um það er forgangsröð aðgerða.

Nemendur þurfa að ná góðu valdi á forgangsröðinni og festa sér hana í minni. Því getur verið gott að skoða hvernig mismunandi niðurstaða fæst ef reiknað er eftir þeirri röð sem stærðir og aðgerðir koma fyrir í eða eftir forgangsröð aðgerða. Hlutverk sviga þarf að ræða sérstaklega þar sem það ræðst af stöðu þeirra hvar byrjað er að reikna.

Margföldun stæðna og þáttun fá mikið vægi í þessum kafla. Valið er að vinna út frá flatarmyndum. Flatarmál rétthyrninga er yfirleitt fundið með því að margfalda saman hliðarlengdir og því hentar ágætlega að skoða margföldun stæðna út frá rétthyrningum. Þannig segir margfeldi tveggja stæðna til um flatarmál og þegar unnið er með þáttun út frá slíkum myndum er markmiðið að finna hliðarlengdir. Slík myndræn framsetning hjálpar mörgum nemendum að sjá fyrir sér hvaða stærðir er um að ræða. Það er mikilvægt að nýta myndir sem mest því margir unglingar eru mjög góðir í að lesa myndir og nota myndlestur mikið í daglegu lífi sínu. Þegar hliðarlengdir rétthyrninga eru skráðar með tveggja liða stæðum kemur upp þörf fyrir að margfalda saman liðastærðir til að lýsa flatarmáli rétthyrningsins. Á blaðsíðu 28 er þetta skoðað í dæmi 31, út frá mynd af rétthyrningi sem er settur saman úr fjórum litlum rétthyrningum. Síðan er fjallað um í glósubók hvernig margfalda má saman tvo sviga. Mikilvægt er að nemendur átti sig á því af hverju þarf að margfalda alla liði hvers sviga með liðum hinna sviganna og ætti myndin á bls. 28 að geta komið að notum við að skýra það.

31 Finndu flatarmál stóra rétthyrningsins með því að leggja saman flatarmál litlu rétthyrninganna.



Ein leið til að finna flatarmál stóra rétthyrningsins er að margfalda saman hliðarlengdirnar $a + 2$ og $a + 1$.

$$(a + 2) \cdot (a + 1)$$

Margfalda þarf hvorn lið í fremri sviganum með báðum liðum í seinni sviganum.

Þá kemur fram stæðan $a^2 + a + 2a + 2$

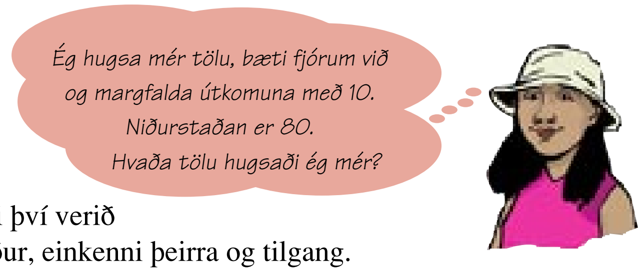
Ef dregnir eru saman líkir liðir $a^2 + 3a + 2$

Þá færðu sömu stæðu og þegar þú lagðir saman flatarmál litlu rétthyrninganna.

Stæður geta verið settar saman úr tölum, aðgerðum, svigum, háðum og/eða óháðum breytum. Nemendur þurfa að ná valdi á að setja fram stæður, einfalda þær, finna gildi þeirra fyrir uppgefin gildi á breytum en jafnframt að átta sig á hvað má lesa úr þeim um samband stærða. Mörgum finnst stæða eins og $2x + 3$ ekki geta verið niðurstaða. Það tengist oft því að fólk veltir ekki fyrir sér að hverju var verið að leita eða með öðrum orðum um hvað var spurt. Sem dæmi má taka að þegar nemendur eru beðnir að einfalda stæðu eða finna flatarmál rétthyrnings þar sem samband hliðarlengda er gefið upp með breytum er ekki hægt að búast við að niðurstaðan verði oftast ein tala.

Miklu skiptir að nemendur geri sér grein fyrir hvernig má sjá hið almenna með því að skoða hið staka. Þeir þurfa að skoða mörg dæmi, greina mynstur og skrá það með orðum og stærðfræðitáknum. Þeir þurfa jafnframt að gera sér grein fyrir hverjar forsendurnar eru og hvaða skilyrði eru skráð í stæður og jöfnur. Þegar skoðuð er jafnan $4 + x = 10$, þá þarf x að uppfylla þau skilyrði að gefa summuna 10 ef 4 er bætt við. Sama er upp á teningnum í viðfangsefnum þar sem finna á upphafstölu sem reikniaðgerðum hefur verið beitt á og niðurstöðutala er gefin upp. Þá er oft gott að skoða skilyrðin hvert á eftir öðru en hugsa ekki um þau öll í einu.

Kennsluhugmyndir



Nemendur hafa unnið töluvert með stæður áður og því er tilvalið að byrja á að rifja hugtakið upp. Spurningin um hvað stæða er gæti því verið gott upphaf að umræðum um stæður, einkenni þeirra og tilgang. Í tengslum við þessa spurningu mætti gjarnan ræða um notkun bókstafa í táknmáli stærðfræðinnar. Þar þarf að taka inn bæði notkun bókstafa fyrir eina tiltekna tölu, margar tölur og til að setja fram alhæfingar. Í stæðum eru bókstafir oft notaðir sem breytur til að sýna samband stærða. Bókstafir eru líka notaðir þegar settar eru fram reglur eins og víxlreglan. Nemendur þurfa að geta lesið úr táknasamstæðum og lýst þeim með stærðfræðilegum texta. Glíman við dæmi 1–3 felst einmitt í því að æfa þessi atriði. Gott gæti verið að nemendur ynnu þau dæmi tveir saman og að safnað væri saman hugmyndum þeirra um samhengi fyrir stæðuna $2x + 300$.

Hvetja þarf nemendur til að lesa allan texta sem er að finna í námsbókinni. Á blaðsíðu 22 eru æfingadæmi í að einfalda stæður. Áður en nemendur byrja á því þarf kennari að ræða um hvers vegna verið er að einfalda stæður og af hverju niðurstaðan $7x + 13$ er gott svar við dæmi 4a. Dæmin eru miserfið því æ fleiri þætti þarf að hafa í huga eftir því sem stæður verða flóknari. Áhugavert heimaverkefni er til dæmis að biðja nemendur að búa til þrjá flóknar stæður og einfalda þær. Þessar stæður mætti síðan nota þannig að nemendur skiptust á stæðum og bæru svör sín saman.

Það getur verið erfitt að átta sig á margföldun stæðna og aðgerðin fær þess vegna töluvert rými í þessum kafla. Notuð er myndræn nálgun í gegnum flatarmál rétthyrninga. Gott er að skoða dæmi 7 og textann þar með nemendum. Hvetja ætti nemendur til að reyna að sjá fyrir sér tvívíðar og þrívíðar myndir þegar þeir einfalda stæður í dæmum 8 og 9. Það er mikill stuðningur fyrir marga nemendur að geta teiknað myndir og séð fyrir sér hliðarlengdir, ekki síst þegar stæður sem margfalda á saman verða flóknari. Mörg viðfangsefni kaflans felast í margföldun stæðna og þáttun enda eru það meginviðfangsefni kaflans.

NÁMSGAGNASTOFNUN 2007 – Kennsluleiðbeiningar – 09743

Stæðuspilið á blaðsíðu 23 gefur færi á mikilli æfingu í margföldun einfaldra stæðna og gaman er að skoða mismunandi lausnir við að þekja spilaborðið. Þar er að finna mörg dæmi um pör af tveimum ólíkum stæðum sem hafa sama margfeldi. Spilaborðið má einnig finna í eyðublöðum á vefnum.

Hugtökin margfeldi og liðastæður eru, ásamt þáttun, hugtök sem kennari þarf að gefa sérstakan gaum. Það einfaldar allar samræður og útskýringar ef nemendur ná valdi á þessum hugtökum. Í glósubókum á bls. 24, 25 og 28 eru þessi hugtök notuð og því gefst tækifæri til að koma nokkrum sinnum að þeim í kennslunni. Það þarf líka að hvetja nemendur til að lesa það sem stendur í glósubókunum og hjálpa þeim að verða læsir á stærðfræðilegan texta. Í glósubókunum er að finna mikla hjálp við að leysa dæmin og til að skilja af hverju þessi dæmi hafa verið valin sem viðfangsefni.

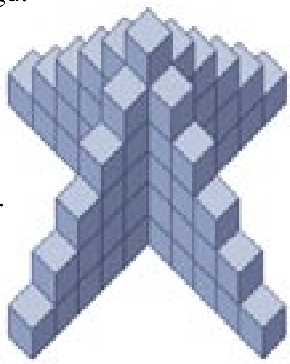
Margfeldi liðastærðar og tölu má skoða sem skráningu á flatarmáli rétthyrnings. Bæði getur verið um að ræða samsetningu nokkurra rétthyrninga eða rétthyrning sem annar rétthyrningur hefur verið klipptur frá. Efst á bls. 24 eru sýnd dæmi um slíkar myndir. Í dæmi 10 eru nemendur hvattir til að teikna upp rétthyrninga og ætti kennari að ganga á eftir því að það sé gert.

Einföldun stæðna verður smátt og smátt flóknari eftir því sem líður á kaflann en mörg skref þarf oft að taka við einföldun. Nákvæmni og skipuleg skráning skiptir miklu ef komast á að réttri niðurstöðu. Sérstök ástæða er til að skoða lausnir nemenda eða láta þá bera svör sín saman við lausnir á Netinu eða lausnir samnemenda sinna. Gott getur verið að kennari taki dæmi um hvernig smámistök leiða til rangrar niðurstöðu. Einföldun stæðna krefst margvíslegrar þekkingar og færni. Margföldun jákvæðra og neikvæðra talna er eitt af þeim atriðum sem nemendur þurfa að kunna. Kennari gæti rifjað upp með nemendum hvernig unnið var með margföldun í *Átta-tíu 3- Talnameðferð* og þannig hjálpað þeim að festa sér reiknireglur í minni. Nemendur kynnast hér í fyrsta skipti margföldun inn í sviga með neikvæðum tölum.

Neðst á bls. 25 er hópverkefni þar sem nemendur eiga að skoða þrjár stæður, þ.e. $2x + 3$, $3x – 2$ og 19. Ef þær eru skoðaðar í þessari röð má sjá að ef x er 5 eru fyrri stæðurnar tvær jafnar og jafngilda 13 sem er minna en 19. Ef x er minna en 5 er $2x + 3$ alltaf með hærra gildi en $3x – 2$ en ef x er stærra en 5 hefur stæðan $3x – 2$ hærra gildi. Þannig að ef x er t.d. 6 eru spilin í stærðarröð því $2x + 3$ hefur þá gildið 15, $3x – 2$ hefur gildið 16 og hæsta gildið er svo 19. Gagnlegt er að nemendur fái að spreyta sig á að beita rannsóknarnálgun og má hvetja þá til að prófa sig áfram með því að velja gildi á x. Gaman getur verið að skoða mismunandi uppröðun stæðnanna og bera saman fyrir hvaða gildi á x röðunin er vaxandi.

Þegar finna á óþekkta hliðarlengd út frá flatarmáli og einni þekktri hliðarlengd reynir á þáttun. Í námsbókinni eru notaðir bæði rétthyrningar og þríhyrningar. Það eflir skilning á stæðum að skoða muninn á stæðum fyrir flatarmál rétthyrninga og þríhyrninga og prófa að reikna gildi stæðnanna fyrir tiltekin gildi á óþekktu stærðinni sem unnið er með. Í dæmum 20 og 21 eru rétthyrningar og þríhyrningar með sömu hliðarlengd og gott er að kennari og nemendur skoði þá saman í framhaldi af lausn á dæmi 22. Þar á einmitt að bera saman almennt stæður fyrir flatarmál rétthyrninga og þríhyrninga með sömu hliðarlengd.

Í verkefni 27 eiga nemendur að greina reglu fyrir fjölda kubba sem þarf til að byggja turn. Nemendur þurfa að hafa aðgang að kubbum svo þeir geti skoðað nokkur dæmi og prófað sig áfram. Ágætt er að þeir setji reglu sína fram bæði með orðum og táknum. Reikna má með að nemendur setji reglu sína fram með ólíkum stæðum sem gott er að bera saman.



Í kaflanum er fjallað um margföldun tveggja sviga. Ekki ætti að gera ráð fyrir að nemendur nái mikilli leikni í slíkri margföldun, frekar að þeir átti sig á hvernig fara má að og skoði hvaða munur kemur fram ef margfaldaðir eru saman svigar þar sem samlagning er í báðum eða frádráttur kemur fyrir. Í dæmi 35 eru dæmi sem gefa grunn fyrir slíka skoðun.

Í tengslum við umfjöllun um margföldun tveggja sviga getur verið góð hugmynd að nemendur teikni upp nokkra rétthyrninga svipað og í dæmum 40 og 41. Þeir geta þá gefið hliðarlengdum nafn og skráð stæðu fyrir flatarmál þeirra. Einnig mætti biðja þá að teikna mynd af stæðum eins og t.d. 6k + 18 og 6k – 18.

Í lok kaflans (dæmi 42–47) eru dæmi sem reyna á flest þeirra atriða sem fengist er við í kaflanum og má nota þau sem námsmatsverkefni. Nemendur gætu t.d. unnið þau sem heimapróf eða skriflegt próf í kennslustund. Einnig getur kennari notað þau sem dæmi til að reikna á töflu með nemendum.

Í kaflanum er fyrst og fremst unnið með einföldun stæðna en ástæða er til að gefa því gaum að skrá stæður og finna gildi þeirra. Til að auðvelda nemendum að ná skilningi skiptir miklu máli að skapa umræður um stæður og leiðir til að einfalda þær. Kennari þarf því að leggja mikla áherslu á að ræða um stæður við nemendur og fá þá til að orða sína eigin hugsun um stæður þannig að grunnhugtök verði öllum töm.

Tölfræði og líkindi

Inntak
Markmið að nemendur:
- Styrki tök sín á að lýsa og vinna úr tölfræðilegum upplýsingum.
- Geti nýtt sér fjölbreytt myndrit við framsetningu gagna.
- Geti dregið ályktanir af tölfræðilegum gögnum og metið ályktanir annarra á gagnrýninn hátt.
- Öðlist aukna færni í að meta líkur, bæði fræðilegar líkur og líkur leiddar af tilraunum.
- Viti að nota má úrtak til að segja til um þýði.

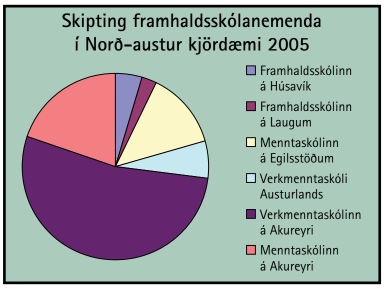
Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Geti notað stærðfræðihugtök í umræðum og við rökstuðning.
- Hafi kynnst almennri notkun gagnagrunna og töflureikna.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í heiminum í dag fer fram mikil gagnasöfnun. Þessi gögn þarf að flokka og draga saman svo mögulegt sé að skilja þau og draga af þeim merkingu. Þróaðar hafa verið fjölbreyttar leiðir til að setja fram gögn. Allir þurfa að vera færir um að skilja og meta tölfræðilegar upplýsingar til að þeir geti tekið þátt í upplýstri umræðu um samfélagsmál. Margir notfæra sér tölulegar upplýsingar í málflutningi sínum, t.d. stjórnmálamenn, hagsmunasamtök, yfirvöld og matsstofnanir.

Mikla áherslu þarf að leggja á lestur og túlkun myndrita og niðurstaðna úr könnunum. Mikilvægt er að vera vakandi fyrir því hvort gröf, töflur og tölfræði eru sett þannig fram að það geti verið villandi. Það er margt sem hafa þarf í huga við framsetningu upplýsinga og þau skilaboð sem komið er þannig á framfæri þurfa að vera skýr og auðskiljanleg. Áhugavert getur verið að skoða mismunandi framsetningarmáta á sömu upplýsingum og bera saman. Það má t.d. skoða upplýsingar frá ýmsum fyrirtækjum og stofnunum og prófa síðan að færa þær í annan búning. Þá gefst tækifæri til að íhuga hvaða áhrif það hefur á túlkun niðurstaðna. Á vef Hagstofu Íslands er að finna margvísleg, áhugaverð gögn sem aðgengilegt er að vinna með. Gott er að nemendur nái valdi á að sækja raunverulegar upplýsingar/gögn, velja framsetningarmáta fyrir þau og setja fram túlkun á hvað lesa má úr gögnunum. Hér eru dæmi um slóðir þar sem finna má tölfræðilegar upplýsingar um lönd heimsins:
http://www.theodora.com/wfb/ og http://www.photius.com/rankings/index.html

Gaman er að skoða á hve margbreytilegan hátt er unnt að setja fram línurit. Kvarðinn á x- og y-ásum skiptir máli en líka sambandið sem línunum er ætlað að lýsa. Ef kvarðinn er fíngerður sjást allar breytingar hratt en ef hann er grófur koma breytingar hægar fram. Það ýtir síðan undir samanburð ef fleiri en ein lína er sett í sama línurit. Í dæmi 4 á bls. 36 er nemendum ætla að skoða áhrif þess að skipta um breytu á öðrum ásnum. Þar er skoðuð hlutfallsleg tölvu- og netnotkun Íslendinga í nokkur ár eftir aldurshópum. Í bókinni er sýnt hvernig línuritið lítur út ef aldurshópar eru á x-ásnum en nemendum er síðan ætlað að búa til línurit út frá sömu upplýsingum sem hefur ártöl á x-ásnum. Það breytir mjög miklu sjónrænt hvort aldurshópar eða ártöl eru á x-ásnum og hefur það mikil áhrif á hvaða atriði eru mest áberandi. Ákvörðun um hvernig kvarðinn á að vera og hvaða breytur eru notaðar byggist á því hvert markmiðið með línuritinu er.



Skífurit henta vel til að sýna hlutfallslega skiptingu í nokkra hópa. Erfitt er að teikna skífurit í höndum ef hópar sem sýna á eru fleiri en 5–6. Með töflureikni má á mjög fljótlegan hátt búa til skífurit sem sýna skiptingu í mun fleiri hópa. Gera má ráð fyrir að grunnskólanemendur nú á dögum muni fyrst og fremst nýta sér tölvutækni við gerð skífurita. Samt sem áður er gott að þeir viti hvernig fara má að ef tölva er ekki við höndina og enn þá er staðan sú í mörgum kennslustofum. Flestir hafa þó aðgang að tölvum bæði heima og á afmörkuðum tímum í skólanum.

Oft þarf að beita líkindafræði við söfnun og túlkun tölfræðilegra upplýsinga. Nemendur hafa fengist töluvert við mat á líkum og einföldum útreikningum á líkum. Þeir hafa bæði þurft að meta og reikna út líkur á óháðum og háðum atburðum. Almennt er gott að hvetja þá til að skrá skipulega alla útkomumöguleika með töflum, talningartrjám eða mengjamyndum. Það nýtist vel við rökstuðning á niðurstöðum. Með því að búa til herma í töflureikni má bera saman fræðilegar líkur og raunlíkur, t.d. í teningakasti, peningakasti og ef skífu er snúið. Á slóð bandarísku stærðfræðikennarasamtakanna *Illuminations* er að finna mörg forrit, m.a. forrit sem gefur kost á að gera tilraunir með mismunandi skífur. Slóðin að skífunum er: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=79

Vald á tölfræðilegri hugsun felur í sér hæfni til að lesa gröf og töflur af ýmsum gerðum og að skilja fjölbreytt myndrit. En mikilvægur þáttur í slíkri hæfni er líka að skilja hvernig nota má úrtak/sýnishorn til að gefa öruggar upplýsingar um þýði/heild. Almennt er reynt að miða við að segja megi með 95% öryggismörkum að úrtakið gefi rétta mynd af heildinni. Með því að taka mörg sýnishorn af sömu stærð má sjá hvernig líklegt er að niðurstöður dreifist. Með því að skoða miðsækni niðurstaðna fæst oft gleggri mynd af niðurstöðum. Tölfræðingar hafa með rannsóknum fundið út hve marga þarf að nota í úrtak til að geta sagt til um þýðið. Nemendur þurfa að kynnast því á hvaða grunni er byggt þó ekki sé ástæða til að þeir nái valdi á að reikna út stærð úrtaks. Þegar gerðar eru skoðanakannanir er oftast valið tilviljunarkennt úrtak og er áhugavert að bera saman niðurstöður skoðanakannana sem gerðar eru um sama málefni. Niðurstöður góðra kannana eru oft mjög svipaðar en síðan má sjá hvernig umræða í þjóðfélaginu getur breytt á stuttum tíma viðhorfum fólks, t.d. til stjórnmálaflokka.

Tölvu- og upplýsingatæknin hefur gjörbreytt aðgangi fólks að upplýsingum og leiðum til að vinna úr þeim. Víða á Netinu má finna áhugaverðar upplýsingar og er um að gera að hvetja nemendur til þess. Á síðunum http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx og http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html er að finna margs konar forrit. Þar á meðal eru nokkur góð um myndrit.

Kennsluhugmyndir

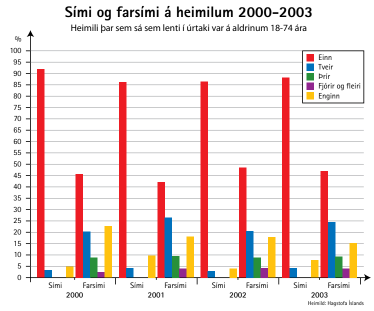
Kaflinn skiptist í tvo hluta, þ.e. annars vegar **myndrit og framsetning gagna** og hins vegar **líkur og rannsóknir á raunlíkum**. Töluvert hefur verið fjallað um myndrit áður og ættu nemendur því að þekkja til mismunandi gerða þeirra. Í kaflanum er áhersla lögð á að nemendur fái æfingu í að lesa úr og túlka ólíkar gerðir myndrita. Sjónum þeirra er jafnframt beint að því hvernig tölfræðilegar upplýsingar eru notaðar í almennum fréttatextum. Gagnlegt getur verið að safna fleiri dæmum úr fréttum og er það kjörið heimaverkefni fyrir nemendur.

Í hópverkefni á bls. 35 er nemendum ætlað að nýta tölfræðilegar niðurstöður sem rök í málflutningi sínum. Þetta verkefni má útfæra á ýmsa vegu. Í bókinni er gert ráð fyrir að nemendur vinni í litlum hópum og velji sér viðfangsefni en einnig getur bekkurinn/nemendahópurinn allur valið sér málefni til skoðunar og umræðu. Síðan mætti fá einhvern utanaðkomandi til að ræða við bekkinn um málefnið. Gaman gæti líka verið að búa til andmælendur innan nemendahópsins. Þá mætti skipta bekknum í 4–5 manna hópa og væru tveir hópar með sama málefni. Annar hópurinn væri meðmæltur en hinn á móti. Aðrir gætu svo metið málflutninginn og hvernig hópnum tókst að nýta sér tölfræði. Þannig mætti taka fyrir tvö málefni í 20 manna nemendahópi.

Á vef Hagstofu Íslands er að finna mikið gagnasafn sem auðvelt er að sækja sem töflureiknisskjöl. Nokkur dæmi úr safninu eru notuð í kaflanum en kjörið er að nemendur finni sér fleiri og prófi að vinna úr þeim og setja fram á fjölbreytilegan hátt. Línurit eru góð til að sýna þróun en það fer eftir því hvaða þróun á að skoða hvernig heppilegt er að setja þau fram. Á línuriti á bls. 36 er sýnt hve stórt hlutfall nokkurra aldurshópa notar tölvur í nokkur ár. Þessi framsetning kallar á að horft sé á hvernig notkun minnkar eftir því sem fólk verður eldra og hve svipuð notkunin er hjá aldurshópunum milli ára. Ef hins vegar breytan á lárétta ásnum (x-ás) er ártölin er sjónum beint að þróun í notkun innan hvers hóps. Þetta er mjög gott dæmi um það hvernig val á framsetningu hefur áhrif á túlkun. Gott er að ræða dæmi 4 við nemendur þegar þeir hafa lokið við að leysa það.

Mikilvægt er að greina á milli prósentuhækkunar og hækkunar í prósentustigum. Prósentuhækkun segir til um hlutfallslega hækkun. Margir eru í vandræðum með að greina á milli og því þarf að ræða þetta og skoða muninn. Í tengslum við þetta má líka ræða hvers vegna summa hvers dálks í töflu á bls. 37 er ekki 100%. Gaman gæti verið að leggja þá spurningu fyrir nemendur og ræða í framhaldi af því af hverju ekki er hægt að leggja saman prósentutölur fyrir ólíka hópa. Í verkefni 7 og 8 er tekið fyrir hvort og þá hvernig nota má þróun síðustu ára til að spá fyrir um framtíðina. Þessi verkefni ættu að geta kallað á töluverðar umræður sem vert er að ýta undir.

Súlurit eru eitt algengasta form myndrita. Í dæmi 9 koma fyrir súlurit þar sem mjög háar tölur eru á y-ásnum, aflestur getur þess vegna ekki orðið nákvæmur. Það þrýstir á að skoða stóru línurnar í breytingum milli ára. Súluritin sýna notkun mælda í mínútum en nemendur eru síðan beðnir að skoða hlutfallslega aukningu á notkun. Það reynir á skilning þeirra á hlutföllum og því gott að taka hugtakið til umfjöllunar.



Stundum er heppilegt að bera saman með því að setja saman nokkrar súlur fyrir mismunandi breytur eins og gert er á bls. 39. Þá má skoða hópa súlna og bera þá saman. Einnig getur verið gott að setja hvern hóp af súlum fram sem skífurit. Nemendur geta prófað að skoða sömu upplýsingar settar fram í súluknippum og skífuritum og velt fyrir sér hvort þeim finnst skýrara. Í verkefni 12 eiga nemendur að gera könnun. Gott er að safna saman niðurstöðum frá öllum hópnum og þá geta nemendur borið eigin niðurstöður saman við niðurstöður hópsins. Það er góður undirbúningur fyrir verkefni í seinni hluta kaflans.

Margir nemendur á unglingastigi eru farnir að velta fyrir sér framhaldsskólanámi. Þess vegna þótti kjörið að nota framhaldsskólana sem viðfangsefni. Þá gefst nemendum tækifæri til að kynna sér skólana og fá yfirsýn yfir hvaða skólar eru til. Upplýsingarnar í bókinni miðast við árið 2005 og er hægt að uppfæra þær með því að fara inn á vef Hagstofu Íslands eða vef menntamálaráðuneytisins. Kjörið er að tengja frekari skoðun á einstökum skólum við verkefni13–17. Það má t.d. skoða skiptingu í brautir, þróun nemendafjölda og/eða skiptingu nemenda eftir aldri og kyni. Jafnframt gætu nemendur kynnt sér námsframboð í þeim skólum sem þeir hafa hug á að sækja um nám í. Hér eiga nemendur að lesa úr töflu, flokka gögn og nýta sér rammarit til að skoða miðsækni og dreifingu.

Villandi myndrit eru alltaf svolítið heillandi. Í sumum þeirra eru upplýsingar settar þannig fram að það ýti undir ákveðin viðbrögð, án þess að neitt sé beinlínis gert rangt en í öðrum eru villur. Skoðun á villandi myndritum ýtir undir nákvæmni við lestur myndrita og gagnrýna hugsun. Nemendur gætu haft gaman af því að búa til villandi myndrit og leggja fyrir bekkjarfélaga að finna út hvaða brögðum hafi verið beitt.

Gagnrýnin hugsun skiptir miklu máli í ýmsum þáttum stærðfræðináms. Nemendur þurfa að geta skilið framsetningu annarra og greint hugsanavillur. Þar reynir líka á hæfnina til að orða hugsun sína. Í dæmi 22 reynir á að nemendur átti sig á muninum á samsettum líkum og óháðum atburðum. Dæmið hentar vel sem paraverkefni og því ákjósanlegt að nemendur vinni tveir saman að lausn þess.

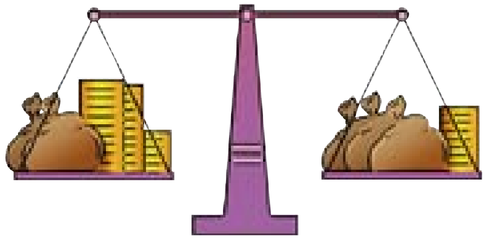
Gott er að skrá útkomumöguleika í talningartré þegar mögulegar útkomur í hverjum atburði eru tvær eða þrjár. Í dæmum 24 og 25 ætti að hvetja nemendur til að nota talningartré og reikna út niðurstöður bæði fyrir tvo atburði og þrjá. Þegar nemendur hafa lokið við dæmin er tilvalið að ræða um muninn á jöfnum og ójöfnum líkum á hverjum atburði. Einnig þarf að ræða um hvað hugtökin háður og óháður atburður þýða. Gott er að nemendur hafi peninga við höndina svo þeir geti skoðað mögulegar útkomur.

Það er munur á að finna líkur á að fá skjaldarmerki í næsta kasti eða að fá fimm skjaldarmerki í röð. Í fyrra tilfellinu er um óháðan atburð að ræða en í því seinna um röð atburða sem eru háðir hver öðrum. Þegar um óháðan atburð er að ræða þarf að ákvarða líkur út frá fjölda möguleika. Háða atburði þarf að reikna með því að margfalda saman líkur.

Á blaðsíðu 45 eru skoðaðar niðurstöður af því að snúa skífu 50 sinnum þar sem 50% möguleikar eru á að fá rautt. Nemendur eiga fyrst að giska og síðan að rýna í niðurstöður tilrauna. Nemendur þurfa að skoða þessi verkefni í samhengi og prófa síðan sjálfir í verkefni 30 að framkvæma tilraun af þessari gerð. Þá er kjörið að nota forrit til að fá niðurstöður. Nota má forritið:
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=79
eða nemendur geta búið til hermi. Nemendur geta líka notað spilastokk eða kubba en þá tekur nokkuð langan tíma að gera þá tilraun 10–11 sinnum. Verkefnin á bls. 45–49 fjalla öll um það hvernig niðurstöður af mörgum sams konar tilraunum raðast á tiltekið bil. Hér er verið að gefa nemendum tækifæri til að undirbyggja skilning sinn á gildi skoðanakannana og töku sýna. Áherslu þarf því að leggja á að allir nemendur reyni að meta og draga ályktanir út frá niðurstöðum. Oft eru líkur metnar á grundvelli niðurstaðna úr könnunum. Gaman gæti verið að fá í heimsókn fulltrúa þeirra sem vinna að gerð kannana. Einnig er hægt að skrifa til fyrirtækja sem sérhæfa sig í könnunum og fá svör við helstu spurningum. Það gæti styrkt umræðuna um hvað má skoða á þennan hátt og hvaða ályktanir má draga.

Kjörið er að safna saman niðurstöðum skoðanakannana sem birtar eru opinberlega á meðan fengist er við þennan kafla. Á heimasíðum fyrirtækja sem gera slíkar kannanir er oft að finna ágætar upplýsingar um hvernig staðið var að gerð hverrar könnunar.

Jöfnur



Inntak
Markmið að nemendur:
- Æfist í að nota jöfnur til að leysa viðfangsefni.
- Geri greinarmun á jöfnu og stæðu.
- Nái leikni í að einfalda og leysa jöfnur.
- Læri að fara rétt með stærðfræðitákn, svo sem jafnaðarmerki.

Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Þekki ýmsar leiðir til að leysa jöfnur.
- Geti lýst lausnaleiðum á skýran hátt og fært rök fyrir þeim.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í þessum kafla er megináhersla lögð á að nemendur læri að leysa jöfnur skref fyrir skref með því að framkvæma sömu útreikninga báðum megin jafnaðarmerkis. Jafnaðarmerkið gegnir lykilhlutverki í hverri jöfnu. Þegar sett er jafnaðarmerki milli tveggja stæðna fæst fullyrðing um að stæðurnar tvær séu jafngildar. *Jafna er því fullyrðing sem segir okkur að tvær stæður séu jafngildar*. Þegar fengist er við jöfnur er yfirleitt verið að leita að því í hvaða tilvikum jafnaðarmerkið gildir. Það er kallað að leysa jöfnuna.

Jafnaðarmerkið var fyrst notað árið1557 af Robert Recorde (1510–1558). Fibonacci (1170–1250) notaði jöfnur á svipaðan hátt og nú er gert í skólum í riti sínu *Liber Abacci* frá árinu 1202. François Viete skilgreindi hugtakið jafna í ritinu *In artem analyticem isagoge* árið 1591.

Lítum á nokkrar jöfnur

$2 + 7 = 9$

$3 + 2 = 6$

$4 + x = 7$

$x^2 = 25$

Það er auðvelt að taka afstöðu til fyrstu tveggja jafnanna. Sú fyrri er sönn og sú seinni ósönn. Í þriðju og fjórðu jöfnunni er x óþekkt stærð. Fullyrðingarnar verða sannar ef ákveðin skilyrði eru fyrir hendi. Í þriðju jöfnunni ætti maður strax að geta séð út frá þekkingu á talnastaðreyndum að fullyrðingin er sönn ef x = 3.
Í þeirri fjórðu getur x hins vegar staðið fyrir tvær tölur, þ.e. bæði 5 og –5.
Lýsa má lausnamengi jöfnunnar L með því að skrá L = {–5.5}

NÁMSGAGNASTOFNUN 2007 – Kennsluleiðbeiningar – 09743

Í mörgum tilvikum má auðveldlega sjá lausnir á jöfnum út frá þekkingu á talnastaðreyndum, með því að prófa sig áfram og beita rökhugsun. Oft er t.d. gott að afmarka þann lið eða stæðu sem óþekkta stærðin er í, ef einungis er um eina óþekkta stærð að ræða, og finna þannig út frá samhenginu hvað hann stendur fyrir.

Dæmi: $\frac{3x + 1}{2} = 5$ — Hér má sjá að stæðan ofan á brotastrikinu sem óþekkta stærðin er í hlýtur að jafngilda 10.

$3x + 1 = 10$ — Út frá þessari staðreynd er nokkuð auðvelt að sjá að $3x = 9$ og að $x = 3$.

Nemendur hafa áður fengist við að leysa einfaldar jöfnur og þannig kynnst ýmsum óformlegum leiðum við að leysa þær. Það að leysa jöfnur getur verið spennandi leit að óþekktum tölum. Ef lögð er áhersla á að ýmsar leiðir eru færar getur þetta orðið spennandi og jafnframt þroskandi leit. Nemendur öðlast skilning á því hvað jöfnur eru, hvað gera má við þær og þeir geta fundið árangursríkar leiðir til lausnar á þeim jöfnum sem þeir glíma við hverju sinni. Nemendur þurfa eigi að síður að kynnast formlegum leiðum sem nota má við að leysa jöfnur. Þau dæmi sem nemendur glíma við á þann hátt mega ekki vera svo einföld að þeir komi ekki auga á ávinning af því að vinna kerfisbundið skref fyrir skref. Í kaflanum kynnast nemendur því hvernig leysa má jöfnur skref fyrir skref með því að notfæra sér

- að í jöfnu má leggja við eða draga frá sömu tölu báðum megin jafnaðarmerkis án þess að lausnamengi hennar breytist,
- að í jöfnu má margfalda eða deila með sömu tölu báðum megin jafnaðarmerkis án þess að lausnamengi hennar breytist, þó má ekki margfalda eða deila með tölunni 0.

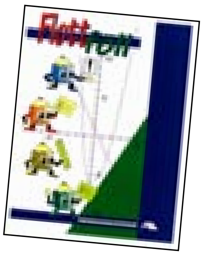
Þetta má setja fram á formlegri hátt
Jafnan $a = b$ er jafngild $a + c = b + c$
Jafnan $a = b$ er jafngild $ac = bc$ ef gefið er að $c \neq 0$

Þegar nemendur telja sig hafa leyst tiltekna jöfnu er mikilvægt að þeir temji sér að prófa hvort stæður báðum megin jafnaðarmerkis verða jafngildar ef lausnin (lausnirnar) er sett inn í jöfnuna í staðinn fyrir óþekktu stærðina.

Sumir hafa lært að leysa jöfnur á þann hátt að taka megi liði eða þætti öðrum megin jafnaðarmerkis, flytja þá yfir jafnaðarmerkið og breyta formerkjum. Mikilvægt er að átta sig á að ekki er um tilfærslur á liðum að ræða heldur er ákveðinni stærð, t.d. + 4, bætt við báðar hliðar jöfnunnar. Yfirleitt er bætt við eða margfaldað með andhverfu tölu sem æskilegt er að eyða út úr annarri hlið jöfnunnar. Við hina hlið jöfnunnar bætist liður eða þáttur sem er andhverfa þess liðar sem gerður er hlutlaus með því að bæta við hann eða margfalda hann með andhverfu. Sjálfsagt eiga nemendur eftir að koma auga á þetta samhengi og geta þá sparað sér nokkur skref við lausn jöfnunnar en mikilvægt er að þeir átti sig á hvers vegna þetta gerist og að hér er ekki um einhverjar töfrakúnstir að ræða.

Varast ber að nota orðalagið að flytja yfir jafnaðarmerki með nemendum. Þeir þurfa að fá nægan tíma til að þróa sína leiðir, vinna skref fyrir skref og taka skref til einföldunar þegar þeim hentar.
Rétt er að benda á ýmis forrit á Netinu sem henta til að leysa jöfnur auk forrita til að teikna gröf sem síðan má nota til að finna lausnir á jöfnum.

Á vefnum *National Library for Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html) má finna nokkur slík forrit sem og á vef *Freudenthalstofnunarinnar* (http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/). Einnig er rétt að benda á forritið *Flott föll* sem nú er fáanlegt hjá Námsgagnastofnun á geisladiski.



Í kaflanum eru verkefni þar sem nemendur fást við að leysa jöfnur með því að teikna gröf þeirra. Fyrst og fremst er um að ræða gröf sem eru beinar línur en einnig eru kynnt gröf þar sem ekki eru beinar línur. Hér er um kynningu að ræða en æskilegt er að nemendur fái einhverja æfingu í að teikna slík gröf og að lesa úr þeim, t.d. með því að nota forritið *Flott föll*. Þeir munu kynnast fleiri gerðum af gröfum í 10. bekk.

Kennsluhugmyndir

Kaflinn byrjar á hópverkefni. Æskilegt að hóparnir lesi og ræði saman um þær leiðir sem kynntar eru á blaðsíðu 50 í glósubókinni áður en þeir fara að glíma við að leysa jöfnurnar eftir ólíkum leiðum. Hver hópur gæti skráð hverja jöfnu á eitt A-4 blað og leiðir við að leysa hana. Síðan mætti safna saman lausnum úr öllum hópum og skoða saman hve margar ólíkar lausnir er um að ræða.

Í dæmum 2–8 er skoðað hvernig leysa má jöfnur með því að framkvæma sömu útreikninga báðum megin jafnaðarmerkis. Í hverri jöfnu þarf einungis að framkvæma eina gerð útreikninga, þ.e. samlagningu, frádrátt, margföldun eða deilingu. Dæmin eru þó ekki það auðveld að nemendur geti auðveldlega séð lausnina án þess að reikna. Æskilegt er að nemendur leysi þessi dæmi einir eða tveir saman.

Í glósubókinni efst á blaðsíðu 53 er sýnt hvernig leysa má jöfnu skref fyrir skref. Nemendur þurfa að orða eða skrá hjá sér hvað gert er í hverju skrefi. Taka mætti verkefnið í glósubókinni til sameiginlegrar skoðunar og gætu nemendur síðan glímt tveir saman við verkefni 9 og 10. Rétt er að leggja áherslu á skýra og skipulega skráningu. Það má gera á ýmsa vegu eins og dæmin á blaðsíðu 55 sýna. Þegar nemendur hafa náð tökum á ferlinu geta þeir farið að einfalda sér skráninguna eins og þar er sýnt. Í dæmunum á blaðsíðu 53 er hins vegar æskilegt að þeir skrái skipulega hvert skref og skýri það með orðum. Hversu mörg dæmi nemendur þurfa að leysa á þennan hátt getur verið matsatriði. Í c-lið í dæmi 10 reynir á að nemendur átti sig á að margfalda þarf hvern lið jöfnunnar með þremur. Nauðsynlegt er að nemendur prófi hvort rétt hefur verið reiknað með því að setja gildi óþekktu stærðarinnar inn í jöfnuna.

Í talnagátunum á blaðsíðu 54 reynir á að nemendur lesi textann vel og setji hann yfir á táknmál stærðfræðinnar. Það skiptir miklu máli hvort 12 eru dregnir frá tölu eða hvort tala er dregin frá 12 og því þarf að lesa textann með athygli. Verkefnin henta vel til paravinnu.

Á blaðsíðu 55–58 eru dæmi sem nemendur geta notað til að æfa sig í að setja upp og leysa jöfnur. Kennari þarf að vega og meta hve mörg dæmi hver og einn nemandi þarf að leysa. Dæmin verða flóknari og í sumum tilvikum getur verið gott að einfalda og draga saman áður en hafist er handa við að leysa jöfnurnar. Nemendur ættu að skoða hvert dæmi vel og velta fyrir sér hvaða leið er skynsamleg í hverju tilviki fyrir sig. Oft getur smávegis útsjónarsemi komið í veg fyrir að beita þurfi flóknum útreikningum.

Á blaðsíðu 59–63 eru verkefni þar sem nemendur fást við að teikna gröf fyrir jöfnur, meðal annars til að auðvelda sér að finna lausnir. Kosturinn við að teikna graf jöfnu er sá að af einu grafi má lesa margar lausnir. Af grafi jöfnu má í raun lesa gildi y fyrir sérhvert gildi á x og öfugt. Það fer þó eftir því hvernig grafið er teiknað hversu nákvæm lausnin verður. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að þeir þurfa að finna að minnsta kosti tvo punkta á grafi beinnar línu til þess að geta teiknað það. Einnig þarf þeim að vera ljóst að notkunarmöguleikar grafsins takmarkast af því á hvaða talnabili það nær yfir.

Nemendur geta glímt við að leysa verkefni 33–34 í litlum hópum og teiknað graf jöfnunnar $y = 2x + 3$ í hnitakerfi. Síðan mætti taka lausnir þeirra til sameiginlegrar umræðu og ræða hvort þeir geta lesið lausnir eftirfarandi jafna af grafinu.

$2x + 3 = 25$ $\quad$ $2x + 3 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $2x + 3 = 1003$

Einnig gætu þeir velt fyrir sér hvort þeir geta fundið gildi y ef

$x = 20$

$x = \frac{1}{10}$

$x = 2000$

Á blaðsíðu 60 kynnast nemendur því hvernig leysa má jöfnu sem sett er saman úr tveimur stæðum með því að teikna jöfnur þeirra beggja inn í hnitakerfi. Tvö gröf skerast þegar bæði x og y gildi þeirra eru þau sömu. Því má finna lausnir á jöfnum með því að teikna gröf þeirra og finna hvar þau skerast. Þetta er í raun undirbúningur undir það að leysa jöfnuhneppi en ekki er farið út í það hér. Æskilegt er að verkefnin séu leyst með því að nota forritið *Flott föll*.

Á blaðsíðu 61–62 eru fleiri verkefni þar sem nemendur fá æfingu í að teikna gröf, finna hallatölu og skurðpunkta við y-ás. Mikilvægt er að nemendur glími sjálfir við verkefnin og nái tökum á þessum mikilvægu hugtökum með því að teikna gröf, skoða jöfnur og prófa sig áfram. Þetta verður best gert með því að nota tölvuforrit. Þar geta nemendur auðveldlega breytt gildum og skoðað hvaða áhrif það hefur. Nauðsynlegt er að taka til sérstakrar skoðunar jöfnur og gröf fyrir lóðréttar og láréttar línur eins og $y = 3$ og $x = 4$. Nemendur þurfa að átta sig að á grafinu $y = 3$ getur x í raun haft hvaða gildi sem er og á grafinu $x = 4$ getur y haft hvaða gildi sem er.

Á blaðsíðu 63 kynnast nemendur gröfum sem ekki eru bein lína. Hér skiptir mestu máli að nemendur geri sér grein fyrir að annars stigs jafna getur haft tvær lausnir. Í jöfnunni $y = x^2 - 1 = y$ jafnt og 1 bæði þegar $x = 1$ og $x = -1$. Í tengslum við dæmi 54 er æskilegt að taka til umræðu hvað gerist þegar $x = 0$. Enn á ný er rétt að benda á að æskilegt er að nemendur fái tækifæri til að vinna verkefni sem þessi í tölvuforritum.

Á síðustu tveimur blaðsíðum kaflans eru jöfnurnar nokkuð flóknari en þær sem voru framar í kaflanum. Hér þurfa nemendur yfirleitt að byrja á að einfalda jöfnurnar og mikilvægt er að skoða þær vel til að finna hentuga leið til einföldunar. Ágætt er að byrja á að draga saman og rifja upp það sem fengist hefur verið við í kaflanum og nota það til að nemendur átti sig á að þeir geta nýtt sér þekkingu sína til að leysa enn flóknari verkefni. Skynsamlegt getur verið að nemendur leysi verkefnin í litlum hópum og nýti þannig sameiginlega þekkingu sína.

Fjármál

Inntak
Markmið að nemendur:

- Öðlist frekari leikni í að reikna samsett dæmi.
- Efli skilning sinn á prósentuhugtakinu.
- Auki færni sína í prósentureikningi þar sem finna þarf hluta, prósentu og heild og geti reiknað breytingar og mismun í hundraðshlutum.
- Nýti stærðfræðiþekkingu sína á valin svið daglegs lífs.
- Geti sett fram reiknireglur og beitt þeim við útreikninga.
- Vinni með veldi sem endurtekna margföldun.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Æfist í að greina upplýsingar og setja útreikninga sína skipulega fram.
- Geti leyst verkefni sem skapast í aðstæðum sem þeir skapa sjálfir.
- Nýti eigin stærðfræðilegar niðurstöður í málflutningi sínum.
- Nýti sér tölvutækni við útreikninga.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Miklu skiptir fyrir fólk að hafa reiður á fjármálum sínum. Margir telja mikilsvert að börn læri þegar í grunnskóla að gera fjárhagsáætlanir og nota þær til að hafa yfirsýn yfir fjármál sín. Bankar gegna stóru hlutverki í meðferð peninga flestra þjóðfélagsþegna í dag. Í þessum kafla eru viðfangsefni þar sem nemendur glíma við fjármál á ýmsa vegu. Í upphafi er áhersla lögð á prósentureikning, fyrst og fremst út frá bankaviðskiptum. Nemendur hafa áður kynnst því að finna prósentuhlutfall, reikna út hluta og finna heild. Prósentureitur er hentugur til að skrá þær upplýsingar sem eru gefnar og sjá hvaða upplýsingar vantar.

Leggja þarf áherslu á lestur prósentudæma. Oft snúast vandamál nemenda um að skilja dæmin og því er gagnlegt að skoða leiðir til að skrá skipulega þær upplýsingar sem eru gefnar.

Bankar og fjármálastofnanir bjóða viðskiptavinum sínum upp á ýmiss konar tilboð sem fólk þarf að geta skilið og borið saman. Það krefst þekkingar á prósentum, prósentureikningi og vinnubrögðum slíkra stofnana. Af innlánum eru almennt reiknaðir vextir einu sinni á ári. Þeir eru þá reiknaðir á inneign og því koma fram vaxtavextir ef inneign er lengur en eitt ár eða vaxtatímabil í bankanum. Gott er að nota töflureikni við svo nákvæma útreikninga, ekki síst ef um háar upphæðir er að ræða. Einnig er gott fyrir nemendur að kynnast flóknari vasareiknum sem gefa slíka möguleika. Slíka vasareikna má finna á tölvutæku formi, t.d. er að finna í *Windows* undir *Accessories* tvær gerðir vasareikna sem nota má við reikning á vaxtavöxtum. Kjörið er að benda nemendum á að nýta sér þetta.

Ársvextir eru reiknaðir miðað við 360 daga, þ.e. 12 mánuðir, hver með 30 daga. Það einfaldar útreikninga töluvert en það getur þó vafist fyrir fólki að finna fjölda daga í hluta árs. Almennt er miðað við ársvexti en ef upphæð er styttra en ár í banka þarf að finna vaxtaprósentu út frá hve stóran hluta úr ári hún er í bankanum. Línulegur vöxtur er á vexti ársvaxta innan árs en síðan koma vextir á vextina og grafið breytist. Það getur verið flókið fyrir nemendur að átta sig á þessu og því mikilvægt að gefa þeim tækifæri og góðan tíma til að ræða saman.

Í seinni hluta kaflans er unnið út frá söguaðferðinni. Söguaðferðin er hugmynd um nálgun í kennslu. Hugmyndin spratt upp í Skotlandi á áttunda áratug síðustu aldar og hefur síðan verið að þróast. Söguaðferðin dregur nafn sitt af því að gert er ráð fyrir að skipulagið sé eins og í sögu. Það er ákveðið upphaf, skipt í kafla sem tengjast og ákveðinn endir. Söguþráður mótast af þeim markmiðum sem á að ná hverju sinni. Mikilvægt er að nemendur lifi sig inn í sögu og setji sig í spor persónanna í sögunni. Mörg tækifæri skapast til að hver geti unnið út frá eigin forsendum og að nemendur geti komið fram með eigin hugmyndir.

Margir íslenskir kennarar hafa notað söguaðferðina við kennslu, sérstaklega í samfélagsfræði og náttúrufræði. Söguaðferðin býður upp á ýmsa möguleika til samþættingar og oft eru námsgreinar því fléttaðar saman. Nota má hvaða námsgrein sem er sem burðarstoð en einnig geta þær komið jafnvígar að. Stærðfræðin getur því verið ein af þeim greinum sem unnið er með og byggja má upp sögu út frá sjónarhorni stærðfræðinnar. Nálgunin er byggð upp á að kveikja áhuga nemenda og tengja námið við líf þeirra utan skólans. Í kaflanum er söguaðferðin notuð sem nálgun að ýmsum fjármálaútreikningum og áætlanagerð, þar sem reynir á nákvæmni, vinnu með stórar tölur og yfirsýn.

Kennsla í anda söguaðferðarinnar er byggð upp í kringum ákveðið ferli og sögu. Nemendur eru í upphafi settir inn í einhverjar aðstæður og oft byrja þeir á að búa sér til persónu sem lifir við þær aðstæður. Kennarinn setur ramma með því að gefa upplýsingar um stað, tíma og aðra mikilvæga þætti sögusviðsins. Hann setur líka fram atburði í sögunni sem nemendur þurfa að bregðast við og skapa sögu í kringum. Endalaust má halda áfram með sögu og koma að henni aftur og aftur. Með söguaðferðinni er oft lögð rík áhersla á hlutbundna vinnu nemenda en með slíkri vinnu ná þeir að sjóngera hluti og lifa sig inn í söguna og þar með verður ljóst hvaða skilning þeir hafa. Einnig er mikil áhersla á samræður. Röksemdafærsla er mikilvægur þáttur í söguaðferðinni þar sem nemendur verða að læra að færa rök fyrir hugmyndum sínum og hlusta á og ræða rök annarra. Kennslan byggist á því að kveikja áhuga og hvetja nemendur til að rannsaka og takast á við óþekkt vandamál.

Mikilvægt er að kennarinn setji upp skýran ramma fyrir verkefnið. Margir þeirra sem nota söguaðferðina búa sér til yfirlitstöflu þar sem þeir setja fram vinnuferlið, lykilspurningar, verkefni, hlutverk nemenda og kennara og markmið. Hver kennari þarf að gera það með hliðsjón af þeim forsendum sem hann vinnur út frá og taka mið af nemendahópnum og aðstæðum hverju sinni. Lykilspurningar skipa stórt hlutverk og eru m.a. notaðar til að kanna innsæi og kunnáttu nemenda en einnig til að afmarka efni og beina sjónum nemenda að inntakinu.

Í bókinni *Storyline for mellomtrinnet* skrifar Janne Fauskanger um stærðfræði og söguaðferðina. Á þessari heimasíðu má einnig finna ýmsar upplýsingar um söguaðferðina – http://www.storyline-scotland.com/news.html

Kennsluhugmyndir

Kaflanum má skipta í tvo undirkafla. Í þeim fyrri er fengist við prósentureikning en í þeim seinni eru verkefnin sprottin út frá viðfangsefninu, að stofna og reka samfélag. Árið 2005 gaf Námsgagnastofnun út námsefnið *Auraráð* eftir Auði Pálsdóttur. Í þeirri bók og meðfylgjandi kennsluleiðbeiningum er að finna margt gagnlegt sem tengist efni þessa kafla. Mögulegt er að flétta kaflann *Fjármál* og *Auraráð* saman í umfjöllun um fjármál einstaklinga og samfélagsins.

Á fyrstu sjö blaðsíðunum í kaflanum eru verkefni sem snúa fyrst og fremst að vaxtaútreikningum. Í byrjun eru upprifjunarverkefni sem gott er að nemendur glími við einir eða í litlum hópum. Áður gæti þó verið gagnlegt að ræða nokkuð um prósentuhugtakið. Í verkefnum 1–11 er unnið með að finna hluta, prósentustig og heild. Dæmin eru sótt í daglegt líf, mest í bankaviðskipti. Auðvelt er að láta nemendur búa til sambærileg dæmi út frá raunveruleikanum. Þeir geta sótt upplýsingar um bankavexti, skoðað eigin bankareikninga eða sett upp ímyndaðar aðstæður um eigin fjárhag og reiknað út frá því. Í verkefnunum er að mestu unnið með innlánsreikninga en einnig mætti skoða lánareikninga. Í seinni hluta kaflans eru húsnæðislán skoðuð.

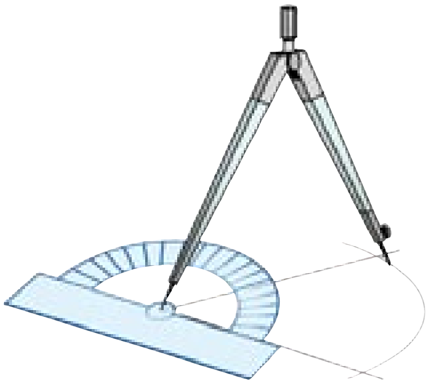
Í verkefnum 12–17 kynnast nemendur vaxtavöxtum. Töflureiknirinn hentar vel til að reikna út vaxtavexti og með töflureikninum er líka gott að sýna hvernig leiða má út reiknireglu sem byggist á notkun velda. Kennari gæti notað skjávarpa og skoðað þetta með nemendahópnum eða nemendur kynnt sér það tveir og tveir saman. Einnig má nýta vasareikna með veldistakka til að reikna út fyrir einstök ár.

Nemendur þurfa að átta sig á hvernig farið er að við vaxtaútreikninga þegar ekki er um heilt ár að ræða. Á blaðsíðu 72 eru nokkur dæmi þar sem nemendur skoða hvað gerist þegar upphæð er eingöngu hluta úr ári í bankanum. Þeim er bent á að setja fram reiknireglu og væri því gott að nýta töflureikni einnig við að leysa sum dæmin á þessari blaðsíðu. Notkun töflureiknis þrýstir mjög á að nemendur sjái sér hag í að setja fram reiknireglur og auðvelt er að prófa þær með slíku verkfæri. Í framhaldi af vinnu með dæmi 24 er gagnlegt að velta fyrir sér að grafið er ekki bein lína ef halda á áfram með 13. og 14. mánuðinn. Það gæti skerpt skilning á hugtökunum ársvextir og vaxtavextir. En einnig að það skiptir máli af hvaða upphæð vextir reiknast. Megintilgangurinn með línuritinu er þó að sýna hvernig ársvextir vaxa yfir árið og af hverju 8% ársvextir gefa 4% ávöxtun á hálfu ári.

Á bls. 73–78 eru verkefni sem tengjast öll stofnun og rekstri eyjasamfélags. Nýttar eru hugmyndir frá söguaðferðinni og geta kennarar spunnið út frá þeim viðfangsefnum sem sett eru fram. Hugmyndin á bak við efnið er að nemendur velti fyrir sér fjárhagslegum rekstri heimila og félagasamtaka. Stofnun samfélags býður upp á margs konar verkefni og væri kjörið að vinna með nokkrar námsgreinar saman. Verkefnin í bókinni eru þannig byggð upp að á blaðsíðum með oddatölur eru einstaklingsverkefni og blaðsíðum með sléttar tölur hópverkefni. Miðað er við að nemendur stofni hópa í kringum það að starfa saman í áhugamannafélagi. Þeir þurfa að skipuleggja starfsemi og gera fjárhagsáætlanir. Bæði einstaklingarnir og félagið fá síðan erindi sem þarf að bregðast við. Einstaklingsverkefnin má einnig vinna á fjölskyldugrunni og geta nemendur þá valið sér fjölskyldumynstur. Viðfangsefnin í bókinni má þannig nýta á fjölbreyttan hátt. Hér er dæmi um ramma sem vinna má áfram.

lykilspurningar	kennari	nemendur	námsgögn	afrakstur	inntak og markmið
Hvað er gott nafn á eyjunni okkar? Hvernig eyja er þetta?	Setur fram spurningar, skráir tillögur nemenda, stjórnar umræðum	Þankahríð, umræður	Veggspjöld eða glærur til að skrá hugmyndir	Listi Nafn valið og einkenni ákveðin	Fá fram hugmyndir nemenda. Skapa ramma um verkefnið
Hver ert þú?			Efni í dúkkulísugerð		

Það getur verið áhugavert fyrir nemendur að leita upplýsinga á ýmsum stöðum. Þeir geta leitað til stofnana, félaga og fyrirtækja eins og Hagstofu Íslands, skattstjóra, neytendasamtaka, banka eða sambærilegra félaga og þeir hafa stofnað í samfélagi sínu. Ástæða er til að leggja áherslu á að nemendur læri að færa bókhald og gæti verið góð hugmynd að fá bókhaldara í heimsókn. Bæta má mörgum viðfangsefnum við sem myndu gera verkefnið heildstæðara, t.d. með því að skoða hvað þarf til að reka sveitarfélag.



Hyrningar og hringir

Inntak
Markmið að nemendur:
- Þekki ýmsar gerðir marghyrninga og geti fundið flatarmál, ummál, hornasummu og hornastærðir þeirra.
- Skerpi skilning sinn á hugtakinu hringur og hugtökum honum tengdum svo sem þvermáli, geisla, boga, streng og hringgeira.
- Noti hringfara til þess að finna miðju striks, teikna horn og tvískipta horni.

Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Rannsaki, greini og notfæri sér þekkingu af einu sviði við að leysa verkefni á öðru sviði.
- Taki þátt í samstarfsverkefnum, þar sem reynir á færni til að vinna skipulega, og umræðum um lausnaleiðir og niðurstöður.
- Þjálfist í að nota skilgreiningar á hugtökum.
- Kynnist einföldum sönnunum þar sem röksemdafærslur skipta meginmáli.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í þessum kafla reynir mjög á að nemendur beiti stærðfræðilegum vinnubrögðum t.d. að þeir geti skráð hjá sér athuganir skipulega, farið eftir fyrirmælum, unnið úr upplýsingum og dregið af þeim ályktanir. Einnig gefur efnið tilefni til tenginga við önnur svið svo sem eins og sögu stærðfræðinnar og listir.

Byrjað er á því að rifja upp ýmislegt sem snýr að helstu eiginleikum og einkennum marghyrninga svo sem nöfn, skilgreiningar, hornasummu og hvort þeir eru úthyrndir eða innhyrndir. Einnig er hugað að því hvernig mæla má flatarmál þeirra og ummál. Rétthyrningar og þríhyrningar fá sérstaka umfjöllun enda eru þeir grunnform sem skipta má öllum öðrum marghyrningum upp í. Lykillinn að því að geta fundið t.d. flatarmál og hornasummu annarra marghyrninga er að geta fundið flatarmál og hornasummu þríhyrninga og ferhyrninga.

Í kaflanum er kynnt fyrir nemendum ein einföld sönnun. Tilgangurinn er að þeir sjái dæmi um hvernig beita má röksemdafærslu til að sýna ótvírætt fram á tiltekna reglu eins og þá að topphorn séu jafn stór. Ekki er gert ráð fyrir að nemendur geti sjálfir sett fram sannanir sem þessar en þeir ættu að geta lesið úr þeim og fylgt röksemdafærslunni.

Þriðja grunnformið sem fær sérstaka umfjöllun í kaflanum er hringurinn. Nemendur hafa áður fengist við hringinn og eiginleika hans, m.a. í kaflanum um hringi og hyrninga í *Átta-10,1*. Þar var lögð áhersla á að kynna hringfarann fyrir nemendum og hvernig má nota hann til að teikna hringi, boga og línur sem eru hornréttar

NÁMSGAGNASTOFNUN 2007 – Kennsluleiðbeiningar – 09743

á aðrar línur. Þetta er rifjað upp hér og sjálfsagt að gefa nemendum tækifæri til að prófa sig frekar áfram með hringfarann. Einnig er rétt að benda á tölvuforrit eins og *Geometer´s Sketchpad* (http://www.keypress.com/x5521.xml), *Cabri* (http://www.cabri.com/v2/pages/en/index.php) og einnig gefur forritið *Geonext* (http://geonext.uni-bayreuth.de/) ýmsa möguleika en það má fá ókeypis á Netinu. Á vef námskeiðsins *Stærðfræði í lífi og starfi* við KHÍ er að finna nokkuð góðar leiðbeiningar fyrir þá sem eru að stíga fyrstu skrefin við að nota *Geometers Sketchpad* http://staerdfraedi.khi.is/lif_og_starf/sketchpadverkefni.htm).

Á síðustu 10–15 árum hafa verið gerðar fjölmargar rannsóknir á notkun rúmfræðiforrita í kennslu. Þær benda flestar til þess að nemendur sem fá tækifæri til að takast á við rúmfræðileg viðfangsefni í gegnum tölvuforrit fái mun betri og sveigjanlegri skilning á ýmsum rúmfræðilegum hugtökum og eiginleikum þeirra. Að sjálfsögðu skiptir máli hvers konar viðfangsefni nemendur glíma við, sem og þau samskipti sem fram fara í skólastofunni meðan á kennslu stendur bæði milli kennara og nemenda og milli nemendanna sjálfra. Notkun rúmfræðiforrita gerir líka töluverðar kröfur til kennarans og það tekur þá e.t.v. dálítinn tíma að átta sig á möguleikum forritanna en ávinningurinn er ótvíræður þegar nemendur og kennarar hafa kynnst helstu möguleikum þeirra.

Í kaflanum eru nokkur brot úr sögu stærðfræðinnar. Annars vegar er um að ræða tilvísun í Arkímedes og rannsóknir hans á hringnum og hins vegar umfjöllun um leit að fimmhyrningum sem hægt er að nota til að þekja flöt. Arkímedes var uppi á 3. öld fyrir okkar tímatal en þær rannsóknir á fimmhyrningum sem fjallað er um fóru fram á áttunda og níunda áratug síðustu aldar. Þetta er því gott dæmi um að stærðfræðin er hvort tveggja í senn gömul og lifandi fræðigrein og að jafnvel leikmenn eins og Marjorie Rice geta gert merkar stærðfræðilega uppgötvanir. Rétt er að benda á bók Jóns Þorvarðarsonar *Og ég skal hreyfa jörðina* en þar er að finna mikinn fróðleik um forngrísku stærðfræðingana. Upplýsingar um Marjorie Rice og hennar uppgötvanir má hins vegar finna á Netinu, m.a. á heimasíðu hennar sjálfrar http://tessellations.home.comcast.net/ .

Kennsluhugmyndir

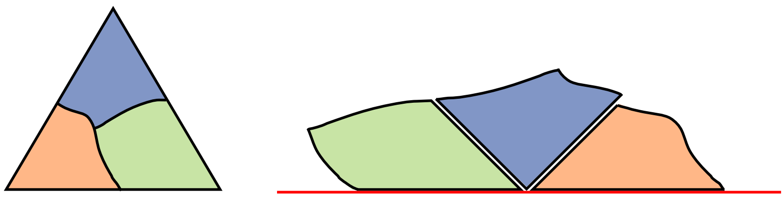
Kaflinn hefst á hópverkefni sem æskilegt er að gefa góðan tíma og nota til að kanna og efla skilning nemenda á mikilvægum hugtökum sem varða marghyrninga. Gert er ráð fyrir að nemendur búi sér til töflu þar sem þeir skrá allt það sem þeir vita og geta komist að í sambandi við hvern hyrning fyrir sig. Í bókinni er sýnd byrjun á töflunni en mikilvægt er að benda nemendum á að það þurfa að vera í henni fleiri dálkar en þar eru sýndir, einnig þurfa þeir að gæta þess að reitir séu nægilega stórir til þess að hægt sé að skrá í þá nauðsynlegar upplýsingar. Á eyðublaði eru stærri myndir af marghyrningunum sem ætti að auðvelda nemendum að mæla þá. Í verkefninu er megináhersla lögð á að nemendur lýsi hvernig þeir finna ummál og flatarmál en þeir geta einnig glímt við að finna það. Einnig geta þeir klippt hyrningana út og límt inn á töfluna eða útbúið veggspjald þar sem hver hyrningur er tekinn fyrir sig og allar upplýsingar skráðar við hann.

Í verkefni 2 eru skoðaðir tveir af þeim fimmhyrningum sem Marjorie Rice uppgötvaði og nota má til að þekja flöt. Æskilegt er að lesa textann með nemendum og ræða um hann og einnig er sjálfsagt að benda nemendum á að skoða heimasíðu Marjorie Rice (http://tessellations.home.comcast.net/9). Þar má bæði finna upplýsingar um þá marghyrninga sem hún uppgötvaði og mynstur sem hún hefur búið til á grundvelli þeirra en einnig er þar að finna upplýsingar um alla þá fimmhyrninga sem fundist hafa fram til þessa og geta þakið flöt.
Þegar nemendur hafa mælt hornin í stóru fimmhyrningunum geta þeir skoðað mynstrið nánar og hvernig hliðar og horn raðast saman til að þekja flöt.

Í verkefnum 3–6 er samhengið á milli ummáls og flatarmáls rétthyrninga skoðað. Verkefnin er hentugt að leysa með því að nota töflureikni og er þá tilvalið að nemendur vinni tveir saman. Verkefni 6 og 7 gefa tilefni til skemmtilegra pælinga sem gott er að taka til sameiginlegrar umræðu. Mikilvægt er að hafa í huga að myndirnar við dæmi 7 eru rissmyndir sem ekki eru í réttum hlutföllum þó þær gefi vísbendingar um lögun þríhyrninganna.

Á blaðsíðu 84–85 eru tvö hópverkefni þar sem fengist er við þríhyrninga, gerð þeirra og einkenni. Verkefnunum mætti skipta á milli nemenda ef þau eru, að lokinni vinnunni, tekin til sameiginlegrar umræðu og kynningar. Æskilegt er að allir nemendur fái einhverja þjálfun í að teikna þríhyrninga eftir tilteknum fyrirmælum en flestum ætti að nægja að teikna þríhyrningana í dæmi 9. Neðst á blaðsíðu 84 eru upplýsingar í glósubók sem nemendur þurfa að skoða til að geta lesið og túlkað upplýsingarnar sem gefnar eru í töflu í hópverkefninu efst á síðunni.

Verkefni 11–15 reyna öll á að nemendur skilji að bein lína er í raun 180°. Ef þeir hafa áttað sig á því ættu verkefnin að reynast þeim auðveld. Gott getur verið að rifja upp með nemendum hvernig sýna má fram á að hornasumma þríhyrnings sé 180° með því að rífa hornin af þríhyrningnum og raða þeim saman þannig að þau myndi beina línu. Þannig má líka sýna fram á að beina línan sé 180°.



Sönnunina á blaðsíðu 12 er æskilegt að nemendur lesi fyrst hver fyrir sig og reyni að skilja hana og ræði hana síðan í litlum hópum og spreyti sig á að skýra hana fyrir öðrum. Síðan mætti taka hana til sameiginlegrar umræðu í nemendahópnum. Nemendur munu kynnast fleiri einföldum sönnunum í 10. bekk.

Í verkefni 17 læra nemendur að helminga horn með því að notfæra sér kunnáttu sína til að helminga strik með hringfara. Þeir kynntust því í *8-tíu, 1* og er það rifjað upp í verkefni 16. Efst á blaðsíðu 88 er rifjað upp fleira sem nemendur lærðu að gera með því að nota hringfara og er gott að rifja það upp hér. Sumt af því þurfa þeir að nota í hópverkefninu á blaðsíðu 88 svo sem eins og að teikna miðþveril á hverja hlið þríhyrnings fyrir sig.

NÁMSGAGNASTOFNUN 2007 – Kennsluleiðbeiningar – 09743

Á blaðsíðu 89 eru rifjuð upp ýmis mikilvæg hugtök sem tengjast hringnum og eiginleikum hans og jafnframt eru nokkur ný hugtök kynnt til sögunnar, það eru strengur, bogi og hringgeiri. Á blaðsíðu 90 eru myndir af nokkrum hringjum og kúlum. Þeim er ætlað að hvetja til umræðna um hringinn og eiginleika hans og vekja athygli nemenda á að hringi er mjög víða að finna í umhverfi okkar. Nemendur geta mælt hringina á myndinni, reiknað flatarmál þeirra og ummál þar sem það á við. Auk þess geta þeir velt fyrir sér raunverulegri stærð þeirra og ígrundað hve mikið þeir hafa verið stækkaðir eða minnkaðir.

Í verkefnum 23–25 fá nemendur æfingu í að teikna hringi með því að nota hringfara. Sjálfsagt eru nemendur misleiknir í að fara með hringfarann og þurfa því á mismikilli þjálfun að halda. Verkefnin má einnig vinna með aðstoð rúmfræðiforrita.

Á blaðsíðum 92–94 er rifjað upp hvernig finna má flatarmál og ummál hrings og nemendur glíma við ýmis verkefni þar sem þeir þurfa að nýta sér þá þekkingu. Gera má ráð fyrir að nemendur þurfi mismikla þjálfun og geta þeir sjálfir valið hvaða verkefni þeir leysa í samráði við kennara. Sérstök athygli er vakin á því að við útreikninga á flatarmáli hrings eru yfirleitt notaðir að minnsta kosti tveir aukastafir og fleiri ef notaður er π-takkinn á vasareikni. Það fer þó eftir stærð hringjanna sem verið er að finna flatarmálið á hversu miklu máli fjöldi aukastafa í pí skiptir. Ef finna á flatarmál hrings sem er með 4 cm langan geisla og reiknað er með tveimur aukastöfum verður svarið 50,24 cm^2 og 50,26548246 cm^2 ef reiknað er með π-takka á vasareikni. Það skiptir því litlu hvort reiknað er með pí með tveimur eða átta aukastöfum. Ef hins vegar á að finna flatarmál hrings sem er með 400 cm langan geisla kemur fram mikill munur eftir því hvort reiknað er með pí með tveimur aukastöfum eða π-takka á vasareikni. Ef π-takkinn er notaður verður svarið 502 654,8246 cm^2 en ef reiknað er með 3,14 verður svarið 502 400 cm^2. Hér er munurinn um það bil 255 cm^2 sem er farið að skipta miklu máli. Mikilvægt er að ræða þetta og vekja athygli nemenda á þessu.

Í verkefnunum á blaðsíðu 95 eiga nemendur að finna lengd boga og flatarmál hringgeira. Hér er þýðingarmikið að þeir átti sig á að þeir þurfa að nýta sér hversu stórt hlutfall úr hring hornið er sem myndast út frá miðju hringsins þegar hringgeirinn eða boginn er afmarkaður. Taka má dæmi 45 til sameiginlegrar umræðu og skoðunar og síðan ættu nemendur sjálfir að glíma við hin dæmin.

Í lok kaflans eru tvö verkefni. Annað þeirra má nýta sem námsmatsverkefni til að meta hversu góð tök nemendur hafa á að finna flatarmál, ummál og hornasummu marghyrninga.

Hitt verkefnið snýst um að finna flatarmál óreglulegra flata þar sem hringir og ferningar spila saman á ákveðinn hátt. Vísað er til vísindamannsins Leonardo Da Vinci en verk hans gefa tilefni til mjög fjölbreyttra stærðfræðilegra athugana og er hér einungis nefnt eitt mjög lítið dæmi um viðfangsefni sem heillaði hann. Taka mætti önnur verk hans til frekari skoðunar t.d. í samvinnu við myndmenntakennara. Það getur auðveldað nemendum lausn verkefnanna ef þeir fá ljósrit af myndunum sem þeir geta rissað inn á.

Tími

Inntak
Markmið að nemendur:
- Þekki vel mælieiningar tímatalsins og geti skráð tíma af nákvæmni.
- Geti skráð hraða með ólíkum viðmiðum og reiknað út hraða.
- Nái góðu valdi á metrakerfinu og geti skráð sömu stærð með mismunandi mælieiningum.
- Geri sér grein fyrir að hraði er hlutfall milli vegalengdar og tíma.

Aðferðir
Markmið að nemendur:
- Átti sig á hve nákvæmni er mikilvæg í mælingum og geti metið óvissu.
- Geti lesið og túlkað fjölbreyttar tölulegar upplýsingar og niðurstöður.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Tíminn er heillandi viðfangsefni sem margir hafa haft gaman af að fjalla um. Hann hefur lengi verið vinsælt viðfangsefni bæði í raunvísindum og hugvísindum. Gaman gæti verið að tengja ýmiss konar hugmyndir manna í tímans rás við umfjöllun um tímann. Sem dæmi má nefna ljóð Steins Steinarr í bókinni *Tíminn og vatnið*, og á ljóð.is má finna eftirfarandi ljóð.

Tímaflakkarinn

Hann leit á klukkuna
og ég líka,
vildum báðir eflaust
vinda tímann hraðar
þar sem við sátum tveir
á biðstofunni

og við biðum áfram,
fingur trommuðu á jakkafaldi
klukkan sló fimm,
og allt í einu sagði hann:
„akkúrat núna, var ég að fæðast“.

Gísli Friðrik Ágústsson
1976

Margar kvikmyndir og sjónvarpsþættir hafa verið gerðir þar sem tímavélar koma við sögu, t.d. *Twilight Zone* og *Back to the Future*. Slíkar vélar tengjast hugmyndum og óskum manna um að beisla tímann. Heimspekingar hafa líka velt fyrir sér hvort tíminn sé fjórða víddin og þá hugmynd er gaman að ræða við unglinga sem þekkja úr stærðfræðinámi sínu þrjár víddir. Það má því skoða hugtakið tími út frá mörgum sjónarhornum.

Tilfinning fólks fyrir tíma er mismunandi og það fer oft eftir því hvað fengist er við hvort tíminn virðist lengi eða fljótur að líða. Það fer líka eftir viðmiði, t.d. finnst ungu fólki tíu ár langur tími meðan flestu eldra fólki finnst stutt að líta tíu ár til baka.

Það er áhugavert að skoða hvernig tímamælingar hafa þróast. Saga tímamælinga og tímamæla er mikilvægur hluti af menningarsögunni. Snemma var komið upp klukkum á kirkjum og ráðhúsum og almenningi þannig veittur aðgangur að tímamæli. Notkun tímamæla hefur þróast og þeir eru nú aðgengilegir víða. Börn á Íslandi kynnast tímamælum snemma nú á dögum, oft í tengslum við áhorf á sjónvarp. Þau læra að lesa af mælunum, bæði hefðbundnum úrskífum og stafrænni framsetningu.

Maðurinn virðist lengi hafa haft þörf eða tilhneigingu til að vilja skipuleggja líf sitt út frá tímanum. Snemma var farið að ráða í gang himintunglanna og skipta sólarhringnum niður í stórar og smáar einingar. Hringnum er skipt í klukkustundir, mínútur, sekúndur og hundraðshluta úr sekúndu sem oft eru kallaðir sekúndubrot. Ein af áhugaverðu spurningunum sem finna má svar við á *Vísindavef H.Í.* er spurningin: *Hvað eru margar sekúndur í einum sólarhring og í einu ári?* http://visindavefur.hi.is/svar.asp?id=4252

Á 19. öld var ákvarðaður staðartími fyrir sérhvern stað á jörðinni. Heimstími jafngildir staðartímanum í Greenwich sem 0° lengdarbaugurinn liggur um. Fyrir hverja gráðu í austur eða vestur breytist staðartími um fjórar mínútur. Jörðinni er skipt í 24 tímabelti, yfirleitt er staðartími samræmdur innanlands og tímamunur milli landa er venjulega heil tala. Í bókinni *Tíma tal* eftir Eddu Kristjánsdóttur er að finna margar fleiri áhugaverðar upplýsingar sem grunnskólanemendur gætu haft gaman af að lesa eða heyra um.[1] Einnig er á *Vísindavef H.Í.* og á *Wikipediu,* frjálsa alfræðiritinu (slóð: http://is.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADmi) að finna aðgengilegar upplýsingar bæði um tímann og metrakerfið.

Hraði er yfirleitt gefinn upp sem sú vegalengd sem farin er á einni tímaeiningu sem höfð er til viðmiðunar. Mismunandi viðmiðunareiningar eru notaðar og fer það oft eftir hraðanum. Leitast er við að hafa sem þægilegastar tölur. Þegar rætt er um hraða bíls er miðað við fjölda kílómetra á klukkustund en þegar rætt er um hraða hlaupara er miðað við fjölda metra á sekúndu. Vindhraði er gefinn í fjölda metra á

1 Edda Kristjánsdóttir. 1997. *Tíma tal. Saga úrsmíði á Íslandi. Sagt frá sigurverki og tímamælum.* Reykjavík, Iðnsaga Íslands og Hið íslenzka bókmenntafélag.

sekúndu þegar hraðinn er ekki mjög mikill en þegar um fárviðri er að ræða er oft talað um kílómetra á klukkustund. Þannig getur tímaeining verið mismunandi eftir aðstæðum. Í íþróttum er kappið oft mikið að vera fyrstur eða bæta tíma sinn. Þar er tími mældur fyrir tiltekna vegalengd, t.d. í sundi eða á skíðum. Tímamælingar í íþróttum eru yfirleitt mjög nákvæmar og mælt alveg niður í sekúndubrot. Þá er tíminn gefinn upp eins og 1:42,60 (1 mín, 42 sek. og 60 sekúndubrot). Gaman getur verið að reikna út á hvaða hraða skíðamaður er, sem nær þessum tíma í bruni (3 km). Oft er miðað við að svigbrautir séu 700 metrar og að ágætur tími sé 0:52,05. Hverju skyldi muna á hraða í bruni og svigi? Finna má á Netinu, t.d. á heimasíðu Skíðasambands Íslands, upplýsingar um niðurstöður ýmissa móta, Íslandsmet og heimsmet sem nota má til að reikna út hraða skíðamanna og bera saman. Fer svigskíðamaður á svipuðum hraða og farið er í bíl, á hjóli eða hlaupandi? Tímaútreikningar af þessu tagi leiða hugann að jöfnum og hvernig má notfæra sér að skrá samband stærða og finna reglu. Þannig má einfalda fyrir sér að leysa mörg sambærileg dæmi. Þar sem hraði er miðaður við hve langt er farið á einni tímaeiningu má líta á hraða sem hlutfall. Ef farnir eru 60 kílómetrar á klukkustund jafngildir það 1 km á 1 mínútu eða 1000 metrum á 60 sekúndum. Hraðann í metrum á sekúndu má þá finna með því að deila í 1000 með 60. Svarið verður $16\frac{2}{3}$ og því er hraðinn u.þ.b. 16,7 m/sek. Nemendur geta fetað sig svona áfram og reiknað skref fyrir skref en þeir geta líka fundið reiknireglu sem þeir geta notað til að breyta km/klst í m/sek. Það er mjög gagnlegt fyrir þá að leiða út reglu og getur aukið við skilning þeirra á notkun jafna/reiknireglna. Til þess að geta skráð jöfnu þarf nemandinn að vera búinn að greina tengsl stærða. Þar liggur ögrunin í viðfangsefninu og því má kennari ekki gefa nemendum regluna upp heldur ætti hann að leiða þá áfram með vísbendingum og spurningum. Notkun töflureiknis þrýstir einnig mjög á þetta.

Tími er ekki eingöngu notaður sem viðmiðunareining fyrir vegalengd. Hann er t.d. líka notaður sem viðmiðunareining í ýmiss konar framleiðslu og um rennsli. Færibönd eru hönnuð út frá nákvæmum tímamælingum og ýmsir fleiri verkferlar. Vatnsrennsli í ám og fljótum er oft mælt í m/sek. en oft þarf líka að reikna út hve hratt vatn safnast upp. Þar sem þarf að tæma eða hleypa af vatni þegar tiltekið magn hefur safnast upp skiptir tíminn miklu máli. Þegar mældur er vatnsleki í jarðgöngum er ýmist miðað við magn á sekúndu, mínútu eða klukkustund og gera þarf áætlanir um dælingu út frá slíkum mælingum. Tímamælingar og hraðaútreikningar koma víða fyrir í samfélaginu og eru tekin nokkur dæmi um það í kaflanum.

Hægt er að mæla hluti af mismikilli nákvæmni. Það fer eftir því hvað er verið að mæla og tilgangi mælinganna hversu mikilli nákvæmni er beitt. Ef mæla á stærð gólfflatar í þeim tilgangi að finna hve mikið þarf að kaupa af parketi á gólfið er ólíklegt að notuð sé meiri nákvæmni en þannig að miðað sé við heila sentímetra. Ef gólfflöturinn er mjög stór er líklegt að mælingar séu námundaðar að heilum metrum eða tíunda hluta úr metra. Ef hins vegar er mæld stærð glugga með það að markmiði að láta skera rúðu í gluggann þarf mælingin í flestum tilvikum að vera upp á millímetra.

Þegar niðurstöður mælinga eru gefnar upp í heilum sentímetrum eða metrum má gera ráð fyrir að raunverulegar niðurstöður mælinganna hafi verið námundaðar að heilu tölunni. Ef niðurstöður eru hins vegar gefnar með því að tilgreina einn aukastaf má ætla að um nákvæmari mælingar hafi verið að ræða en samt svo að námundað hafi verið að einum aukastaf.

Brot úr sentímetrum eða millímetrar eru mjög lítil mælieining og því skiptir smávegis ónákvæmni yfirleitt ekki mjög miklu máli. Metri er hins vegar mælieining sem er hundrað sinnum stærri en sentímetri og þegar á að finna stærð flatar á grundvelli mælingar þar sem mælt er í heilum metrum eða tíundu hlutum úr metra getur ónákvæmni farið að skipta verulegu máli. Stærð flatarins sem mæla á ræður þó mjög miklu. Það má sjá með því að bera saman nokkrar niðurstöður.

Lengd m	Beidd m	Flatarmál m^2
6	7	42,00
6,4	7,3	46,72
6,44	7,34	47,27
60	70	4200,00
60,4	70,3	4246,12
600	700	420000,00
600,4	700,3	420460,12

Einnig er ástæða til að velta fyrir sér hve mikinn fjölda aukastafa skynsamlegt er að nota í svarinu í hverju tilviki fyrir sig. Hér er miðað við tvo aukastafi. En er það skynsamlegt í öllum tilvikum? Þetta eru atriði sem æskilegt er að beina sjónum nemenda að.

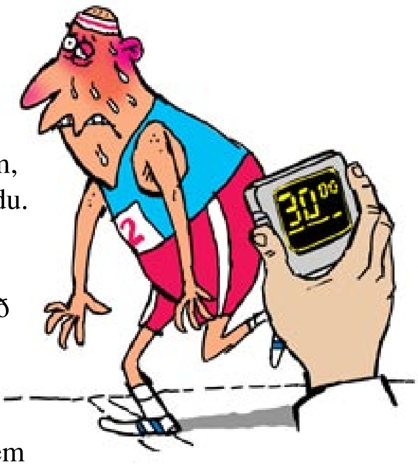
Í lok kaflans eru nokkrar blaðsíður þar sem reynt er að gefa nemendum yfirlit yfir metrakerfið og samhengi mælieininga í metrakerfinu. Eins og fram kemur var metrakerfið tekið upp í frönsku byltingunni en ekki tóku allar þjóðir það upp strax. Hér á Íslandi var metrakerfið innleitt árið 1907 en mun seinna í löndum eins og Bretlandi og Bandaríkjunum og þar notar almenningur enn ýmsar mælieiningar sem ekki tilheyra metrakerfinu.

Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir tengslum mælieininga í metrakerfinu og hvernig þau forskeyti sem notuð eru tengjast veldum af tíu. Einnig er mikilvægt að þeir átti sig á að þegar fengist er við flatarmál og rúmmál er munurinn ekki lengur tífaldur á milli sæta heldur verður hann hundraðfaldur $(10 \cdot 10)$ þegar um flatarmál er að ræða en þúsundfaldur $(10 \cdot 10 \cdot 10)$ þegar um rúmmál er að ræða. Einnig þurfa nemendur að átta sig á samhenginu rúmmetra, rúmdesímetra og rúmsentímetra við lítra og millilítra.

Kennsluhugmyndir

Í kaflanum eru dæmi um tímaútreikninga í ýmsu samhengi. Kjörið er að nemendur finni sjálfir dæmi um tímaútreikninga í sínu eigin umhverfi. Einnig er gott að nemendur mæli tíma og vegalengdir og finni hraða út frá því. Þeir geta fundið hraða bíla sem aka um götu í nágrenni skólans, fundið hlaupahraða, kannað rennsli úr vatnskrana eða leka úr íláti og svona mætti lengi telja. Hvetja ætti nemendur til að skrá hraða með mismunandi viðmið. Gott er að þeir setji sjálfir fram hugmyndir um hvar má mæla og finna hraða. Eigin verkefni nemenda geta hæglega komið í stað verkefna í námsbók.

Áður en byrjað er að vinna verkefnin í kaflanum er gaman að skoða hugtakið tími í víðu samhengi. Velta má upp spurningunni: Hvað er tími? Þar má nýta efni af vísindavefnum, úr bókinni *Tíma tal* eða af *Wikipedia*. Í þessum heimildum má finna margs konar upplýsingar um tímann og það kerfi sem maðurinn hefur komið sér upp til að skrá hann.



Í byrjun kaflans er skoðað hvaða mælieiningar eru notaðar við tímamælingar og hvernig samhengi þeirra er. Einnig eru æfingar í að lesa úr tímaskráningum. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir hvernig tími er skráður í klukkustundum, mínútum, sekúndum og hundraðshlutum úr sekúndu. Í tengslum við skoðun á samhengi milli tímamælieininga er gaman að skoða tilraunir frönsku byltingarmannanna til að samræma tímamælikerfið að tugakerfi. Í verkefni 8 eiga nemendur að búa til tímaás og gott að þeir vinni verkefni í litlum hópum. Það reynir á hlutfallaskilning nemenda. Kennari getur afhent hverjum hópi einn renning sem þeir ættu að teikna einn sólarhring á. Gagnlegt gæti verið að hóparnir fengju mislanga renninga svo að skoða mætti hvernig hlutföllin haldast.

Hraði er meginviðfangsefnið á blaðsíðum 100–102. Verkefnin snúast mest um hraða ýmissa farartækja. Oft er sagt frá hraða farartækja í fréttum og í ýmsum alfræðibókum má finna upplýsingar um hraða. Kjörið er að draga inn upplýsingar sem gætu vakið áhuga nemendahópsins eða einstakra nemenda. Vel má hugsa sér að skoða hraða í kappakstri, þróun flughraða, hraða í maraþonhlaupi eða hjólreiðum. Nemendur gætu valið sér viðfangsefni eftir áhugasviði eða kennari haldið stuttan fyrirlestur um eitt efnið. Meginmarkmiðið með verkefnum 10–20 er að nemendur æfi sig í að skrá hraða á mismunandi hátt og reikna út hraða. Gott er að leggja áherslu á að nemendur þrói og setji fram reiknireglur til að skrá hraða miðað við ólíkar mælieiningar.

Hraði hljóðs og ljóss er mikill og því gefa dæmi um slíkan hraða tilefni til vinnu með stórar tölur. Hljóðhraði er reyndar háður hljóðbera og því þarf að taka tillit til hans við útreikninga. Þetta breytir reiknireglunni fyrir hraða og því er tilvalið að skoða hvaða áhrif það hefur á samband stærða.

Mikilvægt er að nemendur vinni hópverkefnið á bls. 104. Þar er lagður grunnur að hugsun um mælingar og mögulega nákvæmni í þeim. Nemendur þurfa að átta sig á að alltaf er um einhverja ónákvæmni að ræða og á hvaða bili stærðin getur verið. Verkefnin gefa tilefni til umræðna og rannsókna á þessu. Verkefni 27–29 eru úrvinnsla úr hópverkefninu þar sem nemendur skoða nánar áhrif bilsins sem allar mælingar gefa í raun upp. Nemendur þurfa að átta sig á hvaða máli mælitæki, mælieiginleikar og nákvæmni skiptir.

Gaman er að reikna út leka og rennsli. Það er auðvelt að gera ýmsar tilraunir með ílát sem fyllt eru af vatni, síðan gert gat í botninn og mælt hve lengi það er að tæmast. Einnig má skoða rennsli á vatni í ílát og skoða hve langan tíma þau eru að fyllast eftir því hversu mikið er skrúfað frá krana. Nemendur geta sjálfir kannað rennsli á ýmsan hátt og borið saman niðurstöður sínar. Kennari ætti að hvetja þá til að nýta sér línurit við samanburð. Víða um land starfa vatnamælingamenn og í jarðgöngum er vel fylgst með vatnsleka. Við virkjanir er líka mikil áhersla lögð á að fylgjast með vatnsrennsli. Mikinn fróðleik er að sækja til fólks sem starfar við slíkar mælingar.

Í lok kaflans eru yfirlit yfir metrakerfið og tímamælikerfið. Þar eru nokkur einföld dæmi sem snúast að mestu um að lesa úr töflunum. Hugmyndin er að þegar nemendur hafa aflað sér færni í að vinna með tímamælingar og tímaútreikninga skoði þeir heildaruppbyggingu mælikerfa. Þá gefst þeim tækifæri til að tengja efni kaflans við það sem þeir hafa lært áður og mynda sér heildarmynd af metrakerfinu og tímamælikerfinu.

Stærðfræði í morgunsárið

Inntak
Markmið að nemendur:

- Geti nýtt tölur og stærðfræðihugtök til að lýsa hlutum og fyrirbærum.
- Sýni færni í að skrá hlutföll og reikna út hlutföll.
- Nýti algebruþekkingu sína þegar það á við.
- Beiti reiknireglum bæði í algebru og rúmfræði.

Aðferðir
Markmið að nemendur:

- Sýni vald á fjölbreyttum vinnubrögðum stærðfræðinnar.
- Geti beitt stærðfræðihugtökum og notað stærðfræðilega framsetningu.
- Átti sig á margvíslegum tengslum stærðfræði við eigið líf.
- Temji sér að skrá skipulega, vanda úrvinnslu og setja niðurstöður sínar skýrt fram.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð/Kennsluhugmyndir

Hugmyndin að þessu verkefni er fengin frá dönskum tilraunaskóla, Statens Pædagogiske Forsøgsskole. Þar unnu nemendur sem voru að byrja í 9. bekk í nýjum skóla svipað verkefni. Um reynslu Dananna og hugleiðingar þeirra á grundvelli hennar má lesa í greininni *Matematiske Morgener – et udviklingsarbejde* sem skrifuð er af Morten Blomhøj og Mikael Skånstrøm og finna má á slóðinni
http://www.inet-spf.dk/JK/20031209_ms/Mikael_Morten.pdf

Grunnhugmyndin er að nemendur skoði hvaða stærðfræði þeir mæta í eigin lífi og hvernig beita má stærðfræðiþekkingu til að greina betur eigið umhverfi. Það reynir mjög á stærðfræðiþekkingu nemenda að skoða umhverfi sitt með stærðfræðigleraugun á nefinu. Það fer eftir því hve gott vald þeir hafa á ýmsum þáttum stærðfræðinnar og hve greinandi þeir eru hvað þeir koma auga á. Valið er að nota afmarkaðan tíma dagsins sem ramma um verkefnið. Á þeim tíma dags eru unnin mörg verk á heimilinu og ýmislegt gerist á leiðinni í skólann þannig að mörgum reynist auðvelt að finna stærðfræðileg viðfangsefni af ýmsum sviðum stærðfræðinnar.

Hlutverk kennara er vandasamt þegar nemendur vinna verkefni af þessum toga. Þeir þurfa að vera hvetjandi og hjálpa nemendum að beina sjónum að stærðfræðinni en verða um leið að forðast að stöðva hugmyndaflug nemenda eða leiða þá inn á sínar eigin hugmyndir. Nemendur þurfa að fá næði til að leyfa hugmyndum sínum að þróast. Gott gæti verið að leyfa þeim að velja hvort þeir vilja vinna einir eða með öðrum.

Í kaflanum eru íslenskir nemendur settir inn í sögusviðið með sögum af dönskum nemendum. Í sögunum koma dæmi um viðfangsefni sem dönsku unglingunum datt í hug að skoða. Verkefni 1–3 ættu að geta komið nemendum af stað en hvetja þarf þá til að fá nýjar hugmyndir og sýna fjölbreytni. Markmið með svona verkefni er að nemendur sýni hvaða vald þeir hafa á að beita stærðfræðiþekkingu sinni og því skiptir máli að sýna vald á ýmsum sviðum stærðfræðinnar.

Í verkefnalýsingu á blaðsíðu 111 kemur fram að nemendum er ætluð ein vika til að vinna að verkefninu. Það er gert til að þess að nemendur geti leyft hugmyndum sínum að þróast, hafi tíma til að safna upplýsingum og ræða þær við aðra nemendur og kennara. Gott er að hvetja nemendur til að nýta eigin vinnuhefti og velta fyrir sér hvað þeir hafa verið að glíma við í stærðfræði. Þetta verkefni er heildstætt og gæti því verið lokanámsmatsverkefni. Gefa mætti nemendum upp að þeir þurfi að sýna að þeir hafi náð valdi á þekkingu á tilteknum sviðum stærðfræðinnar, t.d. hlutföllum og algebru.

Miðað er við að nemendur skili verkefninu á veggspjaldi (A3). Auðvelt er að breyta því og biðja nemendur að skrifa skýrslu eða hafa kynningu. Kennarar þurfa þó að hafa í huga að oft kemur meiri og dýpri umræða ef aðeins nokkur verkefni eru kynnt. Í þessu tilfelli hafa allir unnið út frá sama ramma og því geta nemendur komið eigin hugmyndum að í umræðum um verkefni annarra. Heppilegt gæti verið að miða við að velja þrjú ólík verkefni til að kynna.