1 2 3 4 5 6

Stærðfræði

# Kennsluleiðbeiningar

## Kennsluleiðbeiningar

# 8-tíu

NÁMSGAGNASTOFNUN
13. september 2006

# Átta – tíu

**Stærðfræði 3**
**Kennsluleiðbeiningar**



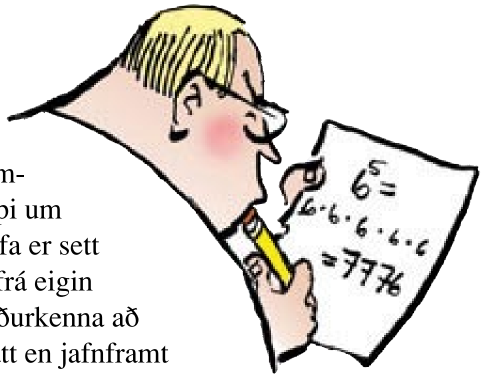
Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir


1. útgáfa 2006
Námsgagnastofnun

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

# Efnisyfirlit

# Stærðfræðikennsla




Að mörgu er að hyggja við skipulagningu og framkvæmd stærðfræðikennslu. Sterkar raddir eru uppi um að kennsla eigi að vera einstaklingsmiðuð og krafa er sett fram um að allir nemendur eigi að geta unnið út frá eigin forsendum. Í einstaklingsmiðuðu kerfi þarf að viðurkenna að nemendur læra á misjöfnum hraða og á ólíkan hátt en jafnframt þarf að nýta mörg og ólík sjónarhorn hvers nemendahóps og það afl sem kemur fram í umræðum og samstarfi þegar kafað er í viðfangsefni. Einnig þarf að taka mið af því að allir nemendur eiga rétt á að kynnast öllum þeim efnissviðum sem námskrá tekur til.

Áherslur í stærðfræðinámi hafa verið að breytast. Í áherslubreytingunum felst m.a.:

- viðurkenning á að nemendur byggi upp eigin stærðfræðiþekkingu og að það taki tíma
- að leitað sé leiða í kennslu sem skapi nemendum góð tækifæri til að byggja upp eigin þekkingu og þess sé ekki vænst að allir stefni í sömu átt á sama tíma,
- að ekki sé endilega best að meta skilning í stærðfræði með skriflegum prófum sem tekin eru á tilteknum tíma
- að beiting og notkun stærðfræði sé mikilsverðari námsárangur en að geta sýnt færni í meðferð reiknirita.

Áherslubreytingar í stærðfræðinámi krefjast nýrrar nálgunar í stærðfræðikennslu. Þegar kennarar leggja aukna áherslu á uppbyggingu nemenda á eigin þekkingu og þróun stærðfræðilegrar hugsunar þarf að miða skipulag kennslunnar við það. Stærðfræðikennarar hafa reynt að þróa út frá þessum hugmyndum kennslunálgun sem hentar fyrir blandaða getuhópa. Gert er ráð fyrir að nemendur byrji á sama punkti, síðan þrói hver nemandi nám sitt út frá eigin forsendum en allir vinni innan sama inntaksþáttar. Kennarinn gerir ráð fyrir því að allir nemendur geti bætt skilning sinn og skilji eitthvað í því efni sem fengist er við. Hugmyndir um nám almennt hafa líka verið að þróast. Þessi nálgun í kennslu byggist á þeirri sýn á nám að hver einstaklingur skapi sér þekkingu á stærðfræði og merkingu. Ekki er litið á árangursríkt stærðfræðinám sem vel heppnaða endurtekningu á því sem kennt hefur verið af aðferðum og staðreyndum (Ollerton og Watson, 2001:2)[1].

Stærðfræðikennarinn þarf að taka margar ákvarðanir um kennslu sína og mikilvægt er að hann byggi þær á faglegum grunni. Hann þarf m.a. að:

- meta á hvaða þætti stærðfræðinnar leggja skuli áherslu
- taka mið af þörfum einstakra nemenda og alls hópsins

1 Ollerton, M. og A. Watson. 2001. *Inclusive Mathematics 11–18*. London, CONTINUUM

- velja viðfangsefni og safna hugmyndum um hvernig vinna má áfram með þau
- meta framfarir einstakra nemenda og nemendahópsins
- setja upp tímaáætlun og byggja upp kennsluferli
- meta samskipti nemenda og ýmsa félagslega þætti
- skipuleggja ýmis stjórnunarleg atriði
- koma meginþáttum námskrár á framfæri
- ákveða hvernig hann ætlar að ræða við hvern nemanda og við nemendahópinn allan um vinnuna.

Kennarar hafa ólíkar skoðanir á mikilvægi einstakra þátta og gildi þeirra. Mikilvægt er að kennarar geri sér grein fyrir eigin viðhorfum og gildismati. Sem dæmi má nefna að kennarar sem átta sig á því að nemendur skapa sér eigin merkingu í stærðfræði, óháð því hvernig kennslustund fer fram, eru líklegri til að nýta sér viðbrögð nemenda í kennslu sinni og við skipulagningu hennar. Nemendur bregðast við eftir því hvaða kröfur eru gerðar og stærðfræðihæfileikar þeirra þróast eftir því. Væntingar samfélagsins til einstaklinga og menntunar skipta líka máli.

Megináskorun kennarans felst í að finna viðfangsefni og þrautir sem þróa hugsun um stærðfræðihugtök og skilning á þeim. Viðfangsefni sem fela í sér rannsóknir og söfnun upplýsinga/gagna sem leiða til greiningar á mynstri og framsetningu á reglu gefa ekki alltaf möguleika á að rannsaka áfram. Ferli sem notað er í slíkum viðfangsefnum má nýta til að vinna áfram með hugtakaskilning, til að lýsa líku og ólíku, greina sameiginlega þætti og draga fram reglu út frá því og skoða mismunandi framsetningu. Þetta eru allt vinnubrögð sem ýta undir nám. Slík nálgun kallar oft fram áhuga og ýtir undir eðlilega forvitni og sköpun.

## Námsumhverfi

Kennarar þurfa að gera sér grein fyrir því hvernig námsumhverfi þeir vilja skapa og hvaða þætti þeir telja mikilvæga í gefandi námsumhverfi. Þegar skapa á námsumhverfi þarf að taka mið af fyrirkomulagi í skólastofunni, þeim námsgögnum sem eru tiltæk og ekki síst því andrúmslofti og þeirri menningu sem kennari og nemendur hafa skapað.

Menning skólastofunnar fellst í siðum, reglum, væntingum, gjörðum, samskiptum, viðhorfum og gildum sem kennari og nemendur hafa mótað og skilja. Nemendur koma í skólann og ganga þar inn í skólamenningu sem kennarar og fyrri nemendur hafa skapað. Menningin er í stöðugri endursköpun og andrúmsloftið ræðst af því hvaða nemendur og kennarar eru á staðnum hverju sinni. Vegna stöðu sinnar er kennarinn mjög sterkur aðili í mótun þessarar menningar.

Eitt af því sem segir til um menningu í skólastofu er hvernig spurninga nemendur spyrja og hvaða viðbrögð þeir fá. Spurning eins og: *Má ég fá lánaðan blýant?* kallar á ólík viðbrögð eftir því hvort talið er mikilvægt að hver og einn sé með eigin skriffæri eða nemendur fái þau í skólanum. Nemandi sem spyr: *Ég skil þetta ekki, getur þú hjálpað mér?* hefur sjálfur áttað sig á að um vanda er að ræða en greinir ekki í hverju hann felst. Hann hefur hins vegar þá trú að samnemandi eða kennari geti hjálpað honum. *Er þetta rétt hjá mér?* er enn ein gerð spurninga. Þá vill nemandi fá staðfestingu en hefur væntanlega trú á að hann hafi reiknað rétt. Spurningar eins og: *Hvað ef... Hve margir? Hef ég fundið alla? Hvað annað gæti gerst?* má líta á sem kjarnaspurningar í stærðfræðinámi og eru nemendur oft hvattir til að spyrja sjálfa sig slíkra spurninga. Það getur orðið kjarni menningar í stærðfræðinámi að setja fram spurningar. Þá er námsumhverfið spurningamiðað. Þar eru þrautir settar fram og leitað fjölbreyttra leiða til að leysa þær. Viðbrögð við spurningum er gott að skoða ef greina á menningu í skólastofu.

Lýsa mætti menningu í skólastofu með því að taka fyrir þrjá þætti: *Hegðun nemenda og aðgerðir, hegðun kennara og aðgerðir* og *umhverfið í skólastofunni*. Gagnlegt er fyrir kennara að skoða þannig og greina menningu í eigin skólastofu með því að skrá nokkur atriði við hvern þátt (Ollerton og Watson, 2001:14).

Stærðfræðinám þarf að fela í sér fjölbreytt vinnubrögð og aðgerðir. Auk þess að nemendur leiti að og finni rétta svarið þurfa þeir að fara í leiki, taka ákvarðanir, rannsaka hugmyndir, kanna leiðir og velja bestu leið hverju sinni, svo nokkur atriði séu nefnd. Unglingar þurfa að taka stöðugt meiri ábyrgð á eigin námi. Þeir verða oft óöruggir þegar þeir koma í nýtt umhverfi og mæta nýjum kröfum en mikilvægt er að þeir taki ekki bara ábyrgð á að vinna verkefnin heldur líka á því að ná valdi á inntaki og vinnubrögðum. Ef nemendur eiga að taka ábyrgð þurfa þeir að fá tækifæri til að ákveða að einhverju leyti hvernig þeir vinna, að hvaða verkefnum og hvernig þeir skila þeim af sér. Þeir þurfa líka að hafa aðgang að ýmsum hjálpartækjum og gögnum sem nýst geta þeim við námið.

Kennarinn þarf að gera ráð fyrir að nemendur hafi ýmiss konar fyrri þekkingu og nýta sér það í kennslunni. Kennarinn getur sett af stað umræður með því að kasta fram spurningum og leita eftir þekkingu nemenda í hópnum. Þannig má ýta undir að nemendur séu virkir í námssamfélaginu. Kennarinn þarf að átta sig á eigin hugmyndum um tilgang stærðfræði og stærðfræðináms og ræða við nemendur um stærðfræði. Hann þarf stundum að tala við allan nemendahópinn í einu og gefa þannig öllum aðgang að sérfræðiþekkingu sinni sem meðal annars felst í valdi á að ræða um stærðfræði og glímuna við stærðfræðiverkefni. Þegar kennarinn leggur verkefni fyrir þarf hann að hafa í huga að byrja þannig að allir geti glímt við verkefnið en jafnframt þarf hann að hafa séð fyrir mismunandi úrvinnslumöguleika fyrir ólíka nemendur og nemendahópa.

Umhverfið í skólastofunni þarf að vera aðlaðandi og hvetjandi. Það skiptir máli hvort og hvaða vinna nemenda er til sýnis á veggjum eða borðum. Kennarinn getur sett úrlausnir nemenda á veggspjald og notað sem umræðugrundvöll. Nemendur geta einir eða í litlum hópum búið til veggspjöld þar sem þeir taka saman það sem þeir hafa nýlega lært um tiltekið atriði. Einnig má kaupa lífleg veggspjöld um tiltekið efni sem vekja nemendur til umhugsunar. Gott getur verið að safna saman nokkrum hlutum og hafa til taks þegar fengist er við tiltekin efni, til dæmis ílát eða dæmi um mynstur. Gæta þarf þess að skipta reglulega um efni og að það líti vel út.

Andrúmsloftið í skólastofunni þarf að ýta undir sjálfstætt nám og stuðla að því að tengsl milli nemenda og milli nemenda og kennara byggist á virðingu. Það hjálpar þá jafnframt nemendum að taka ábyrgð á þróun stærðfræðilegrar hugsunar sinnar og að sjá tengsl milli þátta stærðfræðinnar.

## Að vinna með unglingum

Margir unglingar taka það mjög alvarlega að læra að verða unglingar. Þeir læra fljótt, eru oft skapandi og eru um leið orðnir sérfræðingar. Það sem rekur þá áfram er löngunin og þörfin fyrir að tilheyra hópi. Þeir læra að verða unglingar með því að taka þátt í umræðum, með eftirhermum og með því að sækja sér upplýsingar gegnum ýmsa miðla. Þessa leið má líka nýta við stærðfræðinám.

Nemendahópurinn er alltaf fjölbreyttur. Nemendur hafa mismunandi námsstíl, sjálfsmynd, námsgetu, áhuga og reynslu. Kennarar þurfa því að þekkja nemendur sína býsna vel og vera vakandi fyrir því sem er að gerast í nemendahópnum. Ef allt önnur norm ríkja í mismunandi unglingahópum en í skólanum skapast oft vandamál í samskiptum innan nemendahópsins og við kennara. Kennurum finnst þeir oft skilja betur hugsanagang sterkra nemenda en veikra. Sterkir nemendur eru oft áhugasamir í skólanum og eru sammála kennaranum um að skólinn sé mjög mikilvægur. Veikari nemendur eru oft fjölbreyttari hópur og því þarf kennarinn að leggja sig sérstaklega fram um að kynnast þeim og hugsanagangi þeirra.

Sumir kennarar virðast telja að stærðfræðinám fari best fram í einrúmi og að allir nemendur eigi fyrst og fremst að nota nemendaefni eða kennslubókina þegar þeir stunda stærðfræðinám. Með því fyrirkomulagi að í stærðfræðikennslustundum skuli allir vinna þegjandi eftir námsáætlun afneitar kennarinn því að nemendur séu mismunandi og reynir að steypa þá alla í sama mót. Þetta fyrirkomulag er dauðadæmt því það hentar mjög fáum unglingum. Unglingar þurfa að tala saman, m.a. af félagslegum ástæðum. Námslegar ástæður liggja líka að baki. Vygotsky bendir t.d. á að hugsun og tungumál eru nátengd. Tjáning ýtir undir hugsun og nám. Það á sér gjarnan stað í lifandi félagslegu umhverfi (Ollerton og Watson, 2001:27). Margir kennarar þekkja það af eigin raun að hafa eflt skilning sinn á þáttum í stærðfræði við það að kenna þá. Þeir þurftu þá að horfa á efnisþáttinn í heild, svara spurningum og ræða um ýmis atriði. Í þessum umræðum skýrðist margt og sýnir það mikilvægi þess að nemendur tjái sig um það sem þeir eru að læra.

Sætaskipan í skólastofunni skiptir unglinga miklu máli. Kennarinn þarf að ákveða hvað á að ráða þegar uppröðun í stofu er ákveðin og hver skuli sitja hvar. Kennarinn getur látið nemendum eftir að velja sér sæti og sessunauta. Hann getur einnig raðað nemendum saman þannig að vinnuandi verði sem bestur. Mikilvægt er að nemendur festist ekki í hlutverkum í hópvinnu og því er gott að breyta til. Ýmislegt má miða við þegar valið er í hópa eða sæti. Það gæti hentað að setja sterka og slaka stærðfræðinemendur saman eða setja þá saman sem vinna á svipaðan hátt. Stundum er heppilegt að þeir vinni saman sem hafa mismunandi sterkar hliðar eða að raða í hópa eftir áhugasviði. Kennarinn getur líka stundum haft í huga að gott er að brjóta upp nemendahópa og gefa nemendum tækifæri til að kynnast fleiri nemendum.

## Kennslubókin og viðfangsefni nemenda

Viðfangsefnin sem nemendur glíma við gegna veigamiklu hlutverki í stærðfræðinámi. Þau bera með sér ákveðnar hugmyndir um það hvað stærðfræði er og hvað felst í því að iðka stærðfræði (NCTM,1991)[2]. Eðli viðfangsefnanna getur haft áhrif á og mótað hugsun nemenda og þau geta þrengt eða víkkað út hugmyndir þeirra um það inntak sem þeir fást við. Reynsla nemenda af því að fást við stærðfræði mótar hugmyndir þeirra um hvað felst í því að iðka stærðfræði. Helstu tækifæri nemenda til að kynnast stærðfræði eru í skólastofunni. Það er því mjög mikilvægt að huga vel að eðli og gerð viðfangsefnanna (Henningsen og Stein, 1997)[3].

Hiebert og fleiri (1997)[4] settu fram hugmyndir um það hvers eðlis viðfangsefni þurfa að vera ef ætlunin er að byggja upp sveigjanlegan skilning á stærðfræðilegum hugtökum. Þeir leggja áherslu á tengslaskilning en í honum felst að við skiljum eitthvað ef við sjáum á hvern hátt það er skylt eða tengt öðrum hlutum sem við kunnum eða skiljum. Skilningur er ekki eitthvað sem við öðlumst í eitt skipti fyrir öll. Hann þróast og byggist sífellt upp og hugtakanetið verður sífellt flóknara og tengslin fleiri. Þeim mun fleiri sem tengslin eru þeim mun betri verður skilningurinn. Ígrundun og tjáskipti hjálpa fólki við að mynda mikilvæg tengsl. Ígrundun á sér stað þegar við hugsum meðvitað um það sem við gerum og reynum og hvers vegna. Tjáskipti fela í sér að tala, hlusta, skrifa, útskýra, fylgjast með o.s.frv. Þau fela í sér að taka þátt í félagslegum samskiptum, deila hugmyndum með öðrum og hlusta á aðra ræða hugmyndir sínar. Viðfangsefnin

2 *Professional Standards for Teaching Mathematics*. 1991. Reston,Va, NCTM.
3 Henningsen, M. og M. K. Stein. 1997. Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education* 28:5, 524–549.
4 Hiebert, J., T. Carpenter, E. Fennema, K. Fusion, D. Wearne, H. Murray, A. Oliver og P Human. 1997. *Making Sense. Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, Heinemann.

sem nemendur glíma við þurfa því að vera áhugaverð glíma fyrir þá og þess virði að takast á við þau. Þau þurfa einnig að ýta undir ígrundun og umræður. Viðfangsefnin þurfa að vera þess eðlis að þau tengist nemendum þar sem þeir eru staddir og að þeir geti notað öll þau líkön, tæki og tól sem þeir hafa aðgang að til að leysa þau. Þau þurfa líka skilja eftir eitthvað sem hefur stærðfræðilegt gildi og veita nemendum tækifæri til að hugsa um stærðfræði sem tæki sem mikilvægt er að hafa vald á (Hiebert 1997).

Kennslubækur í stærðfræði eru helsta uppspretta stærðfræðilegra viðfangsefna. Á síðustu árum hafa fræðimenn í auknum mæli beint sjónum sínum að kennslubókum og inntaki þeirra. Í tengslum við TIMSS rannsóknina 1995 var gerð nokkuð ítarleg greining á kennslubókum í mörgum af þeim löndum sem þátt tóku í rannsókninni og í kjölfarið má segja að fleiri hafi farið að gefa kennslubókinni gaum. Í TIMSS úttektinni á kennslubókum var horft til ýmissa þátta, svo sem vægis inntaksþátta, væntinga um frammistöðu og vinnubrögð (performance expectations) og viðhorfa til stærðfræði og beitingar hennar í vísindum og tækni (Schmidt o.fl. 1997)[5]. Margir fræðimenn hafa stuðst við þann ramma við rannsóknir og greiningu á inntaki kennslubóka (Valverde o.fl. 2002[5], Johansson 2003[7], Brändström 2005[8]). Væntingum til frammistöðu og vinnubragða er skipt í nokkra undirflokka.

Þeir eru:
- kunnátta
- beiting staðlaðra reiknirita
- rannsóknir og lausnir þrauta
- stærðfræðileg röksemdafærsla og tjáskipti.

Hér á landi var bókin *Almenn stærðfræði* I skoðuð í tengslum við TIMSS rannsóknina. Við greiningu á inntaki hennar fá fyrstu tveir flokkarnir hlutfallslega langmest vægi en stærðfræðileg röksemdafærsla ekkert vægi og vægi tjáskipta er 1–10%. Í flestöllum öðrum samanburðarlöndum er vægi stærðfræðilegrar röksemdafærslu að minnsta kosti 10%. Í löndum eins og Japan, Kóreu og Frakklandi, sem eru dæmi um lönd sem náðu nokkuð góðum árangri, er vægið 20–40% þó þættir eins og kunnátta og beiting reiknirita fái einnig mikið vægi. Einnig má geta þess að vægi inntaksþáttarins tölur sem bæði felur í sér tölur og reikning er það hæsta (61–70%) sem gerist í þessum samanburði og aðrir þættir fá fremur lítið vægi eða ekkert. Í löndum eins og Singapore, Japan og Kóreu er vægi inntaksþáttarins tölur aðeins 10–20% og í Evrópulöndum sem náðu góðum árangri eins og Frakklandi, Sviss og Tékklandi er vægið 30–50% (Schmidt og fleiri 1997).

---

5 Schmidt, W. H., C. C. McKnight, G. A. Valverde, R. T. Houang, og D. E. Wiley. 1997. *Many Visions, Many Aims. A cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics*. Dodrecht, Kluwer Academic Press.

6 Valverde, G. A., L. J. Bianchi, R. G. Wolfe, W. H. Schmidt, og R. T. Houang. 2002. *According to the book. Using TIMSS to inverstigate the translation of policy into Practice throug the world of textbooks*. Dodrecht, Kluwer Academic Press.

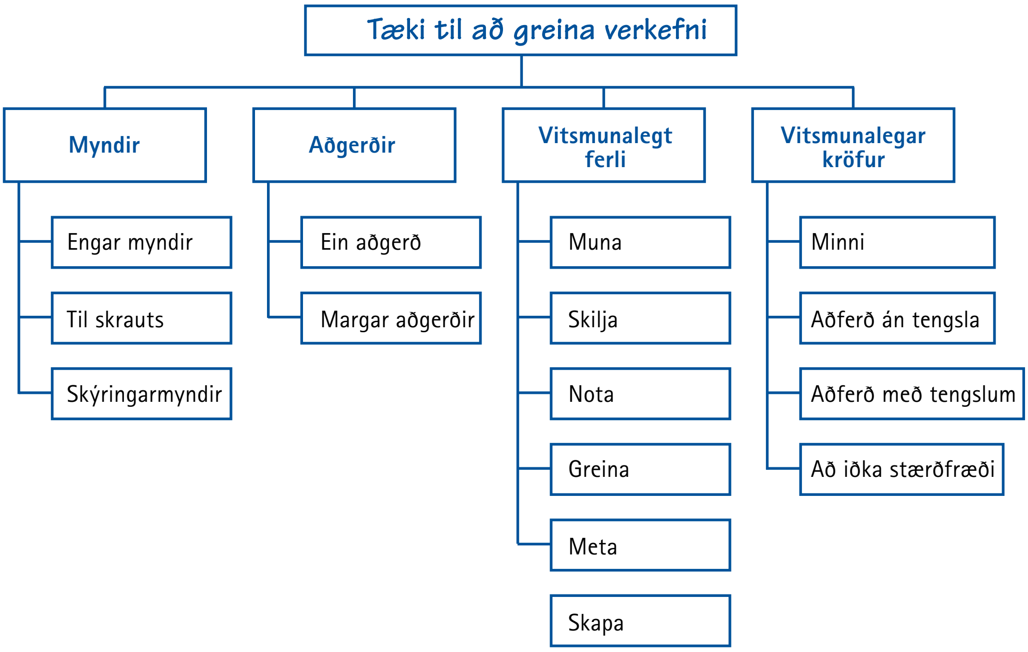
7 Johanson, M. 2003. *Textbooks in Mathematics Education. A study of textbooks as the potentially implemented curriculum*. Licentiate Thesis. Luleå University of Technology.

8 Brändström, A. 2005. *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty*. Licentiate Thesis. Luleå University of Technology.

Pepin og Haggarty (2002)[9] gerðu rannsókn á uppbyggingu, inntaki og notkun kennslubóka í Englandi, Frakklandi og Þýskalandi. Samkvæmt niðurstöðum þeirra bjóðast nemendum í þessum þremur löndum mjög mismunandi tækifæri til þess að fást við krefjandi stærðfræðileg viðfangsefni. Mótast það bæði af því námsefni sem er notað, eðli viðfangsefnanna sem þar eru og framkvæmd kennslunnar. Nemendur í Frakklandi fengu mun fleiri tækifæri til að fást við krefjandi viðfangsefni en jafnaldrar þeirra í Englandi. Það fer því ekki á milli mála að kennslubækur hafa afgerandi áhrif á tækifæri nemenda til að læra stærðfræði.

Brändström (2005) gerði rannsókn á viðfangsefnum í þremur bókaflokkum sem mikið eru notaðir í 8. bekk í Svíþjóð. Þar kom í ljós að þegar verkefni eru stiggreind eftir erfiðleikastigi, eins og algengt er í sænskum kennslubókum, er mikil hætta á að þau viðfangsefni sem ætluð eru getuminni nemendum séu einfölduð um of og að þeir fái lítil sem engin tækifæri til að takast á við krefjandi viðfangsefni og fjölbreytt vinnubrögð stærðfræðinnar. Einnig kom fram að viðfangsefni kennslubókanna, einnig þau sem ætluð eru getumeiri nemendum, eru engan veginn nægilega fjölbreytt né krefjandi til þess að þeir geti öðlast þá stærðfræðilegu hæfni sem talið er mikilvægt að nemendur öðlist nú á tímum.

Í greiningu sinni á viðfangsefnum horfði Brändström til fjögurra þátta.




Hún skoðaði hvernig myndir eru notaðar, þ.e. hvort þær eru til staðar eða ekki og þá hvort þær þjónuðu einhverjum tilgangi eða væru eingöngu til skrauts. Einnig skoðaði hún hvort nemendur þyrftu að beita aðeins einni aðgerð eða fleiri við lausn viðfangsefna. Viðfangsefni voru einnig skoðuð með tilliti til vitsmunalegs ferlis eða hve miklar vitsmunalegar kröfur þau gerðu.

9 Haggarty, L. og B. Pepin. An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French adn German Classrooms: who gets opportunity to learn what? *British Educational Rearch Journal*. 28:4, 567–590.

Við greiningu á vitsmunalegu ferli studdist Brändström við endurskoðaða útgáfu Anderson af flokkunarkerfi Bloom.

| **Ferli** | **Lýsing** |
|---|---|
| Muna | Endurkalla þekkingu úr langtímaminni |
| Skilja | Byggja upp merkingu |
| Nota | Nota ferli við tilteknar aðstæður |
| Greina | Greina niður í hluta og ákveða hvernig þeir heyra saman |
| Meta | Draga ályktanir út frá eiginleikum og viðmiðum |
| Skapa | Setja saman eða umraða hlutum í eina heild |

Við greiningu á því hvers konar vitsmunalegar kröfur verkefni gerðu notaði Brändström ramma sem Smith og Stein (1998)[10] notuðu við að greina þá eiginleika sem einkenna góð stærðfræðileg verkefni. Verkefni sem fela í sér litlar vitsmunalegar kröfur einkennast af því að nemendur þurfa að muna og/eða nota tilteknar aðferðir. Verkefni sem gera ráð fyrir að aðferðir séu tengdar við hugtök og merkingu og verkefni þar sem nemendur iðka stærðfræði (do mathematics) gera mun meiri vitsmunalegar kröfur. Hér á eftir er ramma Smith og Stein lýst nánar.

**Verkefni sem fela í sér litlar vitsmunalegar kröfur – að muna:**

- Fela í sér að nemendur kalla fram staðreyndir, reglur og skilgreiningar sem þeir hafa lært áður eða fást við að festa í minni staðreyndir og reglur.
- Er ekki hægt að leysa með því að nota aðferð því nemendur kunna ekki aðferðina eða tími leyfir ekki að aðferð sé beitt.
- Fela í sér nákvæma endurgerð af því sem nemendur hafa áður séð og það sem ætlast er til að nemendur geri kemur skýrt fram.
- Tengja ekki þær staðreyndir, reglur og skilgreiningar sem nemendur eiga að kalla fram við þann hugtakagrundvöll sem þær hvíla á.

**Verkefni sem fela í sér litlar vitsmunalegar kröfur – aðferð án tengsla:**

- Kalla á reiknirit. Sagt er beint hvaða aðferð á að nota eða það er algjörlega ljóst út frá kennslu, reynslu eða hvar verkefnið er.
- Krefjast lítillar vitsmunalegar örvunar til þess að megi leysa þau. Lítill vafi er á hvað á að gera og hvernig.
- Eru ekki tengd þeim hugtökum eða merkingu sem liggur til grundvallar þeirri aðferð sem á að nota.
- Beina sjónum að réttu svari í stað þess að lögð sé áhersla á að þróa stærðfræðilegan skilning.
- Krefjast ekki útskýringa eða eingöngu útskýringa á þeirri aðferð sem var notuð.

10 Smith, M. S. og M. K. Stein. 1998. Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Teaching Children Mathematics* 3:5, 344–350.

**Viðfangsefni sem fela í sér vitsmunalegar kröfur – aðferð með tengslum:**

- Beina sjónum nemenda að notkun aðferða í þeim tilgangi að stuðla að dýpri skilningi á stærðfræðilegum hugtökum og hugmyndum.
- Beina sjónum beint og óbeint að víðum almennum aðferðum sem eru í nánum tengslum við undirliggjandi hugtök en ekki þröngum reikniritum sem eru ógagnsæ með tilliti til undirliggjandi hugtaka.
- Eru sett fram á fjölbreyttan hátt, svo sem með skýringarmyndum, táknum, með hlutbundnum gögnum eða í þrautasamhengi. Nemendur eiga að þróa merkingu með því að mynda tengsl milli þessara fjölbreyttu framsetningamáta.
- Gera töluverðar vitsmunalegar kröfur. Þó svo að hægt sé að fylgja almennum aðferðum er ekki hægt að fylgja þeim umhugsunarlaust. Nemendur verða að fást við þau hugtök og hugmyndir sem liggja til grundvallar aðferðinni sem þarf að nota til að leysa viðfangsefnið og þróa skilning.

**Verkefni sem fela í sér vitsmunalegar kröfur – að iðka stærðfræði:**

- Fela í sér flókna hugsun. Fyrirsjáanleg, vel æfð leið eða aðferð kemur ekki beint fram í verkefninu, fyrirmælum eða sýnidæmum.
- Gera þær kröfur til nemenda að þeir kanni og skilji stærðfræðileg hugtök, aðferðir eða vensl.
- Krefjast þess að nemendur fylgist sjálfir með og ígrundi eigin hugsanaferli.
- Gera ráð fyrir að nemendur nálgist sjálfir viðeigandi þekkingu og reynslu og nýti sér hana við lausn verkefna.
- Gera ráð fyrir að nemendur greini og kanni verkefnið og þær takmarkanir þess sem gætu haft áhrif á lausnir og lausnaleiðir.
- Krefjast töluverðrar vitsmunalegrar virkni nemenda en það getur valdið nemandanum kvíða vegna þess hve ófyrirsjáanleg lausnaleiðin getur verið.

Dæmi

**Verkefni þar sem reynir á minni:**

- Hver er reglan fyrir margföldun brota?

**Verkefni sem reynir á aðferð án tengsla:**

- Margfaldaðu $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

**Verkefni sem reynir á aðferð með tengslum:**

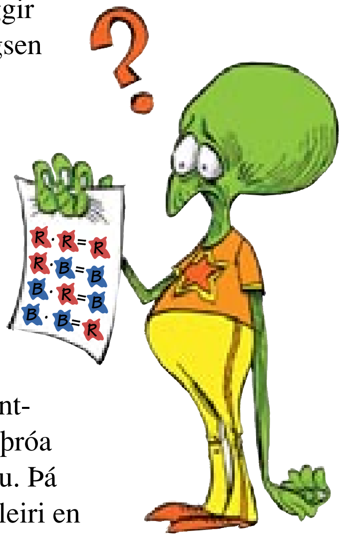
- Finndu $\frac{1}{6}$ af $\frac{1}{2}$. Notaðu mynsturkubba. Teiknaðu upp og útskýrðu lausn þína.

**Verkefni þar sem nemendur iðka stærðfræði:**

- Búðu til verkefni úr daglegu lífi við þetta dæmi $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$
- Leystu verkefnið sem þú bjóst til. Útskýrðu lausn þína.

(Smith og Stein 1998: 348–39)

Það getur verið lærdómsríkt fyrir kennara að prófa sjálfir að nota ramma Smith og Stein til að greina verkefni sem þeir leggja fyrir nemendur sína, hvort sem þau koma úr kennslubókum, prófum eða þeir hafa samið þau sjálfir. Að sjálfsögðu getur verið erfitt að greina á milli og sama verkefnið getur verið margþætt.




Þó viðfangsefnin séu góð og hæfilega krefjandi tryggir það engan veginn góðan árangur nemenda. Henningsen og Stein (1997) lýsa því að stærðfræðileg verkefni fari í gegnum ákveðið ferli. Höfundar setja þau fram í námsefni eða stökum verkefnum, kennarar búa þau út fyrir nemendur sína í kennslustofunni og nemendur takast á við þau í skólastofunni. Það eru ýmsir þættir sem hafa áhrif á þetta ferli. Einn þeirra er þær vitsmunalegu kröfur og ferli sem felast í verkefnunum og rætt hefur verið um hér að framan. Annar þáttur er það hvernig verkefnin taka tillit til atriða sem fræðimenn á sviði stærðfræðimenntunar hafa bent á að skipti máli ef nemendur eiga að þróa með sér stærðfræðilegan skilning og röksemdafærslu. Þá er átt við þætti eins og hvort verkefnin bjóði upp á fleiri en eina leið til lausnar, hvort þau séu sett fram á fjölbreyttan hátt og hvort gert sé ráð fyrir að nemendur ræði saman, útskýri og færi rök fyrir lausnum sínum. Ýmsir þættir hafa áhrif á það hvernig kennarinn setur verkefnin fram og má þar nefna markmið hans, þekkingu hans á efninu og þekkingu hans á nemendum. Það hvernig nemendur takast á við verkefnin mótast af þeim normum sem ríkja í skólastofunni, hvort verkefnin eru við hæfi nemendanna, kennslufræðilegri hæfni kennarans og námshæfileikum nemenda. Krefjandi verkefni geta hæglega breyst í lítt krefjandi viðfangsefni í meðförum nemenda og kennara. Sem dæmi um ástæður þess að verkefni verða ekki eins krefjandi og þeim var ætla má nefna:

- Kennurum hættir til að segja of mikið.
- Nemendur verða óþreyjufullir ef þeir komast ekki strax á sporið.
- Nemendur búa ekki yfir nægilegri þekkingu til að vinna við verkefnið verði markviss.
- Nemendur fá ekki nægilega langan tíma til að glíma við verkefnið.
- Of mikil áhersla er lögð á að finna rétta svarið. (Henningsen og Stein 1997)

Verkefni eru helsta og mikilvægasta tæki kennarans til að stuðla að námi. Það skiptir miklu máli að vanda valið á verkefnum vel og taka mið af nemendahópnum, reynslu hans og stöðu. Ef nemendur eiga að kafa og glíma af alvöru verða verkefnin að vera verðug.

# Um bókaflokkinn

*Átta–10* er námsefnisflokkur sem ætlað er að styðja við stærðfræðinám í 8.–10. bekk. *Átta–tíu* er sjálfstætt framhald af námsefnisflokkunum *Eining* og *Geisli*. Því er miðað við að nemendur hafi kynnst þeim vinnubrögðum að stærðfræðinám feli það í sér að rannsaka, ræða, túlka, vinna hlutbundið, skrá og leysa þrautir.

Í flokknum eru sex grunnbækur. Á heimasíðu námsefnisins (http://www.nams.is/atta-tiu/atta-tiu.htm) má finna kennsluleiðbeiningar og ýmiss konar ítarefni, svo sem. eyðublöð, gagnvirk verkefni og slóðir fyrir nemendur og kennara. Einnig eru þar forrit og önnur verkfæri fyrir nemendur. Lausnir á viðfangsefnum hverrar bókar er að finna á heimasíðunni. Námsmatsverkefni eru gefin út á geisladiski.

Ætlunin er að gefa út nokkur þemahefti með efninu og er eitt þemahefti, *Töflureiknir notaður*, eftir Margréti Völu Gylfadóttur og Stefán Loga Sigurþórsson, komið út. Væntanlegt er á þessu ári þemahefti um gullinsnið. Höfundur þess er Kristín Bjarnadóttir.

Í *8–tíu 3* eru átta kaflar auk nokkurra millisíðna með þrautum og verkefnum. Kaflaheiti segja til um stærðfræðilegt inntak. Kaflarnir heita: *Tölur, Rými, Algebra, Jöfnur og gröf, Talnameðferð, Rökfræði og mengi, Stærðfræði í daglegu lífi* og *Almenn brot*.

Í fyrri bókum *Átta–10 1* og *2*, hefur verið fjallað um suma þessa þætti og í seinni bókum verður haldið áfram umfjöllun um alla þessa þætti. Þannig er reynt að mynda samfellu í bókaflokknum í heild. Í upphafi hvers kafla eru helstu markmið kaflans sett fram fyrir nemendur. Þetta er gert til að ýta undir að nemendur ígrundi eigið nám og átti sig betur á framvindu þess. Við gerð námsefnisins var tekið mið af *Aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði* frá 1999 og drögum að nýrri námskrá í stærðfræði frá 19.12. 2005 (http://namsskipan.is/Namskrardrog/Grunnskolar/). Í kennsluleiðbeiningum er umfjöllun um efni hvers kafla og rætt um val á efnisatriðum. Þar má finna hugmyndir að nálgun og framkvæmd kennslu. Þó verður að hafa í huga að alltaf þarf að skipuleggja kennslu miðað við þann hóp sem unnið er með og aðstæður á hverjum stað.

# Tölur

**Inntak**

Markmið að nemendur:

- Efli skilning sinn á tugakerfinu og kynnist öðrum sætiskerfum en tugakerfi.
- Þekki ýmsar leiðir við talnaritun, svo sem veldarithátt og staðalform.
- Þekki talnamengin N, Z, Q og R og einkenni þeirra.
- Geti nýtt sér veldi og veldarithátt til að einfalda framsetningu og útreikninga með stórum tölum eða smáum.
- Geti beitt helstu reiknireglum um veldi.
- Kynnist hugtakinu tölugildi sem fjarlægð milli punkta á talnalínu.

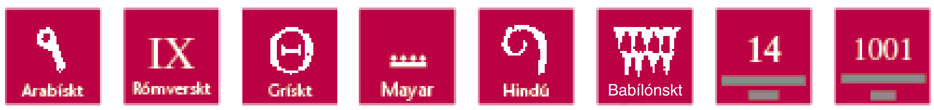
**Aðferðir**

Markmið að nemendur:

- Æfist í að lesa texta um stærðfræðilegt efni sér til skilnings.
- Efli hæfni sína til að lesa og skrá stórar tölur og smáar.
- Nái valdi á ýmsum hugtökum sem notuð eru um tölur og eiginleika þeirra.
- Kynnist táknmáli stærðfræðinnar og geti notað það í bland við daglegt mál.
- Þjálfist í flokkun hugtaka eftir eiginleikum þeirra.
- Geri rannsóknir og athuganir og rökstyðji niðurstöður sínar.
- Kynnist þáttum úr sögu stærðfræðinnar.

## Umfjöllun inntak og vinnubrögð

Talnaritun hefur verið í stöðugri þróun og mikilvægt er að nemendur þekki ýmsar leiðir til að skrá stærðir. Þeir hafa kynnst ýmsum gerðum talna, svo sem heilum tölum og brotum, rómverskum tölum og rithætti Maya, og að notfæra sér reikniaðgerðir þegar stærðir eru skráðar. Sætisgildi tugakerfisins þurfa að vera nemendum ljós og þeir þurfa að geta skráð bæði stórar tölur og smáar.




Ein leið til að skrá stærðir er að nota veldarithátt. Veldi er í stærðfræðilegum skilningi tala eða tákn sem margfölduð er með sjálfri sér. Þetta má sýna með jöfnu:

$$m^n = 1 \cdot m \cdot m \cdot m \ldots \cdot m$$

Stærðin m er margfölduð saman jafnoft og veldisvísir (n) segir til um. Sem dæmi má nefna að $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Hér er 3 veldisstofn og 5 veldisvísir, því má segja að 3 séu hafnir í fimmta veldi. Á sama hátt má skoða að $s^3$ (s í þriðja veldi) er það sama og $s \cdot s \cdot s$ .

Þegar veldisvísirinn er 0 verður útkoman alltaf 1. Það kemur skýrt fram ef skoðað er samband milli velda með sama veldisstofn en ólíkan veldisvísi. Sem dæmi má skoða veldi af tveimur og veldi af þremur.

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ 2^1 = 2 \end{array}\right\} \text{Stærðin er helmingur af fyrri stærð}$$

$2^0$ hlýtur að vera helmingur af 2 eða 1

$$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\ 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \\ 3^1 = 3 \end{array}\right\} \text{Stærðin er alltaf þriðjungur af fyrri stærð}$$

$3^0$ hlýtur því að vera þriðjungur af 3 eða 1

Þegar veldi eru lögð saman eða dregin frá þarf bæði **veldisstofn** og **veldisvísir** að vera sá sami til þess að hægt sé að einfalda.

$4\,s^a + s^a = 5\,s^a$

$4\,s^a - s^a = 3\,s^a$

Við margföldun og deilingu er hins vegar hægt að einfalda ef veldisstofninn er sá sami. Í margföldun eru veldi þá einfölduð með því að leggja veldisvísa saman.

$$\boxed{s^a - s^b = s^{a+b}}$$

til dæmis $(4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^3 \cdot 4^7 = 4^{3+7} = 4^{10}$

Deiling er sambærileg við að margfalda með mínusveldi. Því gildir um deilingu að:

$$\frac{s^a}{s^b} = s^a \cdot s^{-b} = s^{a-b}$$

til dæmis $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1 = 5$

Einnig gildir: $\boxed{(s^a)^b = s^{a \cdot b}}$

til dæmis $(9^4)^3 = 9^{4 \cdot 3} = 9^{12}$

Núllta veldi má líka skoða út frá deilingu. Dæmi: $\frac{a^2}{a^2} = 1$,

$\frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$ $\quad a^{2-2} = a^0$ (gildir þegar $a \neq 0$).

Neikvæð veldi eru notuð til að tákna tölur eða tákn sem hafa gildi milli 0 og 1. Hægt er að finna gildi þeirra með því að sleppa formerkjunum í veldisvísinum og deila í 1. Einnig má segja að það að hefja tölu í mínus fyrsta veldi kalli fram margföldunarandhverfu $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \boxed{10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001}$$

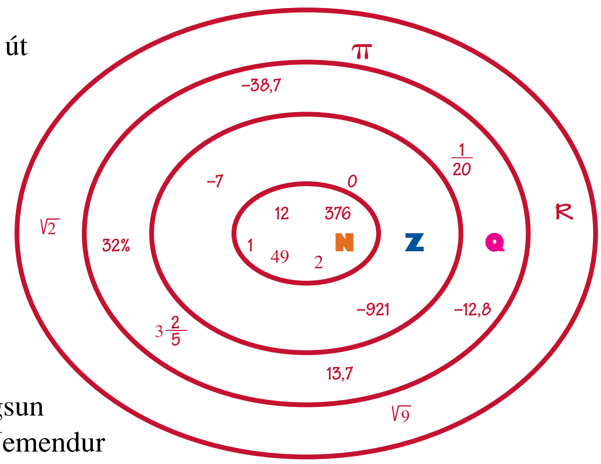
Veldi með neikvæðan veldisvísi má einnig skoða sem endurtekna deilingu með veldisstofninum, samanber $3^{-5} = 1 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}$.

Veldarithåttur gerir það einfaldara að lesa úr tölum sem annars þyrfti að skrifa með mjög mörgum tölustöfum og átta sig á stærð þeirra. Það er til dæmis mun auðveldara að bera saman mjög stórar tölur ef þær eru skráðar á staðalformi. Tala er skrifuð á staðalformi ef hún er skráð sem margfeldi af tölu milli 1 og 10 og veldis af tíu. Þannig mætti skrá 1000 sem $1 \cdot 10^3$ og 1500 sem $1{,}5 \cdot 10^3$. $\frac{1}{1000}$ væri þá skráður $1 \cdot 10^{-3}$.

| Rithåttur | Hundruð | Tugir | Einingar | Tíundu hlutar | Hundraðs-hlutar | Þúsundustu hlutar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tugabrot | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
| Almenn brot | $\frac{100}{1}$ | $\frac{10}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ |
| Veldi af 10 | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ |

Ein leið til að skrá stærð tölu er að nota tölugildi. Þá er í raun verið að skrá fjarlægð frá núllpunkti talnalínunnar. Ef farið er fimm einingar til hægri frá 0 er komið að tölunni 5. Ef hins vegar eru farnar fimm einingar til vinstri frá 0 er komið að tölunni –5. Í báðum tilfellum er farin jafnlöng vegalengd. Þær hafa sama tölugildi. Þetta er skráð, $|+5| = |-5| = 5$

## Talnamengi




Nemendur þurfa að dýpka og víkka út skilning sinn á hugtökum um tölur. Náttúrlegar tölur eru notaðar við talningu og til að lýsa röð. Þegar stærðir eru mældar og við útreikninga kemur upp þörf fyrir fleiri tölur, eins og brot og óræðar tölur. Mikilvægt er að átta sig á hvað einkennir ólíkar gerðir talna. Útvíkkun á talnasviði sem felur í sér brot og neikvæðar tölur er allt öðru vísi hugsun en að vinna með stærra talnasvið. Nemendur þurfa að endurskoða skilning sinn á hugtakinu tala.
Útvíkkun á talnamengi úr náttúrlegum tölum yfir í mengi heilla talna gerir það að verkum að hægt er að leggja saman og draga frá án vandræða. Þegar deilt er kemur oft fram afgangur og til þess að hægt sé að skipta honum þarf að nota brot eða víkka talnamengið út í mengi ræðra talna. Brot eru skráning á hlutföllum og því kalla þau á nýja hugsun um tölur. Það kemur í ljós að ekki er hægt að skrá alla punkta á talnalínu með því að nota brot. Það þarf enn frekari útvíkkun. Með óræðu tölunum þéttist talnalínan og verður samfelld.
Saman eru öll þessi talnamengi í mengi rauntalna (R).

## Náttúrlegar tölur (N)

Þetta eru þær tölur sem notaðar eru til að telja hluti. Núllið er ekki talið með náttúrlegum tölum. Ekki eru allir stærðfræðingar sáttir við það en í dag er í flestum stærðfræðibókum miðað við að náttúrlegar tölur séu heilar, jákvæðar tölur. Þetta getur verið gaman að ræða við nemendur. Mengi náttúrlegra talna hefur ákveðnar takmarkanir þegar kemur að reikningi. Samlagning og margföldun eru aðgerðir í mengi náttúrlegra talna en svör við frádráttar- og deilingadæmum er ekki alltaf að finna í mengi náttúrlegra talna.

## Heilar tölur (Z)

Í mengi heilla talna felast allar heilar tölur, þ.e. náttúrlegar jákvæðar tölur, neikvæðar tölur og núllið. Lengi vel var reiknað án þess að nota núll. Ekki er vitað nákvæmlega hvenær núllið var fundið upp en talið er að það hafið verið á Indlandi á árunum 100 f. Kr. til 150 e. Kr. Núllið breytti möguleikum á að skrá stærðir og styrkti skráningu í sætiskerfi.

Neikvæðar tölur áttu lengi erfitt uppdráttar. Ýmsum stærðfræðingum fannst þær ekki vera tölur. Þörfin fyrir neikvæðu tölurnar kom þó sterkt fram í tengslum við lausnir á jöfnum. Sem dæmi má nefna að eina lausn jöfnu eins og $18 + 2x = 14$ er $x = –2$. Neikvæðar tölur eru notaðar í ýmsum þáttum daglegs lífs, t.d. þegar gera á grein fyrir hitastigi og viðskiptastöðu. Neikvæðar tölur eru skilgreindar með eftirfarandi fullyrðingu.

Fyrir hverja tölu a er til mótsvarandi tala $–a$ sem er þannig að $a + (–a) = 0$

Mínustáknið er notað til að sýna að um neikvæða tölu sé að ræða. Það getur vafist fyrir nemendum að það sé notað bæði sem formerki og aðgerðarmerki. Talan –5 er mótsvarandi tala fyrir 5 og 5 er mótsvarandi tala fyrir –5. Hver neikvæð tala á sér mótsvarandi jákvæða tölur sem þýðir að $– (–5)$ hlýtur að samsvara 5. Almennt má segja að $– (–a) = a$. Margföldun jákvæðra og neikvæðra talna er tekin fyrir seinna í þessari bók í kaflanum um talnameðferð.

## Ræðar tölur (Q)

Með því að nota ræðar tölur má skrá stærðir af mun meiri nákvæmni en ef aðeins eru notaðar heilar tölur. Skilgreina má ræða tölu sem tölu sem skrá má með almennu broti $\frac{a}{b}$ þannig að a og b séu heilar tölur $\neq 0$. Mengi ræðra talna er táknað með Q. Tvær ræðar tölur eru jafngildar ef og aðeins ef þær má skrá sem jafngild almenn brot. Hverja ræða tölu má skrá á marga vegu, t.d. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$. Brotatöflur eru góðar til að skoða þetta. Dæmi um slíkar töflur má finna á heimasíðu námsefnisins undir *Eyðublöð*.

## Óræðar tölur

Brot liggja þétt á talnalínunni en samt eru til fjarlægðir sem ekki er nákvæmlega hægt að gefa upp með brotum. Þegar Pýþagóringarnir uppgötvuðu þetta breytti það miklu um heimspeki þeirra um rúmfræðilegar stærðir. Slagorð þeirra var: *Allt er tala*. Í því felst að allar stærðir megi skrá sem heilar tölur eða hlutfall milli heilla talna, þ.e. brot. Gríski stærðfræðingurinn Pýþagóras var fæddur á eyjunni Samos 570 fyrir Krist. Hópur vísindamanna og heimspekinga sem lögðu stund á stærðfræði söfnuðust saman í kringum Pýþagóras og mynduðu samfélag – Pýþagóringa. Talið er að sá sem uppgötvaði að ekki væri hægt að skrá allar lengdir línustrika með almennu broti hafi heitið Hippasus. Áhugavert getur verið að segja nemendum meira frá uppruna talnanna. Í bók Jóns Þorvarðarsonar (2005) *Og ég skal hreyfa jörðina* og á ýmsum vefslóðum um sögu stærðfræðinnar má finna margs konar fróðleik um tölur og talnaritun.

Nemendur hafa fengist við tölur alla ævi. Þeir hafa beitt reikniaðgerðum og þekkja meginhugmyndir á bak við ýmsar reiknireglur, svo sem víxlreglu, tengireglu og dreifireglu. Nemendur þurfa að tengja saman þá þekkingu og þekkingu um talnamengi. Í *Átta–10, 3* er haldið áfram að fást við þetta efni í köflunum *Algebra* og *Talnameðferð*.

## Kennsluhugmyndir

Í kaflanum eru viðfangsefni þar sem fengist er við tölur og ritháttur þeirra. Sérstök áhersla er á stórar tölur og smáar og því er kjörið að byrja á því að fá fram hugmyndir nemenda um hvað sé stór tala og hvað sé lítil tala. Nemendur geta fengið það verkefni að finna slíkar tölur í bókum, dagblöðum eða tímaritum. Þá gefst tækifæri til umræðna um slíkar tölur og æfing í að lesa þær. Í eðlisfræði og stjörnufræði er notað mjög stórt talnabil og í fjármálaheiminum má finna mörg dæmi um stórar tölur. Til þess að skilja slíkar tölur er gott að hafa viðmið. Í kaflanum er unnið með Nóaflóðið og þar er klukkustund og rúmkílómetri notað sem viðmið. Kjörið er að nemendur búi til rúmmetra til að átta sig á stærð hans. Einnig er áhugavert að skoða meðalúrkomuna á því landsvæði sem nemendur búa á og bera saman við Nóaflóðið.

Í veðurfarsgögnum frá Veðurstofu Íslands má t.d. lesa:

> Janúar 2006
> Úrkoma í Reykjavík mældist 153 mm, tvöföld meðalúrkoma janúarmánaðar og mesta úrkoma í janúar frá 1947, en hún var þó aðeins lítillega minni í nokkrum öðrum mánuðum á tímabilinu – síðast 1972.
>
> Úrkoma á Akureyri mældist 27 mm – helmingur meðalúrkomu, en allmörg nýleg dæmi eru um minna – síðast 2001.
>
> Úrkoma í Akurnesi mældist 266 mm.
>
> Maí 2006
> Úrkoma í Reykjavík mældist 33 mm og er það um 75% meðalúrkomu, á Akureyri mældist úrkoman 39 mm sem er ríflega tvöföld meðalúrkoma í maí. Úrkoman í Akurnesi mældist 88 mm.

# 8-tíu

Sætin í tugakerfinu fá nöfn á þriggja sæta fresti eftir að þúsundi er náð. Í töflu á bls. 4 koma fram nokkur heiti. Í fréttum heyrast oft hugtökin milljón og milljarður. Þekking á stórum tölum og heitum þeirra þarf því að vera hluti af almennri menntun Íslendinga.

Í heiminum í dag er víðast hvar stuðst við tugakerfi þegar fjöldi og stærðir eru skráðar. Flestir nota indó-arabíska tölustafi. En það er þó ekki algilt, í Austur-Asíu eru t.d. notuð talnatákn sem eru sprottin af sama stofni og bókstafir sem þar eru notaðir. Á blaðsíðu 5 eru gefin nokkur dæmi um öðru vísi skráningu á fjöldanum 9  . Skemmtilegt er að skoða hvernig skráning á fjölda verður ef miðað er við sætiskerfi með aðra grunntölu en 10. Að lokinni rannsókn á fimmundarkerfinu er áhugavert að skoða hvaða tölur eru heppilegar sem grunntölur og velta upp spurningunni af hverju fjöldinn tíu skyldi hafa verið valinn sem grunneining í okkar sætiskerfi. Ýmsum þykir þessi fjöldi ekki heppilegur því fáar tölur ganga upp í tíu og finnst að tólf hefði verið heppilegri fjöldi. Í Bretlandi var tólf lengi notað sem viðmið og enn-þá er ýmsu pakkað í pakkningar með sex eða tólf hlutum saman. Fjöldinn 60 hefur líka verið notaður sem viðmið. Unglingar hafa oft gaman að því að grufla og velta fyrir sér hvað ef spurningum. Hér gefst því gott tækifæri til þess og er kjörið að þeir ræði þetta í litlum hópum og finni rök fyrir þeirri grunntölu sem þeim þætti heppileg í sætiskerfi.

Hópverkefnið á blaðsíðu 5 snýst um rannsókn á tíðni tölustafa. Mörgum þykir einkennilegt að eftir því sem tölustafir í tölu verða fleiri fjölgar þeim tölum hlutfallslega sem innihalda hvern einstakan tölustaf. Nemendum er ætlað að rannsaka þetta saman og velta fyrir sér hvernig megi rökstyðja þetta. Gott getur verið fyrir þá að búa til töflu og skrá tölur á tilteknu bili. Þó getur nægt fyrir þá að rýna í töfluna sem gefin er upp.

Á blaðsíðum 6–8 eru æfingadæmi um veldi. Í glósubókum eru textar sem ástæða er til að leggja áherslu á að nemendur lesi. Gott getur verið að ræða við nemendur í minni hópum og tryggja þannig að allir glími við einhvern texta og ræði merkingu hans. Núllta veldið er kynnt til sögunnar en því hafa nemend-ur ekki kynnst áður. Einnig er sýnt hvernig hefja má í veldi með því að nota vasareikni. Það er mismunandi eftir vasareiknum hvernig veldatakkinn lítur út og þurfa nemendur því að skoða vasareikna sína. Í *Word-forritinu* er aðgangur að vasareikni þar sem reikna má veldi. Það þarf endilega að benda nem-endum á þessa leið til að finna gildi velda.

Tugveldi henta vel til að skrá stórar eða litlar tölur. Nemendur kynnast tugveldum bæði þar sem veldisvísirinn er jákvæð og neikvæð tala. Staðalform er notað í ýmsum vísindum og er gott að nota vasareikninn eða önnur reiknitæki til að skoða hvernig skráning á slíkum tölum er gerð á mismunandi hátt. Nemendur ættu að geta unnið blaðsíður 9–11 nokkuð sjálfstætt með hvatningu til að skoða einkenni staðalforms og velda með neikvæðan veldisvísi.

Á blaðsíðu 12 og 13 er saga um veldi af 2. Nemendur gætu lesið söguna í litlum hópum og síðan unnið verkefnið saman. Gott væri að þeir fengju frjálsar hendur um úrvinnslu og fyndu eigin viðmið til að sýna magn hveitikorna. Veldi af 2 eru mikilvæg í tölvuiðnaðinum. Einhverjir nemendur gætu haft áhuga á að kynna sér hvernig veldi af 2 er notað þar. Einnig er hér kjörið tækifæri til að skoða fleiri sögumola úr stærðfræðinni.

Einn af megináhersluþáttum kaflans er hugmyndin um talnamengi. Nemendur hafa kynnst margs konar tölum en hér er unnið með það hvernig flokka má tölur í undir- og yfirflokka og skoðuð einkenni í hverju mengi. Mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir að talnasviðið stækkar og verður fíngerðara. Mengi náttúrlegra talna er þrengsta talnamengið og það er hlutmengi í öðrum talnamengjum. Nemendur þurfa að lesa sér til um talnamengin og skrá hjá sér einkenni hvers talnamengis. Gott getur verið að þeir búi til veggspjöld sem sýna samband talnamengjanna, þar sem fram koma skilgreiningar á hverju mengi og dæmi um tölur í hverju mengi. Ræða þarf um að það skipti máli þegar reiknað er að gera sér grein fyrir hvert grunnmengið er.

Í lok kaflans er hugtakið tölugildi skoðað. Notuð er tenging við talnalínu og þar skoðuð fjarlægð frá núllpunkti. Heppilegt er því að nota talnalínu bæði þegar skoðuð eru talnamengi og tölugildi.

Lokaverkefnið í kaflanum er kjörið að nemendur vinni einir, t.d. heima. Þeir geta síðan rætt saman tveir til fjórir og borið saman bækur sínar. Hver hópur getur svo kynnt hvað það var sem allir lærðu nýtt eða valið tvö til þrjú atriði sem þeir vilja nefna. Þannig skapast góður umræðugrundvöllur um efni kaflans. Meginviðfangsefni kaflans hafa verið stórar tölur og smáar, veldi og talnamengi. Hlutverk kennarans er að beina athyglinni bæði að inntaksþáttum og því hvernig nemendur takast á við námið og hvaða leiðir þeim finnast góðar þegar þeir leita lausna. Hvetja þarf nemendur til að leita að reglum og velta fyrir sér samhengi en einnig til að festa í minni einkenni og heiti talnamengja.

# Rými

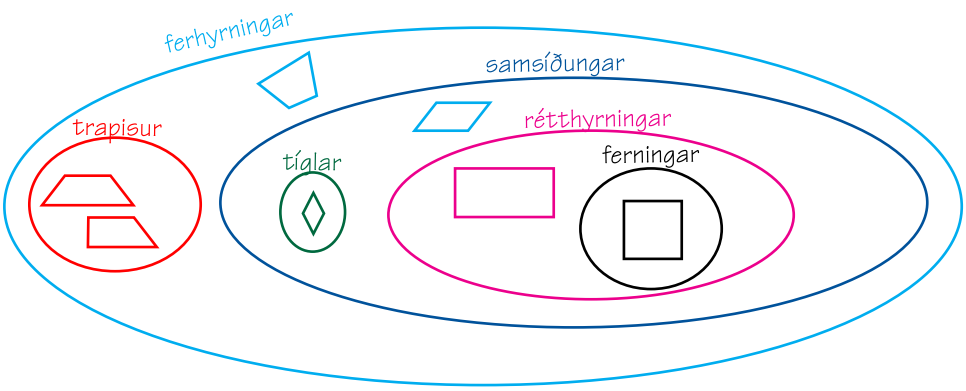
**Inntak**
Markmið að nemendur:
- Þekki einkenni tvívíðra og þrívíðra forma.
- Kynnist ýmsum gerðum margflötunga og einkennum þeirra.
- Kynnist reglu Eulers um samband milli fjölda brúna, horna og flata í reglulegum margflötungum.
- Læri að finna rúmmál og yfirborðsflatarmál ýmissa réttra strendinga.
- Nái valdi á rúmmálsmælieiningum og átti sig á tengslum á milli þeirra.
- Kynnist því hvernig ná má fram þrívíddaráhrifum í teikningum.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:
- Kynnist þáttum úr sögu stærðfræðinnar.
- Fáist við verkefni þar sem notuð er tölvutækni til að leysa verkefni úr daglegu lífi.
- Þjálfist í að skilgreina hugtök, svo sem hugtakið reglulegur margflötungur og réttur strendingur.
- Rökstyðji niðurstöður sínar og lýsi lausnaleiðum af nákvæmni.
- Nái valdi á að hanna og teikna þrívíða hluti.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í þessum kafla er megináhersla á þrívíð form, eiginleika þeirra og hvernig finna má rúmmál tiltekinna þrívíðra forma.

Byrjað er á að rifja upp hugtök sem notuð eru um tvívíð form þar sem þau eru notuð til að lýsa hliðarflötum þrívíðra forma. Hugtakið reglulegur hyrningur er tekið til skoðunar og einnig mismunandi gerðir ferhyrninga og eiginleikar þeirra. Allt eru þetta hugtök sem nemendur hafa kynnst áður en engu að síður er mikilvægt að kanna skilning þeirra á þessum hugtökum og skerpa ef þörf krefur. Nemendur ættu að þekkja og geta skilgreint hugtök eins og ferhyrning, ferning, samsíðung, tígul og trapisu og átta sig á hvernig flokka má ferhyrninga í undir- og yfirflokka.

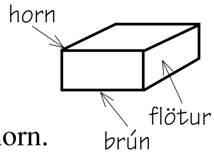


Rétt er að geta þess að skilgreining á hugtakinu trapisa virðist nokkuð á reiki. Sumir fræðimenn skilgreina trapisu þannig að trapisa sé ferhyrningur með tvær mótlægar hliðar samsíða og að það sé eina skilyrðið. Það felur í sér að samsíðungur, rétthyrningur og ferningur teljast líka trapisur (Sjá umfjöllun á vísindavefnum um hvað er trapisa http://www.visindavefur.is). Í flestum kennslubókum er þó notuð þrengri skilgreining þar sem gert er ráð fyrir að tvær og aðeins tvær mótlægar hliðar í trapisum séu samsíða. Er það einnig gert í þessu námsefni. Nemendur ættu einnig að þekkja hugtök um þríhyrninga eins og jafnhliða, jafnarma og rétthyrnda þríhyrninga og geta gert greinarmun á marghyrningum sem eru reglulegir og þeim sem eru það ekki. Á Netinu eru víða lítil forrit með pinnabretti sem gott er að nota til að kanna eiginleika marghyrninga og skilgreiningar þeirra (http://standards.nctm.org/document/eexamples/).

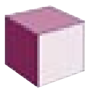
Í tvívíðri rúmfræði gegna reglulegir marghyrningar mikilvægu hlutverki en í þrívíðri rúmfræði er sjónum m.a. beint að reglulegum margflötungum. Evklíð sýndi fram á að eingöngu er hægt að búa til fimm (úthyrnda) reglulega margflötunga. Þeir eru oft kenndir við Platón en hann hafði mikið dálæti á þeim og tengdi þá við frumkraftana í alheiminum. Fjórflötungurinn táknaði eld, sexflötungurinn jörð, áttflötungurinn loft og tuttugflötungurinn vatn. Tólfflötungurinn var síðan notaður sem tákn alheimsins. Nemendur hafa kynnst reglulegu margflötungunum áður og ættu að þekkja heiti þeirra og eiginleika.

Til eru margar gerðir af margflötungum og hér eru nokkrar mikilvægar skilgreiningar fyrir kennara.

Margflötungur er þrívíður hlutur sem afmarkast af sléttum marghyrningum. Marghyrningarnir sem mynda margflötunginn eru kallaðir fletir. Þar sem tveir fletir mætast kallast brún og þar sem þrír eða fleiri fletir mætast kallast horn.

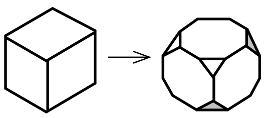



Reglulegur margflötungur er margflötungur sem afmarkast af reglulegum marghyrningum sem allir eru sams konar og öll horn eru jafn stór.

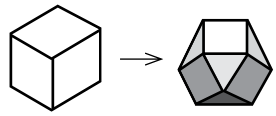



Þegar margflötungum er lýst er mikilvægt að beina sjónum að lögun hliðarflata, fjölda brúna, stærð horna og úr hvaða marghyrningum þau myndast. Í sumum tilvikum er líka horft á afstöðu hliðarflata hvers til annars, m.a. þegar fjallað er um strendinga.

Ef tekinn er teningur og hornin skorin af honum þannig að hliðarnar verði reglulegur átthyrningur verða skurðfletirnir reglulegir þríhyrningar. Þannig fæst hálfreglulegur margflötungur. Allir hliðarfletir eru reglulegir margflötungar en bara ekki af einni gerð og öll horn verða jafn stór.



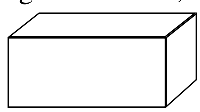
Ef tekinn er teningur og hornin skorin af þannig að farið er inn að miðju hverrar hliðar myndast annar hálfreglulegur margflötungur. Til eru 13 hálfreglulegir margflötungar og eru þeir oft kenndir við Arkímedes.



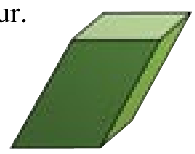
Eins og fram kemur í kaflanum sýndi Leonard Euler fram á reglu sem gildir um alla úthyrnda margflötunga. Reglan segir að ef fjöldi brúna er dreginn frá fjölda horna og fjölda flata er síðan bætt við verði útkoman tveir $H - B + F = 2$. Regluna má líka setja fram á þennan hátt: $H + F = K + 2$. Auðvelt er, með því að skoða reglulega margflötunga, að leiða rök að því að reglan gildi um þá og hafa nemendur gert það áður (*Geisli 2*). Erfiðara er að sýna fram á að hún gildi um alla margflötunga. Með athugunum á hvers kyns margflötungum má finna má rök fyrir því. Mikilvægt er þó að nemendur átti sig á því að það telst ekki sönnun á því að reglan gildi almennt. Þeir geta á grundvelli athugana sinna eingöngu fullyrt að reglan gildi um þá margflötunga sem þeir hafa athugað.

Til er margs konar efniviður sem nota má til að búa til margflötunga. Má þar nefna Polydron-kubba, Zome-kerfið (http://www.zometool.com/) og Geometrics. Einnig má búa til margflötunga úr pappaformum, tannstönglum og blómavír svo nokkur dæmi séu nefnd. Á Netinu má finna smáforrit sem gera manni kleift að skoða reglulega margflötunga og eiginleika þeirra. Á vefnum **National Library of Virtual Manipulatives** http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html eru þrjú forrit sem heita *Platonic Solids, Platonic solids – Duals og Platonic solids – Slicing og undir Wisweb* á vef Freudentahlstofnunarinnar http://www.fi.uu.nl er að finna forritin Cut outs og Drawing in Polyhedra.

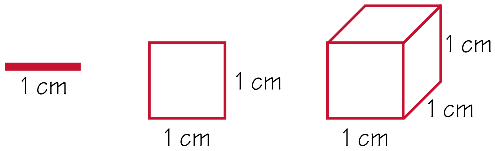
Strendingar eru margflötungar með sams konar endafleti sem eru marghyrningar. Endafletirnir eru samsíða og kallast þeir oft grunnfletir í strendingnum. Hliðarnar eru samsíðungar eða, ef um rétta strendinga er að ræða, rétthyrningar. Kassinn á myndinni er réttstrendingur. Grunnflöturinn er rétthyrningur og hliðarnar rétthyrningar sem mynda 90° horn við grunnflötinn. Strendingurinn er því réttur strendingur.



Réttir strendingar eru yfirleitt kenndir við lögun grunnflata. Strendingurinn á myndinni hér til hliðar er hins vegar ekki réttur strendingur þar sem hliðar hans mynda ekki 90° horn við grunnflötinn. Hann er engu að síður strendingur.



Mælieiningar sem notaðar eru til að mæla stærð flata og rúmmáls eru yfirleitt grundvallaðar á ákveðinni lengdareiningu. Ef gengið er út frá lengdareiningunni sentímetra má búa til fersentímetra og rúmsentímetra.




Á sama hátt má ganga út frá lengdareiningunni metra og búa til mælieiningarnar fermetra og rúmsentímetra. Í raun má nota hvaða lengdareiningu sem er en algengast er að rúmmál sé mælt í rúmsentímetrum eða rúmmetrum. Nauðsynlegt er að gefa rúmmálseiningunni rúmdesímetra gaum og tengslum hennar við rúmmálseininguna lítra.

Þegar finna á rúmmál réttra strendinga er grundvallaratriði að nemendur átti sig á að til að finna rúmmálið þarf að finna flatarmál grunnflatarins og margfalda það síðan með hæðinni. Lögð er áhersla á þetta atriði í kaflanum. Þegar kemur að því að finna rúmmál sívalninga sem líka má segja að séu réttir strendingar gildir sama grunnhugmynd. Finna þarf flatarmál grunnflatarins og margfalda með hæðinni.

Rúmmál rétts strendings er flatarmál grunnflatar margfaldað með hæðinni. Þetta má setja fram með reglunni $\boxed{R = G \cdot h}$ þar sem R táknar rúmmál strendings, G flatarmál grunnflatar og h hæð strendingsins.

Góður skilningur á gerð og eiginleikum margflötunga ætti að gera nemendum auðvelt að fást við hugtök eins og yfirborðsflatarmál. Nemendur hafa skoðað úr hvaða formum margflötungar eru myndaðir. Ef finna á stærð yfirborðs þeirra ætti það að vera einfalt enda byggist það á að finna flatarmál allra þeirra flata sem mynda margflötungana. Aðalatriðið er að nemendur átti sig á hvað er yfirborð og að þeir kunni að reikna flatarmál mismunandi marghyrninga en það er viðfangsefni sem þeir hafa oft fengist við áður. Einnig þurfa nemendur að átta sig á að yfirborðsflatarmál er einungis mæling á stærð yfirborðs og að yfirleitt þarf mun meira efni til að búa til og klæða margflötunga því alltaf má reikna með að eitthvert efni þurfi í samskeyti.

Þegar fengist er við útreikninga á rúmmáli og yfirborðsflatarmáli er gott að nota töflureikni. Þá þurfa nemendur að skilgreina sjálfir reglur og þrep sem fara þarf eftir til að leysa viðfangsefnin. Þegar um sams konar margflötunga er að ræða má síðan oft nota sömu forskriftir en breyta tölum. Einnig er gott að nota töflureikni til að skoða samhengi milli breytinga á hliðarlengdum og rúmmáli.

Í lok kaflans eru nokkur verkefni þar sem nemendur fást við fjarvíddarteikningar. Með því að fást við fjarvíddarteikningar fá nemendur betri tilfinningu fyrir rými og því hvernig sýna má rými og fjarlægðir á mynd.

## Kennsluhugmyndir

Þegar fengist er við rúmfræðileg viðfangsefni, og sérstaklega þrívídd, er nauðsynlegt að nemendur fái tækifæri til að vinna með hluti, teikna, kanna, rannsaka, ræða og skrá.

Rétt er að byrja þennan kafla á því að ræða um marghyrninga og einkenni þeirra eins og lagt er upp í fyrstu verkefnunum. Nemendur geta byrjað á því að teikna hring og skipt ummáli hans upp í 6 hluta og kannað hvaða reglulegu hyrninga má búa til út frá honum. Einnig mætti nota pinnabrettisforrit eða pinnabretti og biðja nemendur um að búa til reglulega hyrninga á það. Hvaða reglulegu hyrninga er hægt að búa til með pinnabretti og hvers vegna? Væri hægt að búa til fleiri ef grunnurinn væri þríhyrninganet en ekki rúðunet? Nokkuð auðvelt er að búa til reglulega hyrninga út frá sexhyrningi eða ferningi, svo sem þríhyrning, átthyrning og tólfhyrning, en mun erfiðara er að búa til hyrninga þar sem fjöldi hornanna er oddatala ef undan er skilinn þríhyrningurinn. Mestu máli skiptir að nemendur átti sig á að **reglulegur hyrningur** er með **allar hliðar jafn langar** og **öll horn jafn stór** og að þeir geti teiknað af nokkurri nákvæmni reglulegan þríhyrning, ferhyrning (ferning), sexhyrning og átthyrning.

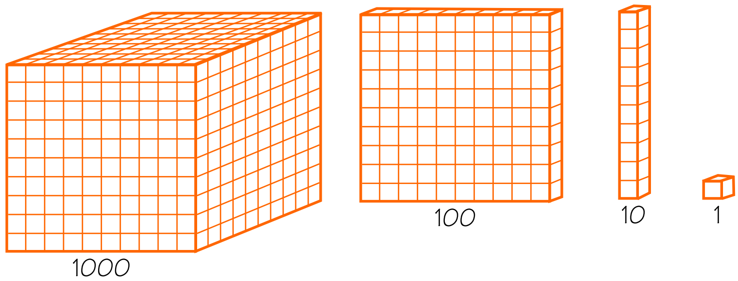
Þegar nemendur teikna mismunandi gerðir af ferhyrningum er ástæða til að gera kröfur um nákvæmni og vandvirkni.

Því næst geta nemendur kannað reglulega margflötunga og eiginleika þeirra. Þó nokkur stuðningur ætti að vera af myndum í bókinni er æskilegt að nemendur geti líka handleikið formin og helst búið þau til, t.d. úr Polydrone-kubbum, pappaspjöldum eða með Zome-kerfinu. Einnig er víða hægt að fá verpla sem eru reglulegir margflötungar. Á blaðsíðu 23 eru þrjú hópverkefni en einnig mætti vinna verkefni á blaðsíðu 22 í hópum og skipta þessum verkefnum á milli nemenda í bekknum eða leyfa þeim að velja sér eitt eða tvö þeirra. Nemendur þurfa að gera á einhvern hátt grein fyrir þeim athugunum sem þeir gera í hópvinnunni.

Til þess að nemendur átti sig betur á rúmmáli og yfirborðsflatarmáli formanna í dæmi 12 geta þeir klippt þau út af eyðublöðum og brotið þau saman. Ef þeir gera það geta þeir mælt þau og reynt að reikna út rúmmálið og yfirborðsflatarmálið út frá mælingum sínum. Það að mæla og reikna út rúmmálið gæti verið verkefni fyrir getumeiri nemendur meðan áherslan hjá öðrum væri eingöngu að átta sig á meginhugmyndinni, sem er sú að finna þurfi flatarmál grunnflatar og margfalda það síðan með hæðinni.

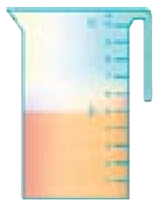
Dæmin efst á blaðsíðu 27 beina sjónum nemenda að því að í einum fermetra eru 10 000 fersentímetrar en í einum rúmmetra eru 1 000 000 rúmsentímetrar. Þetta er mjög mikilvægt atriði og nauðsynlegt er að ræða á hverju þessi mikli munur byggist. Í fyrra tilvikinu er um tvær víddir að ræða, lengd sem er 100 cm og breidd sem er 100 cm. Því verða þetta 10 000 $cm^2$. Í seinna tilvikinu bætist við þriðja víddin, hæðin, og þegar 10 000 $cm^2$ eru margfaldaðir með 100 cm verða það 1 000 000 $cm^3$.

Í dæmunum neðst á blaðsíðu 27 þurfa nemendur að finna bæði flatarmál og rúmmál hluta og tiltekins rýmis í umhverfi sínu. Ef kennarinn telur að nemendur hafi náð góðum skilningi á þessum hugtökum er ekki nauðsynlegt að þeir geri þessar mælingar en að öllum líkindum eru þó nokkrir nemendur sem þurfa á þessari æfingu að halda til að skynja vel hvað það er sem er í raun verið að mæla og átta sig á samhengi á milli mælinga í $m^2$ og $cm^2$ og $m^3$ og $cm^3$.




Þegar mælt er í rúmsentímetrum verða tölur sem út koma oft mjög háar og eiga nemendur oft erfitt með að sjá þessar stærðir fyrir sér. Í mörgum skólum eru til svokallaðir sætisgildiskubbar og þar er að finna teninga sem eru 1000 $cm^3$ eða 1 $dm^3$ og er gott að hafa þá til hliðsjónar svo nemendur eigi auðveldara með að sjá þessar stærðir fyrir sér.

Rúmmál vökva er yfirleitt mælt í lítrum eða skyldum einingum. Nemendur þurfa að geta breytt rúmsentímetrum og rúmdesímetrum í lítra, desílítra, sentílítra og millílítra. Þeir handleika daglega ýmis misstór ílát og sjálfsagt er að nota þau og skoða hve mikið þau taka í l, dl, cl, og ml í stað þess að vinna verkefni 35.



Verkefnin á blaðsíðu 29 veita nemendum þjálfun í rúmmálsútreikningum. Einnig reynir á skyn nemenda á það hvaða stærðir eru viðeigandi, t.d. á bakpokum og á farangursrýmum bifreiða.

Fyrir suma nemendur getur verið nauðsynlegt að gera mælingar á hlutum sem þessum til að fá einhverja tilfinningu fyrir því hvaða tölur kemur til greina að nota. Poki sem er 10 cm · 50 cm · 50 cm tekur til dæmis 25 000 $cm^3$ en hann myndi ekki henta vel sem bakpoki.

Sjálfsagt hafa einhverjir nemendur gaman af að velta fyrir sér rúmmáli búslóða og má benda þeim á að nota búslóðareikna sem finna má á heimasíðum flutningafyrirtækja. Skemmtilegt getur verið að bera reiknana saman og kanna hvort þeir nota sömu eða svipuð viðmið. Verkefnin á þessari blaðsíðu má vinna sem hóp- eða paraverkefni.

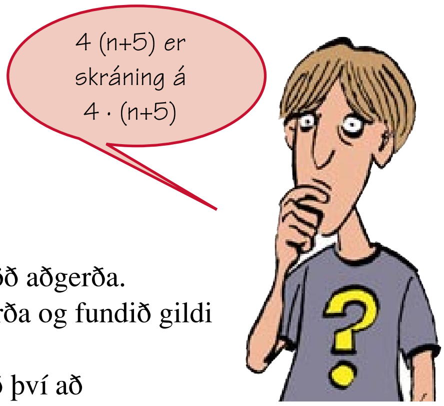
Í verkefninu á blaðsíðu 30–31 kynnast nemendur mælieiningum sem eru notaðar í Bandaríkjunum. Víða um heim eru notaðar aðrar mælieiningar en þær sem við notum. Nauðsynlegt er að bera eitthvert skyn á mælieiningar sem algengar eru í ríkjum sem við höfum mikil samskipti við og vita hvar finna má upplýsingar um þær. Á Netinu má finna fjölmörg forrit sem hjálpa manni að umreikna mælieiningar. Þau má finna með því að nota leitarorðið *converter*. Sem dæmi má nefna að í einu forriti eru möguleikar á að velja 300 mismunandi lengdareiningar http://www.onlineconversion.com/length_all.htm. Margar orðabækur og dagbækur hafa líka að geyma upplýsingar um algengar mælieiningar.

Í bókinni eru gefnar upp þær mælieiningar sem nemendur þurfa á að halda við lausn verkefnisins en sjálfsagt er að kynna fyrir þeim forrit á Netinu sem þeir geta nýtt sér. Sumir gætu haft gaman af að nota einhverjar af þeim mælieiningum sem þar er að finna og prófa að breyta stærðum sem þeir þekkja yfir í þær.

Verkefni 44–50 eru æfing í fjarvíddarteikningum. Mun einfaldara er að teikna út frá einum hvarfpunkti en tveimur eins og gert er í dæmum 49–50. Hér reynir líka á nákvæmni og vönduð vinnubrögð. Síðustu verkefni kaflans eru þrautir þar sem einnig reynir á þrívíddarskyn nemenda. Gott getur verið að búa til byggingarnar úr sentíkubbum þannig að nemendur eigi auðveldara með að sjá þetta fyrir sér.


NÁMSGAGNASTOFNUN 2006 – Kennsluleiðbeiningar – 09742

# Algebra




**Inntak**
Markmið að nemendur:

- Kynnist formlegum reglum um forgangsröð aðgerða.
- Geti notað stæður til að skrá samband stærða og fundið gildi þeirra miðað við tilteknar forsendur.
- Nái nokkru valdi á að einfalda stæður með því að draga saman líka liði, þátta og margfalda inni í sviga.
- Geti nýtt stæður og jöfnur til að leysa gátur og ýmis viðfangsefni úr daglegu lífi.
- Efli skilning sinn á eðli talna og deilanleika þeirra.
- Geti nýtt algebru til að leysa rúmfræðileg viðfangsefni.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:

- Styrki tök sín á stærðfræðilegum hugtökum og táknmáli stærðfræðinnar.
- Beiti nákvæmni við útreikninga.
- Æfist í að gera stærðfræðilegar rannsóknir og rökstyðja niðurstöður.
- Temji sér að skrá skipulega athuganir sínar og nýti þær til að greina samband og setja fram reglu.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í algebrukennslu er gott að benda nemendum á að tengja við og byggja ofan á þekkingu sína á tölum og reikniaðgerðum. Undirstaða fyrir algebrunám er að nemendur hafi lært að horfa á mynstur og einkenni þeirra þannig að þeir hafi beint sjónum sínum að því almenna í stað þess að einblína á að fá rétt svör. Það er góður grunnur að því að geta skilið og sett fram alhæfingar í algebru. Verkefni sem felst í að setja fram stæðu út frá talnaröð gefur nemendum tækifæri til að átta sig á hvernig nota má stæður til að skrá regluleika. Nemendur þurfa að ná góðu valdi á að setja fram einfaldar stæður.

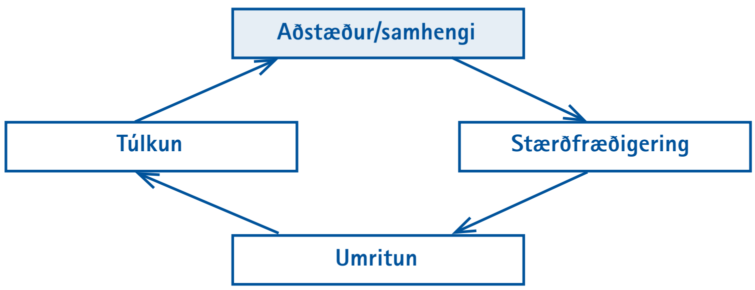
Þegar nemendur eiga að víkka út þá færni,sem þeir hafa í talnareikningi yfir í algebru þurfa þeir að:

- Kunna að tala um tölur án þess að reikna og gera sér grein fyrir því að tölur geta verið stórar, smáar, þekktar og/eða niðurstöður af rannsókn. Þeir þurfa að vita að tölur geta verið breytilegar.
- Geta gert grein fyrir og lýst útreikningum. Þeir þurfa að geta gefið slíkar lýsingar í orðum og með táknum og reglum.
- Vita að nota má fleiri en eina leið að niðurstöðu við útreikninga. Nemendur þurfa að vita að þeir geta notað annan útreikning eða ferli og fengið sömu niðurstöðu. Í algebru kallast þetta að umrita.

Í hefðbundinni sýn á stærðfræðikennslu hefur viðmiðið verið hrein stærðfræði, þ.e. að reikna og einfalda táknasamstæður, og að hún væri það sem allir þyrftu að ná valdi á. Áhersla hefur því verið lögð á að nemendur öðluðust góða þekkingu á ýmsum stærðfræðilegum aðferðum og táknunum. Slíka gerð þekkingar má kalla staðreyndaþekkingu. Í viðbót við þetta hefur verið talið að hver og einn þyrfti líka að ráða við færni sem tengist einföldun táknasamstæða og reikningi. Það sem hefur þótt árangursríkasta kennsla er að sýna og útskýra ákveðna aðferð og gefa nemendum síðan mörg sams konar dæmi með mismunandi tölum, táknum og reikniaðgerðum. Þegar nemendur svo seinna lenda í aðstæðum þar sem dæmagerðin er ekki eins og upphaflega gerðin sem notuð var þegar nemandinn var að tileinka sér færnina hefur verið talið að það þyrfti sérhæfða kennslu tengda við þessar nýju aðstæður.


Önnur leið er að beina í kennslunni sjónum að viðfangsefnum sem fá nemendur til að víkka og aðlaga eigin grunnhugmyndir að þeim nýjum aðstæðum sem viðfangsefnin kalla á. Þá er áhersla lögð á að nemendur rannsaki, leiti að samhengi og tengi við fyrri þekkingu. Stærðfræðigering fær töluvert rými því nemendur þurfa að fá fjölbreytt tækifæri til að glíma við hana til að ná valdi á henni. Það að túlka aðstæður yfir í stærðfræðileg tákn krefst þekkingar og skilnings. Þegar nemendur setja sjálfir fram táknasamstæðurnar er auðveldara fyrir þá að átta sig á hvaða merkingu algebran getur haft og hvernig hún getur nýst til að leysa ýmis vandamál. En þeir þurfa jafnframt tækifæri til að ná færni í að einfalda táknasamstæður og reikna.

Ef nota á algebru til að leysa vandamál felur það í flestum tilfellum í sér að fara þarf í gegnum ákveðið hringferli.




- Byrjað er á því að greina vandamálið og stærðfræðigera það. Í því felst að greina stærðfræðilegt samhengi í vandamálinu eða viðfangsefninu og tjá það samhengi með hjálp stærðfræðilegrar þekkingar og oftast með því að nota stærðfræðileg tákn.
- Næsta stig er að reikna eða einfalda, eða með öðrum orðum að breyta stærðfræðilega samhenginu eða táknasamstæðunni til að fá fram nýjar hliðar á tilvikinu sem unnið er með.
- Að lokum þarf að túlka hið nýja sjónarhorn og setja í það samhengi sem unnið var með þannig að hægt sé að nota það til að leysa upphaflega vandamálið.

Notkun algebru við lausn dæma sem í felst stærðfræðigering, reikningur/einföldun og túlkun á tilteknum aðstæðum má skoða með dæmi.

Verkefnið er:
Birgitta: Láttu mig fá 10 kubba og þá höfum við jafnmarga kubba?
Haukur: Ef þú lætur mig fá 10 kubba er ég með tvöfalt fleiri en þú.
Hve margar kubba var hvort þeirra með?

**Fyrsta stig: Stærðfræðigering**
Við byrjum á að gefa okkur að Haukur eigi x kubba og Birgitta y kubba.
Upplýsingarnar má þá skrá sem:
$x - 10 = y + 10$ og $x + 10 = 2\,(y - 10)$

**Annað stig: Umritun – einföldun og reikningur**

| | |
|---|---|
| $x - 10 = y + 10$ | það má umrita sem $x = y + 20$ |
| $x + 10 = 2\,(y + 10)$ gefur $x + 10 = 2y - 20$ | það má umrita sem $x = 2y - 30$ |
| Þar af leiðir að $y + 20 = 2y + 30$ | það má umrita sem $y + 50 = 2y$ |
| | eða $y = 50$. |

Ef $y = 50$ þá er $x = 70$ því $x = y + 20$

**Þriðja stig: Túlkun á aðstæðum miðað við stærðfræðilega útreikninga**
Í upphafi var fjöldi kubba Hauks skráður sem x. Hann er því með 70 kubba. Fjöldi kubba Birgittu var skráður sem y og hlýtur því að vera 50. Auðvelt er að skoða aftur viðfangsefnið og athuga hvort niðurstöður uppfylla skilyrðin sem sett voru.

Táknmál algebrunnar hefur tvenns konar hlutverk. Það er hentugt til að setja fram stærðfræðigeringu og skrá á þann hátt samhengi. Það er líka notað þegar á að einfalda eða reikna. Algebrutáknmálið er hentugt til að skoða samhengi milli stærða, bera saman og fá fram nýjar tengingar. Það gefur möguleika á að nýta algebru sem tæki til að leysa vandamál. Nemandinn þarf bæði að geta notað táknmálið til að tjá sig og hafa færni í að umrita. Hann þarf að ná hæfni á báðum sviðum því þekking á öðru sviðinu myndast ekki við það að æfa sig á hinu þó að sterk hugtakamyndun styðji auðvitað við uppbyggingu á færni og öfugt.

Táknmál stærðfræðinnar gerir kleift að skrá hugtök, stærðir og samband þeirra með einföldum táknum. Til að þess að geta beitt því þurfa nemendur að ná góðu valdi á skráningarmátanum, bæði með því að æfa sig að skrá og í að lesa úr táknasamstæðum. Ákveðnar hefðir hafa skapast í stærðfræðilegri skráningu. Til þess að geta stærðfræðigert og lesið úr táknasamstæðum þurfa nemendur að þekkja þessar hefðir. Ein þeirra er um forgangsröð aðgerða.

Forgangsröð aðgerða segir til um í hvaða röð skuli framkvæma útreikninga.

1 Reikna út úr svigum $\longrightarrow \dfrac{(80)}{2^2} + 12 =$

2 Veldi og rætur $\longrightarrow \dfrac{80}{4} + 12 =$

3 Margfölda og deila $\longrightarrow 20 + 12 =$

4 Leggja saman og draga frá $\longrightarrow 32$

Miðað er við að reiknað sé frá vinstri til hægri.

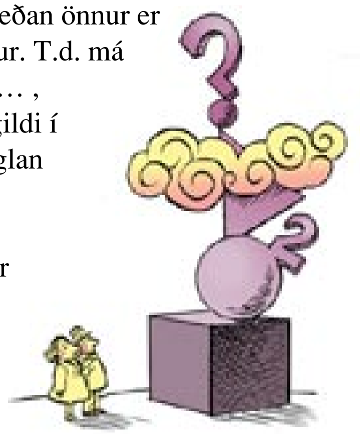
Nemendur þurfa að skoða áhrif sviga og átta sig á mikilvægi þeirra. Þeir þurfa að ná valdi á að margfalda inn í sviga og fella sviga niður. Þeir þurfa að geta einfaldað táknasamstæður og reiknað út. Það felur meðal annars í sér að draga saman líka liði, reikna út hvern lið fyrir sig og reikna liðina síðan saman.

Í kaflanum eru ýmis viðfangsefni þar sem nemendur fá tækifæri til að æfa sig í að skrá stæður út frá myndum og á sama hátt er unnið þegar skoðað er hvernig má þátta og breyta í liðastærð. Með því að finna flatarmál og ummál marghyrninga skoða nemendur bæði margföldun inn í sviga og þáttun. Einnig eru skoðuð viðfangsefni úr daglegu lífi og þá bæði fengist við að skrá stæður og jöfnur.

Bókstafir eru oft notaðir til að tákna breytur í stæðum og jöfnum. Breyta er stærð sem breytist t.d. eftir því hve mikið magn er keypt eða ef verð á einingu breytist. Breytan er táknuð með bókstaf sem getur verið staðgengill tiltekinnar tölu í jöfnu eða sambandi ef sett er fram stæða, svo sem $ax$. Slíka stæðu má t.d. nota til að finna verð á 5 kílóum af eplum. Þá er fundið gildi þessarar stæðu og miðað við að $a$ tákni magn og $x$ verð á kílógramm. Nemendur þekkja mörg dæmi um þetta sem gott er að ræða og æfa.

Bókstafi má nota til að sýna samband milli stærða þar sem einn bókstafur getur tekið ýmis talnagildi. Lausn jafna felst í að finna fyrir hvaða gildi bókstafanna jafnan er rétt. Bókstafir geta staðið fyrir eina eða fleiri tilteknar tölur. Bókstafirnir $x$ og $y$ eru oft notaðir í jöfnum og sú venja hefur skapast að líta á $x$ sem óháða breytu en $y$ sem háðu breytuna. Það þýðir að setja má inn hvaða gildi sem er fyrir $x$ og síðan er $y$ reiknað út frá því, samkvæmt þeirri jöfnu sem unnið er með. Í jöfnu geta þó verið margar breytur en samband milli þeirra er fast. Í raun getur hvaða breyta sem er verið óháð en hinar eru þá háðar henni. Ef um er að ræða ójöfnur getur bókstafurinn tekið óendanlega mörg gildi. Breytur/bókstafir eru líka notaðir til að tákna alhæfingu og samband í stærðfræði. Í ýmsum talnatáknunum getur ein stærð breyst meðan önnur er föst/fasti. Í slíkum tilfellum er breytunni gefinn bókstafur. T.d. má skrá talnarununa $2 \cdot 1 + 1, 2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 4 + 1, \ldots$, með táknuninni $2x + 1$ og til þess að sýna að víxlregla gildi í allri samlagningu, sama hvaða tölur um ræðir, er víxlreglan sett fram með bókstöfum, þ.e. $a + b = b + a$

Skoða þarf með nemendum að í stærðfræði eru bókstafir notaðir á fleiri vegu, t.d. getur 12m þýtt 12 metrar eða $12 \cdot m$. Við skráningu á hlutum í daglegu umhverfi er einnig stundum stytt. Til dæmis getur 12m táknað tólf melónur.



Skráning og venjur eru nokkuð ólíkar í algebru og reikningi. Í tölunni 57 er vísað í sætiskerfi (tugakerfi) með ósýnilegum + milli gildanna 50 og 7 (50 + 7) meðan 5a er ekki byggt á sætiskerfi á sama hátt heldur á að margfalda a með 5. Það er mjög mikilvægt að nemendur telji ekki að $2a + 3a = 5a$ megi útskýra með 2 apar + 3 apar = 5 apar. Í talnareikningi er oft mikil áhersla á svarið og nemendur skilja það. Niðurstöðu í algebruútreikningum eiga nemendur oft erfiðara með að skilja, eins og a + 7. Nemendur verða oft óánægðir með slík opin svör og því þarf að hjálpa þeim að skilja þau og skoða þau sem skráningu á sambandi stærða.

Annað frávik frá reikningi kemur fram þegar nota á jöfnur til að sýna samband milli stærða í texta. Í reikningi beinist athyglin að reikniaðgerðunum sem nota á til að leysa dæmin. Í algebru er meiri áhersla lögð á að vinna með það að skrá aðstæður en að leysa dæmi. Hvernig má leysa viðfangsefni eins og þetta?

> Þegar fjórum er bætt við tölu sem margfölduð hefur verið þrisvar sinnum með sjálfri sér fæst svarið 40. Finndu töluna.

Þegar þetta dæmi er leyst með beinum reikningi er reiknað aftur á bak en í algebru er reynt að tákna slíkt viðfangsefni með jöfnu: $3x + 4 = 40$. Í algebru er oft hugsað í öfuga átt miðað við þegar reiknað er.

Meginviðfangsefnið er að nemendur æfist í að beita táknmáli stærðfræðinnar til að skrá eigin skilning og til að átta sig á hvað er verið að skrá. Þannig geta þeir áttað sig á hvað notkun á táknmáli stærðfræðinnar gerir það einfalt og auðvelt að skrá samband stærða.

## Kennsluhugmyndir

Kaflinn byrjar á rannsóknarverkefni þar sem bæði er unnið með tölur og bókstafi. Viðfangefnið er að skoða samband á milli talna og summu þeirra með því að skoða T-form í hundraðtalnatöflu. Kjörið er að nemendur byrji á að glíma nokkrir saman við rannsóknina á T-forminu. Hvetja þarf þá til að setja fram tilgátur um reglur og prófa þær. Þetta verkefni má þróa áfram og skoða hvernig stæður koma fram ef tölunum í hundraðtalnatöflunni er raðað t.d. í 6 eða 4 dálka. Nota má spurningar í dæmum 1, 2 og 3 við þá skoðun.

Töfraferningar hafa lengi heillað mannfólkið og í dæmum 4–7 er sjónum beint að þeim. Á Netinu má víða finna gagnvirk forrit með töfraferningi. Dæmi um slíka slóð er: http://www.matematikk.org/elever/spillgalleri/index.html#. Nemendur geta prófað sig áfram með töfraferninga í tölvu í stað þess að glíma við dæmi 4 og 5. Í dæmum 6 og 7 er hins vegar unnið með stæður og rannsókn á hvort um töfraferning sé að ræða. Eina skilyrðið til að svo sé er að summa sé sú sama lárétt, lóðrétt og á ská. Í öllum þessum dæmum (1–7) er unnið samhliða með tölur og bókstafi.

Nemendur hafa áður fengist við að draga saman líka liði og þeir hafa líka áður skoðað forgangsröð aðgerða. Í dæmum 8–14 eru ýmis viðfangsefni þar sem nemendur sjá að það skiptir máli í hvaða röð er reiknað. Dæmi 9–11 gæti verið gott að kennari og nemendur skoðuðu saman. Dæmi 12–14 geta nemendur svo glímt við í litlum hópum. Að því loknu er gott að skoða glósubækur á blaðsíðu 38. Á eftir þessu fylgja svo æfingadæmi þar sem fengist er við að einfalda stæður og finna gildi stæða. Reynt var að hafa dæmin fjölbreytt þannig að nemendur æfðu bæði tæknina en líka að rökstyðja og sjá hið almenna. Mikilvægt er kennarinn sé vakandi fyrir því að ræða við einstaka nemendur og nemendahópa um viðfangsefnin og gott er að velja einhver dæmanna til að ræða í öllum nemendahópnum.

Á blaðsíðum 42–44 er fengist við að margfalda inn í sviga og þátta. Notuð er myndræn nálgun í gegnum ummál og flatarmál rétthyrninga. Áherslu ber að leggja á að tengja saman hið myndræna og óhlutbundna. Gott getur því verið að hvetja nemendur til að teikna upp myndir við dæmi 47–49.

Á blaðsíðum 45–46 eru stæður og jöfnur notaðar til að leysa viðfangsefni úr daglegu lífi. Nemendur gætu í framhaldi af vinnu við dæmin búið til dæmi úr eigin veruleika og lagt hver fyrir annan. Áherslu þarf að leggja á að nemendur skilji að þeir eru að skrá samband stærða með því að gefa hverri stærð nafn og nota síðan tölur og aðgerðarmerki til að skrá sambandið.

Verkefnið *Froskahopp* er dæmigert verkefni þar sem nemendur rannsaka, skrá niðurstöður sínar og eiga síðan að greina þá reglu sem niðurstöðurnar hvíla á. Gott er að þeir útbúi spilaborð og prófi að láta froska skipta um stað eftir uppgefnum reglum og telji hve margar færslur þarf. Þetta verkefni getur tekið töluverðan tíma. Draga þarf saman í lokin og skoða hvernig hin almenna regla lítur út. Verkefni 60–68 eru æfingaverkefni og geta kennari og/eða nemendur ákveðið hve mörg þeirra hver nemandi skuli taka.

Í lok kaflans eru nokkur dæmi sem snerta helstu atriði kaflans og reyna á færni í algebruútreikningum. Dæmi 76 felst í að margfalda saman tvo sviga og er það í fyrsta sinn sem nemendur sjá slíkt dæmi. Markmiðið er því fyrst og fremst að þeir velti fyrir sér hvernig fara má að og prófi sig áfram út frá þekkingu sinni á því að margfalda inn í sviga. Gott getur verið að benda þeim á að nýta sér að í a-lið eru eingöngu tölur.

# Jöfnur og gröf


**Inntak**
Markmið að nemendur:

- Þekki leiðir til að sýna samband stærða með orðum, jöfnum, töflum og gröfum (línuritum).
- Geti teiknað graf fyrsta stigs jöfnu.
- Þekki einkenni á jöfnu beinnar línu, svo sem hallatölu, og skurðpunkt við y-ás og geti sett fram jöfnu með því að skoða graf beinnar línu.
- Geti lýst staðsetningu með hnitum.
- Kynnist því hvernig lesa má lausn jöfnu af grafi hennar.
- Kynnist fallhugtakinu.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:

- Styrki tök sín á stærðfræðilegum hugtökum og táknmáli stærðfræðinnar.
- Átti sig á að oft má leysa sama viðfangsefnið á fleiri en einn veg.
- Noti jöfnur og gröf til að leysa viðfangsefni daglegs lífs.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Meginviðfangsefni kaflans er að skoða á hve fjölbreytilegan hátt má setja fram samband stærða og föll. Sérstök áhersla er lögð á að skoða hvernig má teikna og lesa af grafi beinnar línu.

Stæður eru skráning á stærð og jöfnur eru samsettar úr tveimur jafngildum stæðum sem standa hvor sínu megin við jafnaðarmerki. Jafngildar eru þær stæður sem gefa sömu niðurstöðu sama hvaða tölur eru settar í stað bókstafa. Í jöfnu geta verið ein eða fleiri óþekktar stærðir. Bókstafir eru notaðir til að tákna óþekktar stærðir í jöfnum og ójöfnum. Almennt má segja að það að leysa jöfnur felst í að finna fyrir hvaða tölu eða tölur bókstafirnir geta staðið. Jöfnur eru settar upp þannig að óþekktu stærðinni eða stærðunum eru gefin nöfn [g1]og síðan er hugsað eins og þessi stærð sé þekkt, og samband þekktu og óþekktu stærðanna skráð. Jöfnur eru leystar með því að umrita jöfnuna aftur og aftur í aðra jöfnu með það markmið að einfalda þannig að endirinn verði einföld skráning á gildi fyrir óþekktu stærðina eða stærðirnar.

Mikilvæg undirstaða fyrir skilning á jöfnum er að nemendur átti sig á merkingu jafnaðarmerkisins. Þegar nemendur sjá jafnaðarmerki líta þeir oft á það sem merki um að þeir eigi að gera eitthvað, framkvæma útreikninga og þá segir fólk $8 + 7$ eru 15. Í algebru er oft verið að skoða jafngildi. Þá er sagt $8 + 7$ jafngildir 15. Líta þarf á jafnaðarmerkið sem merki um að jafnt eigi að vera báðum megin við það, þ.e. jafngildar stæður. Jöfnur lýsa því sambandi stærða eins og stæður. Jafnan $7x + 11 = 13x – 19$ er því lýsing á sambandi stærða, hvor stæða lýsir sambandi og stæðurnar eru jafngildar. Þetta skiptir mjög miklu máli að nemendur skilji.

Lausn vandamáls verður oft einföld ef sett er fram jafna og hún leyst. Það krefst góðrar yfirsýnar og greiningar á vandamálinu að skrá samband stærðanna. Þegar nemendur leysa vandamál með því að setja fram jöfnur æfast þeir í að túlka og tjá sig með því að nota algebru. Jöfnur sem hafa eina óþekkta stærð öðru megin jafnaðarmerkisins má oft leysa með því að reikna til baka en þegar komin er óþekkt stærð báðum megin er mun þægilegra að einfalda fyrst. Allir þurfa að læra aðferðir eða leiðir til að leysa jöfnur.

Í samskiptum eru notuð mismunandi tákn. Þeim má gróflega skipta í tvo hópa, þ.e. myndræn tákn og orðatákn. Stærðfræðileg tákn eru mörg svipuð og orðatákn, svo sem tölustafir, aðgerðatákn og tákn fyrir breytur. Þau geta líka verið myndræn tákn og er þá átt við alls kyns myndir, teikningar, myndrit, skissur og þess háttar. Oft er gott að nota bæði táknformin til að gera tjáningu skýrari.

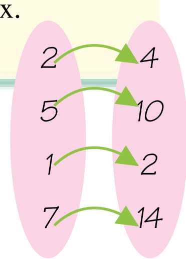
Einhver nytsamlegustu tengslin milli þessara tveggja gerða táknforma koma frá franska stærðfræðingnum og heimspekingnum René Descartes (1596–1650). Hann setti fram þá snjöllu hugmynd að tjá rúmfræðilega punkta í plani með talnapari og punkta í rými með þremur tölum. Seinna hlaut þessi aðferð nafnið hnitakerfi. Kartesísku hnitakerfi má lýsa þannig: Valdar eru tvær talnalínur og þær eru teiknaðar hornrétt hvor á aðra. Skurðpunkturinn er upphafspunktur og fær heitið 0,0. Ásarnir skipta planinu í fjóra hluta. Hver punktur í planinu fær talnapar sem segir til um staðsetningu punktsins út frá hvorum ási (mætti vera mynd til að sýna formerki í hverjum fjórðungi).

Hnitakerfið er notað í mismunandi samhengi í stærðfræði. Það er til dæmis notað í tölfræðilegri framsetningu, til að sýna mismunandi ferla og við myndræna framsetningu á jöfnu. Þessi ólíki notkunarmáti kemur fyrir sitt á hvað. Hnitakerfi er líka oft notað til að lýsa staðsetningu.

Sumar jöfnur eru föll. Fallhugtakið má skilgreina á fleiri en einn veg. Í kaflanum er það skilgreint þannig:

Föll tákna samband milli tveggja breytistærða. Önnur breytan kallast óháða breytan (oftast táknað með x) og hin háða breytan (oftast táknað með y). Ef óháðu breytunni er gefið tiltekið gildi má finna gildi háðu breytunnar.
Dæmi $f(x) = 2x$
Ef x fær gildið 5 verður gildi háðu breytunnar 10 $f(x) = 10$

Háða breytan er oft kölluð y. Skráningin $y = f(x)$ þýðir að y er fall af x.
Í stað þess að skrá jöfnur sem $y = 2x$ má því skrá jöfnuna sem $f(x) = 2x$.
y er fall af x ef hvert x-gildi gefur aðeins eitt y-gildi.




Í námsefninu er því stuðst við myndræna framsetningu bæði með mengjamynd og grafi. Einnig er hugtakið skilgreint með orðum og þarf að leggja áherslu á að ef um fall er að ræða getur hvert x-gildi aðeins haft eitt y-gildi. Með mengjamyndinni er sýnt að hvert gildi fyrir x getur aðeins passað fyrir eitt y-gildi.

Nemendur kynnast föllum í mismunandi samhengi í stærðfræðikennslunni. Þetta geta verið aðstæður (orð), jöfnur, gröf og gildistöflur. Föll koma víða fyrir og hefur sú framsetning að lýsa samhengi milli tveggja breytilegra stærða með falli orðið almennari eftir því sem tölvunotkun hefur orðið útbreiddari.

Þegar sambandi stærða eða föllum er lýst í orðum er lýsingin oft almennt og ekki mjög nákvæm. Jöfnur lýsa mjög nákvæmlega sambandi stærða. Sumar jöfnur eru föll. Föll sem formúlur eða reikniforskriftir eru mest notuð innan stærðfræðinnar en líka í ýmsum útreikningum í daglegu lífi og starfi, t.d. þegar skattayfirvöld gefa upplýsingar um útreikninga. Gröf eru góð leið til að lýsa falli. Auðvelt er að lesa x og y gildi og finna lausnir miðað við tiltekin x eða y gildi. Töflur eru heilmikið notaðar. Sem dæmi má nefna verðskrár og leiðakerfi. Margir líta ekki á töflur sem skráningu á falli en verð er til dæmis oft fall af þyngd.

Til að skoða betur hinar ólíku leiðir til að lýsa föllum er hægt að setja fram í töflu hvernig fara má á milli forma.

| Frá/til | Orð | Tafla | Graf | Jafna |
|---|---|---|---|---|
| Orð | | Mæling | Skissa | Reiknilíkan |
| Tafla | Aflestur | | Teikning | Aðlögun |
| Graf | Túlkun | Aflestur | | Grafaðlögun |
| Jafna | Endurþekking | Útreikningur | Teikning | |

Sjá nánar umfjöllun í Gjone. 1997[11]. Það er mikilvægt að nemendur geti farið á milli forma og ráði við að lýsa sambandi stærða á mismunandi hátt.

## Kennsluhugmyndir

Í upphafi kaflans er megináhersla lögð á að skoða hvernig skrá má samband stærða á fjóra ólíka vegu, þ.e. með orðum, í töflu, með jöfnu og í línuriti eða grafi. Mörgum hefur í gegnum tíðina reynst erfitt að leysa orðadæmi. Í þessum kafla glíma nemendur meðal annars við að æfa leiðir til að lesa hvaða upplýsingar eru gefnar og að hverju er leitað og hvernig nota má töflur, jöfnur og gröf þeirra til að leysa orðadæmi. Einnig ber að leggja áherslu á að velja þarf hverju sinni í hvaða formi setja skuli fram upplýsingar um samband stærða. Í hópverkefni á bls. 52 gefst kennaranum tækifæri til að ræða þessar fjórar leiðir við hópa nemenda og kanna skilning hvers einstaks nemanda á hverri gerð og hugmyndinni að baki. Fyrstu dæmin er kjörið að nemendur vinni sjálfstætt en síðan gæti verið gott að nemendahópurinn og kennarinn læsu saman textann um vínberjakaup Freyju. Einnig mætti byrja á því að skoða þá umfjöllun.

Dæmi 6–17 eru æfingar í að fara á milli leiða til að skrá samband og ættu þau að gefa nemendum færi á að skilja kosti og galla hvers forms. Þessi dæmi henta til einstaklings- eða paravinnu en gæta þarf þess að umræður eigi sér stað bæði í minni hópum og í nemendahópnum öllum eftir því sem við á.

11 Gjone, G. 1997. Veiledning til funksjoner. Oslo, Nasjonalt læremiddelsenter

# 8-tíu

Nemendur hafa áður kynnst því að teikna línurit/gröf. Í þessum kafla er markvisst farið í það sem einkennir graf beinnar línu og nemendum ætlað að ná valdi á að skrá jöfnu út frá grafi hennar. Þetta viðfangsefni fær töluvert rými og þurfa allir nemendur að fá að skoða og átta sig á tengslum jafna og grafa. Hugtökin *hallatala* og *skurðpunktur við y-ás* eru meginhugtökin og þarf að gæta þess að nemendur átti sig sjálfir á því hvers vegna þau skipta meginmáli og hvaða upplýsingar þau gefa. Þess vegna er gert ráð fyrir að nemendur rannsaki tiltekin gröf með því að teikna þau og bera þau saman. Nota má grafíska vasareikna eða töflureikni til að einfalda teiknivinnuna. Einnig eru til sérstök teikniforrit. Námsgagnastofnun hefur gefið út forritið Flott föll þar sem skoða má á einfaldan hátt samband jafna og grafa. Á heimasíðu Freudenthalstofnunarinnar má líka finna góð dæmi um gagnvirk kennsluforrit (http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/) þar sem skrá á jöfnu beinnar línu, meta stefnu o.fl. Sem dæmi um hentug forrit um jöfnur og gröf má nefna: Shooting balls; Find the function; Function game. Mikilvægt er að nemendur átti sig á því að jöfnur og gröf gefa upplýsingar og þurfa þeir að geta orðað þær.

Graf er myndræn framsetning á falli. Gröf gefa heildstæða sýn og mynd sem í mörgum tilfellum er auðvelt að túlka og fá merkingu út úr. Hugtakið fall er skilgreint í kaflanum. Nemendur hafa nú kynnst hugtökunum stæða, jafna og fall sem öll eru notuð til að skrá samband stærða. Gott er því að taka þau til umræðu og bera saman. Í skilgreiningunni á hugtakinu fall er áhersla lögð á að hvert x-gildi geti aðeins gefið eitt y-gildi. Skoða þarf með nemendum hvað það þýðir. Í lok kaflans eru viðfangsefni þar sem nemendur eiga að finna dæmi um það hvernig fólk notar föll við vinnu sína. Nemendur gætu farið saman tveir til þrír og rætt við fólk á vinnustað. Þeir gætu líka tekið viðtal við einhvern sem þeir þekkja eða sent spurningar til einhvers í tölvupósti. Verkefni af þessu tagi takast best ef sá sem rætt er við veit um hvað verkefnið snýst og fær svolítinn tíma til að hugsa sig um áður en viðtalið fer fram. Þegar nemendur hafa rætt við einstakling og sagt hver öðrum frá væri mjög gagnlegt að fá einhvern í heimsókn í skólann, t.d. bankamann eða stærðfræðing, og halda áfram og dýpka umræðuna um föll og notkun þeirra.

Í þessum kafla hafa nemendur glímt við mismunandi framsetningu á skráningu sambands stærða. Mikilvægt er að þeir átti sig á því að allar þessar gerðir eru notaðar til að tjá upplýsingar og að þeir geti fundið merkingu í þeim öllum. Verkefnin í upphafi og lok kaflans þar sem fengist er við viðfangsefni úr daglegu lífi eru því mikilvæg og leggja þarf áherslu á að nemendur skilji hvernig nýta má jöfnur og gröf til að leysa vandamál.

# Talnameðferð

**Inntak**
Markmið að nemendur:
- Öðlist skilning á helstu reiknireglum, svo sem víxlreglu, tengireglu og dreifireglu.
- Þrói með sér leikni í að reikna með jákvæðum og neikvæðum tölum.
- Nýti sér þekkingu sína á tugakerfinu, talnastaðreyndum og einkennum reikniaðgerðanna við útreikninga.
- Nái góðu valdi á samsettum útreikningum og forgangsröð aðgerða.
- Átti sig á hvað felst í samlagningar- og margföldunarandhverfum.
- Viti að til er hlutleysa í samlagningu og margföldun.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:
- Geti lesið skilgreiningar á stærðfræðihugtökum og þjálfist í að nota þær.
- Beiti fjölbreyttum leiðum við að leysa viðfangsefni.
- Geti útskýrt og rökstutt lausnaleiðir.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Nemendur þurfa að þróa áfram skilning sinn á reikniaðgerðunum, einkennum þeirra og sambandi. Í kaflanum er sjónum fyrst og fremst beint að þremur reiknireglum, þ.e. víxlreglu, tengireglu og dreifireglu. Skoðað er hvort þessar reglur gilda fyrir hverja reikniaðgerð í mismunandi talnamengjum. Í þessari umfjöllun er haldið áfram með viðfangsefni sem nemendur hafa fengist við í köflunum Tölur, Algebra og Jöfnur og gröf. Reiknireglur hafa verið kynntar áður í ýmsu samhengi, bæði í námsefninu *Geisli* og *Átta–10*, 1 og 2.

Nemendur þurfa að halda áfram að læra að lesa úr stærðfræðitáknum og að lesa sér til skilnings texta um stærðfræðileg atriði. Þeir þurfa að átta sig á muninum á alhæfingu og að eitthvað gildi fyrir fjölda dæma. Nemendur eiga að leita leiða til að útskýra hvernig reglur gilda alltaf í sumum reikniaðgerðum og talnamengjum en ekki í öðrum. Ekki er gert ráð fyrir að nemendur nái fullu valdi á þessu en að þeir haldi áfram að þróa skilning sinn.

Í þessari töflu er sýnt í hvaða talnamengjum beita má reikniaðgerðum fyrir hvaða tölu mengisins sem er.

| **Mengið er** | **Náttúrlegar tölur** | **Heilar tölur** | **Ræðar tölur** | **Raun-tölur** |
|---|---|---|---|---|
| lokað með tilliti til samlagningar | x | x | x | x |
| lokað með tilliti til margföldunar | x | x | x | x |
| lokað með tilliti til frádráttar | x | x | x | |
| lokað með tilliti til deilingar fyrir utan deilingu með núlli | | | x | x |

**Reiknireglurnar má setja almennt fram:**

**Víxlregla** – Fyrir allar tölur a og b er $a + b = b + a$ og $a \cdot b = b \cdot a$

**Tengiregla** – Fyrir allar tölur a, b og c er $a + (b + c) = (a + b) + c$ og $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

**Dreifiregla** – Fyrir allar tölur a, b og c eru $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ og $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

**Yfirlit yfir reiknireglurnar má sjá í þessari töflu.**

| **Reikniregla og aðgerð** | **Náttúrlegar tölur** | **Heilar tölur** | **Ræðar tölur** | **Raun-tölur** |
|---|---|---|---|---|
| Víxlregla í samlagningu | x | x | x | x |
| Víxlregla í margföldun | x | x | x | x |
| Víxlregla í frádrætti | | | | |
| Víxlregla í deilingu | | | | |
| Tengiregla í samlagningu | x | x | x | x |
| Tengiregla í margföldun | x | x | x | x |
| Tengiregla í frádrætti | | | | |
| Tengiregla í deilingu | | | | |
| Dreifiregla fyrir margföldun x yfir samlagningu og frádrátt | x | x | x | x |


NÁMSGAGNASTOFNUN 2006 – Kennsluleiðbeiningar – 09742

Reikniaðgerðirnar eru einnig skoðaðar með tilliti til hugtakanna hlutleysa og andhverfa. Skilningur á þessum hugtökum byggist að hluta til á skilningi á reiknireglunum en um leið styrkir skilningur á hugtökunum skilninginn á reglunum. Samlagning og margföldun eiga sér hlutleysu og því má finna samlagningar- og margföldunarandhverfur. Í ýmsum reikningi er hentugt að finna andhverfur og nýta sér þær, t.d. þegar almennu broti er deilt í almennt brot. Hlutleysu fyrir samlagningu og margföldun má almennt setja fram:

Talan 0 er hlutleysa samlagningar – Fyrir allar tölur a er $a + 0 = 0 + a = a$

Talan 1 er hlutleysa margföldunar – Fyrir allar tölur $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Þessi einkenni á reikniaðgerðunum samlagningu og margföldun má nota til að leiða út og byggja upp röksemdafærslu. Nemendur vita flestir að 0 og 1 eru hlutleysur þó þeir þekki ekki endilega hugtökin.

Með því að skoða reiknireglurnar og hlutleysur gefst nemendum tækifæri til að skoða hvernig skilgreiningar eru settar fram í stærðfræði og til að æfa sig að lesa þær. Skilgreiningar þarf að lesa hægt og tengja saman öll þau skilyrði sem sett eru fram. Gott er fyrir nemendur að æfa sig í að greina merkinguna og orða hana með eigin orðum.

Í stærðfræði er unnið út frá ýmsum forsendum. Sem dæmi má nefna að gert er ráð fyrir sjálfhverfu ($a = a$), samhverfu (ef $a = b$ þá er $b = a$) og gegnvirkni (ef $a = b$ og $b = c$ þá er $a = c$). Einnig er miðað við að nemendur hafi áttað sig á að

Ef $a + x = a + y$ þá er $x = y$

Nemendur hafa notað víxlreglu, tengireglu og dreifireglu við reikning með náttúrlegum tölum. Ýmsar fleiri reiknireglur má leiða út frá þessum reiknireglum, t.d. regluna um að margfalda með 0. Fyrir allar tölur a er $a \cdot 0 = 0$. Þetta má leiða út með því að skoða dreifiregluna og nýta sér þekkingu á hlutleysu í samlagningu. Þetta má setja fram sem:

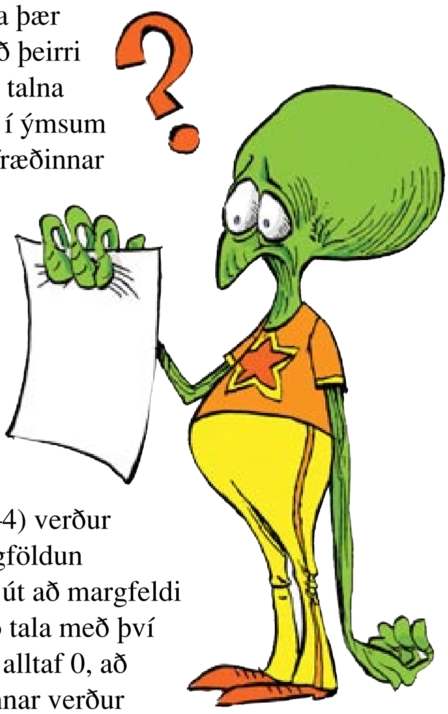
$$a \cdot b = a \cdot (b + 0)$$
$$a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$$

Fyrst $a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$ hlýtur $a \cdot 0$ að jafngilda 0, það er hlutleysunni í samlagningunni. Þetta er gott dæmi, sem kynna má fyrir nemendum, um það hvernig stærðfræðin er byggð upp og hvernig röksemdafærslu er beitt í stærðfræði. Á sama hátt má leiða út fleiri reiknireglur.

Nemendur hafa kynnst ýmsum leiðum við reikning. Í kaflanum eru þeir hvattir til að skoða mismunandi leiðir og prófa þær. Við reikning með neikvæðum tölum er oft gagnlegt að reikna á talnalínu. Það auðveldar mörgum að skilja hvert skref í reikningnum og styður þá við röksemdafærslu.

Frádráttur er andhverf aðgerð við samlagningu. Frádrátt má því skilgreina út frá samlagningu og samlagningarandhverfu. Það að draga tölu frá annarri tölu er það sama og að leggja samlagningarandhverfu þeirrar tölu við, þ.e.
$a - b = a + (-b)$ og $(a - b) + b = a$.

Í þessum kafla er farið í margföldun og deilingu heilla talna. Í fyrsta skipti fá nemendur að glíma við að margfalda og deila þar sem báðir þættir eru neikvæðar tölur. Sýnt er fram á að margfeldi tveggja neikvæðra talna er alltaf jákvæð tala. Nemendur þurfa stuðning við að skoða þær tvær leiðir sem sýndar eru í námsbókinni að þeirri niðurstöðu að margfeldi tveggja neikvæðra talna sé alltaf jákvæð tala. Það er fyrst og fremst í ýmsum útreikningum og einföldunum innan stærðfræðinnar sem þörf kemur upp fyrir að margfalda eða deila með neikvæðum tölum. Ef margfaldaðar eru saman tvær náttúrlegar tölur verður margfeldi þeirra alltaf jákvæð tala. Ef margfaldaðar eru saman jákvæð og neikvæð tala verður margfeldið hins vegar alltaf neikvætt. Oft er litið á margföldun sem endurtekna samlagningu. Ef um er að ræða neikvæðar tölur, sbr. $5 \cdot (-4) = (-4) + (-4 + (-4) + (-4) + (-4)$ verður svarið $-20$. Þar sem víxlreglan gildir í margföldun verður margfeldi $-4 \cdot 5$ líka $-20$. Leiða má út að margfeldi tveggja neikvæðra talna verði alltaf jákvæð tala með því að nýta sér að margföldun með núll verður alltaf 0, að summa tölu og samlagningarandhverfu hennar verður alltaf núll og með dreifireglu.



Ágætt er að skoða fyrst eitt talnadæmi.

Dæmi: $-3 \cdot (-5) = -3 \cdot (-5 + 5)$
$= -3 \cdot (-5) + (-3) \cdot 5$
$= (-3) \cdot (-5) + (-15)$

Vitað er að $-3 \cdot (-5 + 5) = -3 \cdot 0 = 0$
Ef $-3 \cdot (-5 + 5) = 15 - 15$ hlýtur það að þýða að $-3 \cdot (-5)$ jafngildi 15.
Röksemdafærslan er í raun óháð tölunum í talnadæminu hér á undan,
$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Víxlreglan kemur mjög skýrt fram ef sett er upp margföldunartafla. Á þann hátt er einnig gott að skoða deilingu. Rifja þarf upp að margföldun og deiling eru andhverfar aðgerðir þó ekki gildi sömu reiknireglur fyrir hvora aðgerð.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | –16 | –12 | –8 | –4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| 3 | –12 | –9 | –6 | –3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 2 | –8 | –6 | –4 | –2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| –1 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 | –4 |
| –2 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | –2 | –4 | –6 | –8 |
| –3 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | –3 | –6 | –9 | –12 |
| –4 | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 | –4 | –8 | –12 | –16 |
| · | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

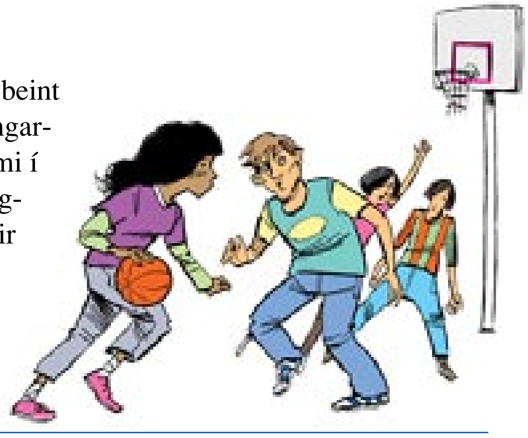
Með því að skoða búta úr margföldunartöflum má sjá hvernig margfeldi jákvæðra og neikvæðra talna koma fram.

Nemendur þurfa að efla færni sína í hugarreikningi þannig að þeir geti nýtt hann við reikning með tölum úr öllum talnamengjum. Í þessum kafla er fyrst og fremst fengist við heilar tölur og þarf reikningur með neikvæðum tölum að fá athygli og umhugsun. Nemendur þurfa að skoða leiðir sem þeir hafa notað við reikning með jákvæðum tölum og yfirfæra þær á reikning með neikvæðum tölum. Þeir þurfa einnig að átta sig á því hvernig þeir geta nýtt sér reiknireglur til að einfalda útreikninga.

Í kaflanum er töluvert af stærðfræðilegum texta. Nemendur þurfa að ná valdi á að lesa slíka texta sér til gagns. Það gefur góð tilefni til umræðna um tungutak stærðfræðinnar að kennari og nemendur skoði saman þessa texta. Í stærðfræði þarf að gæta nákvæmni í framsetningu og stærðfræðilegur texti verður því oft þungur. Nemendur þurfa því að efla lesskilning sinn og læra að kafa í texta og velta merkingu fyrir sér. Oft er þá heppilegt að þeir glími við að umorða og segja með eigin orðum. Ítreka þarf tengsl talnareiknings og reiknings í algebru.

## Kennsluhugmyndir

Í upphafi kaflans er sjónum nemenda beint að því að þeir kunna ýmsar samlagningarstaðreynir utan að og reikna ýmis dæmi í huganum þannig að þeir reikna í áföngum. Gott er að nemendur velti því fyrir sér hvernig þeir reikna í huganum og skoði ýmsar leiðir. Margir eru ómeðvitaðir um hvernig þeir reikna en við skoðun kemur fram að þeir nota



helstu reiknireglur og hafa fundið ýmsar góðar leiðir við reikning. Í dæmum 4–6 er formlegri nálgun að reiknireglum og víxlregla, tengiregla og dreifiregla rifjaðar upp. Nemendur þekkja þær væntanlega en hafa ekki náð valdi á almennri framsetningu þeirra. Seinna í kaflanum eru þessar reglur skoðaðar í tengslum við aðrar reikniaðgerðir.

Á blaðsíðu 66 er sett fram skilgreining á samlagningarhlutleysu sem gefa þarf rými í kennslunni. Mikilvægt er að nemendur þrói lesskilning sinn á stærðfræðitextum. Áherslu þarf að leggja á að fyrst eru gefnar forsendur og síðan sett fram hvaða skilyrði þurfa að vera uppfyllt. Samlagningarandhverfa er annað hugtak sem tekið er fyrir. Tengsl þessara hugtaka þarf að draga skýrt fram. Dæmi 11–22 hafa að geyma fjölbreyttar æfingar í samlagningu. Meta þarf hvaða dæmi hver nemandi ætti að reikna en ástæða er til að rifja námundun upp með öllum nemendum. Til að rifja upp samlagningu jákvæðra og neikvæðra heilla talna má nota Plús-mínus spilið.

Plús-mínus spilið má nota til að æfa reikning með heilum tölum. Notuð eru spil úr venjulegum spilastokki, ein svört tegund og ein rauð tegund. Spilin taka gildi frá 1–13. Rauðu spilin standa fyrir neikvæðar tölur og svörtu spilin fyrir jákvæðar tölur.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –10 | –9 | –8 | –7 | –6 | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

- Hver þátttakandi fær spilapening og þrjú spil. Hver og einn leggur saman tölurnar á spilum sínum og setur spilapeninginn á þann reit sem hefur summuna.
- Afgangurinn af spilunum er lagður í bunka með efsta spilið sýnilegt. Eftir röð leggja þátttakendur annað hvort niður eitt af spilum sínum og fjarlægja þannig eitt þeirra eða þeir taka efsta spilið úr bunkanum. Síðan finna þátttakendur summu spila sinna og flytja spilapeninginn á reitinn með þeirri summu.
- Sá sem fyrstur fær summuna á spilum sínum til að verða núll vinnur.

Umfjöllun um frádrátt er sambærileg við umfjöllun um samlagningu. Í upphafi eru skoðuð nokkur sjónarhorn á frádrátt og væri gott að ræða áhrif sjónarhorns á það hvernig lausn er valin. Gert er ráð fyrir að nemendur sýni fram á, útskýri og rökstyðji hvort reiknireglur gildi í frádrætti og hvort til sé hlutleysa og andhverfa. Gera má ráð fyrir að útskýra þurfi og ræða við nemendur um mikilvægi þess að geta fjallað um það sem gildir almennt og sett fram forsendur og skilyrði. Nemendur þurfa að efla færni í rökstuðningi en það er mikilvægur þáttur í að byggja upp stærðfræðilegt afl. Aðalatriðið er að nemendur glími við að orða eigin hugsun og æfi sig í að færa rök fyrir máli sínu. Þeir þurfa að læra að skoða má reikniaðgerðirnar með því að greina hvort reiknireglur gildi og hvort til sé hlutleysa og andhverfa.

Á blaðsíðu 70–74 eru svipuð verkefni í margföldun og deilingu og voru í samlagningu og frádrætti. Nemendur ættu að geta leyst dæmi 38–43 nokkuð sjálfstætt. Á blaðsíðu 71 eru rannsóknarverkefni í margföldun jákvæðra og neikvæðra talna. Sett er fram reikniregla fyrir margföldun tveggja neikvæðra talna og sýnt hvernig leiða má hana út frá þekktum staðreyndum. Hér er tekið fyrir grundvallaratriði í stærðfræði, þ.e. hvernig reiknireglur eru leiddar út frá gefnum forsendum. Þetta er því mjög mikilvægt að skoða og ræða við nemendahópinn allan eftir að nemendur hafa sjálfir glímt við dæmi 44–48. Í glímunni við dæmi 49–53 er nemendum ætlað að beita þekkingu sinni á margföldun jákvæðra og neikvæðra talna. Á blaðsíðu 73 er deiling meginviðfangsefnið. Þar er að finna umfjöllun um deilingu með núlli sem getur verið uppspretta líflegra umræða um ýmis þau vandamál sem stærðfræðin glímir við. Gert er ráð fyrir að nemendur rannsaki í litlum hópum hvernig reiknireglur koma fram ef deilt er með neikvæðum tölum. Þá gefst þeim tækifæri til að nýta vinnu með samlagningu, frádrátt og margföldun og tengja saman. Hvetja þarf hópana til að leggja rækt við samanburð á margföldun og deilingu og setja fram rök máli sínu til stuðnings. Glíman við deilingardæmin þar sem námundun er beitt ætti að gefa nemendum aukna tilfinningu fyrir deilingu og svörum við deilingardæmum.

Í lok kaflans á blaðsíðum 75–76 er unnið með reikniaðgerðirnar fjórar. Gott er að nemendur vinni hópverkefnið og setji skipulega upp einkenni reikniaðgerðanna. Þá geta þeir skráð hvort reiknireglur gilda og hvort um er að ræða hlutleysu og andhverfur. Samhliða vinnu við hópverkefni geta nemendur unnið hin dæmin á blaðsíðunum. Blaðsíða 77 hentar vel til heimanáms. Þá geta nemendur velt fyrir sér efni kaflans og eigin færni. Bæta mætti við spurningum þar sem þeir væru beðnir um að meta eigin færni og greina frá því hvað þeir hafa lært af vinnu sinni með efni kaflans. Þessar þrjár lokasíður kaflans eru því eins konar samantekt á efni hans.

# Rökfræði og mengi

**Inntak**

Markmið að nemendur:

- Nái valdi á nokkrum leiðum til skrá upplýsingar skipulega, svo sem með mengjamyndum, töflum og talningartrjám.
- Kynnist helstu hugtökum mengjafræðinnar, svo sem mengi, staki, sniðmengi, sammengi og hlutmengi.
- Geti lýst mengjum með orðum, upptalningu, mengjamyndum og táknmáli stærðfræðinnar.
- Fáist við verkefni þar sem notaðar eru yrðingar með „**og**“ og „**eða**“ til að afmarka mengi, t.d. við leit í leitarvélum.

**Aðferðir**

Markmið að nemendur:

- Þjálfist í að nota skilgreiningar á stærðfræðilegum hugtökum.
- Temji sér að nota skipulega skráningu og skýringarmyndir.
- Þjálfist í að nota táknmál rökfræðinnar og að lesa úr því.
- Efli rökhugsun sína og ályktunarhæfni.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Í Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði segir:

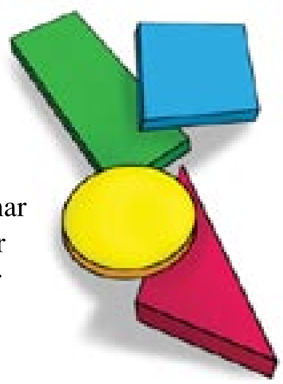
Ein meginundirstaða stærðfræðinnar sem fræðigreinar er röksemdafærsla. Allar niðurstöður hennar eru staðfestar með sönnunum sem byggjast á skýrum forsendum, skýrt afmörkuðum hugtökum og rökum.
(*Aðalnámskrá grunnskóla 1999:96*)

Það er því mikilvægt að leggja áherslu á röksamhengi og röksemdafærslu alveg frá upphafi stærðfræðináms og er þessi þáttur dreginn fram sem sérstakur flokkur aðferðamarkmiða í aðalnámskrá grunnskóla. Á unglingastigi geta nemendur farið að fást við þessi viðfangsefni með formlegri hætti og þar ættu þeir að fá að kynnast mikilvægi röksemdafærslu í stærðfræði, geta beitt einföldum röksemdafærslum og geta skilið og sett saman rökyrðingar svo dæmi séu tekin.

Rökfræðina má rekja aftur til Forn-Grikkja. Fjölmargir heimspekingar og rökfræðingar fengust við rökfræðileg viðfangsefni og má þar nefna Sókrates og Platón. Aristóteles er hins vegar sá sem kallaður er faðir vísindalegrar rökfræði en hann var lærisveinn Platóns sem var nemandi Sókratesar. Í bókinni *Rök-*

*fræði*. Leiðarvísir um frumatriði rökfræðinnar[12] eftir Guðmund Arnlaugsson er vitnað í umfjöllun Will Durant um rökfræði. Þar segir:

> Rökfræði þýðir einfaldlega list eða aðferð réttrar hugsunar. Hún er sú aðferð sem allar greinar vísinda og lista styðjast við, jafnvel hljómlistin hlítir lögum hennar. Rökfræðin er vísindagrein sjálf því að hugsanaferlar lúta að verulegu leyti ákveðnum reglum, sem hver meðalgreindur maður getur lært. Rökfræðin er líka list, því að við æfingu nær hugsunin jafneðlilegri leikni og fingur þjálfaðs píanóleikara. Ekkert er jafnleiðinlegt og rökfræði, ekkert jafnmikilvægt.
>
> Sívakandi krafa Sókratesar um skýrgreiningu (skilgreiningu) var fyrsti vottur þessara nýju vísinda, og í kjölfarið kom slípun hugtakanna hjá Platóni. Ritgerð Aristótelesar um skýrgreiningar sýnir að hann byggir á þeim grunni. „Ef menn vilja tala við mig“, sagði Voltaire, „ verða menn að skýrgreina þau orð, sem þeir nota.“ Mörg deilan hefði sparast, ef viðræðendur hefðu gert sér það ómak að skýrgreina hlutina, sem þeir voru að tala um. Sundurgreining og skýrgreining þeirra orða sem notuð eru, eru upphaf og endir hverrar alvarlegrar rökræðu, líf hennar og sál. Krafan um skýrgreiningar er erfiður og miskunnarlaus prófsteinn á skilning, en þegar komið er yfir þann þröskuld er vandinn að hálfu leystur.
>
> Guðmundur Arnlaugsson, 1984:5



Í þessum texta kemur skýrt fram hversu mikilvægar skilgreiningar eru, sem og rökrétt framsetning. Engu að síður er mikilvægt að hafa í huga að þó eitthvað sé rökfræðilega rétt þarf það ekki að vera satt. Rökfræðin segir ekki til um hvort tilteknar forsendur eru sannar heldur hvenær hægt er að fullyrða með vissu að ályktun sé sönn ef forsendur hennar eru sannar. Um þetta má finna fjölmörg dæmi. Guðmundur Arnlaugsson setur fram þessar tvær fullyrðingar sem báðar verða að teljast rökfræðilegar réttar.

1. Allir tunglfarar eru fæddir á 20. öld.
2. Skúli fógeti var tunglfari.

Á grundvelli þessara fullyrðinga má draga þá ályktun að Skúli fógeti hafa verið fæddur á 20. öld sem er ósönn fullyrðing þó hún sé rökfræðilega rétt.

Eitt af vandamálunum við rökfræðilega framsetningu er að tungumálið er oft tvírætt. Ef skoðuð er setningin *Hún svaf ekki allan sólarhringinn* má túlka það svo að hún hafi ekkert sofið eða að hún hafi sofið hluta sólarhringsins en bara ekki allan sólarhringinn. Einnig koma oft upp vandamál varðandi ýmsar sam-

12 Guðmundur Arnlaugsson. 1984. Rökfræði. Leiðarvísir um frumatriði rökfræðinnar. Reykjavík, Iðnú.

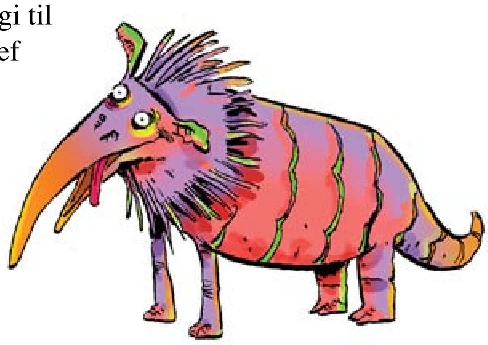
tengingar eins og t.d. eða. Í daglegu máli er eða mjög oft notað í stað *annaðhvor*t eða en í stærðfræðinni getur eða merkt *annaðhvort* eða *bæði og*. Sem dæmi má nefna að ef spurt er, *áttu kött eða hund?* getur svarið já merkt að viðkomandi eigi eingöngu kött, eingöngu hund eða bæði kött og hund.

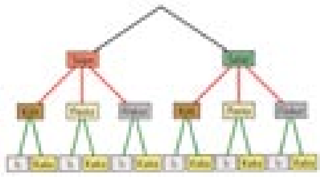
George Boole (1815–1864) þróaði leið til að nota táknmál og tækni algebrunnar til að setja fram rökfræðilegar fullyrðingar. Boole notaði tákn eins og x og y til að tákna ákveðna eiginleika eða hluti í spurningum. Ef x er til dæmis látið tákna fugla þá
táknar 1–x allt nema fugla. Ef y táknar rauðan lit þá táknar (1–x)(1–y) allt nema fugla, það sem er rautt eða rauða fugla. Þessi þróun varð til þess að hægt var að fara út í ýmsa útreikninga í tengslum við rökfræðileg viðfangsefni og einnig kemur vel skilgreint táknmál í veg fyrir alls konar mistúlkun sem getur fylgt notkun daglegs máls.

Einn af þeim þáttum sem komu nýir inn í námskrána við endurskoðun hennar 2006 er að við lok grunnskóla eiga nemendur að þekkja hugtökin *mengi, stak, hlutmengi, sammengi* og *sniðmengi*. Þessi hugtök hafa verið kynnt lítillega áður en hér eru þau tekin fyrir með formlegri hætti. Hugtök mengjafræðinnar og grunnaðgerðir með mengi skýra og sameina mörg stærðfræðileg hugtök sem fengist er við í grunnskólanum. Sem dæmi má nefna talnamengi og aðgerðir með bæði heilum tölum og ræðum tölum. Mengi eru einnig gagnleg þegar kemur að því að skilgreina vensl og föll.

Mengjafræðin er fremur nýlegt svið innan stærðfræðinnar. Upphaf hennar má rekja til Georgs Cantor en hann var uppi 1845–1918. Cantor var fæddur í Pétursborg í Rússlandi en fjölskylda hans flutti til Frankfurt í Þýskalandi þegar hann var 11 ára. Cantor lauk doktorsnámi í stærðfræði í Berlín aðeins 22 ára gamall þrátt fyrir andstöðu föður síns en honum þótti lítil framtíð í því að mennta sig í stærðfræði og vildi að hann legði frekar stund á verkfræði. Cantor batt vonir við að fá stöðu prófessors í Berlín en verk hans voru ekki metin að verðleikum meðan hann lifði og varð honum því ekki að ósk sinni.

Í kaflanum er komið inn á helstu hugtök mengjafræðinnar og leitast er við að varpa ljósi á merkingu þeirra með dæmum og skýringarmyndum en ekki er alltaf farið út í nákvæmar skilgreiningar. Einnig eru helstu tákn mengjafræðinnar kynnt, svo sem táknin fyrir stak $\in$, sammengi $\cup$, sniðmengi $\cap$ og hlutmengi $\subset$, og einnig nokkrar leiðir til að lýsa og skrá mengjum. Mestu máli skiptir að nemendur átti sig á að nota má mengi til afmarka vel skilgreindan hóp eða hópa og að ef um vel skilgreindan hóp er að ræða á ekki að fara á milli mála hvort tiltekið stak tilheyrir menginu eða ekki.





Auk þess að nota mengi til að til að lýsa eiginleikum og skrá upplýsingar skipulega eru kynntar aðrar leiðir sem gott getur verið að fara við flokkun upplýsinga og skoðun á samsetningarmöguleikum. Bent er á að skráning í töflur gefur oft góða yfirsýn yfir alla möguleika og hlutfall tiltekinna möguleika af heildarfjölda þó oft geti það líka verið tímafrekt að skrá alla möguleika í töflu. Talningartré er önnur leið sem gefur góða yfirsýn yfir samsetningarmöguleika.

## Kennsluhugmyndir

Kaflinn hefst á nokkrum dæmum sem rétt er að nemendur vinni saman tveir og tveir. Dæmin eru þess eðlis að nemendur þurfa að nýta sér einhvers konar skipulega skráningu til að leysa þau. Kennarinn þarf að fylgjast vel með vinnunni og greina hvaða leiðir nemendur nota. Ef nemendur vinna mjög óskipulega má benda þeim á að nota t.d. töflur eða tré. Æskilegast er að nemendur vinni dæmi 1–6 án leiðsagnar um skráningarform og velti síðan fyrir sér hvaða leiðir þeir fara eins og gert er ráð fyrir í dæmi 7. Í framhaldi af því er rétt að ræða hvaða skráningarleiðir nemendur nota og hvort einhver ein leið hentar betur en önnur við tiltekin verkefni.

Á blaðsíðum 80-81 eru svo kynntar þrjár leiðir, mengi, töflur og talningartré, sem oft henta þegar koma þarf skipulagi á upplýsingar og skoða möguleika á samsetningum. Rétt er að gefa mengjunum sérstakan gaum og því hvernig skrá má stök mengis með mengjamynd eða með því að gera skrá yfir þau. Einnig eru hugtökin sammengi og sniðmengi kynnt og þau tákn sem notuð eru til að tákna þau. Æskilegt er að nemendur prófi sjálfir að skilgreina og afmarka mengi og skrá síðan stök með mengjamyndum eða í mengjasviga. Nota má mengi nemenda í hópnum eða skólanum og skoða það og flokka út frá ýmsum eiginleikum en einnig er gott að skoða fleiri margföldunartöflur á tilteknu talnabili eins og gert er í dæmum 8 og 9. Skipta mætti nemendum í hópa þar sem hver hópur skoðar tilteknar töflur og skráir á mengjamynd, gefur mengjum nafn og skráir stök þeirra og einnig stök í sammengi og sniðmengi.
Dæmi:

- Náttúrlegar tölur í 3 og 5 töflunni minni en 51
- Náttúrlegar tölur í 4 og 7 töflunni minni en 50
- Náttúrlegar tölur í 3 og 6 töflunni minni en 60
- Náttúrlegar tölur í 5 og 9 töflunni minni en 91

Skoða þarf og ræða skráningarnar í talningartré og töflu á blaðsíðu 81 og velta fyrir sér hvaða spurningum má svara með því að skoða og greina þær upplýsingar. Á blaðsíðu 82 og 83 eru síðan dæmi sem nemendur eiga að leysa og velta fyrir sér hvort hentugt er að nota mengjamyndir, talningartré eða töflur við lausn þeirra. Þessi verkefni henta vel sem paraverkefni því gott er fyrir nemendur að ræða saman við lausn þeirra og hjálpast að við að skrá allar nauðsynlegar upplýsingar á skipulegan hátt og greina þær. Gott er að draga saman með því að nemendur greini frá svörum sínum við dæmi 20. Þá gefst tækifæri til að ræða hvaða lausnarleiðir þeir notuðu og hvað einkennir dæmi sem til dæmis er gott að leysa með því að nota talningartré.

Á blaðsíðu 84–85 eru verkefni þar sem fengist er við mengi, mismunandi leiðir við að lýsa mengjum og skrá stök þeirra og ýmis tákn mengjafræðinnar eru kynnt. Nemendur þurfa að fá stuðning við að ná valdi á táknmáli mengjafræðinnar og gott er að lesa með þeim texta og dæmi, t.d. á blaðsíðu 84–85. Gera má ráð fyrir að nemendur þurfi töluverðan stuðning við að ná tökum á að lesa og beita táknmáli mengjafræðinnar og þarf kennarinn því bæði að ræða ný hugtök og tákn þeirra við hópinn í heild og við einstaka nemendur. Einnig þarf að ræða og skoða kosti þess og galla að nota táknmál. Verkefni á blaðsíðu 86–87 eru frekari æfing í að skrá og lýsa mengjum. Nemendur þurfa að glíma sjálfstætt við verkefni og hafa viðeigandi gögn við höndina.

Á blaðsíðu 88 og 89 eru hópverkefni. Í verkefninu á blaðsíðu 88 er nemendum ætlað að afla upplýsinga um hóp af fólki og setja upplýsingarnar fram á mengjamynd og sýna þannig skilning og þekkingu á hugtökum mengjafræðinnar. Verkefnið gæti því hentað sem námsmatsverkefni og gefið vísbendingar um hvort ástæða er til að dvelja lengur við einhver af þeim hugtökum sem kynnt hafa verið í kaflanum. Þó ber að hafa í huga að þessi hugtök verða tekin fyrir aftur síðar og að hér er í mörgum tilvikum eingöngu um fyrstu kynningu að ræða.

Hópverkefnið á blaðsíðu 89 reynir á rökhugsun nemenda og varpar ljósi á að fara þarf varlega í að draga ályktanir af rökréttum fullyrðingum. Leitarvélar eru dæmi um á hvern hátt rök- og mengjafræði er notuð í daglegu lífi. Áhugavert er fyrir nemendur að prófa að nota þær markvisst og setja fram leitarskilyrði og skoða á hvern hátt má víkka og þrengja leit með hugtökunum og/eða.

# Stærðfræði í daglegu lífi

**Inntak**
Markmið að nemendur:
- Fáist við fjölbreytta samsetta reikninga.
- Dýpki þekkingu sína á völdum sviðum stærðfræðinnar.
- Átti sig á því að stærðfræði má finna víða í umhverfinu.
- Skerpi skilning sinn á mælingum og mælingahugtökum.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:
- Þjálfist í að þýða verkefni úr daglegu lífi yfir á táknmál stærðfræðinnar.
- Beiti stærðfræði til að skýra mál sitt í umræðum um þjóðmál.
- Kynnist dæmum og vinni verkefni um notkun stærðfræði í nútímaþjóðfélagi.
- Geti gert stærðfræðilega rannsókn á viðfangsefnum daglegs lífs.
- Ígrundi stærðfræðilega þekkingu sína og hvernig þeir geti nýtt sér hana við að leysa viðfangsefni.
- Geti unnið stórt rannsóknarverkefni í samstarfi við aðra.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Flestir nemendur hafa einhvern tíma á skólagöngu sinni fengist við þemaverkefni, bæði innan stærðfræðinnar og þvert á námsgreinar. Í slíkum verkefnum er sjónarhorn oft nokkuð þröngt og ekki nýttir allir þeir möguleikar sem stærðfræðileg skoðun og greining gefur. Iðulega er einblínt á lengdarmælingar og kostnaðarútreikninga en síður hugað að þáttum í tölfræði, rúmfræði og annars konar mælingum. Meginmarkmiðið með verkefnum þessa kafla er að opna augu nemenda fyrir því hvernig nýta má alla þætti stærðfræðinnar, bæði aðferðir og inntak, við að skoða ýmis fyrirbrigði. Tekin eru dæmi um það hvernig vinna má stærðfræðilega rannsókn á fyrirbrigðum úr daglegu lífi. Í slíkri rannsókn nýta nemendur þá stærðfræðiþekkingu sem þeir hafa, greina hver hún er og bæta við hana. Við stærðfræðilega rannsókn er oft byrjað á því að lýsa hlutnum og nýta til þess stærðfræðilega þekkingu og hugtök. Því næst þarf að greina hvaða þættir stærðfræðinnar eru notaðir. Síðan er æskilegt að velja einn þátt til þess að skoða nánar með það að markmiði að dýpka þekkinguna á honum. Að rannsókn lokinni er mikilvægt að huga að hvernig kynna má niðurstöður og greina frá framvindu rannsóknarinnar.

Á blaðsíðum 93–94 í bókinni er tekið dæmi um spurningar sem má setja fram út frá skoðun á hitaveitutanki. Greint er frá þeirri stærðfræði sem mætti nota og kafa dýpra í. Einnig eru gefnar hugmyndir um hvernig kynna mætti niðurstöður.

Gert er ráð fyrir að nemendur skoði hugmyndirnar um hitaveitutankinn og velti fyrir sér hvað annað þeir gætu skoðað á hliðstæðan hátt. Mikilvægt er að fá fram ólíkar hugmyndir og skrá þær á lista. Ekki er gert ráð fyrir að nemendur leiti svara við þeim spurningum sem settar eru fram um hitaveitutankinn, þó það sé auðvitað í lagi.

Í bókinni eru nemendur leiddir í gegnum dæmi um vinnuferli þar sem morgunkorn er meginviðfangsefnið. Nemendum er ekki endilega ætlað að vinna verkefnið sem slíkt heldur velta fyrir sér þeim möguleikum sem felast í stærðfræðilegri rannsókn á morgunkorni. Æskilegt er að taka hugmyndalistann á blaðsíðu 96 til sameiginlegrar úrvinnslu og bæta við hugmyndum og útfæra þær nánar.

Þegar farið hefur verið í gegnum þetta vinnuferli er gert ráð fyrir að nemendur velji sér sjálfir eitthvert fyrirbrigði og geri á því stærðfræðilega rannsókn. Í kaflanum eru gefin fjögur dæmi en nemendur gætu einnig valið einhverjar af þeim hugmyndum sem þeir skráðu í dæmi 1. Nemendur þurfa að fá nokkuð rúman tíma við að vinna að þessu verkefni. Það getur bæði verið tímafrekt að afla gagna og vinna úr þeim. Búast má að nemendur þurfi töluverðan stuðning frá kennara við að finna leiðir og gögn sem þeir geta notað við að dýpka þekkingu sína á tilteknum þáttum stærðfræðinnar.

# Almenn brot

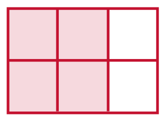

**Inntak**
Markmið að nemendur:
- Efli skilning sinn á almennum brotum og hæfni til að lesa og skrá heilar tölur og brot.
- Þekki ýmsar leiðir við brotareikning og nái valdi á reikningi með almennum brotum.
- Efli tilfinningu sína fyrir niðurstöðum úr brotareikningi.
- Nýti sér myndræna framsetningu við útreikninga með brotum.

**Aðferðir**
Markmið að nemendur:
- Fái þjálfun í að útskýra og rökstyðja niðurstöður sínar.
- Kynnist dæmum og vinni verkefni um notkun almennra brota í samfélaginu.

## Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

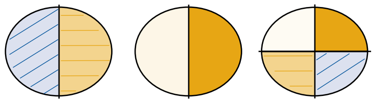
Fjallað hefur verið um almenn brot í námsbókunum *8–tíu, 1* og *2*. Í kennsluleiðbeiningum með þeim er fjallað um ýmis grundvallaratriði hvað varðar brotaskilning og brotareikning. Kennurum er bent á að kynna sér þetta efni. Þar má finna hugmyndir sem nýta mætti fyrir nemendur sem ekki hafa náð valdi á grundvallaratriðum.

Við brotareikning, ekki síst meðan nemendur eru að ná valdi á honum, er mikilvægt að nota líkön, bæði myndræna framsetningu og hluti. Ef nemendur sjá fyrir sér stærðirnar sem þeir eru að fást við, bæði stærðir í dæmum og niðurstöðum, eiga þeir auðveldara með að átta sig á svarinu. Kennarinn þarf einnig að nota líkön þegar hann ræðir við nemendur og nýta sér þau við umfjöllun og umræður um brotareikning. Gott er að skoða hvernig nota má mismunandi líkön við að reikna sama dæmið. Helstu líkön sem nemendur þekkja eru brotabútar, brotatöflur, talnalínur og teikningar. Dæmi um hvernig teikningar geta stutt við skilning gæti verið að nota rúðunet. Ef reikna á dæmið $\frac{2}{3} : \frac{3}{6}$ er gott að nota rétthyrning sem er sex rúður því 6 getur verið samnefnari brotanna. Ef litaðir eru $\frac{2}{3}$ af rúðunum sex eru fjórar rúður litaðar. Á myndinni má þá sjá að taka má $\frac{3}{6}$ einu sinni af $\frac{4}{6}$ og að eftir verður ein rúða sem er $\frac{1}{3}$ af $\frac{3}{6}$. $\frac{2}{3} : \frac{3}{6}$ eru því $1\frac{1}{3}$.



Teikningar geta nemendur notað þegar þeir eru að reikna og er oft einfaldara að teikna dæmin upp en að reikna með hefðbundnum reikniritum og sjá um leið á hvaða talnabili svör eru.

Í brotareikningi getur heildin bæði verið stærð og fjöldi. Nemendur þurfa að skoða almenn brot bæði sem brot af stærð og brot af fjölda. Gott er að ræða við þá um það hve heild getur verið breytileg. Jafnframt því sem nemendur vinna að því að efla skilning sinn á reikningi almennra brota þurfa þeir að styrkja skilning sinn á almennum brotum. Það reynir verulega á brotaskilning nemenda þegar þeir fást við brotareikning. Gott dæmi um það er þegar deilt er með almennu broti og það þarf að skrá afgang. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að heild getur verið almennt brot bæði minna og stærra en einn. Því þarf kennari að hafa það í huga að greina brotaskilning nemenda sinna og hjálpa þeim að styrkja hann. Það getur verið snúið að átta sig á að $\frac{1}{4}$ af heild geti verið $\frac{3}{4}$ af einingu.



Í kaflanum er nemendum ætlað að reikna með blöndnum tölum. Í sumum tilfellum getur komið sér vel að breyta blandinni tölu í óeiginlegt brot við reikning. Við þá breytingu dofnar tilfinning nemenda fyrir því hvaða stærð þeir eru að skoða. Oft er því hentugra að reikna í skrefum og meðhöndla heilu tölurnar sér og brotin sér. Sem dæmi má nefna að við reikning á dæminu $5\,\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$ er fljótlegra og skiljanlegra að nýta sér að taka fyrst $\frac{3}{5}$ af og síðan $\frac{1}{5}$ af 5 í stað þess að byrja á að breyta $5\frac{3}{5}$ í óeiginlegt brot og reikna svo. Í nemendabókinni eru hugtökin eiginlegt brot, óeiginlegt brot og blandin tala ekki notuð. Í stærðfræði eru mörg hugtök og hér hefur verið kosið að kynna þessi hugtök ekki fyrir nemendum enda eru þau ekki tilgreind í námskrá.

Nemendur þurfa að temja sér að skoða þau dæmi sem þeir fá og velja hverju sinni leið til að leysa þau. Á samræmdu prófi fyrir 10. bekk árið 2006 var dæmið $5\frac{2}{3} - \frac{7}{6}$ . Ýmsar leiðir má fara við að reikna dæmið og hér eru sýndar nokkrar leiðir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $5\,\frac{4}{6} - \frac{7}{6}$ | $5\,\frac{4}{6} - 1\frac{1}{6}$ | $\frac{17}{3} - \frac{7}{6}$ | $\frac{7}{6}$ er $\frac{3}{3} + \frac{1}{6}$ |
| $= 5 - \frac{3}{6}$ | $= 4\,\frac{3}{6}$ | $= \frac{34}{6} - \frac{7}{6}$ | því er svarið $4\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ |
| $= 4\,\frac{1}{2}$ | $= 4\,\frac{1}{2}$ | $= \frac{27}{7}$ | $= 4\,\frac{4}{6} - \frac{1}{6}$ |
| $= 4\,\frac{4}{6}$ | $= 4\,\frac{3}{6}$ | $= 4\frac{1}{2}$ | $= 4\,\frac{1}{2}$ |

$\frac{7}{6}$ er einn heill og einn sjötti. Ef einn er dreginn frá $5\frac{2}{3}$ er svarið $4\frac{2}{3}$ og þá á eftir að draga einn sjötta frá. Brotið $\frac{2}{3}$ jafngildir brotinu $\frac{4}{6}$ og ef einn sjötti er dreginn frá verður svarið $\frac{3}{6}$ sem jafngildir hálfum. Svarið verður því $4\frac{1}{2}$ .

Velta má fyrir sér hver þessara leiða lýsi bestum skilningi á þeim tölum sem fengist er við og þeirri aðgerð sem á að framkvæma. Ef nemendur hafa fengið tækifæri til að uppgötva og skoða mismunandi leiðir eru meiri líkur á að þeir geti rökstutt lausnir sína og hafi yfirsýn yfir það sem þeir eru að gera. Það er mikilvægt að nemendur fái tækifæri til að ræða um og skoða mismunandi lausnir.

Nemendur hafa kynnst mörgum leiðum við að finna samnefnara. Í glósubók á bls. 104 eru helstu leiðir settar fram. Gott er að ræða að það ræðst af nefnurum brotanna hvaða leiðir henta best til að finna samnefnara.

Mikilvægt er að nemendum takist að byggja upp skilning á margföldun og deilingu almennra brota áður en reglur um þessar reikniaðgerðir eru kynntar. Þeir þurfa að skilja af hverju margföldun brota felst í að margfalda saman teljara annars vegar og nefnara hins vegar og ekki síður af hverju finna má svar við deilingu með almennu broti með því að snúa seinna brotinu við og margfalda með því. Nemendur hafa töluvert fengist við margföldun og deilingu með brotum með því að nota líkön en þessar reglur hafa ekki verið kynntar fyrr. Þeir ættu því að hafa byggt upp grunnskilning á margföldun og deilingu með brotum. Mikilvægt er að nemendur fái tækifæri til að átta sig sjálfir á þessum reglum.

Við deilingu almennra brota hafa nemendur notað ýmsar leiðir. Þeir hafa notað endurtekinn frádrátt, fundið samnefnara og teiknað. Hér er athygli þeirra beint að því að sama svar fæst þegar deilt er með tölu og þegar margfaldað er með margföldunarandhverfu hennar. Þannig er leitt að reglunni um deilingu með brotum.

Eftir yfirferð þessa kafla ættu nemendur að vera færir um að geta beitt reikniaðgerðunum fjórum á alla almenna útreikninga með almennum brotum.
Í seinni bókum verður þó áfram umfjöllun um brotareikning. Sérstaklega verður þar hugað að margföldun og deilingu.

## Kennsluhugmyndir

Fyrstu dæmi kaflans eru upprifjun. Dæmi 1 og 2 eru heppileg til paravinnu og kennarinn þarf að meta út frá því hvernig gengur hvort ástæða er að taka dæmin til frekari skoðunar. Hér er verið að fást við grundvallaratriði varðandi brot sem ætla má að flestir 9. bekkingar hafi náð valdi á.

Í dæmum 3–6 er verið að skoða muninn á því hvort spurt er um hluta af heild eða hluta úr einingu. Nemendur geta glímt við dæmin hver fyrir sig eða í pörum en síðan þarf að ræða um hvernig $\frac{1}{4}$ af heild verður $\frac{3}{4}$ úr snúð.

Á blaðsíðum 101–102 eru ýmis dæmi sem nemendur ættu að vinna sjálfstætt og kennari að nota tækifærið til að ræða við nemendur, fylgjast með vinnu þeirra og greina brotaskilning. Búast má við að dæmin reyni töluvert á skilning og færni nemenda. Bæta má við viðfangsefnin með því að láta nemendur finna fleiri punkta á talnalínunum eða búa til eigin talnalínur. Gagnlegt er fyrir nemendur að ræða saman um það hvernig þeir finna punktana.

Í framhaldi af dæmum 16–17 geta nemendur búið til svipuð dæmi með pappaspjöldum eða gefið dæmi um hvernig $\frac{5}{12}$ af fjölda getur bæði verið 15, 485, og 2,5 allt eftir því hvaða heildarfjölda er miðað við.

Góð leið til að skoða samlagningu og frádrátt brota er að nota brotabúta á myndvarpa og reikna nokkur dæmi með samnefndum og ósamnefndum brotum. Kennarinn getur búið til dæmi með bútunum og rætt í því samhengi hvernig nýta má teikningar við brotareikning með því að teikna brotabúta, rétthyrninga eða önnur form. Nemendur þurfa að gæta þess að þær heildir sem teiknaðar eru í hverju dæmi séu jafn stórar og einnig er gott að huga að því að auðvelt sé að skipta heildunum út frá þeim brotum sem fengist er við. Oft má því nota rúður í reikningsbókum sem viðmið. Annað tæki sem nemendur geta nýtt er brotatafla eins og bent er á í dæmi 19. Í dæmum 20–21 er tilvalið að hvetja nemendur til að setja niðurstöður sínar fram á myndrænan hátt, t.d. með því að nota brotarenning eða rúður.

Á blaðsíðu 103 og 104 eru æfingadæmi þar sem nemendur eiga að leggja saman eða draga frá samnefnd og ósamnefnd brot. Nemendur fást bæði við eiginleg brot og blandnar tölur. Gott er að ræða við nemendur um það hvaða leiðir þeir velja við að finna samnefnara hverju sinni. Verkefni á blaðsíðu 105 eru upprifjun á því hvernig finna má hluta af fjölda með því að margfalda með broti.

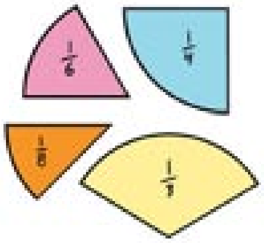
Í dæmi 34 eru skoðaðar þrjár leiðir til að finna brot af broti ($\frac{3}{4}$ af $\frac{1}{2}$). Stuðst er við myndræna framsetningu og nemendur eru hvattir til að teikna og bera saman mismunandi leiðir. Á svipaðan hátt er fengist við verkefni þar sem annað brotið er stærri en einn. Æskilegt er að nemendur vinni verkefnin tveir saman og að kennarinn fylgist vel með vinnu nemenda og aðstoði þá eftir því sem þörf krefur.

Efst á blaðsíðu 107 er þraut sem gott er að nemendur glími við í hópum og ræði saman um leiðir til lausnar. Því er hentugt að byrja kennslustund með slíku sameiginlegu verkefni.

Í dæmi 40 er sjónum nemenda beint að því að þegar tvö brot eru margfölduð saman má margfalda saman teljara og nefnara. Eflaust hafa einhverjir nemendur uppgötvað þessa reglu áður en hér er þeim bent á að skoða samhengi milli nefnara og telara í þeim brotum sem marfölduð eru saman og í útkomunni. Þetta er gert m.a. til að auðvelda þeim að margfalda saman fleiri en tvö brot en flókið getur verið að beita teiknilausnum þegar brotin eru orðin fleiri en tvö.

Í g-lið í dæmi 45 eru nemendur beðnir um að skoða svörin við þeim dæmum sem þeir hafa verið að reikna og velta fyrir sér hvort finna megi jafngild brot með lægri nefnurum og teljurum. Þetta er ágætur aðfari að verkefnunum á næstu blaðsíðu en þar er sjónum beint að styttingu brota og því hvernig nota má þáttun við að finna sameiginlega þætti.

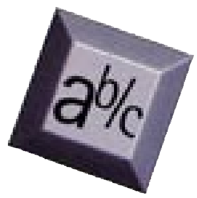
Á blaðsíðu 109 er fengist við deilingu á svipaðan hátt og gert hefur verið áður. Notaður er endurtekinn frádráttur og það að gera brot samnefnd. Gott er að nota bæði talnalínu og brotabúta.



Þegar fram kemur afgangur við deilingu með broti er mikilvægt að nemendur átti sig á að þeir þurfa að finna hve stór hluti afgangurinn er af deilinum (tölunni sem deilt var með). Þetta getur verið gott að skoða með brotabútum eða með því að teikna. Mikilvægt er að nemendur leysi dæmi 51–55 með því að nota gögn eða teikningar til að þeir öðlist meiri tilfinningu fyrir efninu.

Í dæmum 56–58 er sjónum beint að því að sama niðurstaða fæst ef t.d. deilt er með $\frac{1}{2}$ og margfaldað með tveimur og einnig ef margfaldað er með $\frac{1}{2}$ og deilt með tveimur. Í dæmunum er annars vegar skoðað samband á milli margföldunar með einingarbroti og deilingar með nefnara þess og hins vegar deilingar með einingarbroti og margföldunar með nefnara þess. Þannig er lagður grunnur að því að nemendur átti sig á að í stað þess að deila með broti má margfalda með margföldunarandhverfu þess.

Í glósubók er fjallað um að nota má margföldunarandhverfu bæði við margföldun og deilingu með brotum. Nemendur hafa kynnst margföldunarandhverfu áður en nauðsynlegt er rifja hugtakið upp og hver hlutleysan er í margföldun. Í flestum dæmunum er eingöngu fengist við deilingu eða margföldun með einingabrotum sem gera má ráð fyrir að nemendur geti auðveldlega fundið margföldunaranhverfu fyrir. En nemendur þurfa líka að finna andhverfu þar sem teljarinn er stærri en 1. Gott er að skoða með nemendum hvernig finna má margföldunarandhverfu slíkra brota. Áfram verður unnið með þetta atriði seinna.



Á mörgum vasareiknum er sérstakur brotatakki sem nota má til að reikna almenn brot og fá svarið sem almennt brot. Æskilegt er að nemendur læri á vasareiknana sem þeir eru með og geti notað þá við að reikna almenn brot ef sá möguleiki er fyrir hendi.

Síðasta dæmi kaflans er dæmi 66. Það má nota sem samantekt eða námsmat. Ætlast er til að nemendur noti bæði nemendabókina og eigin vinnuhefti til þess að finna lausn. Hvetja þarf nemendur til að ígrunda og velta gaumgæfilega fyrir sér spurningunum sem eru settar fram.

Á meðan nemendur vinna dæmi kaflans þarf kennarinn að fylgjast vel með þeim og hvetja þá til að nota gögn og myndir sem líkön. Það skiptir miklu máli að nemendur skilji hvað þeir eru að gera. Notkun hluta og mynda ásamt því að þurfa að tjá sig um eigin gjörðir og taka þátt í samræðum um leiðir annarra er lykilatriði í því að nemendum takist að byggja upp traustan skilning á brotareikningi. Hlutverk kennarans er því fyrst og fremst að skapa jákvætt umræðuumhverfi þar sem nemendum leyfist að gera mistök og læra af þeim.