

Kennsluleiðbeiningar

Kennsluleiðbeiningar

8-tíu



8-tíu

Átta – tíu

Stærðfræði 5

Kennsluleiðbeiningar

© 2007 Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir

© 2007 teikningar Halldór Baldursson

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

Öll réttindi áskilin

1. útgáfa 2007

Námsgagnastofnun

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Efnisyfirlit

Inngangur	4
Stærðfræði fyrir alla	4
Breytingar á kennsluháttum	6
Um bókaflokkinn	12
Vefsíður	13
Rúmfræði og algebra	15
Tölur og talnafræði	21
Líkur	27
Reikningur og algebra	33
Pýþagóras	39
Líkön	42
Algebra og jöfnur	48
Dulmálfræði	53

Inngangur

Bókin *Átta–10, 5* er næstsíðasta grunnbókin í námsefnisflokknum *Átta–10* sem ætlaður er unglingastigi. Í inngangsköflum kennsluleiðbeininga með *8–tíu 1, 3* og *5* er fjallað um stærðfræðinám og -kennslu og þá hugmyndafræði sem lögð er til grundvallar við gerð námsefnisins. Sjónum er beint að mikilvægum þáttum sem skipta máli við skipulagningu og framkvæmd stærðfræðikennslu fyrir unglinga. Sérstaklega er fjallað um hlutverk stærðfræðikennarans og þær kennslufræðilegu ákvarðanir sem hann þarf að taka þegar hann skipuleggur kennsluferli sem tekur mið af þörfum fjölbreytts nemendahóps. Ljóst er af ýmsum rannsóknum að kennarinn gegnir veigamiklu hlutverki í að búa nemendum gott námsumhverfi þannig að árangursríkt nám fari fram. Æskilegt er að kennarar sem ekki þekkja efnið kynni sér það vel í heild og sérstaklega inngangskafla í kennsluleiðbeiningum með *8–tíu 1, 3* og *5*.

Stærðfræði fyrir alla

Eins og fram kemur í námskrá er stærðfræði svo samofin menningu okkar og þjóðfélagsháttum að allir þjóðfélagsþegnar þurfa að öðlast nokkra kunnáttu og þekkingu í stærðfræði. Samfélagið þarf á því að halda að allir þegnar þess búi yfir tiltekinni þekkingu þannig að þeir geti tekið þátt í og mótað lýðræðislega umræðu. Tæknivætt samfélag nútímans gerir sífellt meiri kröfur til stærðfræðilegrar hæfni og ef allir eiga að hafa jafna möguleika til þátttöku bæði á pólitískum og efnahagslegum vettvangi þarf að huga vel að grunnmenntun allra.



Stærðfræði fyrir alla hefur verið eitt af slagorðunum sem fylgt hafa þeim áherslubreytingum í stærðfræðikennslu sem unnið hefur verið að á síðust áratugum. Þar er lögð áhersla á jafnræði og jafnrétti allra til náms óháð kyni, þjóðerni og þjóðfélagsstöðu svo dæmi séu nefnd. Tryggja þarf aðgengi allra nemenda að góðri og fjölbreyttri stærðfræðikennslu og allir þurfa að fá tækifæri til að kynnast inntaksþáttum og aðferðum stærðfræðinnar. Þetta þýðir ekki að allir eigi að læra það sama en þeir eiga að fá tækifæri til að takast á við svipuð eða sömu viðfangsefni út frá eigin forsendum og afla sér þekkingar á fjölbreyttum sviðum stærðfræðinnar.

Hægt er að skipuleggja kennslu sem tekur mið af ólíkum þörfum nemenda með því t.d. að nemendur séu að fást við verkefni á sama sviði en takist á við efnið með ýmsu móti eða stefnt sé að mismunandi markmiðum. Markmið nemenda með þátttöku í verkefni gætu verið ólík. Sumir gætu verið að skoða ákveðin tilvik meðan

aðrir eru að leita að almennri reglu og setja hana fram á táknmáli stærðfræðinnar. Í öðru tilviki gæti þátttaka eins nemanda í verkefni verið fyrst og fremst af félagslegum toga meðan aðrir ættu að ná tökum á tilteknu inntaki jafnframt því að læra að starfa með öðrum.

Kennarar þurfa í kennslu sinni að leitast við að ná til allra nemenda með því að:

- Velja viðfangsefni út frá áhugasviðum og hæfileikum nemenda.
- Gera nemendum kleift að dýpka skilning sinn á stærðfræði og beitingu hennar við sem fjölbreyttastar aðstæður.
- Skapa námsumhverfi sem ýtir undir rannsóknir og eflingu stærðfræðilegra hugmynda.
- Nota tækni og aðstoða nemendur við að beita tækni og öðrum tiltækum gögnum við stærðfræðilegar athuganir.
- Tengja og hjálpa nemendum við að tengja fyrri þekkingu við nýja þekkingu.

Unglingar þurfa að fá tækifæri til að fást við, rannsaka og kanna stærðfræðileg fyrirbæri og hugtök í gegnum verkleg og áþreifanleg viðfangsefni ekki síður en yngri nemendur. Þeir þurfa að fá tækifæri til að skynja til dæmis að rúmmál keilu er þriðjungur af rúmmáli sívalnings með sama grunnflöt og sömu hæð. Einnig er verkleg vinna með brot, mynsturgerð og tilraunir með líkindi mikilvæg forsenda fyrir skilningi á þessum þáttum svo nokkur dæmi séu nefnd. Tengsl við raunveruleika og skilningur á því hvernig stærðfræðin er notuð á fjölmörgum sviðum daglegs lífs eru sömuleiðis mikilvæg atriði til að auka og viðhalda áhuga nemenda á stærðfræðinni.

Notkun ýmiss konar námsgagna og verkleg kennsla auðveldar kennurum oft að aðlaga verkefni að mismunandi þörfum nemenda og stuðlar að umræðum um viðfangsefni og vinnubrögð.

Á síðustu árum hefur mikið verið rætt um fjölgreindir og mismunandi námsstíla nemenda. Gott er að nemendur geri sér grein fyrir veikleikum sínum og styrkleikum og að þeir reyni að átta sig á því á hvern hátt þeir læra best. Þó ber að varast að nemendur festist í ákveðnu fari, bæði í vinnubrögðum og á hæfileikasviði. Nota þarf styrkleikana til að byggja upp veikur hliðarnar. Þó svo að einhverjum láti best að vinna einn og sér þarf sá hinn sami að læra að vinna með öðrum og þekkja þær leikreglur sem gilda í samstarfi og samvinnu. Einnig þurfa allir nemendur að læra að takast á við verkefni upp á eigin spýtur.

Miklu máli skiptir að nemendur í 10. bekk geri sér grein fyrir styrkleikum sínum og veikleikum og að þeir vinni markvisst að þeim markmiðum sem stefnt skal að. Markmiðin geta verið breytileg eftir einstaklingum. Við námsmat þarf að huga vel að því að öll markmið námsins séu metin og að námsmat sé fjölbreytt. Einnig þarf að taka mið af mismunandi forsendum nemenda. Námssefninu fylgja námsmatsverkefni sem kennarar get nýtt til að meta árangur nemenda á fjölbreyttan hátt. Samræmd próf eru veruleiki sem huga þarf að. Ef nemandi ætlar sér í framhald-

skóla þarf hann að hafa möguleika á að greina stöðu sína og setja sér raunhæf markmið til að stefna að hvort sem um er að ræða að taka samræmt lokapróf í stærðfræði eða ekki. Samræmd próf í stærðfræði taka mið af lokamarkmiðum með stærðfræðinámi í grunnskóla og æskilegt er að nemendur geti kynnt sér þau svo að þeir geti áttað sig á stöðu sinni. Námskrána má finna á heimasíðu menntamálaráðuneytis. Einnig er æskilegt að nemendur kynni sér reglur um framkvæmd samræmdra prófa og inntökuskilyrði í framhaldsskóla en þær upplýsingar má finna á heimasíðu Námsmatsstofnunar <http://www.namsmat.is>.

Breytingar á kennsluháttum

Á síðustu 10–15 árum hafa kennarar víða um heim verið að takast á við svipaðar áherslubreytingar í stærðfræðikennslu og íslenskir kennarar. Rannsakendur á sviði stærðfræðimenntunar hafa í auknum mæli beint sjónum sínum að kennaranum og starfi hans enda ljóst að hann gegnir miklu hlutverki í því að skapa nemendum góð tækifæri til náms. Viðhorf kennara til stærðfræðináms og -kennslu og reynsla þeirra úr eigin námi hefur mikil áhrif á kennslu þeirra. Oft stangast þessi viðhorf á við þær áherslubreytingar sem unnið er að. Því þurfa kennarar ekki bara að takast á við að kenna nýtt inntak, þeir þurfa einnig að til-einka sér ný viðhorf til náms og kennslu og þar af leiðandi einnig breytta kennsluhætti.



Grundvallarbreytingar á gerðum og viðhorfum eru mjög tímafrekar og oft á tíðum einnig krefjandi og jafnvel sársaukafullar. Þetta breytingaferli felur meðal annars í sér að kennarinn er ekki lengur sá sem býr yfir þekkingunni og miðlar henni til nemenda heldur verða nemendur sjálfir meiri gerendur í eigin námi og sköpun þekkingar. Kennslan þarf að byggjast á góðum skilningi á þeim meginhugmyndum sem nemendur eiga að ná tökum á samkvæmt námskrá, viðhorfum til þekkingar sem felast í því að það séu nemendur sjálfir sem byggja hana upp og kennsluháttum sem gera nemendum kleift að byggja upp góðan stærðfræðilegan skilning. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að rannsaka og kanna stærðfræðileg hugtök þar sem lögð er áhersla á bæði hvers vegna og hvernig. Umræður og samstarf nemenda og kennara skipa hér stóran sess (Goldsmith og Shifter 1997).¹

Rannsóknir á stærðfræðikennurum í breytingaferli benda til þess að þeir þættir sem hamla því einna mest að kennarar breyti áherslum sínum í starfi tengist viðhorfum þeirra til náms og kennslu. Því er oft ályktað sem svo að breytingar hafi ekki átt sér stað vegna þess að viðhorf kennaranna hafi ekki breyst. Þetta er fullmikil einföldun því nám og kennsla fer fram í félagslegu samhengi og þetta félagslega samhengi

¹ Goldsmith, L.T. og Shifter D. (1997). Understanding Teachers in Transition. Í Fennema, E. og Nelson B.S. (Ritstj.), *Mathematics Teachers in Transition*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

hefur oft mikil áhrif á framkvæmdina. Hér koma til þættir eins og væntingar annarra, svo sem nemenda, foreldra, samkennara og skólayfirvalda, samræmd próf, bekkjarstærð og námsefni svo nokkur dæmi séu tekin. Sá veruleiki sem kennari tekst á við dagsdaglega í starfi sínu er hvort tveggja í senn mikilvægasta uppsprettan fyrir þróun hans í starfi en jafnframt stærsti þröskuldurinn.

Kuzwayo skoðaði hverjar væru helstu hindranir við að breyta áherslum í kennslu að mati kennara sem tóku þátt í rannsókninni *The Learners Perspective Study*.² Skipta má hindrunum upp í ýmsa ytri þætti sem kennarar telja að þeir geti í raun haft lítil áhrif á og innri þætti sem þeir telja að snúi meira að þeim sjálfum. Ytri þættir sem kennararnir nefna eru kennslubækur, námskrá, lokapróf, tímaskortur, agavandamál og skortur á stuðningi foreldra. Allt eru þetta þættir sem eru vel þekktir úr íslenski skólamálaumræðu og ekki má gera lítið úr áhrifum þeirra á það sem fram fer í skólastofunni. Þeim er hins vegar ekki öllum auðvelt að breyta eða hafa áhrif á þó svo að t.d. kennsluhættir geti vissulega haft áhrif á agavandamál og hægt sé að ýta undir meiri stuðning foreldra með markvissri fræðslu til þeirra og umræðum við þá.

Þeir innri þættir sem kennararnir nefna eru til dæmis:

- Stærðfræðin vill stundum lúta í lægra haldi fyrir raunveruleikanum.
- Hvaða inntaksþættir það eru sem leggja þarf megináherslu á þegar námskráin er jafn umfangsmikil og raun ber vitni.
- Hvernig má greina og byggja á þekkingu nemenda.
- Hvernig má takast á við erfið hugtök.
- Vandamál sem fylgja því þegar nemendur hafa lært reglur og aðferðir án nokkurs skilnings.
- Erfiðleikar við að ná til allra nemenda.
- Erfiðleikar við að komast yfir efnið.
- Hver er heppileg röð eða uppbygging inntaksþátta.
- Hvernig má meta kunnáttu og skilning nemenda.

Allt eru þetta þættir sem væntanlega hljóma kunnuglega í eyrum þeirra sem hafa verið að takast á við að breyta áherslum sínum í kennslu. Þrátt fyrir að viðhorf til náms og kennslu hafi breyst mæta kennarar ýmsum hindrunum sem valda því að þeir framkvæma ýmislegt á annan hátt en þeir hefðu helst kosið og grípa til gamalla og rótgróinna aðferða. Kennarar verða sjálfir að takast á við þessi vandamál, það getur enginn gert fyrir þá. Samvinna og umræður við samkennara geta þó skipt sköpum sem og það að gera sér grein fyrir að fleiri eru að glíma við svipuð vandamál. Reyndir og vel menntaðir kennarar sem eru allir af vilja gerðir geta líka átt í erfiðleikum með að koma hugmyndum í framkvæmd. (Kuzwayo 2006)³

² <http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps/>

³ Khuzwayo, H. B. (2006). A study of Mathematics Teachers' Constraints in Changing Practices: Some Lessons for Countries Participating in the Learner's Perspective Study. Í Clarke, D.J. og fleiri (Ritstj.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. 201–214. Taipei: SensePublishers.

Ekki búa allir kennarar við þær aðstæður að geta tekið þátt í faglegri umræðu um inntak og leiðir í stærðfræðikennslu innan eigin skóla. Því skiptir miklu máli að vera vakandi fyrir þeim tækifærum sem gefast á námskeiðum og námsstefnum auk þess að fylgjast með faglegri umræðu í fagtímaritum og á Netinu. Í gegnum síðuna <http://www.hvar.is> hafa Íslendingar rafrænan aðgang að mikilvægum fagtímaritum svo sem eins og *Educational Studies in Mathematics* og *Journal for Mathematical Behavior*. Gagnagrunnar eins og *Proquest* gera okkur jafnframt kleift að leita að rafrænu efni um tiltekin efnissvið. Einnig eru heimasíður fagfélaga, rannsóknarstofnana og stærðfræðisetra gagnlegir upplýsingabrunnar. Yfirlit yfir nokkra slíka aðila er að finna aftast í þessum inngangi.

Rannsóknir síðustu ára á kennurum á vettvangi hafa ekki eingöngu snúist um að greina þær hindranir og erfiðleika sem kennarar standa frammi fyrir þegar þeir eru að breyta áherslum í kennslu sinni. Sjónum hefur líka verið beint að kennslunni sjálfri og því sem fram fer í kennslustofunni. Í slíkum rannsóknum er algengt að tekið sé upp á myndbönd það sem fram fer í skólastofunni. Síðan er hægt að skoða það sem fram fer út frá mismunandi sjónarhornum. Hver er uppbygging kennslustundanna? Hvernig spurninga spyr kennarinn? Hvers konar verkefni eru nemendur að glíma við, hvernig nálgast nemendur þau og hvað setja þau af stað hjá þeim? Hvað gefst vel og hvað illa? Hvernig er samskiptum kennara og nemenda háttað? En notkun námsefnis? Þetta eru einungis nokkur dæmi um þætti sem má skoða. Lærdómsríkt getur verið fyrir kennara að taka upp eigin kennslu á myndband og reyna að greina hana.



Í kjölfar rannsókna og þróunarverkefna hafa verið gefnar út bækur þar sem greint er frá niðurstöðum eða því þróunarferli sem kennarar og rannsakendur hafa farið í gegnum en oft er um náð samstarf þessara aðila að ræða. Slíku efni fylgja oft geisladiskar með upptökum úr kennslustofum sem lærdómsríkt getur verið að skoða auk þess að lesa bækurnar. Dæmi um slíkt efni er bókin *Connecting Mathematical Ideas* eftir Jo Boaler og Cathy Humphreys.

Í fjölþjóðlegri samanburðarrannsókn á kennslustundum *The Learners Perspective Study* sem greint var frá í inngangi að *Átta10-1* kom fram að bæði nemendur og kennarar nefndu nokkra þætti sem væru mikilvægir í kennslustundum eða kennsluferli og þeir töldu að skiptu miklu máli fyrir það nám sem fram fór. Þetta voru þættir eins og:

- upphaf kennslustundarinnar
- verkefnin
- uppspretta verkefnanna
- tækifæri nemenda til að greina frá lausnaleyðum
- leiðsögn kennarans
- samskipti nemenda og kennara þegar kennari gengur um stofuna
- samantekt í lok kennslustundar.

Við nánari skoðun og greiningu á þessum þáttum kom fram að þó svo að greina megi þessa þætti í kennsluferli í þeim löndum sem tóku þátt í rannsókninni þá getur verið munur á því hvað kennarinn er í raun að gera þegar hann t.d. gengur um stofuna. Þar er bæði menningarmunur og munur milli einstakra kennara.

Rannsakendurnir Clarke og Mesiti skoðuðu nánar á hvern hátt kennarar nota fyrstu 10 mínúturnar í kennslustundinni. Rétt er að taka fram að í LPS rannsókninni var tekið upp 10 kennslustunda kennsluferli hjá þremur kennurum í hverju landi sem tók þátt og voru valdir kennarar sem af skólasamfélaginu voru taldir ná góðum árangri með kennslu sinni. Clarke og Mesiti skoðuðu sérstaklega kennsluferli hjá átta reyndum kennurum í fjórum löndum Ástralíu, Svíþjóð, Bandaríkjunum og Japan. Þeir greindu sex meginþætti sem einkenna upphaf kennslustunda. Þessi þættir eru:

Undanfari kennslu. Hér er farið yfir ýmis almenn mál sem ekki lúta að inntaki kennslunnar svo sem skipulag og atriði sem snerta velferð nemenda almennt.

Upprifjun. Einhvers konar kveikja þar sem lögð eru fyrir verkefni, upprifjun eða yfirferð á verkefnum svo sem heimaverkefnum.

Kennsla. Verkefni er lagt fyrir og því fylgt úr hlaði af kennaranum. Það er sett í eitthvert samhengi og ýtt undir ígrundun eða kynnt ný hugtök eða lausnaleiðir.

Æfing. Nemendur æfa sig í að beita aðferðum eða hugtökum.

Mat á frammistöðu nemenda. Þar sem um 10 stunda kennsluferli var að ræða voru dæmi um að kennslustundir hæfust með greinandi prófum eða formlegum skriflegum prófum.

Yfirferð/leiðrétting. Yfirferð og útskýring á lausnum eða lausnaleiðum í kjölfar þess að nemendur hafa glímt við verkefni í stutta stund.

Kennararnir virðast setja þessa þætti saman á ýmsa vegu. Rannsakendur greindu sex mismunandi samsetningar sem voru algengar og virtust skila góðum árangri annaðhvort að mati nemendanna og kennaranna sjálfra eða að rannsakendur töldu sig greina að þær stuðluðu að virkni, áhuga og námi nemenda.

Þekkt efni stuðlar að skilningi. Kennslustundin byrjar á kveikju sem felst í stuttum afmörkuðum spurningum og yfirferð og leiðréttingu þeirra. Yfirferðin getur verið í höndum kennara eða nemenda sjálfra.

Tengd kennsla. Byrjað er með upprifjun eða yfirferð á heimavinnu eða sambærilegum verkefnum. Í kjölfarið er nýtt efni verkefni kynnt til sögunnar og því fylgt úr hlaði af kennaranum.

Frá hinu sértæka til þess almenna. Hér er byrjað á kveikju þar sem lagðar eru fyrir stuttar afmarkaðar spurningar og í kjölfarið greina nemendur frá lausnum og lausnaleiðum fyrir framan allan hópinn. Því næst er lagt fyrir hliðstætt verkefni þar sem nemendur geta myndað fleiri tengsl og þeir hvattir til að finna fleiri lausnaleiðir.

Yfirferð og leiðrétting sem er stjórnað af nemendum. Nemendur fá tækifæri til að fara yfir og leiðrétta heimavinnu hver fyrir sig. Í framhaldi af því ræðir allir bekkurinn um heimaverkefnið. Nemendur sjálfir leiða umræðuna og skýra frá lausnaleiðum og vandamálum sem þeir glímdu við.

Sett fram raunveruleg vandamál. Hér hefst kennslustundin á því að kennarinn setur fram eitthvert vandamál í raunverulegu samhengi og reynir að fanga athygli nemenda með því að færa það í sem raunhæfastan búning eða setja það fram á leikrænan hátt.

Umhyggja. Hér eru fyrstu mínúturnar notaðar til að ræða um þætti sem ekki tengjast námsefninu en lúta að umhyggju fyrir nemendum. Þeir eru aðstoðaðir við að skipuleggja nám sitt og taka ábyrgð á því. Einnig eru þeir hvattir til þátttöku í sameiginlegum verkefnum utan skólans. Þó að þetta snúi ekki að stærðfræðináminu sem slíku þá sýnir það að kennurum er umhugað um nemendur sína, velferð þeirra og árangur í námi og er því mikilvægur hluti af kennsluferlinu í heild (Mesiti og Clarke 2006).⁴

Ljóst er að það skiptir miklu máli hvernig kennarinn byrjar kennslustundina. Skýr skilaboð strax í upphafi koma nemendum af stað, geta kveikt áhuga og sett af stað umhugsun og ígrundun um það efni sem ætlunin er að ná tökum á. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir tilgangi þess sem þeir eru að gera og nauðsynlegt er að kveikja áhuga þeirra. Þetta má gera á ýmsan hátt eins og fram hefur komið.

En það hvernig kennslustundir enda skiptir líka máli. Eitt af því sem talið hefur einkenna kennslustundir í Japan og hjá fleiri Asíuþjóðum, sem hafa náð góðum árangri í alþjóðlegum samanburðarrannsóknnum, er skýrt og hnitmiðað upphaf og endir á kennslustundum. Þetta er talið skapa ákveðna samfellu í námi nemenda og stuðla að góðum árangri. Samkvæmt LPS rannsókninni er líkast til fullmikil einföldun að segja að skýr samantekt í lok kennslustundar einkenni kennslustundir í Asíu en ekki fer á milli mála að þetta er mjög sterkt einkenni á kennslustundum í Japan.

Tilgangur japanskra kennara með samantektinni er

- að undirstrika og draga saman meginatriði kennslustundarinnar
- að ýta undir ígrundun nemenda um það sem þeir hafa verið að glíma við

⁴ Mesiti, C. og Clarke, D. (2006). Beginning the Lesson: The First 10 Minutes. Í Clarke, D.J. og fleiri (Ritstj.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. 47–71. Taipei: SensePublishers.

8-tíu

- c) að setja kynningu á nýju hugtaki í samhengi við það sem nemendur hafa verið að fást við
- d) að tengja viðfangsefnið sem verið er að fást við því sem fengist hefur verið við áður

Í Þýskalandi virðist samantekt í lok kennslustundar vera nokkuð algeng en hún er ekki eins markviss og í Japan og snýst meira um að draga saman einstök atriði eða gera athugasemdir við tilteknar lausnaleyðir nemenda en ekki að draga saman viðfangsefni kennslustundarinnar í heild. Ástralskir kennarar virðast ekki vera með samantekt í lok hverrar kennslustundar. Þeir bíða með samantekt þar til umfjöllun um tiltekinn inntakspátt er lokið. Í Bandaríkjunum má finna dæmi um að kennarar séu með samantekt en það virðist hins vegar ekki vera almennt (Shimizu 2006).⁵

⁵ Shimizu, Y. (2006). How Do You Conclude Today's Lesson? The Form and Functions of 'Matome' in Mathematics Lessons. Í Clarke, D.J. og fleiri (Ritstj.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. 47–71. Taipei: SensePublishers.

Um bókaflokkinn

Átta-10 er námsefnisflokkur sem ætlað er að við stærðfræðinám í 8.–10. bekk. Átta-tíu er sjálfstætt framhald af námsefnisflokkunum *Eining* og *Geisli*. Miðað er því við að nemendur hafi kynnst þeim vinnubrögðum við stærðfræðinám sem fela í sér að rannsaka, ræða, túlka, vinna hlutbundið, skrá og leysa þrautir.

Í flokknum eru sex grunnbækur.

Á heimasíðu námsefnisins

http://www.nams.is/stae_ungl_stig/index.htm

má finna kennsluleiðbeiningar og ýmislegt ítarefni, s.s. eyðublöð, gagnvirk verkefni og slóðir fyrir nemendur og kennara. Einnig eru þar forrit og önnur verkfæri fyrir nemendur. Lausnir við viðfangsefni hverrar bókar er að finna á heimasíðunni. Námsmatsverkefni eru gefin út á geisladiskum.



STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG				
ÞÉTTI	STIG	KESSLULEIÐ	LAUSNIR	ÞÉTTI
Þéttur 1	Þéttur 2	Þéttur 3	Þéttur 4	Þéttur 5
Þéttur 6	Þéttur 7	Þéttur 8	Þéttur 9	Þéttur 10
Þéttur 11	Þéttur 12	Þéttur 13	Þéttur 14	Þéttur 15
Þéttur 16	Þéttur 17	Þéttur 18	Þéttur 19	Þéttur 20
Þéttur 21	Þéttur 22	Þéttur 23	Þéttur 24	Þéttur 25
Þéttur 26	Þéttur 27	Þéttur 28	Þéttur 29	Þéttur 30
Þéttur 31	Þéttur 32	Þéttur 33	Þéttur 34	Þéttur 35
Þéttur 36	Þéttur 37	Þéttur 38	Þéttur 39	Þéttur 40
Þéttur 41	Þéttur 42	Þéttur 43	Þéttur 44	Þéttur 45
Þéttur 46	Þéttur 47	Þéttur 48	Þéttur 49	Þéttur 50
Þéttur 51	Þéttur 52	Þéttur 53	Þéttur 54	Þéttur 55
Þéttur 56	Þéttur 57	Þéttur 58	Þéttur 59	Þéttur 60
Þéttur 61	Þéttur 62	Þéttur 63	Þéttur 64	Þéttur 65
Þéttur 66	Þéttur 67	Þéttur 68	Þéttur 69	Þéttur 70
Þéttur 71	Þéttur 72	Þéttur 73	Þéttur 74	Þéttur 75
Þéttur 76	Þéttur 77	Þéttur 78	Þéttur 79	Þéttur 80
Þéttur 81	Þéttur 82	Þéttur 83	Þéttur 84	Þéttur 85
Þéttur 86	Þéttur 87	Þéttur 88	Þéttur 89	Þéttur 90
Þéttur 91	Þéttur 92	Þéttur 93	Þéttur 94	Þéttur 95
Þéttur 96	Þéttur 97	Þéttur 98	Þéttur 99	Þéttur 100

Ætlunin er að gefa út nokkur þemahefti með efninu og eru tvö þemahefti þegar komin út. Þau eru *Töflureiknir notaður* eftir Margréti Völu Gylfadóttur og Stefán Loga Sigurþórsson og *Gullinsnið* eftir Kristínu Bjarnadóttur. Væntanleg eru á næstunni þemahefti um þrautir og mælieiningar um víða veröld.

Í bókinni *8-tíu*, 5 eru átta kaflar. Kaflaheiti segja til um stærðfræðilegt inntak. Kaflarnir heita: *Rúmfræði og algebra*, *Tölur og talnafræði*, *Líkur*, *Reikningur og algebra*, *Pýþagoras*, *Líkön*, *Algebra og jöfnur* og *Dulmálsfræði*. Fjallað hefur verið um flesta þessa þætti áður í fyrri bókum í námsefnisflokknum *Átta-10*. Hér er umfjöllun um þá haldið áfram en í auknum mæli er reynt að flétta inntaksþætti saman auk þess sem gefin eru dæmi um notkun stærðfræði í samfélaginu bæði fyrr og nú.

Í upphafi hvers kafla eru helstu markmið kaflans sett fram fyrir nemendur. Þetta er gert til að ýta undir að nemendur verði meðvitaðri um inntak kaflanna og ígrundi eigið nám og framvindu þess. Við gerð námsefnisins var tekið mið af *Aðalnámsskrá grunnskóla, stærðfræði frá 1999* og drögum að nýrri námskrá í stærðfræði frá 19.12. 2005 (<http://namsskipan.is/Namskrardrog/Grunnskolar/>). Í kennsluleiðbeiningum er umfjöllun um efni hvers kafla og rætt um val á efnisatriðum. Þar má finna hugmyndir að nálgun og framkvæmd kennslu. Hafa verður þó í huga að alltaf þarf að skipuleggja kennslu miðað við þann hóp sem unnið er með og aðstæður á hverjum stað.

Vefsíður

Kennarar geta víða leitað fanga bæði við leit að hugmyndum sem nýta má í kennslunni og þegar þeir vilja styrkja sig í starfi og fylgjast með því sem er að gerast á sviði stærðfræðináms og -kennslu. Hér er yfirlit yfir nokkrar vefsíður sem hafa að geyma gagnlegar upplýsingaveitur fyrir stærðfræðikennara.

Ísland

Heimasíða Námsgagnastofnunar – <http://www.nams.is/>

Námsmatsstofnun – <http://www.namsmat.is/>

Flötur samtök stærðfræðikennara – <http://flotur.ismennt.is/>

Stærðfræðileikir – <http://staerdfraedi.khi.is/staerdfraedileikir/>

Danmörk

EMU – Elektronisk mødested for undervisningsverdenen – Matematik

<http://www.emu.dk/gsk/fag/mat/index.html>

Danmarks matematiklærerforening sem gefur út tímaritið Matematik –

<http://www.matematik.ffw.dk/>

Noregur

Caspar Forlag gefur út tímaritið Tangenten – <http://www.caspar.no/>

LAMIS – Landslaget for Matematikk I Skolen – <http://lamis.no/>

NASJONALT SENTER FOR MATEMATIKK I OPPLÆRINGEN –

<http://www.matematikkssenteret.no>

Det nationale nettstedet for matematik – <http://www.matematikk.org>

Svíþjóð

Tímaritið – Namnaren – <http://namnaren.ncm.gu.se/>

Nationellt Centrum for Matematikutbildning – <http://ncm.gu.se/>

Sænsku stærðfræðikennarasamtökin – <http://www.smal-matte.com/>

Bretland

The Mathematical Association – Gefur út Mathematics in School –

<http://www.m-a.org.uk/>

ATM Association of Teachers of Mathematics – gefur út Mathematics Teaching

– <http://www.atm.org.uk/>

Mathematics Enrichment – <http://nrich.maths.org.uk>

The Standards site – Key stage 3 – Mathematics

<http://www.standards.dfes.gov.uk/keystage3/subjects/maths/>

Holland

Freudenthalstofnunin – <http://www.fi.uu.nl>

Bandaríkin

National Council of Teachers in Mathematics – <http://www.nctm.org/>

Principles and Standards for School Mathematics –

<http://standards.nctm.org/> <http://standards.nctm.org/document/index.htm>

Kennsluhugmyndir og smáforrit frá NCTM – <http://illuminations.nctm.org>

Smáforrit NCTM – <http://standards.nctm.org/document/eexamples/index.htm>

Sérkennsla

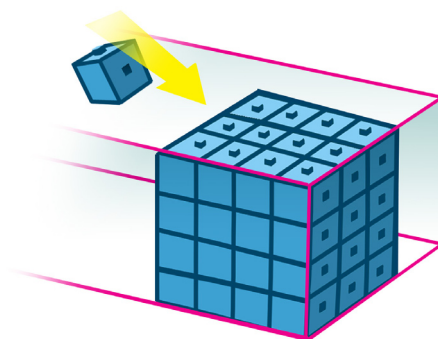
Learning Disabilities Online – <http://www.ldonline.org>

Rúmfræði og algebra

Inntak

Markmið að nemendur:

- Setji fram reglur um samband stærða með reiknireglum og beiti reiknireglum við rúmfræðilega útreikninga.
- Tileinki sér hugtökin strýta, píramídi, keila og kúla og geti reiknað rúmmál þeirra.
- Sýni góðan skilning á hugtakinu rúmmál, kunni reglur um helstu rúmmálsreikninga og geti beitt þeim.
- Geti notað algebru til að tákna samband stærða í rúmfræðireglum og hafi innsýn í hvernig breyting á einni stærð hefur áhrif á aðrar stærðir.
- Þekki hugtakið yfirborðsflatarmál.
- Sýni þekkingu bæði á rúmfræðilegri og algebrulegri túlkun á hallatölu línu.
- Kynnist einni sönnun á setningu Pýþagórasar og hvernig nota má hana á rétthyrnda þríhyrninga.
- Þekki rétthyrnt hnitakerfi í sléttum fleti, hnit punkta og fjarlægð milli þeirra.
- Hafi kynnst því að nota pólhnit til að lýsa staðsetningu með hnitum.



Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Æfist í að skrifa eigin skilgreiningar á hlutum og hugtökum.
- Kynni eigin aðferðir og lausnir á verkefnum bæði munnlega og skriflega og noti skýringarmyndir og táknmál eftir því sem við á.
- Temji sér að vinna að lausnum verkefna í samstarfi við aðra nemendur með því að varpa fram hugmyndum og hjálpa öðrum að þróa sínar eigin hugmyndir.
- Kynnist einföldum rúmfræðilegum sönnunum.
- Kynnist völdum þáttum úr sögu stærðfræðinnar.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Stærðfræðinámi er samsett úr mörgum þáttum og því þarf að koma að sömu þáttum aftur og aftur með ákveðnu millibili og út frá nýju sjónarhorni. Í námi í rúmfræði og algebru þarf að hvetja nemendur til að reyna að fá yfirsýn og velta fyrir sér samhengi. Gott getur verið að þeir finni sjálfir ný dæmi og greini samband og noti þá þekkingu til að leita að reglu. Verkefni nemenda ættu að styðja þá við að leita að reglu og alhæfa. Stærðfræði er stór grein sem oft er skipt niður í ýmsar undirgreinar. Rúmfræði og algebra eru dæmi um slíkar undirgreinar. Nemendur þurfa að

gera sér grein fyrir hvernig undirgreinar stærðfræðinnar fléttast saman. Í kaflanum eru gefin dæmi um hvernig algebra er notuð í ýmsum flatar- og rúmmálsreikningum. Einnig eru tekin dæmi um hvernig algebra og rúmfræði fléttast saman í setningu Pýþagórasar og hnitakerfum.

Maðurinn hefur þróað hæfileika sinn til að hugsa bæði hlutbundið og huglægt. Samskipti manna byggjast að stórum hluta á notkun tungumála þar sem bæði er stuðst við hlutbunda og óhlutbundna hugsun. Alhæfingar og flokkanir eru stór hluti af því að ná valdi á að nota tungumál til tjáningar og til að efla skilning sinn á umhverfinu. Allir nemendur hafa því, áður en þeir byrja í grunnskóla, tjáð hugsun sína í ýmsu samhengi og beitt alhæfingu. Algebra er einmitt skráning á alhæfingum þar sem notaðir eru bæði tölustafir og bókstafir. Í algebrunámi er mikilvægt að byggja á hæfni nemenda til að alhæfa og tjá alhæfingar.

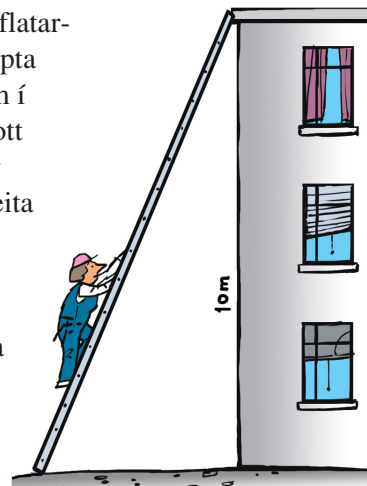
Nemendur munu aðeins skilja algebru sem tungumál til að tjá sig með ef þeir greina sjálfir og tjá alhæfingar með margvíslegu móti. Þeir þurfa að kynnast því hvernig setja má fram alhæfingar í mismunandi samhengi og hvernig nota má mismunandi alhæfingar til að tjá sömu tengsl. Nemendur þurfa hvatningu til að þróa vald sitt á alhæfingum og gera þær nákvæmari. Í öllum stærðfræðikennslustundum ætti að gefa rými fyrir alhæfingar.

Reiknireglur fyrir rúmmáli ýmiss konar forma eru gott dæmi um alhæfingar sem settar eru fram með algebru. Með því að skoða hvernig þessar reglur eru settar fram geta nemendur betur áttað sig á hvaða sambandi hver regla lýsir og hvernig algebra er notuð til að skrá það samband. Nemendur þurfa að geta skoðað formin og prófað að mæla rúmmál þeirra. Þannig fá þeir fleiri tækifæri til að skynja og skilja reiknireglurnar. Hægt er að kaupa form úr plasti sem hönnuð hafa verið með það fyrir augum að auðveldt sé að sjá samband milli rúmmáls forma. Rúmmálsútreikningar réttra strendinga byggjast á því að vinna með þekktar hliðarlengdir forma. Ef finna á rúmmál annarra forma eru útreikningar byggðir á þekkingu á tengslum við rétta strendinga. Rúmmál keilu er til dæmis þriðjungur af rúmmáli sívalnings með sama grunnflöt og sömu hæð. Miklu máli skiptir að nemendur skoði þetta samhengi og efli tilfinningu sína fyrir rúmmáli og rúmmálseiningum. Einnig þurfa nemendur að efla skyn sitt á samhengi á milli rúmmáls og yfirborðs-flatarmáls.

Ekki er alltaf verið að leita að rúmmáli þegar unnið er með þrívíð form. Rúmmálsreglur geta nýst vel þegar leita þarf upplýsinga um aðra þætti í reiknireglunni. Eina skilyrðið er að aðeins sé ein stærð óþekkt, til dæmis hæðin. Það getur verið hentugt að umskrá rúmfræðireglur strax í stað þess að setja inn tölugildin fyrir þekktu stærðirnar. Nemendur geta þannig skoðað gagnsemi þess að vera leiknir í að umrita með tilliti til einnar tiltekinnar breytu.

Setning Pýþagórasar kemur oft að góðum notum við flatar- og rúmmálsreikninga því öllum þríhyrningum má skipta í tvo rétthyrnda þríhyrninga og öllum marghyrningum í þríhyrninga. Notkun á setningu Pýþagórasar er því gott dæmi um hvernig nota má algebru í rúmfræði. Það er mörgum nemendum stór uppgötvun að sjá hvernig beita má setningunni til að finna hæð í píramída.

Hnitakerfi er gott dæmi um tengsl rúmfræði og algebru. Með hönnun þess gerði Descartes kleift að nota algebru til að skrá staðsetningu og lýsa þannig rúmfræðilegum eiginleikum. Descartes hannaði rétthyrnd hnitakerfi. Ýmis önnur hnitakerfi hafa verið þróuð út frá þeirri grunnhugmynd og er pólhnitakerfi dæmi um slíkt. Þar eru hnit gefin miðað við horn út frá grunnlínu og fjarlægð frá miðpunkti. Nota má setningu Pýþagórasar til að finna fjarlægð milli tveggja punkta á grafi beinnar línu.



Orð geta verið margræð og erfitt getur reynst að tryggja að allir skilji orð og setningar á sama hátt. Í stærðfræði hefur því verið valið að nota tölur og bókstafi sem heiti eða til að lýsa hlutum og tengslum. Sú þekking að í algebru séu notaðir bókstafir er flestu fólki kunn, löngu áður en það byrjar algebrunám. Því miður hefur raunin oft verið sú að margir uppgötva aldrei hvað þessir bókstafir tákna og hvers vegna þeir eru notaðir. Það er því mjög mikilvægt að nemendur nái hugmyndinni að baki þess að nota bókstafi og að skrá stæður og jöfnur. Styðja þarf við algebruhugsun nemenda og skynjun á rúmfræðilegum eiginleikum hluta.

Kennsluhugmyndir

Áður en byrjað er að glíma við viðfangsefnin í bókinni er gott að ræða hugtökin rúmfræði og algebra. Hvað þýða þau? Nemendur gætu hver fyrir sig eða í litlum hópum skrifað niður tillögu að skilgreiningum og síðan væri hægt að draga þær saman í eina skilgreiningu fyrir hvort hugtak. Áhugavert er einnig að láta nemendur skoða skilgreiningar úr alfræðibókum eða af Netinu og bera saman við eigin skilning. Kennari gæti svo dregið fram hvað er líkt og ólíkt og hvar þræðir þessara undirgreina stærðfræðinnar spinnast saman.

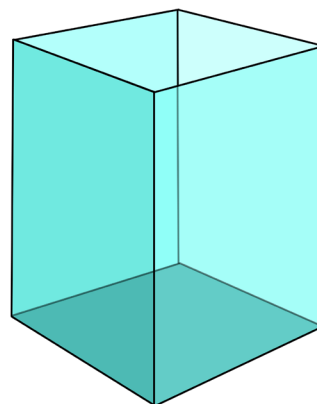
Í upphafi kaflans eru sett fram markmið fyrir nemendur sem jafnframt gefa til kynna hver eru áhersluatriði kaflans. Gott getur verið að lesa markmiðin yfir með nemendahópnum og ræða um gildi þess að setja sér markmið og vera meðvitaður í námi sínu. Nemendur þurfa að vera sér meðvitaðir um hvað þeir eru að læra og tengja það við fyrri þekkingu til þess að námið skili þeim raunverulegum árangri.

Fyrstu fjórar blaðsíður kaflans eru upprifjun á því sem nemendur hafa áður lært. Þar er fengist við rúmmál ferstrendinga og sívalninga. Fyrsta dæmið er hugsað til að koma nemendum af stað og hjálpa þeim að rifja upp fyrri þekkingu á rúmmáls-

útreikningum og vinnubrögð við stærðfræðinám. Þeir eiga að rannsaka hvaða hlutföll milli lengdar, breiddar og hæðar gefa mest rúmmál. Í verkefninu felst að gera eigin rannsókn, bera saman mismunandi niðurstöður og taka rökstudda afstöðu. Verkefnið ætti að geta leitt til rökræðna um rúmmál réttstrendinga. Nauðsynlegt er að nemendur hafi aðgang að nokkrum misstórum kössum (réttstrendingum) og bandi til að auðvelda sér að leysa verkefnið.

Á blaðsíðu 5 eru dæmi sem nota má til að skoða ólíkar leiðir við reikning. Í tengslum við dæmi 2 og 3 er gott að fjalla um hvernig reikna má rúmmál forma út frá flatarmáli grunnflatar og hæð. Með því að umrita jöfnu er auðvelt að finna óþekkta stærð ef allar stærðir eru þekktar nema ein. Tækifæri gefst til að íhuga mismunandi leiðir með því að ræða um leiðir Ásdísar og Ómars. Nemendur þurfa að átta sig á að jafnan sem Ómar setur þekktu gildin inn í, er sama jafnan og Ásdís notar.

Reiknireglan fyrir rúmmáli réttstrendinga byggist á því að margfaldaðar eru saman hliðarlengdirnar þrjár. Ef margfaldað er saman flatarmál hliðanna kemur fram stærð sem er rúmmálið hafið í annað veldi. Sönnun þess er sýnd í glósubók á bls. 6 og er hún gott dæmi um hvernig það að nota bókstafi hjálpar við að skoða samband stærða. Í dæmi 9 reynir á rúmskyn nemenda þegar þeir eiga að rannsaka réttstrendinga. Heppilegt er að nemendur vinni þetta tveir saman. Sumum gæti þótt heppilegt að nemendur ynnu þetta tveir saman. Einhverjum nemendum gæti reynst erfitt að átta sig á um hvað verkefnið snýst og því getur verið gott að ræða það með nemendahópnum í upphafi.



Á blaðsíðu 7 er unnið með rúmmál sívalnings. Mikilvægt er að nemendur átti sig á samhenginu milli reiknireglna við að finna rúmmál réttstrendinga og sívalnings. Í stað þess að reikna dæmin á blaðsíðunni gætu nemendur mælt sjálfir sívalninga og reiknað rúmmál þeirra. Í dæmum 11 og 12 eru nemendur hvattir til að gera sér grein fyrir hver áhrif það hefur á rúmmál ef geisla eða hæð er breytt. Það styrkir væntanlega skilning þeirra á veldum að skoða muninn sem það hefur á rúmmál hvort það er geislinn eða hæðin sem er tvöfölduð.

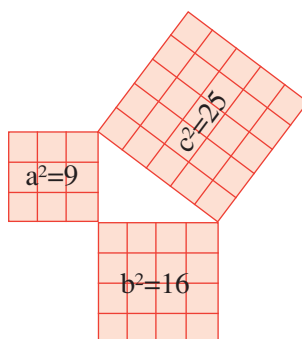
Hópverkefnin á blaðsíðu 8 eru bæði byggð á notkun A4 blaðs. Til að einfalda útreikninga er gert ráð fyrir að hæð A4 blaðs sé 30 cm þó hún sé í raun 29,7 cm. Í dæmi 14 er í raun verið að skoða hvort hefur meiri áhrif á rúmmál sívalnings botnflöturinn eða hæðin. Í dæmi 15 er nemendum ætlað að skoða hvaða form gefur mesta rúmmál miðað við sömu hæð og sama ummál grunnflatar. Gaman gæti verið að láta nemendur giska fyrst á hvaða form sé stærst og jafnvel hve stórt. Nauðsynlegt er að hver hópur búi formin til og reikni út frá þeim.

Vandi getur verið að reikna flatarmál þríhyrninga sem ekki eru rétthyrndir. Nem-

endur fá því nokkur verkefni þar sem þeir geta rifjað upp hvernig skipta má öllum þríhyrningum í rétthyrnda þríhyrninga með því að teikna hæð í þá. Gagnlegt getur verið að ræða við nemendur um hvaða upplýsingar þarf að hafa um þríhyrning til að vita hvers konar þríhyrning er um að ræða. Í dæmi 19 eru gefnar upp tvær hliðarlengdir og hornið á milli þeirra og gefur það tilefni til að ræða um hvort hægt sé að búa til marga ólíka þríhyrninga sem hafa þessa eiginleika. Slíkar umræður eru góður undirbúningur fyrir kynningu á setningu Pýþagórasar sem er á blaðsíðu 10.

Setning Pýþagórasar er ein af frægari setningum stærðfræðinnar. Í upphafi var hún sögð með orðum og er valið að byrja á að kynna hana þannig. Vitnað er beint í bókina *Síðasta setning Fermat*⁶ en þar er að finna heilmikinn fróðleik um Pýþagórínga. Einnig er hér kjörið tækifæri til að segja nemendum frá glímu Fermat við að finna heiltölugildi fyrir jöfnuna $x^n + y^n = z^n$ ef $n > 2$. Aftar í grunnbókinni er sérstakur kafli um Pýþagóras þar sem sýndar eru nokkar sannanir á setningunni. Hér er valið að byrja á sönnun þar sem nemendur nota pappabúta sem raða má saman í einn stóran ferning (c^2) eða í tvo minni ferninga (a^2 , b^2) sem reyndar eru fastir saman.

Dæmi.

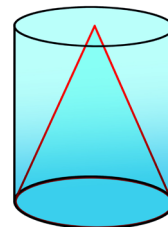


Með þessu móti má sýna að stóri ferningurinn og þeir litlu tveir hafa sama flatarmál. Hér gefst gott tækifæri til að byrja að ræða við nemendur um sannanir í stærðfræði. Það þarf að hjálpa þeim að tengja ferningana við hliðarlengdir í rétthyrndum þríhyrningum og einnig ræða um alhæfingargildi þessarar sönnunar. Ekki er gert ráð fyrir að nemendur vinni mikið með setningu Pýþagórasar hér eða æfi sig í að beita henni til að finna óþekkta hlið í rétthyrndum þríhyrningi heldur er þetta fyrst og fremst kynning.

Strýtur eru yfirheiti yfir formin píramída og keilur. Píramídar eru þrívíð form sem hafa þrjú eða fleiri horn í botnfleti og hliðarfletir mætast allir í einum toppi. Píramídarnir í Giza í Egyptalandi eru allir með ferning sem botnflöt og gera má ráð fyrir að nemendum finnist slíkt form vera hinn eini sanni píramídi. Vætanlega þarf því að hjálpa nemendum að víkka hugtakaskilning sinn. Í dæmi 26 er þeim ætlað að greina myndir og átta sig þannig á að botnflötur píramída getur verið margs konar hyrningur.

⁶ Singh, S. 2006. *Síðasta setning Fermat*. Þýðandi Kristín Halla Jónsdóttir. Reykjavík, Hið íslenska bókmenntafélag.

Keiluformið er skoðað á blaðsíðu 12. Þar kemur hugtakið yfirborðsflatarmál fyrir. Hugtakið er lýsandi og gegnsætt, ekki síst þegar það er skoðað í framhaldi af því að búa til keilu með því að klippa geira úr hring.



Á blaðsíðu 13 er unnið með samband rúmmáls réttstrendings og píramída annars vegar og hins vegar samband rúmmáls sívalnings og keilu.

Mikilvægt er að nemendur fái að rannsaka sjálfir en treysti ekki bara á reiknireglur. Flestir hafa þá tilfinningu fyrir sambandinu að rúmmál píramída sé helmingur af rúmmáli tenings en ekki þriðjungur, því þarf verklega nálgun. Nemendum er fyrst ætlað að giska á hlutfallið út frá myndum en síðan að prófa í litlum hópum. Í bókinni er gert ráð fyrir að nemendur búi sjálfir til formin og noti grjón til að mæla.

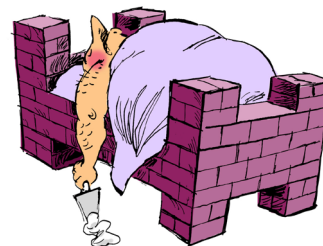
Á heimasíðu námsefnisins er að finna eyðublöð fyrir hvert form. Hægt er að kaupa tilbúin form svipuð þeim sem myndirnar í bókinni sýna.

Á blaðsíðum 14–15 er lestexti um píramída. Þar er að finna sönnun á að þrjá píramída þurfi til að mynda tening. Hér gefst aftur tækifæri til að ræða um sannanir og leiðir til að sýna fram á að eitthvað gildi í stærðfræði. Á eftir fylgja æfingadæmi við að reikna út rúmmál píramída og keilu. Dæmi 42 er rannsóknarverkefni þar sem nemendur kanna hvernig má fá sem stærst rúmmál keilu. Þar þurfa nemendur að beita setningu Pýþagórasar til að finna hæð keilunnar. Á blaðsíðu 18 er áhuga-verð nálgun að því að skoða rúmmál kúlu og er þar tengt saman rúmmál hálfkúlu og sívalnings. Gaman væri að geta sýnt nemendum þetta hlutbundið. Þannig er reiknireglan til að finna rúmmál kúlu útskýrð en reglan fyrir yfirborðsflatarmál kúlu er eingöngu sett fram. Einhverjir nemendur gætu haft áhuga á að skoða samband flatarmáls hrings og reiknireglunnar fyrir yfirborðsflatarmál kúlu.

Hnitakerfið er gott dæmi um samband rúmfræði og algebru. Nemendur kynnast hér pólhnitakerfi en gaman gæti líka verið að kennari sýndi þeim þrívíð hnitakerfi. Á blaðsíðu 20 er fengist við marga þætti. Meginefnið er þó hvernig nota má setningu Pýþagórasar til að reikna fjarlægð milli punkta í hnitakerfi. Hér gætu nemendur búið til fleiri dæmi annaðhvort í hnitakerfi eða út frá lengd á siglingu yfir á. Fjarlægðarreikningar eru síðan nýttir áfram á blaðsíðu 21 til að reikna út hallatölu fyrir jöfnu beinnar línu út frá aflestri af grafi á tveimur punktum.

Í lok kaflans eru tvö dæmi þar sem dregnir eru saman helstu þættir kaflans hvað varðar að geta beitt þeim reglum sem unnið hefur verið með.

Tölur og talnafræði



Inntak

Markmið að nemendur:

- Þekki rauntalnakerfið og hafi góðan skilning á talnamengjum og einkennum þeirra.
- Þekki óendanleg tugabrot, bæði lotubundin og lotulaus.
- Geti notað veldarithátt og reiknað með veldum.
- Geti nýtt sér þekkingu sína í talnafræði til að setja fram einfaldar röksemdafærslur, bæði munnlega og skriflega.
- Þekki frumtölur og frumþáttun og geti nýtt sér frumþáttun til að finna stærsta sameiginlega þáttinn, deila og samnefnara.
- Geri sér grein fyrir tengslum almennra brota og tugabrota.
- Þekki hugtakið ferningstala og ferningsrót náttúrlegra talna og hafi kynnst teningstölum og teningsrót.

Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geti tekið mið af forsendum og beitt stærðfræðihugtökum við lausn verkefna.
- Átti sig á þörf á nákvæmni í stærðfræðilegum texta bæði í orðanotkun og meðferð stærðfræðilegra hugtaka og tákna.
- Geti útskýrt bæði skriflega og munnlega hugtök, aðferðir, niðurstöður og eigin lausnir á verkefnum.
- Átti sig á kostum þess að nota táknmál stærðfræðinnar í stærðfræðilegum texta.
- Þekki leiðir til að nálgast stærðfræðileg vandamál.
- Geti fylgt einföldum röksemdafærslum og sett þær fram sjálfir.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Skyn á tölur og leikni í meðferð þeirra er þýðingarmikil undirstaða í stærðfræðinámi. Það er góður grunnur fyrir skilningi á algebru því leikni með tölur styður við vinnu með tákni. Í kaflanum er fjöldi verkefna sem reyna á að nemendur rannsaki, velti samhengi fyrir sér og dragi ályktanir af rannsóknum sínum.

Tölur eru flokkaðar í talnamengi. Fyrstu tölur sem börn læra eru náttúrlegu tölurnar. Það eru tölurnar sem notaðar eru til að segja til um fjölda og röð. Samlagning og margföldun eru lokaðar aðgerðir í mengi náttúrlegra talna. Ef núlli og neikvæðum tölum er bætt við náttúrlegu tölurnar er komið mengi heilla talna, $\mathbb{Z}$. Frádráttur er lokuð aðgerð í því mengi. Í mengi heilla talna $\mathbb{Z}$ er því hægt að leggja saman, draga frá og margfalda öll stök og fá svar sem er í menginu $\mathbb{Z}$. En ef beita á deilingu er mengið ekki nógu stórt. Þá þarf að bæta almennum brotum við. Þar með er

komið mengi ræðra talna, Q. Ef skrá á allar tölur milli 0 og 1 duga ræðu tölurnar ekki því það eru til (óendanlega) margar tölur sem ekki má skrifa sem almennt brot. Þegar óræðar tölur bætast við þær ræðu er komið mengi rauntalna, R. Óræðar tölur eru óendanleg lotulaus tugabrot. Til þess að átta sig á stærð þeirra getur verið gott að námunda þær að almennu broti eða lotubundnu tugabroti eða tugabroti með ákveðnum fjölda aukastafa. Rauntölur (öll tugabrot, bæði endanleg og óendanleg) fylla talnalínuna en það eru til fleiri tölur. Í mengi rauntalna vantar ýmsar tölur, t.d. tölu sem margfölduð með sjálfri sér gefur -1 . Þess vegna hafa verið búnar til ímyndaðar tölur og tvinntölur. Með rauntölum má skrá allar tölur á talnalínunni en með tvinntölum má líka skrá allar tölur á fleti. Tvinntölur eru reyndar einungis nefndar til kynningar í kaflanum. Gera má ráð fyrir að stærðfræðilegar rannsóknir leiði til þess að þörf skapist fyrir æ fleiri gerðir talna. Nemendur þurfa að þekkja vel eiginleika hvers talnamengis og hvaða takmarkanir það hefur. Þeir þurfa að hafa góðan skilning á ræðum tölum og vald á að reikna með þeim. Í því felst að þeir hafi hugmynd um á hvaða talnabili niðurstaða ætti að vera, geti metið svör og tekið þátt í umræðum um eigin niðurstöðu og annarra.

Allar ræðar tölur má skrifa sem almennt brot. Nefnarinn getur þó aldrei verið núll. Sérhverja ræða tölu má skrifa á marga vegu en almennt brot telst fullstýtt þegar teljari og nefnari hafa engan sameiginlegan frumþátt. Öll almenn brot, sem skrifa má sem endanleg tugabrot, hafa nefnara sem hafa eingöngu frumþættina 2 og 5. Með öðrum orðum má segja að öll almenn brot með nefnara sem hægt er að lengja í tölu sem er veldi af 10 má skrifa sem endanleg tugabrot. Þegar öðrum almennum brotum er breytt í tugabrot kemur fram lota, þ.e. sömu tölustafir endurtaka sig sífellt. Lotubundin tugabrot má því alltaf skrifa sem almenn brot. Þannig næst nákvæm skráning á stærðinni sem nauðsynlegt er að hafa ef reikna á áfram með henni. Nemendur nota mikið vasareikna og eru því oft með tugabrot. Þeir lenda þess vegna oft í því að geta ekki unnið með nákvæma stærð. Það getur komið sér vel fyrir þá að kunna að breyta lotubundnum tugabrotum í almenn brot. Aðferð-

in sem kynnt er í námsefninu (bls. 30) er gott dæmi um einfalda hugvitsamlega aðferð sem byggð er á þekkingu á reikniaðgerðum og algebru.

$$x = 0,44444...$$

Ef skrá á lotubundna tugabrotið $0,\overline{4}$ sem almennt brot er byrjað á því að greina lotuna.

Lengd lotunnar er 1.

Því er x margfaldað með 10^1 .

$$10x = 4,44444...$$

$$- x = 0,44444...$$

$$\hline 9x = 4$$

$$x = \frac{4}{9}$$

Nokkrar aðferðir má nota til að bera saman stærðir almennra brota. Mikilvægt er að hvetja nemendur til að efla tilfinningu sína fyrir almennum brotum. Margir breyta almennum brotum í tugabrot með því að nota vasareikni til þess að meta stærð þeirra. Nemendur ættu að velta fyrir sér fleiri leiðum til að átta sig á stærð almennra brota, til dæmis með því að teikna, með því að miða við hve mikið vantar upp á einn, miða við hálfan eða önnur þekkt brot.

Veldaritháttur hentar oft vel til að einfalda skráningu á mjög háum eða mjög lágum tölum. Veldaritháttur er hugvitsamleg leið til að skrá endurtekna margföldun á veldisstofni með fáum tölustöfum. Gott er að nemendur átti sig á ákveðnum reglum sem auðvelt er að sjá á hvaða grunni eru myndaðar. Nemendur hafa væntanlega áður unnið með veldi en þeir þurfa að rifja upp hugtökin veldisstofn og veldisvísir og reikning með veldum. Í kaflanum kynnast nemendur hvernig hefja má veldi í veldi og skrá sem eitt veldi. Nemendur þurfa að glíma við fjölbreytt verkefni um veldi til að skoða þau frá sem flestum hliðum. Glíma við veldaþrautir leiðir til rannsókna og dýpri vangaveltna um efnið.

Það að finna ferningstölur og ferningsrætur eru andhverfar aðgerðir. Ferningstölur eru tölur sem hafa þann fjölda eininga að raða megi þeim í ferning. Þær eiga sér því alltaf heila tölu sem ferningsrót. Venjan er að skrá aðeins jákvæða ferningsrót þó neikvæða ferningsrótin gefi líka ferningstöluna ef hún er hafin í annað veldi. Ef þörf er fyrir að fá bæði jákvæðu og neikvæðu ferningsrótina er oftast beðið sérstaklega um það með því að setja bæði + og – fyrir framan rótarmerkið, $\pm\sqrt{}$. Þetta kemur oft upp við lausnir á jöfnum. Einföldun stæðna í jöfnu gæti leitt til niðurstöðu á borð við $x^2 = 16$. Lausnin er þá $\pm\sqrt{16}$. Bæði 4 og –4 uppfylla skilyrðin. Jafnan $-x^2 = 16$ á sér hins vegar enga lausn í mengi rauntalna. Draga má ferningsrót af öllum tölum en flestar ferningsrætur eru óræðar tölur. Oft getur því verið hentugt að reikna með ferningsrótum og því gott að þekkja helstu einkenni ferningsróta og reiknireglur sem gilda um þær. Það getur einfaldað útreikninga mikið að líta á ferningsrætur sem tölur í hálfra veldi og að margfalda saman ferningsrætur.

Teningstölur eru tölur sem byggjast á því að tala er hafin í veldi eins og ferningstölur. Eins og nafnið gefur til kynna er teningstala tala sem hafin hefur verið í þriðja veldi. Teningstölur eiga sér allar heila tölu sem teningsrót. Aðrar tölur eiga sér líka teningsrót en hún er þá ekki heil tala. Nemendur kynnast hér teningstöllum lítilega sem lið í að skilja ferningstölur og ferningsrætur betur og til að bæta við þekkingu sína á talnafræði. Þeir þurfa að átta sig á að hægt er að draga þriðju rót (teningsrót), fjórðu rót og svo framvegis af tölum. Hér er látið nægja að kynna teningstölur og teningsrætur. Það gefur líka tækifæri til að skoða að ef neikvæð tala er hafin í þriðja veldi verður niðurstaðan neikvæð tala og sama er að segja ef dregin er þriðja rót af neikvæðri tölu.

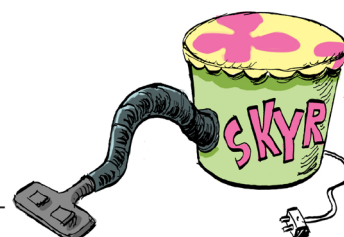
Tölum má skipta í frumtölur og samsettar tölur sem eru margfeldi frumtalna. Frumþáttun samsettra talna hjálpar til að átta sig á skyldleika talna og notfæra sér hann í útreikningum, til dæmis við val á samnefnara. Nemendur þurfa að hafa góðan skilning á frumtölum og vera fljótir að finna hvort tala er frumtala eða samsett tala. Frumþáttun er oftast hentug aðferð en ef um mjög háa tölu er að ræða getur það verið seinleg leið. Í námsefninu hefur áður verið kynnt sú leið að finna ferningsrót og kanna síðan deilanleika með frumtölum sem eru lægri en ferningsrótin. Þessi aðferð er byggð á þeirri þekkingu að í tveggja þátta margfeldi allra talna sé annar þátturinn alltaf lægri en ferningsrótin nema um ferningstölu sé að ræða.

Við reikning í dag nota flestir reiknitæki á borð við vasareikna. Það gerir hæfni til að greina samband stærða og meta niðurstöðu enn þá mikilvægari. Nemendur þurfa því að hafa góða tilfinningu fyrir tölum og reikniaðgerðum. Það krefst leikni í meðferð talna, þekkingu á eiginleikum talna og gagnrýnnar hugsunar. Glíma við talnaþrautir getur stutt nemendur í að efla þessa hæfni, leikni og þekkingu.

Talnafræði er stórt svið innan stærðfræðinnar. Tækniþróun hefur leitt til þess að rannsóknarsvið talnafræðinnar hafa ratað í auknum mæli inn í námsefni grunn-skólanemenda. Áhersla hefur aukist á að grunnskólanemendur þekki helstu eiginleika talna, skyldleika talna og hvernig skrá má samhengi talna. Áhersla er lögð á verkefni á borð við: Hvað getur þú sagt um tölu sem kemur fram ef þú dregur einn frá ferningstölu oddatölu? Verkefni af þessum toga hafa það markmið að þjálfa nemendur í að rannsaka, skerpa hugtakaskilning sinn, ræða um stærðfræði og skrifa stærðfræðilegan texta. Glíma við verkefnið leiðir þá til þeirrar niðurstöðu að talan hlýtur að vera slétt og deilanleg með fjórum. En ef nemendur prófa nokkur dæmi og byrja t.d. með 3 og 5, gætu þeir tekið eftir að hún er líka deilanleg með 8. Þeir gætu velt fyrir sér hvort þessi eiginleiki sé almennur (alhæfing). Það að sanna það felur í sér að finna góða leið til að tákna. Ef nemandi ákveður að nota $2n + 1$ til að tákna oddatölu og A fyrir lokaniðurstöðu má skrá $A = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n)(n + 1)$. Greiningin að annaðhvort n eða $n + 1$ hljóti að vera slétt tala gefur 2 sem einn sjálfstæðan þátt tölunnar í viðbót. Þar af leiðir að talan A hlýtur alltaf að vera deilanleg með 8. Þannig leiðir vinna með viðfangsefnið til þess að skilningur nemenda á tölum eflist og þeir fá æfingu í að tjá sig með táknum, rökleiða og sanna.

Kennsluhugmyndir

Í kaflanum er tekið fyrir fjölbreytt efni um tölur og talnafræði svo sem talnamengi, brot, veldi, frumtölur og deilanleika. Margar leiðir má fara við vinnu með efni kaflans. Við gerð verkefna var lögð áhersla á að nemendur fengju þrautir að glíma við þar sem þeim gæfist tækifæri til að rannsaka og leiða rök að reglu og samhengi. Jafnframt er um að ræða upprifjun á ýmsum inntakspáttum og æfingar í meðferð talna. Á nokkrum stöðum í kaflanum má finna ónúmeraðar þrautir sem hugsaðar eru fyrir nemendur sem vilja fá frekari glímu eða sem kennari getur lagt fyrir hóp nemenda. Í hverjum nemendahópi eru ólíkir nemendur og þarf í kennslu alltaf að hafa það í huga. Hvetja þarf getumikla nemendur til að fara dýpra í efni og slökum nemendum þarf að hjálpa að tengja saman og byggja upp skilning. Við undirbúning kennslu þarf kennari því að velta fyrir sér hvernig nálgun gefur honum best tækifæri til að styðja ólíka nemendur og hvetja þá til að dýpka skilning sinn. Hópvinnu hentar oft vel því þá gefst kennurum tækifæri til að nota lengri tíma í umræður með hverjum hópi en hann gæti notað á hvern einstakling. Þannig getur hann líka ýtt undir stærðfræðilegar umræður nemenda. Í þessum kafla eru verkefni á hverri



Ryksuguskur

blaðsíðu yfirleitt mjög tengd. Það hentar oftast að skoða hverja blaðsíðu og velja hvernig ólíkir nemendur geta unnið með viðfangsefnin. Allir nemendur þurfa að fá tækifæri til að efla skilning sinn og ná valdi á vinnubrögðum stærðfræðinnar.

Í upphafi eru nokkrar þrautir út frá ártölum. Á nýrri öld verða ártöl nálæg hugsun manna og skráning fæðingardags í kennitölum gerir hann að hluta af einkennum hvers Íslendinga. Þessi verkefni ættu að vera aðgengileg fyrir alla og hægt að fara ólíkar leiðir við að leita og skrá lausnir sínar.

Ástæða er til að ræða við allan nemendahópinn um talnamengi og einkenni hvers þeirra. Í daglegu lífi eru fyrst og fremst notaðar ræðar tölur en óræðu tölurnar koma þó oft við sögu. Almenn er miðað við mengi rauntalna þegar fengist er við tölur og reikning. Áhugavert er fyrir nemendur að átta sig á að til eru fleiri tölur og mengi rauntalna dugar ekki í öllum tilvikum. Í dæmum 3–12 er fengist við talnamengin og tengsl við reikniaðgerðir. Nemendur eiga að leysa dæmi og greina innan hvaða talnamengis dæmi og svar við því rúmast.

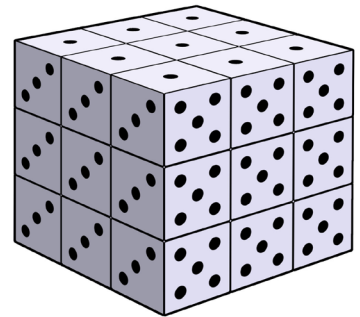
Ræðar tölur má skrá sem almenn brot, tugabrot og prósentur. Á blaðsíðum 27–30 er unnið með brot. Í upphafi er fengist við brotaskilning en síðan eru æfingar í að breyta um skráningarform. Hvetja ætti nemendur til að nota teikningar til að átta sig á stærð almennra brota. Ekki eru sett fram hópverkefni en mörg verkefnanna henta vel fyrir samvinnu í litlum hópum. Það eykur umræðu og nemendur hafa oft betra úthald við rannsóknir og vangaveltur á grundvelli þeirra nokkrir saman. Áhersla er lögð á skoðun á sambandi tugabrota og almennra brota. Hugtökin *endanleg tugabrot* og *óendanleg lotubundin tugabrot* eru mikilvæg og að nemendur geti breytt slíkum brotum í almenn brot. Aðferð við að breyta óendanlegum lotubundnum tugabrotum í almenn brot er þó fyrst og fremst sett fram til kynningar.

Veldi og rætur er helsta viðfangsefnið á blaðsíðum 31–34. Í upphafi er bein upp-
rifið en í dæmum 33 og 34 er nemendum ætlað að átta sig á samhengi og greina reglu. Í umræðum við nemendur sem eru að glíma við þau dæmi getur kennari fengið góða mynd af skilningi þeirra á veldum. Þegar samsettar tölur eru hafnar í veldi er möguleiki á að skrá samsettu töluna sem framtölu eða margfeldi framtalna í veldi sem síðan er sett í veldi. Það gefur góð tækifæri til að skoða hvaða áhrif það hefur að setja veldi í veldi og tilvalið að skoða það með nemendum. Í hópverkefni á blaðsíðu 32 er þetta efni rannsakað. Dæmin sem fylgja á eftir er einnig kjörið að nemendur vinni saman og velji sér jafnvel verkefni. Nemendur þurfa að hafa gott vald á hugtakinu ferningsrót. Á langflestum vasareiknum er aðgerðin að draga ferningsrót innbyggð. Veldistakka er einnig að finna á mörgum vasareiknum. Áhugavert er að skoða þessa takka saman og bera saman hvað gerist ef fundin er ferningsrót og ef sett er í hálfta veldi. Þannig má tengja saman veldi og rætur. Huga þarf að því hvernig reikna má með ferningsrótum. Teningstölur og teningsrætur eru kynntar. Meginmarkmiðið er að nemendur átti sig á að teningstölur og ferningsrætur eru hluti af stærra kerfi. Gaman getur því verið að nefna við nemendur að draga megi hvaða rót sem er af tölum, þ.e. fjórðu, fimmtu, sjöttu og svo framvegis.

8-tíu

Frumtölur eru stundum kallaðar byggingarsteinar samsettra talna. Leiðir til að finna frumtölur eru oft seinfarnar og því er hentugt að þekkja lægstu frumtölurnar. Nemendur hafa áður kynnst sáldri Eratosþenusar sem leið til að finna frumtölur. Það gefur tilefni til að skoða hvernig frumtölurnar raðast í kringum margfeldi af 6. Ekki hefur enn þá fundist nein regla fyrir því hvernig frumtölurnar raðast en sannað hefur verið að fjöldi þeirr er óendanlegur þannig að lengi má ræða um frumtölur og rannsaka þær. Samsettar tölur eru ekki síður áhugaverðar. Með því að frumþátta þær má skoða deilanleika þeirra. Frumþáttun er góð leið til að skoða skyldleika talna og finna sameiginlega deila þeirra. Í bókinni er bent á þá leið að skrá þættina myndrænt. Þá koma sameiginlegir þættir mjög skýrt fram og einnig verður auðvelt að reikna lægstu tölu sem báðar eða allar tölurnar ganga upp í. Það er mjög gagnlegt þegar leitað er að minnsta samnefnara. Í dæmum 60–63 eru notaðar sömu tölur til þess að gefa nemendum tækifæri til að skoða þetta. Áhersla er lögð á brotareikning í kaflanum um reikning og algebru.

Á blaðsíðum 37–38 eru ýmis dæmi. Dæmin á blaðsíðu 37 snúast fyrst og fremst um deilanleika og er ástæða til að velja einhver þeirra til umfjöllunar með öllum nemendahópnum. Á blaðsíðu 38 eru valin dæmi um viðfangsefni kaflans. Kjörrið er að nemendur vinni öll dæmin og lausnir séu skoðaðar vel. Í dæmi 83 er viðfangsefnið spilateningar. Mikilvægt er að einhverjir teningar séu aðgengilegir til að auðvelda nemendum að sjá stóran tening fyrir sér þó ekki þurfi að vera 27 spilateningar á mann.



Líkur

Inntak

Markmið að nemendur:

- Efli skilning sinn á líkindahugtakinu og viti hvernig það er notað í daglegu lífi.
- Geri greinarmun á fræðilegum líkum, líkum sem leiddar eru af tilraunum og huglægu mati á líkum.
- Geti reiknað líkur og dregið ályktanir út frá niðurstöðum útreikninga.
- Geti kannað líkur, skráð þær skipulega og túlkað niðurstöður.



Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geri tilraunir og skrái niðurstöður þeirra skipulega.
- Geti dregið ályktanir á grundvelli eigin athugana.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Líkindareikningur fór að þróast sem grein innan stærðfræðinnar á 16. öld. Rætur hans má rekja til þess að menn fóru að reyna að reikna út vinningslíkur í spilum sem vinsæl voru á þeim tíma. Síðan hefur líkindafræðin þróast og er hún notuð á ýmsum sviðum samfélagsins.

- Loftsteinn fellur til jarðar. Hverjar eru líkurnar á að hann lendi á landi?
- Ætti ég að kaupa forfallatryggingu fyrir sumarleyfisferðina?
- Það er skýjað og því nokkuð miklar líkur á að það fari að rigna.
- Þú skalt forðast að anda að þér rokgjörnum efnum því það eykur líkur á krabbameini.

Í daglegu máli eru notuð ýmis orð sem endurspegla óvissu og notkun þeirra byggist á einhvern hátt á mati á líkindum, sem dæmi má nefna orðin líklegt, öruggt, áhættan er lítil, ómögulegt, helmingslíkur.

Líkur eru skráðar með tölum á bilinu 0–1. Líkur á atburði sem er öruggt að gerist eru 1 en 0 ef ómögulegt er að hann gerist. Tákna má líkur með almennum brotum, tugabrotum eða prósentum. Þegar reiknaðar eru líkur á því að ákveðin útkoma komi út úr tilraun er fundið hlutfall þeirrar útkomu af heildarfjölda mögulegra útkoma. Þess vegna er mikilvægt að geta fundið heildarfjölda mögulegra útkoma. Í einföldum tilraunum er oft auðvelt að telja saman heildarfjölda mögulegra útkoma en þegar um flóknari eða samsettar tilraunir er að ræða getur það verið

tímafrekt. Nemendur hafa áður kynnst kostum þess að skrá upplýsingar skipulega í talningartré eða töflur. Einnig er æskilegt að þeir átti sig á tveimur af grunnreglum talningarfræðinnar, samlagningar- og margföldunarreglu, en þær koma að góðum notum í líkindareikningi.

Samlagningarreglan

Samanlagður fjöldi staka í mengjum A og B er fjöldinn í A að viðbættum fjöldanum í B að frádregnum þeim fjölda sem tilheyrir báðum mengjunum. Þetta má setja fram með táknmáli mengjafræðinnar.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Mikilvægt grundvallaratriði við talningu möguleika er að þegar lögð eru saman stök í tveimur mengjum þarf að huga að því hvort þau eru aðgreind eða hvort einhver stök tilheyra báðum mengjunum.

Margföldunarreglan

Heildarfjöldi valmöguleika á að velja úr tveimur mismunandi flokkum er margfeldi möguleika á að velja úr hvorum flokki.

Þetta má setja fram með táknmáli mengjafræðinnar.

Skilgreining

Ef A og B eru tvö mengi, þá þýðir $A \cdot B$ mengi raðtvennda þar sem fyrri stakið er úr A og það seinna úr B.

$$n(A \cdot B) = n(A) \cdot n(B)$$

$$n(A \cdot B) = n(A) \cdot n(B)$$

Þegar teiknað er talningartré sést vel að heildarfjöldi möguleika er margfeldi af möguleikum af hverju þrepi fyrir sig.

Dæmi:

Í reiðhjólaverslun eru seld barnahjól í þremur mismunandi stærðum og fimm mismunandi litum. Hve margar mismunandi gerðir af barnahjólum eru á boðstólum í versluninni?

stærð 1



stærð 2



stærð 3



Hægt er að útvíkka bæði margföldunar- og samlagningarregluna þannig að þær gildi fyrir fleiri en tvö mengi.

Í líkindafræði eru líkur á tilteknum útkomum oft þekktar. Vitað er að líkur á að fá upp 6 á venjulegum teningi eru 1:6 og að líkur á að fá fjarka þegar spil er dregið úr spilastokki eru 4:52 eða 1:13. Í daglegu lífi þarf hins vegar oft að framkvæma rannsóknir og athuganir til þess að geta fundið út líkur á tilteknum atburði. Fyrirtæki sem framleiðir skæri ákveður að fara að framleiða skæri fyrir örvhenta. Hve stórt hlutfall af heildarframleiðslunni ættu slík skæri að vera? Hér væri gott hafa upplýsingar um hversu líklegt er að þeir sem kaupa skæri séu örvhentir. Hægt er að gera rannsókn þar sem tekið er handahófsúrtak úr hópi líklegra kaupenda og á grundvelli hennar má finna hlutfall örvhentra af heildarfjölda sem nota má í hefðbundnum líkindareikningi.

Allar mögulegar útkomur í líkindareikningi eru oft skráðar í mengið U sem gjarnan er kallað úttaksrúm. Útkomur má skrá í mengjasviga. Þegar teningi er kastað er $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Þegar um er að ræða tvo atburði getur verið gott að nota mengjamyndir og skrá útkomumöguleika í þær. Þá sést vel hvort atburðirnir skarast eða ekki.

Þegar finna á líkur þess að tveir atburðir gerist sem ekki geta skarast má leggja saman líkur á hvorum atburði fyrir sig.

Dæmi: Hverjar eru líkur á að fá slétta tölu eða 3 þegar teningi er kastað?

Líkur á að fá slétta tölu eru 3:6 og líkur á að fá 3 eru 1:6. Líkur á að fá slétta tölu eða 3 þegar teningi er kastað eru því $3:6 + 1:6$ eða $4:6 = 2:3 = 0,666... = 66,666...\%$

Ef atburðirnir geta skarast þarf hins vegar að draga frá þau tilvik þar sem um skörun er að ræða.

Dæmi: Hverjar eru líkur á að fá spaða eða ás þegar eitt spil er dregið úr venjulegum spilastokk?

Líkur á að draga spaða eru 13:52 og líkur á að draga ás eru 4:52. Spaðaás tilheyrir hins vegar báðum mengjunum og væri því tvítalinn ef líkurnar væru lagðar saman, því þarf að draga líkurnar á að fá spaðaás frá en þær eru 1:52.

Líkurnar eru því $13:52 + 4:52 - 1:52$

Í báðum þessu tilvikum gildir samlagningarreglan.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Í fyrra tilvikinu skarast atburðirnir ekki og þarf ekki að draga neitt frá. Þess vegna er mikilvægt að huga að því hvort atburðist skarast eða ekki þegar finna á líkur á að tveir eða fleiri atburðir gerist.

Þegar reikna á líkur er einnig þýðingarmikið að átta sig á hvort atburðir eru háðir eða ekki. Atburðir A og B eru háðir ef útkoma A hefur áhrif á útkomu B. Þegar peningar eru dregnir úr poka skiptir máli hvort peningi sem dreginn hefur verið er skilað aftur í pokann eða ekki áður en dregið er næst. Það hefur áhrif á niðurstöður. Ef peningnum er skilað aftur í pokann hefur fyrra valið engin áhrif á seinna valið og atburðirnir eru því óháðir en ef peningnum er ekki skilað aftur eru atburðirnir háðir.

Ef kanna á líkur á að tveir atburðir gerist samtímis eða í röð má nota margföldunarregluna til þess að reikna út líkur.

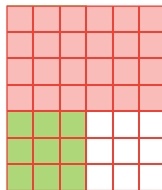
$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Í poka eru 3 silfurpeningar og 4 gullpeningar. Hverjar eru líkurnar á að draga tvo gullpeninga ef tveir peningar eru dregnir af handahófi?

Dæmi: Líkur á að draga gullpening í fyrsta drætti eru 4:7 en í öðrum drætti eru þeir 3:6. Líkurnar á því að báðir peningar séu gullpeningar eru því 3:6 af 4:7. Þetta má sjá nokkuð auðveldlega með því að teikna flatarmynd eða líkindatré.

Flatarmynd

Myndin sýnir að $\frac{3}{6}$ af $\frac{4}{7}$ eru $\frac{12}{42}$ eða $\frac{2}{7}$.



Líkindatré er í raun talningartré þar sem við hverja grein kemur fram hve miklar líkur eru á hverri útkomu fyrir sig á hverju þrepi. Líkur eru fundnar með því að margfalda saman líkur á hverju þrepi fyrir sig.

Gullpeningur 4:7

Silfurpeningur 3:7

Gull 3:6 – Silfur 3:6

Gull 3:6 – Silfur 3:6



Kennsluhugmyndir

Kaflinn byrjar með hópverkefni þar sem nemendur kanna hvernig fólk spennir greipar og hvort eitthvert samhengi er á milli þess og hvort fólkið er rétt hent eða örvhent eða hvort það er fætt á degi eða nóttu. Þetta er gert til að beina sjónum nemenda að því að líkur á tilteknum atburði eru ekki alltaf þekktar og stundum eru gerðar rannsóknir og tilraunir og líkur metnar út frá þeim. Einnig er markmið verkefnisins að beina sjónum að gildi þess að nemendur fái sjálfir að framkvæma athuganir og tilraunir. Tilfinning fyrir líkindum og líkindareikningi er háð því að nemendur hafi sjálfir fengið tækifæri til að gera margs konar tilraunir og athuganir.

Í glósubók á blaðsíðu 40 er líkindakvarði rifjaður upp og minnt á að skrá má líkur með almennum broti, tugabroti eða prósentu. Lesa þarf textann með nemendum og ræða hann. Einkum er nauðsynlegt að vekja athygli þeirra á að ef líkur á tilteknum atburði eru þekktar þá vitum við einnig hverjar líkurnar eru á því að atburðurinn gerist ekki.

Æskilegt er að nemendur vinni dæmin á blaðsíðu 40–41 sjálfstætt eða tveir og tveir saman. Kennarinn ætti að geta fengið þannig nokkuð góða mynd af grunnskilningi þeirra á líkindahugtakinu af því af fylgjast með þeim og ræða við þá þegar þeir leysa verkefnin. Dæmi 7 mætti taka til sameiginlegrar umræðu og skoðunar en í c-lið reynir á að nemendur átti sig á að ekki er hægt að leggja bara líkurnar saman þar sem mengin stelpur og unglingadeild eru ekki aðgreind heldur skarast þau.

Dæmi 8–13 ættu nemendur einnig að geta unnið að mestu leyti sjálfstætt en áður en þeir hefjast handa er rétt að rifja upp með þeim skráningu í mengi og mengjastviga. Það mætti gera með því að láta nemendur glíma við verkefni 8 í hópum og taka síðan úrlausnir hópanna til sameiginlegrar umræðu og skoðunar.

Æskilegt er að nemendur framkvæmi sjálfir tilraun á borð við þá sem er í dæmi 14. Þeir geta notað með peninga eða sentíkubba í tveimur litum. Í framhaldi af verkefninu leysa hóparnir verkefni 15 og velta fyrir sér hvort atburðirnir eru háðir eða óháðir.

Á blaðsíðu 44 eru verkefni þar sem áfram er lögð áhersla á skráningu útkomumöguleika. Stundum geta töflur komið sér vel eins og þegar notaðir eru teningar þar sem jafnar líkur eru á því að tiltekna tölur komi upp og síðan framkvæmd einhver aðgerð eins og í dæmi 16.

Í dæmum 17–21 er nemendum bent á að nota talningartré til að fá yfirlit yfir fjölda möguleika. Markmiðið með þessum dæmum er að þeir átti sig á að í stað þess að teikna upp alla möguleika má nota margföldunarregluna. Margfalda má saman fjölda möguleika á hverju þrepi fyrir sig. Gott getur verið að byrja á að gera fyrsta þrepið í talningartrénu og halda síðan áfram með eina greinina. Verkefnin henta vel til paravinnu og síðan er æskilegt að taka eitt þeirra til sameiginlegrar umræðu.

Verkefnin á blaðsíðu 45 henta vel til hóp- eða paravinnu. Nemendur þurfa að fá að prófa sig áfram við lausn þeirra og gott getur verið að skrá nöfn á miða og prófa að raða upp eða draga.

Nokkuð tímafrekt getur orðið fyrir nemendur að finna alla möguleika í dæmum 23 og 25, það ýtir undir skipuleg vinnubrögð og að nemendur fari að leita að samhengi eða reglu.

Megináherslan er þó á að nemendur prófi sig áfram og skrái athuganir sínar og tilraunir skipulega.

Í tengslum við verkefnin á blaðsíðu 46 þarf að fara yfir með nemendum hvernig finna má samsettar líkur með því að nota margföldunarregluna. Líkur á stökum atburði eru alltaf brot og þegar finna á líkur á tveimur atburðum sem gerast samtímis eða hvor á eftir öðrum þarf annaðhvort að margfalda saman líkur á hvorum atburði fyrir sig eða margfalda saman tvö brot. Gott er að tengja við flatarmyndir og hvernig þær má nota til að finna margfeldi brota. Einnig er rétt að rifja upp með nemendum hvernig nota má líkindatré til að skrá líkur og nýta það síðan til þess að sjá hvaða tölur þar eru sem á að margfalda saman til að finna líkur í hverju tilviki fyrir sig. Rétt er að taka að minnsta kosti annað ef ekki bæði dæmin til sameiginlegrar umræðu og skoðunar. Nemendur ættu síðan að glíma við að leysa dæmin á blaðsíðu 47 upp á eigin spýtur.

Eins og fram hefur komið er ekki alltaf unnt að skrá allar mögulegar útkomur eða segja fyrir um fræðilegar líkur með vissu. Þá eru gerðar tilraunir og líkur metnar á grundvelli þeirra. Í verkefnunum á blaðsíðu 48–49 eiga nemendur að reikna út hlutfallstíðni á grundvelli tilrauna og áætla líkur út frá hlutfallstíðninni. Mikilvægt er að nemendur átti sig á að þeim mun fleiri tilraunir sem byggt er á þeim mun meiri líkur eru á að hlutfallstíðnin nálgist fræðilegu líkurnar. Æskilegt er að nemendur fái sjálfir tækifæri til að gera einhverjar tilraunir á borð við þær sem lýst er í kaflanum. Slík vinna og úrvinnsla úr henni getur vel komið í stað þess að nemendur reikni dæmin í kaflanum.

Verkefnið á blaðsíðu 50 er eins konar samantektarverkefni þar sem nemendur geta í raun talið út hve margir eru í rauðri peysu og með derhúfu en þeir þurfa líka að sýna fram á hvernig maður getur reiknað það út. Einnig reynir á að þeir átti sig á hvaða reiknireglur gilda um samsettar líkur og hvaða áhrif það hefur ef mengin skarast. Hér skiptir máli hvort þeir gera greinarmun á því þegar þeir eru beðnir að finna líkur á að nemandi sé í rauðri peysu og með derhúfu og að nemandi sé í rauðri peysu eða með derhúfu. Í fyrra tilvikinu geta þeir fundið líkurnar með því að margfalda saman líkur á því að nemandi sé í rauðri peysu og líkur á því að nemandi sé með derhúfu. Í seinna tilvikinu geta þeir notað samlagningarregluna og lagt saman líkur á að nemandi sé í rauðri peysu og að nemandi sé með derhúfu en þurfa að gæta þess að draga frá þá sem eru bæði í rauðri peysu og með derhúfu. Verkefnin á blaðsíðu 50 eru því tilvalin námsmatsverkefni.

Reikningur og algebra

Inntak

Markmið að nemendur:

- Geri sér grein fyrir að reiknireglur gilda hvort sem reiknað er með tölustöfum eða bókstöfum.
- Öðlist færni í reikningi með almennum brotum og veldum.
- Kunni skil á margföldunarandhverfum og geti nýtt sér að deiling með tölu jafngildir margföldun með margföldunarandhverfu hennar.
- Nái góðum tókum á að nota reiknivélar, bæði vasareikna og töflureikna.
- Geti sett fram stæður sem lýsa reglu og skilið annars konar framsetningu á sömu reglu.
- Nýti sér veldareglur og geti útskýrt þær.

Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Geti útskýrt hugtök, aðferðir og eigin lausnir bæði munnlega og skriflega.
- Noti reiknitækni og ólíkar aðferðir við að leysa og rannsaka stærðfræðileg viðfangsefni.
- Æfist í að skrifa eigin skilgreiningar á reglum og hugtökum.
- Kynnist einfaldri sönnun og hvernig algebra er notuð við sönnun.

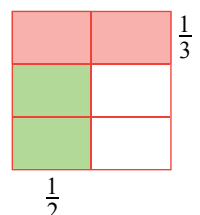


Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Algebra er fyrirferðarmikill og mikilvægur efnisþáttur í stærðfræðikennslu á unglingastigi. Í þessari bók er sérstök áhersla lögð á að sýna tengsl algebru við aðra efnisþætti. Í fyrsta kafla bókarinnar eru skoðuð tengsl algebru og rúmfræði. Í kaflanum um tölur og talnafræði er unnið með talnaskilning og hvernig skrá má stærðir með tölustöfum, bókstöfum og aðgerðatáknum. Í þessum kafla er áhersla lögð á að sömu reglur gilda um reikning með tölustöfum og bókstöfum.

Vald á brotareikningi og skilningur á brotum er mikilvægur í mörgum þáttum stærðfræðinnar. Ekki er nóg að læra reglur um hvernig reikna megi með brotum eða kunna að nota vasareikni heldur verða nemendur að skilja á hverju reiknireglur eru byggðar. Einnig þurfa þeir að átta sig á tengslum reikniaðgerða. Gott er að nota myndræna framsetningu við hlið talnanna. Nemendur hafa væntanlega flestir ágætt vald á því að leggja saman og draga frá almenn brot. Þegar finna á samnefnara má nota ýmsar aðferðir. Ef nemendur beita frumþáttun við leit að lægsta samnefnara er gott að skrá niðurstöðu myndrænt. Við margföldun almennra brota má nota ferning og sjá þannig myndrænt hvernig margfeldið verður til.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

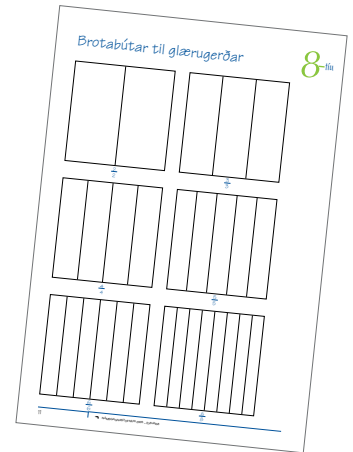


Kennari getur notað glærubúta og sýnt hvernig margfeldi myndast ef einn glærubútur er lagður ofan á annan.

Á heimasíðu námsefnisins er að finna eyðublöð til að búa til glærubúta.

http://www.nams.is/stae_ungl_stig/index.htm

Einnig má nota ferninga við deilingu almennra brota, sérstaklega við deilingu með heilli tölu.



Sýndar eru reglur en áður verið reynt að byggja upp skilning með því að nota myndræna framsetningu og tengsl margföldunar og deilingar. Nemendur eiga að setja reglur fram sjálfir út frá eigin athugunum.

Bæði í brotareikningi og í ýmsum þáttum algebrunnar hefur tíðkast að gefa nemendum mörg þjálfunardæmi. Æfingar- og þjálfunardæmi hafa þótt gagnleg til að festa í minni nemenda það sem þeir hafa verið að læra. Þrátt fyrir allan dæmareikninginn eru margir fullorðnir í miklum vandræðum með brotareikning. Talið er að einhæf þjálfun í reikningi auki færni í tiltekinni aðferð en samtímis veiti hún nemandanum falska tilfinningu fyrir eigin færni og skilningi. Skilningur eykst ekki við þjálfun heldur getur nemandi aukið hraða sinn við reikning. Það að auka skilning sinn felur alltaf í sér ígrundun og köfun. Nemendur þurfa hins vegar að æfa sig. Það er að segja þeir þurfa að skoða sama þáttinn frá mörgum hliðum og æfa sig í að skapa tengsl. Þeir þurfa að tengja þætti stærðfræðinnar saman og tengja stærðfræðipækkingu við aðra þekkingu sína. Þeir þurfa að efla hugtakaskilning sinn og æfa sig í að vera rannsakandi og velta stærðfræði fyrir sér. Þeir þurfa að komast að niðurstöðu og leggja á minnið reiknireglur sem þeir hafa ígrundað og skoðað. Það að leggja á minnið reglur, eins og að þegar almennu broti er deilt í almennt brot á að snúa seinna brotinu við og margfalda, hefur takmarkað gagn og eflir ekki stærðfræðilegan skilning. Flestir reikna slík dæmi í reiknivél og þá skiptir máli að hafa einhverja tilfinningu fyrir hvert svarið gæti verið. Mikilvægt þykir því að nemendur ræði saman um rannsóknir sínar og niðurstöður og venjist á að taka ekkert gilt nema það sem þeir skilja.

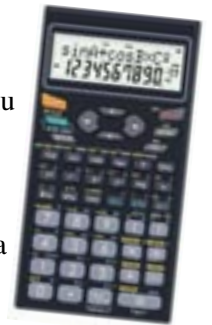


Vasareiknar eru mikið notaðir í stærðfræðinámi og sífellt eykst notkun töflureikna. Þessi tæki geta reynst mjög öflug hjálpartækni í námi. Með þeim er mun auðveldara fyrir nemendur að prófa sig áfram og gera margar tilraunir. En jafnframt þurfa þeir að vera á varðbergi því jafnvel þó vélarnir geri ekki reiknimistök eins og maðurinn er það enn þá mannshöndin eða hugurinn sem stjórnar þeim. Því þurfa allir að rækta með sér gagnrýna hugsun á svör og velta alltaf fyrir sér hvort þau geti staðist.

Þau reiknitæki sem unglingar hafa núorðið aðgang að eru sífellt að verða öflugri. Vasareiknar hafa innbyggðar ýmsar reikniadgerðir og geta reiknað bæði með tugabrotum og almennum brotum. Nemendur þurfa að læra að nota vasareikninn sinn skynsamlega og þekkja möguleika og takmarkanir slíkra reiknitækja.

Það er bæði seinlegt að finna ferningsrót og reikna með almennum brotum í höndunum. Samkomulag virðist hafa skapast um að ekki sé nauðsynlegt fyrir almenn- ing að geta reiknað ferningsrót og er því gert ráð fyrir að notaður sé vasareiknir við það nema um sé að ræða lágar ferningstölur sem eiga sér heilar tölur sem fernings- rót. Flestir telja mikilvægt að geta reiknað með almennum brotum í höndunum en langflestir reikna þó allt sem þeir þurfa að reikna, hvort sem er með heilum tölum eða brotum, í reiknitækjum. Það er því full þörf á að nemendur í grunnskóla læri að nota vasareikni við reikning með almennum brotum. Það gefur tækifæri til að vinna með tilfinningu nemenda fyrir svörum, bæði óstyttnum og fullstyttnum. Auðvelt er að gera smávillur í flóknum útreikningum með almennum brotum og hentar vel að nota vasareikna við slíka útreikninga.

Það að hefja í veldi og draga rætur eru andhverfar aðgerðir. Rannsókn á því er auðvelt að gera á vasareikni. Á mörgum vasareiknum eru margar innbyggðar aðgerðir eins og t.d. að finna margföldunarandhverfu, summu talna, hornaföll, lógaritma, prósentur og skráning í tugveldi. Nemendur geta prófað sig áfram og athugað hvað gerist ef ýtt er á takkana á vasa- reikninum þó sumt af því sé ekki í námsefni grunnskólans. Þannig má kveikja forvitni og styrkja þá hugmynd nemenda að með því að rannsaka skapi maður eigin þekkingu. Það er einnig hagnýtt að vera leikinn í að nota vasareikni og gefur svigrúm fyrir frekari stærðfræðipælingar.



Töflureiknir er forrit sem flestir hafa aðgang að í tölvum sínum. Töflureikni er gott að nota í tölfræði, t.d. þegar finna á meðaltal eða setja fram myndrit. En það eru margar aðrar aðgerðir í forritinu. Í þemaheftinu *Töflureiknir notaður* eru kynntar nokkrar þeirra. Hér í þessum kafla er athygli beint að aðgerðum í talnafræði. Í töflureikni eru mörg fleiri greiningarverkfæri sem er um að gera að hvetja nemend- ur til að kynna sér. Gæta þarf þess að stundum þarf að setja aðgerðirnar sérstaklega inn með því að fara í *Tools-Add ins – Analysis toolpack*. Kennarar þurfa að kynna sér möguleika töflureiknisins því tölvur verða sífellt aðgengilegri og langflestir nemendur hafa aðgang að tölvum bæði heima og í skóla. Því er kjörið að nýta tölvutæknina við stærðfræðikennslu.

Í námskrá er gert ráð fyrir að nemendur kynnist sönnunum í stærðfræði. Margar snjallar sannanir eru til í stærðfræði og eru flestar þeirra settar fram með algebru. Stærðfræðilegar sannanir eru óhrekjanlegar og margir stærðfræðingar nota ævi sína í að setja fram eina sönnun eða vinna að því að finna leið til að sanna. Þó eru til margar sannanir á sumum stærðfræðisetningum. Í kaflanum um Pýþagóras aftar í þessari bók eru sýndar nokkrar sannanir á setningu Pýþagórasar um samband hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi. Ákveðnar aðferðir hafa verið þróaðar við gerð sannana og mikilvægt er að röksemdafærslan sé góð. Margir stærðfræðikenn- arar eiga sér uppáhaldssönnun og ættu þeir að segja nemendum sínum frá henni og upplifun sinni af gildi sannana í stærðfræði. Við sannanir er oft sett fram tilgáta sem síðan er sönnuð eða afsönnuð. Í ýmsum öðrum vísindum setja fræðimenn fram tilgátur og athuga síðan með tilraunum hvort þær standist. Í stærðfræði eru sannanir hins vegar settar fram með skotheldri röksemdafærslu þannig að loka-

ályktunin er byggð á sönnun tilgátu lið fyrir lið. Stærðfræðilegar sannanir byggjast oft á hugvitsamlegri tilgátu sem sett er fram af stærðfræðilegu innsæi. Vélar geta prófað hvort tilgáta stenst fyrir tiltekna og ótrúlega margar tölur en ef sanna á að eitthvað sé algilt þarf að finna leið fyrir almenna framsetningu.

Veldareikningur er áhugaverður og erfitt fyrir marga að ímynda sér niðurstöður. Það að hefja í veldi breytir stærð hratt og þegar veldi eru margfölduð eða beitt á þau deilingu þarf að skoða ferlið vel til að geta áætlað niðurstöðuna. Sömu lögmál gilda þó alltaf í margföldun og deilingu, sama hvaða stærðir unnið er með, og þarf að ítreka það við nemendur. Nokkrar veldareglur hafa verið settar fram en til að geta notað þær þurfa nemendur að hafa skilning á veldum og geta prófað með talnadæmum að þær standist. Það auðveldar þeim mjög að leggja reglurnar á minnið og að rifja þær upp seinna.

Stærðfræði fyrir alla er slagorð sem oft hefur heyrst. Það felur í sér að allir eiga að hafa aðgang að stærðfræðimenntun sem miðuð er við forsendur þeirra. Viðfangsefnið reikningur og algebra byggist töluvert á að nemendur hafi í gegnum fyrra stærðfræðináms sitt byggt upp talna- og aðgerðaskilning og þróað með sér talsvert stærðfræðilegt afl. Með því að nota myndræna framsetningu samhliða tölustöfum og öðrum táknum fá fleiri nemendur aðgang að viðfangsefnum. Efnispátturinn felur í sér ögrandi viðfangsefni fyrir ólíka nemendur, sérstaklega ef framsetning er fjölbreytt, verkefni opin og nemendur krafðir um vangaveltur um lausnir og lausnaleyðir. Mikilvægt er að gefa sterkum nemendum ögrandi spurningar og hvetja þá til að kafa dýpra í viðfangsefnið. Áherslu þarf að leggja á að nemendur sem eiga erfitt með nám vinni að því í námi sínu að efla skilning sinn. Þeir þurfa að fá tækifæri til að skoða sama atriðið frá fleiri en einu sjónarhorni og oft hjálpar þeim að vinna hlutbundið og/eða myndrænt. Þeir þurfa mjög á því að halda að fá hjálp við að koma skilningi sínum í orð og er því til dæmis gott verkefni fyrir þá að skrifa með eigin orðum veldareglur eftir að hafa rætt um þær við kennara og fengið hjálp hjá honum. Forðast ber að leggja mikla áherslu á flókna útreikninga með tölustöfum og bókstöfum, heldur ætti að vinna markvisst með tölur og skilning á reikniðgerðum.

Kennsluhugmyndir

Meginmarkmið kaflans er að styðja nemendur við að yfirfæra þekkingu sína á reikningi með tölustöfum yfir á reikning með bókstöfum. Mikilvægt er því að kennari ræði við nemendur um það og hvernig bókstafir eru notaðir í algebru sem staðgenglar talna.

Í upphafi er notuð nálgun gegnum almenn brot og reikning með þau. Þar eru bæði tölustafir og bókstafir. Efnið ætti að vera nemendum nokkuð kunnugt og fyrst og fremst upprifjun og hvatning til að þeir reyni að skapa sér yfirsýn yfir skráningu og reikning með ýmsar stærðir. Mörg verkefnanna gefa tilefni til umræðna og geta nemendur rætt lausnir sínar í hópum eða kennari getur skoðað með öllum nemendahópnum hugmyndir um lausnir. Kjörið er t.d. að velja eitt af dæmunum 5–8 til umræðna.

Ýmsar leiðir má fara til að finna samnefnara. Oft hafa nemendur það mikinn talna-skilning að þeir geta séð hvaða samnefnarar koma til greina en þegar tölur verða hærri verður erfitt að sjá það í hendi sér. Þá þurfa nemendur á því að halda að hafa þróað leiðir til að finna samnefnara. Hér er miðað við að nemendur beiti frumþátt-un til að sjá hvaða þættir eru sameiginlegir og hverjir eru sérstakir fyrir hverja tölu. Nemendum er einnig bent á skrá niðurstöður sínar myndrænt. Bæði er unnið með minnsta samnefnara og stærsta sameiginlega þátt. Nemendum hættir til að ruglast á þessum hugtökum en það hjálpar ef kennari notar þau markvisst. Við gerð dæma hefur verið reynt að tengja dæmin saman, þannig eru sömu tölur notaðar í dæmum 10 og 11. Nemendur geta einnig nýtt sér niðurstöður úr dæmi 13 í dæmi 14. Hvetja ætti nemendur því til að skoða dæmin í samhengi. Í tengslum við þessa vinnu má benda á gagnvirk verkefni á *Algebruvefnum*: <http://www.nams.is/algebra/>.

Í dæmum 16 og 17 eiga nemendur að gera litlar rannsóknir og leita að reglu. Mörg-um nemendum gæti þótt gott að vinna þessi dæmi með öðrum og deila uppgötv-unum sínum með öðrum. Í dæmi 16 verður svarið alltaf nær 2 og í dæmi 17 nálgast svarið stöðugt 0. Einingabrot eru áberandi í niðurstöðum svo það má skoða ýmis atriði í niðurstöðum.

Margföldun og deiling almennra brota er viðfangsefni á blaðsíðum 55–59. Í gegn-um skoðun, myndræna framsetningu og margföldun brota eiga nemendur að setja fram reglu um margföldun almennra brota. Þeir fá hins vegar nokkur dæmi um hvernig fara má að við deilingu almennra brota og eiga að draga af því ályktun og setja fram reglu. Kennarar þurfa að ræða um þessar reglur og hjálpa nemendum að setja þær vel fram. Sýnd eru dæmi um að nota megí margföldunarandhverfu og margfalda með henni í stað þess að deila með almennu broti. Til þess að skilja það þurfa nemendur að hafa góðan aðgerðaskilning, þess vegna er nauðsynlegt að gefa þessu rými í kennslu og benda á að þetta sé ekki bara töfraaðferð heldur virki hún vegna þess hvernig reikniaðgerðirnar tengjast. Hér er líka mikilvægt að skoða tengingu deilingar og almennra brota. Þýðir $3:4$ það sama og $\frac{3}{4}$?

Blaðsíður 60 og 61 eru helgaðar reiknitækjum. Nemendur þurfa að átta sig á hvaða möguleikar felast í þessum reiknitækjum og læra að nýta sér þá af skynsemi. Í verkefnunum eru nemendur settir af stað en þeir þurfa að prófa sig áfram og læra á eigin vasareikni. Ef nemendur hafa eingöngu mjög einfalda vasareikna má nota vasareiknamöguleikana í tölvunni. Vasareiknar eru ólíkir og mismunandi aðgerðir innbyggðar þannig að það getur tekið tíma að átta sig á öllum möguleikum. Töflureiknirinn er líka gott rannsóknarefni fyrir nemendur. Þeir eru margir vanir að prófa sig áfram í tölvuheimum og því er tölvuumhverf-ið hentugt til að ýta undir þá hugmynd að stærðfræðinám byggist á rannsóknum. Kjörið er líka að taka verkefni úr þemaheftinu *Töflureiknir notaður* ef nemendur hafa ekki þegar glímt við þau.



Stærðfræðilegar sannanir eru áhugavert viðfangsefni og kannski má segja að þær séu hjarta stærðfræðinnar. Nemendur kynnast hér hvernig setja má fram sönnun á aðferð Gauss við að finna summu fyrstu náttúrlegu talnanna. Gert er ráð fyrir að kennari fari í gegnum textann og sönnunina með nemendum. Þá gefst tækifæri til að skoða og ræða hvernig algebra er notuð til að setja fram almenn og algild sannindi. Hér er farið frá útreikningi með tölum yfir í algilda framsetningu. Hér er sýnt dæmi um hvernig reikniregla er sönnuð. Gaman gæti verið að nemendur veltu fyrir sér hvernig þeir gætu sannað eitthvað sem þeir þekkja vel, t.d. að summa tveggja oddatalna er alltaf slétt tala.

Veldi er næsta viðfangsefni kaflans. Í upphafi er upprifjun og notaðar bæði heilar tölur, almenn brot og bókstafir. Dæmi 39 og 40 fela í sér rannsóknir og þarf því að gefa þeim sérstakan gaum og umræðu. Rifjað er upp að veldisvísir getur verið almennt brot og skráning á staðalformi. Upprifjun á veldum endar með samantekt á veldareglum fyrir margföldun velda, deilingu velda og að hefja veldi í veldi. Þessa samantekt ættu nemendur að skoða vel og velta fyrir sér samhengi í reglunum og milli reglnanna.

Í dæmum 48–53 er sjónum beint að stæðum. Hér er um upprifjun að ræða fyrir flesta nemendur en í upphafi er ítrekað að stæður eru alltaf að lýsa sambandi stærða og að þær má skrá á mismunandi hátt. Nemendur ættu að geta unnið þessi dæmi og síðustu blaðsíðu kaflans þar sem finna má rannsóknarverkefni og dæmi þar sem nemendur eiga að sýna fleiri en eina leið við lausn. Síðasta blaðsíðan gæti líka verið gott heimaverkefni eða námsmatsverkefni.

Í kaflanum er fjallað um mörg mikilvæg efni og því þurfa nemendur að fá góðan tíma til að vinna hann og kennari þarf að gera kröfu til nemenda um að þeir ígrundi og skapi sér yfirsýn yfir efni hans.

Pýþagóras

Inntak

Markmið að nemendur:

- Kunni setningu Pýþagórasar, þekki dæmi um sannanir á henni og geti beitt setningunni í margvíslegu samhengi.
- Þekki algengustu hugtök og lögmál um þríhyrninga.
- Geti notað algebru til að tákna samband stærða, t.d. í rúmfræðireglum.



Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Kynnist dæmum um hvernig stærðfræði er öðrum þræði sprottin af tilraunum manna til að skilja umhverfi sitt og koma skipulagi á vitneskju sína.
- Geti lesið og skrifað stærðfræðilegan texta.
- Átti sig á að til þess að stærðfræðilegur texti verði skiljanlegur, skýr og rökréttur þarf að nota táknmál stærðfræðinnar í bland við venjulegt mál.
- Nái að tengja saman stærðfræðileg hugtök og myndrænt efni.
- Geti tekið þátt í samræðum um stærðfræðileg efni í því skyni að öðlast betri skilning á hugtökum.
- Kynnist einföldum sönnunum þar sem röksemdafærslur skipta meginmáli.
- Geri sér nokkra grein fyrir sögu stærðfræðinnar.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Pýþagóras er án efa einn af merkari stærðfræðingum sögunnar og því var valið að fjalla um hann í sérstökum kafla. Pýþagóras er þekktastur fyrir að hafa sett fram og sannað setningu um samband hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi sem við hann er kennd og gengur undir nafninu setning eða regla Pýþagórasar. En Pýþagóras og lærisveinar hans gerðu margar aðrar merkar upppfinningar og í kaflanum er minnst á nokkur atriði sem voru umhugsunar- og rannsóknarefni Pýþagóringa. Margt hefur verið ritað um Pýþagóras en sökum þess að ákveðin leynd hvíldi ávallt yfir honum og bræðralagi hans er erfitt að komast til botns í sögu hans. Jón Þorvarðarson gerir sögu hans og helstu afrekum Pýþagóringa góð skil í bók sinni *Og ég skal hreyfa jörðina* og er kennurum bent á að kynna sér það efni. Hægt er að fara mun dýpra í að skoða ævi hans, lífsmáta og lífsreglur Pýþagóringa sem og ýmis rannsóknarefni þeirra svo sem stærðfræði og tónlist og talnaspeki.

Í *Aðalnámskrá grunnskóla*, stærðfræði er lögð áhersla á að í námsbókum séu textar sem veita innsýn í eðli stærðfræðinnar, sögu hennar og margþætt menningartengsl. Einnig er bent á að ekki sé alltaf nauðsynlegt að tengja slíkan fróðleik við verk-

efni og daglegar æfingar nemenda. Fróðleikur um stærðfræði, eðli hennar og sögu geti staðið einn og sér sem lestextar sem ætlað er að upplýsa nemendur og vekja áhuga þeirra og forvitni. Víða í námsefninu *Átta–10* má finna slíkt efni þó yfirleitt sé ekki um heila kafla að ræða. Má þar nefna sem dæmi umfjöllun um Arkímedes, pí og Eratosþenes í *Átta–10, 1*, um Gauss og Niels Henri Abel í *Átta–10, 2*, um talnamengi og Zenon frá Eleu í *Átta–10, 3* og um mælikerfi og fimmhyrninga sem þekja flöt í *Átta–10, 4*.

Setningu Pýþagórasar og mismunandi leiðum til að sanna hana eru einnig gerð góð skil í kaflanum. Um þetta efni hefur líka verið mikið fjallað og á Netinu má finna fjölmargar síður með dæmum um hvernig sanna má setninguna. Á þessari síðu <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml> eru til dæmis sýndar 74 leiðir til að sanna setninguna. Sjálfsagt nægir flestum nemendum að skoða og bera saman þær sannanir sem kynntar eru í kaflanum en gaman getur verið að benda nemendum á að fjölmargar aðrar leiðir eru til þó þeir hafi ekki forsendur til að takast á við nema brot þeirra.

Á þessari síðu (www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html) er safnað saman nokkrum sönnunum á setningunni og má skoða þær í gegnum smáforrit sem gera nemendum kleift að átta sig betur á hvað gerist og hvað setningin segir okkur í raun og veru.

Eins og fram kemur í kaflanum höfðu bæði Babýlóníumenn og Kínverjar gert sér grein fyrir því að samhengi væri milli hliðarlengda í réttthyrndum þríhyrningi. Það virðist að minnsta kosti ljóst að þekkt voru dæmi um hliðarlengdir þar sem setningin gildi. Framlag Pýþagórasar var því fyrst og fremst að sýna fram á og sanna að setningin gildi fyrir alla réttthyrnda þríhyrninga. Í kaflanum er bent á bókina *Síðasta setning Fermat* eftir Simon Singh í þýðingu Kristínar Höllu Jónsdóttur en þar er fjallað um tilraunir stærðfræðinga og leikmanna við að sanna stærðfræðilegt samband og framlag Pýþagórasar til þróunar stærðfræðilegra sannana.

Eins og fram hefur komið má setja sönnun á setningu Pýþagórasar fram á marga mismunandi vegu. Margar sannanirnar eru mjög myndrænar og ef nemendur fá tækifæri til að teikna, klippa í sundur og raða saman ættu þeir flestir að átta sig vel á samhenginu, geta lýst því með orðum og jafnframt fært rök fyrir því að setningin gildi.

Kennsluhugmyndir

Skipta má efni kaflans í þrjá hluta. Í fyrsta lagi er fjallað um Pýþagóras, ævi hans, lífsspeki og bræðralagið sem myndaðist í kringum hann. Í öðru lagi er fjallað um nokkur af þeim viðfangsefnum sem voru honum og lærisveinum hans tilefni til rannókna og vangaveltna. Í síðasta lagi er fjallað um sönnun á setningu Pýþagórasar. Efnið hentar vel til hópunnar. Fela mætti hópum að kynna sér ævi Pýþagórasar, bræðralagið og þá lífsspeki sem það byggðist á og þau viðfangsefni sem Pýþagóringar glímdu við, svo sem eins og fimmhyrninginn,

tengsl stærðfræði og tónlistar og talnaspekina. Bókin *Og ég skal hreyfa jörðina* er hér mikilvæg viðbótarheimild auk efnis sem finna má á Netinu og í erlendum bókum um sögu stærðfræðinnar. Samhliða hópvinnumni myndu hóparnir vinna þau verkefni í bókinni sem tengjast því efni sem þeir fást við.



Einnig mætti láta nemendur lesa textann í bókinni upp á eigin spýtur og láta síðan hvern og einn skrá á A4 blað 2–3 atriði sem vöktu athygli hans við lestur kaflans. Þessum atriðum mætti síðan safna saman í eitt stórt veggspjald og taka þau til sameiginlegrar umræðu. Nemendur myndu síðan vinna verkefnið í kaflanum annaðhvort upp á eigin spýtur eða tveir og tveir saman.

Rétt er að allir nemendur fái á einhvern hátt við sannanir á setningu Pýþagórasar. Þeir geta unnið tveir og tveir saman, valið sér eina sönnun og búið til veggspjald og gert grein fyrir henni í máli og myndum eftir því sem við á. Rétt er að minna á sönnunina sem er í 1. kafla. Síðan er rétt að taka sannanirnar til sameiginlegrar umræðu og samanburðar eins og lagt er til í síðasta verkefni kaflans.

Líkön

Inntak

Markmið að nemendur:

- Geti sett fram líkön og útskýrt forsendur og einkenni þeirra.
- Hafi gott vald á reikningi með tölum og táknum og geti unnið með jöfnur af öryggi við lausn samfélagslegra vandamála.
- Geri eigin rannsóknir og dragi ályktanir á grundvelli þeirra.
- Skilji hlutverk stærðfræðilegra líkana í nútímaþjóðfélagi.



Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Átti sig á hvernig beita má stærðfræði með því að nota líkön til að leysa ýmis vandamál.
- Geti úrskýrt bæði munnlega og skriflega hutök, aðferðir, niðurstöður og eigin lausnir á verkefnum og notað skýringarmyndir og tákni eftir því sem við á.
- Kunni að nýta stærðfræðilegar niðurstöður sem rök í umræðum.
- Þekki mörg dæmi um notkun stærðfræði í nútímaþjóðfélagi.

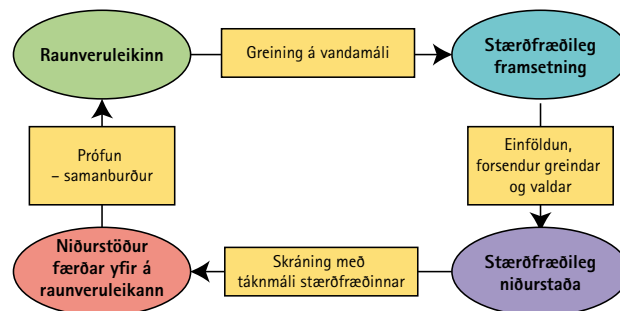
Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Þegar stærðfræði er notuð til að skoða heiminn, greina hann og lýsa honum er áhersla lögð á að átta sig á samhengi, orða það og skrá það með orðum og á táknmáli stærðfræðinnar. Stærðfræðilíkön eru oft notuð í þessum tilgangi. Hugtakið líkan er í íslensku máli oftast notað fyrir smækkaða eða stækkaða mynd af hlut, t.d. húsum. Þá er líkan misnákvæm eftirlíking af hlut sem hægt er að skoða og gera rannsóknir á. En það eru til fleiri gerðir líkana sem einnig eru eftirlíking af einhverju í raunveruleikanum. Notuð eru plastlíkön af líffærum, hugsanalíkön í bókmenntum og útskýringarlíkön í eðlisfræði svo dæmi séu tekin. Skilgreina má hugtakið líkan sem tákmynd eða hlutfirringu á kerfi eða ferli. Það þýðir að í því að setja upp líkan felst að verið er að líkja eftir einhverju raunverulegu til að geta rannsakað það. Það getur bæði verið hlutbundið og hlutfirrt. Oft eru sett fram reiknilíkön eða spálíkön sem byggð eru á stærðfræðilegum rannsóknum og athugunum. Líkön eru mikið notuð í stærðfræði og hafa orðið meira áberandi eftir því sem tölvutækni er meira notuð.

Tilgangur þess að búa til stærðfræðilíkan er ekki alltaf sá sami en í flestum tilfellum nýtast þau til að hjálpa okkur að

- skilgreina vandamál sem glímt er við
- koma skipulagi á hugsanir okkar
- skilja gögn okkar
- prófa skilning okkar á eigin gögnum
- gera spár

Þegar byggja á líkan þarf að byrja á því að skilgreina vandamálið sem líkanið á að hjálpa til að skilja betur eða leysa og greina hvaða atriði eru mikilvæg. Önnur atriði þarf að taka út úr myndinni. Við gerð líkana af raunveruleikanum þarf alltaf að einfalda veruleikann því hann er svo fullur af smáatriðum að ekki er hægt að taka þau öll með í líkan og láta líkanið endurgefa þau öll. Þess vegna þarf að velja bæði þætti og gerð líkans eftir því hvaða þættir eru taldir skipta máli. Stærðfræðilegt líkan af flóknum fyrirbæri eða aðstæðum byggist á sömu forsendum. Miklu skiptir að fá yfirsýn yfir grundvallareiginleikana í hinu raunverulega kerfi, geta látið þá vera ráðandi í líkaninu og jafnframt sleppt öðrum þáttum. Oft er það þessi einföldun sem gerir líkanið nothæft verkfæri. En það liggur líka hætta í einfölduninni. Líkanið getur endurgefið veruleikann í svo einfölduðu formi að of margir þýðingarmiklir þættir eru horfnir. Þegar notuð eru líkön í kennslu þarf að fjalla um hve mikil einföldun liggur í líkaninu sem notað er og meta öryggi þess. Þeir sem búa líkanið til þurfa að velja hvaða atriði eru með og hverjum sleppt og hvaða gerð af líkani skuli nota. Þannig hefur afstaða og greining líkanasmiðanna áhrif á gerð og notkun líkansins. Ferlið er hringrás og má lýsa því með mynd.



Líkanasmiðir byrja á því að gera nokkrar athuganir í hinum raunverulega heimi með það í huga að draga ályktanir eða spá fyrir um þær aðstæður sem gera á líkan fyrir. Þeir færa greiningu sína síðan yfir í stærðfræðilegt kerfi og vinna með upplýsingarnar á stærðfræðilegan hátt. Þeir skoða stærðfræðilegar niðurstöður sínar í samhengi við raunveruleikann og meta líkan sitt. Það er nauðsynlegt að vera gagnrýnninn á eigin líkön og taka sér tíma til að skoða og greina niðurstöður. Ein af stóru spurningunum er hvort tekist hafi að greina áhrifaþætti. Ef góð samsvörum er milli þess sem er skoðað og þess sem líkanið spáir fyrir um er ástæða til að trúa að stærðfræðilega kerfið hafi náð að fanga rétt mikilsverða þætti úr raunverulegum aðstæðum. Oft þarf að laga líkönin eftir fyrstu prófun, ekki má þó gera ráð fyrir að hægt sé að ná raunveruleikanum alveg heldur er reynt að ná þeim þáttum sem þjóna markmiði líkansins. Aldrei má gleyma að greina vel frá forsendum og taka mið af þeim við ályktanir.

Gerð líkana byggist bæði á þeim gögnum sem liggja fyrir og þeim skilningi sem er á vandamálinu sem glímt er við. Oft er góður skilningur á í hverju vandamálið er fólgið, t.d. að of langan tíma tekur á sunnudagskvöldum að komast með bíl inn á höfuðborgarsvæðið. Stundum liggur fyrir mikið af upplýsingum sem ekki hefur verið unnið úr. Það á við um ýmsa þætti sem snúa að mannfjöldapróun. Góður skilningur á vandamáli og miklar upplýsingar um efnið auka líkur á að hægt sé að setja fram gagnlegt líkan. Oft er það þó þannig að töluverður skilningur liggur fyrir en erfitt er að afla viðegiandi gagna.

Með því að búa til líkön og prófa þau má finna hvaða gögnum þarf að safna til að afla nægra upplýsinga um vandamál og efla skilning sinn á í hverju vandamálið er fólgið. Oft er því vænleg leið að búa strax til líkan, prófa það og endurbæta. Líkön verða aldrei algjör eftirlíking af veruleikanum og þau má alltaf bæta. Þau byggjast alltaf á einhverju óryggi.

Líkanasmíð í stærðfræðinámi reynir á mörg af grundvallarhugtökum stærðfræðinnar og krefst oft mikilla útreikninga. Það er því kjörið að nýta tölvutæknina og nota töflureikni og fallforrit til að einfalda nemendum að prófa sig áfram með hugmyndir sínar og skoða hvað gerist ef þeir breyta forsendum. Jafnframt læra þeir þá að nýta sér tölvutæknina. Í vinnu með líkön og við gerð þeirra reynir oft á þekkingu nemenda á fallhugtakinu. Nemendur hafa kynnst breytivélum og þeir hafa fundið reglu í vaxandi mynstrum. Gott getur verið að vísa í þá reynslu þegar verið er að hjálpa nemendum áfram við gerð líkana.

Hópvinnu er mikilvæg í stærðfræðinámi. Í hópvinnu fá nemendur tækifæri til að ígrunda og deila hugmyndum, sjónarhornum, reynslu og hugsunum á meðan þeir vinna. Það verður til samræða milli nemenda og gegnum þá samræðu nota þeir tungumálið sem er áreiðanlega þýðingarmesta tækið sem maðurinn hefur við sköpun þekkingar. Þegar nemendur vinna saman að því að greina vandamál og leggja fram hugmyndir að lausn þess verður námið á forsendum nemendanna þar sem unnið er út frá þekkingu og hæfni hvers og eins. Líkanasmíð gefur nemendum tækifæri til að upplifa að þeir geta notað þá stærðfræði sem þeir hafa lært til að vinna sjálfstætt að því að greina og setja fram ný vandamál sem þeir koma auga á sjálfir. En ekki síður að upplifa og reyna að þeir geta bæði af nauðsyn og með sköpunarkrafti notað stærðfræðina til að búa til nýtt og skoða stærðfræðileg vandamál á fjölbreyttan hátt.

Líkanasmíð gefur tilefni til skynsamlegrar vinnu þar sem nemendur fá samtímis skilning á og reynslu af þeim hliðum stærðfræði sem notast er við til að lýsa hagnýtum og hlutbundnum aðstæðum. Nemendur þurfa líka að kynnast líkönum sem notuð eru og átta sig á hvernig þau eru byggð upp. Þá þurfa þeir að vega og meta gæði líkana.

Á heimasíðu Flatar (<http://flotur.ismennt.is/>) er að finna verkefni um líkön og gerð líkana. Þau eru byggð þannig upp að sett er fram samfélagslegt vandamál sem heppilegt getur verið að nota stærðfræði til að lýsa og leita lausna við.

Verkefnin voru sett inn á heimasíðuna í tilefni Dags stærðfræðarinnar 2007 og eru þar undir heitinu verkefnabanki. Verkefnin eru unnin af stærðfræðikennaranemum í KHÍ. Í kaflanum hér er áhersla lögð á að skoða annars vegar líkön sem byggð eru á niðurstöðum tilrauna og hins vegar líkön þar sem reynt er að finna réttláta leið til skiptingar.

Stærðfræðileg líkön spretta upp út frá fyrirbærinu sem reyna á að skilja. Í gegnum slík líkön eru einkenni úr raunveruleikanum þýdd yfir á tungumál stærðfræðinnar og tjáð í tölum, breytum, föllum og reglum. Með því að nota stærðfræðilegt líkan er beitt aðferðum stærðfræðinnar til að ná fram stærðfræðilegri lausn á því vandaamáli sem lagt var upp með.

Kennsluhugmyndir

Í þessum kafla er nemendum gefin innsýn í heim stærðfræðilegra líkana. Þeir hafa oft kynnst ýmsum dæmum um líkön og notað þau í stærðfræðinámi sínu. Gott dæmi um slík líkön eru t.d. sætisgildiskubbar og brotabútar. Einnig hafa nemendur notað reiknilíkön, ekki síst í vinnu með jöfnur. Þá hafa þeir skoðað jöfnur um verðmyndun þar sem breytur geta bæði verið magn og grunneiningargjald. Hér er fyrst og fremst unnið með reiknilíkön og líkön sem nota má til að leysa úr ágreiningsefnum eða valddreifingarlíkönum. Í öllum faggreinum er unnið með líkön og eru þau oft sett fram myndrænt. Hugmyndin um stærðfræðileg líkön er líka sett fram myndrænt í kaflanum. Gott getur verið að byrja umfjöllun um kaflann með því að skoða, safna og ræða um fjölbreytt líkön. Í fjölmiðlum er daglega sagt frá ýmsum þáttum þar sem byggt er á líkönum. Spár um þróun mannfjölda eða vísitölunnar byggjast á líkönum, jarðvísindamenn setja spár sínar fram út frá spálíkönum, úrvinnsla úr skoðanakönnunum er byggð á líkönum og margs konar reiknilíkön eru notuð í fjármálaheiminum. Nemendur nota stundum eigin aðferðir við að ákveða verkaskiptingu, t.d. hver á að vera ritari í hópvinnu eða sækja gögn. Þekkt dæmi er hnífur, skæri og steinn, fyrstur til að segja tiltekið orð, romsur eins og ugla sat á kvisti og setja lófa á borðið og sá sem efstur lendir þarf að vinna verkið. Þessar leiðir byggja á líkönum sem nemendur hafa almennt ekki greint eða eru meðvitaðir um.

Skipulagsfræðingar, arkitektar og verkfræðingar nota reiknilíkön mikið við vinnu sína. Í upphafi kaflans eru tekin dæmi um slík líkön. Nemendur gætu, í tengslum við vinnu með þessi dæmi, velt fyrir sér bílastæðum við skólann sinn eða einhver hús í nágrenninu. Hvaða viðmið skyldu hafa verið notuð? Á Netinu má víða finna teikningar af stofnunum og fyrirtækjum til að skoða. Nemendur geta velt fyrir sér hve gott líkanið er. Þá þurfa þeir að svara spurningunum: Hvaða upplýsinga þarf að afla til að geta metið það? Hvaða viðmið á nota?

Í dæmum 3–7 eru skoðuð dæmi um hvernig líkön eru notuð til að reikna brennslu mannslíkamans á hitaeiningum. Leggja þarf áherslu á að nemendur skoði töfluna í byrjun og reyni að átta sig á reiknilíkaninu sem notað er. Í dæmunum er áhersla lögð á að nemendur dýpki skilning sinn á líkaninu og jöfnunni sem sýnir það.

Í líkamsræktargeiranum eru mörg líkön í gangi sem skoða má og það gæti verið gaman fyrir nemendur að ræða við fagfólk og spyrjast fyrir um hvernig hitaæiningaþörf fólks er reiknuð út og hvaða viðmið eru notuð við gerð slíkra líkana.

Á blaðsíðum 78 og 79 er umfjöllun um gerð líkana. Þar er sýnd mynd þar sem dregin eru fram tengsl líkans og raunveruleika. Mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir að líkön eru ekki fullkomin eftirlíking af veruleikanum. Þeir þurfa að átta sig á hvaða vinnubrögð eru notuð við gerð líkana og hvernig nýta má þau til að átta sig betur á ýmsum málum og gera spár. Í tengslum við vinnu með hópverkefni (dæmi 10) geta nemendur og kennarar leitað upplýsinga hjá sveitarfélagi sínu. Sem dæmi má nefna að hjá Menntasviði Reykjavíkur hafa verið teknar saman tölfraðilegar upplýsingar um grunnskólana. Þar koma fram upplýsingar sem reykvískir nemendur gætu notað til að skoða eigin skóla og aðrir nemendur til að setja fram líkön fyrir sinn skóla. Margir skólustjórar eru líka vel að sér um þróun nemendafjölda og spár um þróun mannfjölda.

Olía og hvernig hún breiðist út er viðfangsefni næstu fjögurra blaðsíðna. Fyrst er sett upp vandamál úr raunveruleikanum. Síðan eru dæmi um hvernig reikna má út dreifingu olíu við aðrar aðstæður og nemendum ætlað að velta fyrir sér sambandi líkans og raunveruleika. Dæmi 15 er byggt á tilraun og í dæmunum sem fylgja á eftir eiga nemendur að nota niðurstöður tilraunarinnar til að setja fram líkan um dreifingu olíu og ræða hugmyndir sínar. Við prófun á verkefninu var notaður grillvökvi en sjálfsagt má nota ýmiss konar olíu. Nemendur þurfa að mæla með 0,1 cm nákvæmni. Droparnir verða ekki endilega að mjög reglulegum flekkjum á pappírnum og beita nemendur væntanlega mismunandi aðferðum til að meta breidd þeirra og flatarmál. Það er alltaf gott umræðuefni að ræða hvað er breidd og hvað er lengd. Sumir leysa þetta með því að finna meðaltal breiddar og lengdar flekksins sem myndast á hverri ör. Gefa þarf nemendum góðan tíma og reyna að skapa sem mestar umræður. Heppilegt er að nota töflureikni við úrvinnslu. Það hjálpar nemendum að sjá bestu línu og lesa punkta af grafinu. Gott er að kennari áætli tíma með hverjum hópi nemenda í umræður um dæmi 16–18. Það er mikilvægur undirbúningur fyrir heildarumræður nemendahópsins um spurningar í dæmi 19. Þar er m.a. velt upp spurningunni hvort líkön sem spá fyrir um dreifingu olíuleka geti nýst í raunveruleikanum og þar gefst því gott tækifæri til að ræða um tengsl líkana við raunveruleikann.



Fólk notar margar leiðir til að skipta á milli sín. Miklu skiptir að finna leiðir sem allir hlutaðeigandi eru sáttir við. En hvað er sanngjörn skipting og hvaða líkön má nota við skiptingar? Í dæmum 20–30 eru sýnd dæmi um nokkrar leiðir við skiptingar. Verkefnin geta nemendur sjálfsagt unnið að mestu sjálfir en gott er að ýta undir umræðu um sanngirni skiptingarlíkans og hvetja nemendur til að setja fram eigin hugmyndir að líkönum. Mikið er um samruna fyrirtækja á þessum áratug. Margt er þá sem semja þarf um og alltaf er eitthvað sem ekki tekst að semja um. Finna þarf leiðir til að komast að niðurstöðu um slík mál þannig að aðilum finnist

að völdum sé sem jafnast skipt. Hér er kynnt 100 stiga aðferðin. Henni má beita á ýmislegt annað og gæti verið gaman og gagnlegt að nemendur prófuðu hana á einhverju úr eigin raunveruleika eða byggju til eigin dæmi.

Á síðustu blaðsíðum kaflans eru ýmis dæmi úr efni hans sem um leið sýna fleiri dæmi um notkun líkana. Byrjað er skoðað líkan sem notað er fyrir hóp manna til að velja milli tilgreindra valkosta. Nemendum er ætlað að prófa að nota þetta líkan við ímyndaðar aðstæður. Ef það hentar væri áhugavert að nemendur gætu beitt því við að leysa eitthvert mál sem þeir þurfa að komast að niðurstöðu um. Á blaðsíðu 89 eru fjögur ólík dæmi sem ætlað er að hjálpa nemendum að gera sér grein fyrir líkanahugtakinu og fjölbreyttri notkun líkana.

Eftir vinnu með kaflann geta nemendur unnið eitt eða fleiri verkefni um líkön sem finna má á heimasíðu Flatar, samtaka stærðfræðikennara. (*Dagur stærðfræðinnar 2007 – verkefnabanki*)

Algebra og jöfnur



Inntak

Markmið að nemendur:

- Efli skilning sinn á notkun tákna í stærðfræði.
- Nái góðu valdi á að einfalda stærður.
- Þekki helstu reiknireglur og geti beitt þeim við þáttun og margföldun liðastærða.
- Setji fram reglur um samband stærða með mismunandi framsetningarmáta, s.s. töflum, gröfum, reglum og jöfnum.
- Geri greinarmun á jöfnum og ójöfnum og geti leyst 1. stigs jöfnur.

Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Hafi öðlast færni í að nota táknmál stærðfræðinnar til að skrá samband stærða.
- Geti beitt rannsóknarnálgun í námi sínu.
- Átti sig á hvernig nota má algebru við lausn viðfangsefna úr daglegu lífi.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Algebra byggist á alhæfingum sem settar eru fram á formlegan hátt. Alhæfingar eru mikið notaðar í allri tjáningu svo allir nemendur hafa vald á því að alhæfa og hugsa huglægt. Það er rótin að algebru og í algebrunámi er gott að byggja á reynslu nemenda af alhæfingum úr tungumálinu. Umræður skipta miklu máli í algebrunámi. Þær gefa nemendum tíma til að hugsa sig um, tjá sig og átta sig á inntaki og þannig fá þeir tækifæri til að nýta vald sitt af öðrum sviðum á að alhæfa. Nemendur sjá ekki alltaf mynstur, samband og reglu á sama hátt og kennarinn og því er gagnlegt að ræða um verkefni.

Rannsakandinn Abraham Arcavi⁷ hefur sett fram hugtakið táknskyn. Hann lítur á þróun táknskyns sem framhald af þróun talnaskyns. Meginhugmyndin er að í táknskyni felist að:

- Skilja og hafa tilfinningu fyrir valdi táknanna. Geta metið hvernig og hvenær tákn geta og ættu að vera notuð til að sýna tengsl, alhæfingar eða sannanir.
- Hafa hæfni til að lesa og meðhöndla táknsmástæður við lausn algebrulegra vandamála. Skoða dæmin, velta fyrir sér samhengi, mögulegu svari og hvaða leið væri heppileg til að leysa áður en byrjað er að einfalda.

⁷ Arcavi, A. 2005. Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. Í *For the Learning of Mathematics*. 25(2), pp. 50–55.

- Að geta notað stæður og jöfnur í glímu við vandamál og hafa hæfni til að velja viðeigandi táknasamstæðu.
- Að gera sér grein fyrir þörfinni á að athuga merkingu tákna á meðan unnið er að lausn dæma, við skoðun á niðurstöðu og við samanburð og skoðun á ímyndaðri niðurstöðu.
- Að gera sér grein fyrir að tákn geta spilað ólík hlutverk í ólíku samhengi (t.d. breytur) og átta sig á gildi þess að þróa tilfinningar fyrir slíkum mun.

Allir geta þróað með sér táknskyn og er mikilvægt að styðja við þá þróun í kennslunni. Táknskyn er grundvallarþáttur þess að algebrunám nái dýpt og að nemendur geti nýtt sér algebruþekkingu sína í daglegu lífi. Kennari þarf að gefa nemendum tíma til að yfirfæra orð, myndir og tölur yfir í tákn. Hann þarf að hvetja nemendur áfram til að vinna með eigin hugmyndir og prófa þær í raun.

Nemendur þurfa að fá æfingu í að skrá stæður og nýta þær við útreikninga. Stæður eru gagnlegar til að setja fram samband milli stærða, t.d. í viðskiptum og við flatar- og rúmmálsútreikninga. Þegar nemendur vinna með slíkt samhengi geta þeir nýtt sér myndræna framsetningu og þekkingu á aðstæðum. Stæður eins og **lengd · breidd** og **einingaverð · magn** er auðvelt að yfirfæra á þekktar aðstæður. Með því að skrá sjálfir stæður fá nemendur góðan skilning á hvernig táknmál stærðfræðinnar er notað. Það verður þá líka eðlilegt að reyna að einfalda stæðurnar til að auðvelda útreikninga.

Nemendur þurfa að ná valdi á að einfalda stæður með því að draga saman líka liði, þátta og breyta margfeldi í liðastærðir. Við einföldun reynir oft á talna- og aðgerðaskilning og þeir sem eru leiknir í meðferð talna eiga oft auðveldara með að sjá leiðir til að einfalda. Þáttun má framkvæma í skrefum. Það er oft mjög gagnlegt að þátta og mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir því. Þáttun og margföldun liðastærða eru andhverfar aðgerðir. Gott getur verið að benda nemendum á að athuga hvort þeir hafa þáttað rétt með því að margfalda þættina saman og sjá hvort þeir fá aftur upphaflegu liðastærðina.

Þegar margfaldaðir eru saman tveir eða fleiri svigar er þörf á töluverðri nákvæmni. Nemendur þekkja margir hvernig nota má dreifireglu við að margfalda saman tvær tveggja stafa tölur. Gott getur verið að hjálpa þeim að byggja ofan á þá þekkingu. Til að tryggja að ekkert gleymist við margföldun tveggja sviga er heppilegt að skrá margföldunina í töflu og leggja síðan saman allar tölurnar í töflunni. Ef mínusliðir eru í svigum má skrá niðurstöðu einstakrar margföldunar með neikvæðum tölum. Settar hafa verið fram reglur sem gilda þegar tveggja liða svigi er hafinn í annað veldi.

		x	3
x			
3			

Frekar auðvelt er að sjá myndrænt á hverju þessar reglur eru byggðar. Það er því gott að nemendur fái að skoða hvernig leiða má reglurnar út frá mynd. Einnig er til regla um margfeldi summu og mismunar tveggja liða. Við margföldun kemur einungis fram tveggja liða liðastærð og er áhugavert að skoða hvers vegna það gerist.

Megináherslu ber að leggja á að nemendur skoði einkenni sem fram koma í hverri liðastærð þegar svigar eru margfaldaðir saman. Rannsóknarspurningar gætu þá verið: Margfeldi hvaða þátta koma í fyrsta lið og hverra í síðasta lið? Úr hverju er miðliðurinn samsettur?

Þegar margfalda á eða þátta liðastærðir getur komið sér vel að þekkja þessar reglur.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Jöfnur hafa að geyma tvær jafngildar stærður. Þar er lýst sambandi stærða sem gefur sömu niðurstöðu fyrir eitt eða fleiri gildi óþekktra stærða stærðanna. Nemendur þurfa að gera sér grein fyrir muninum á stærðu og jöfnu. Lausn jöfnu felst í að einfalda stærðurnar sitt hvoru megin við jafnaðarmerki en halda þeim þó alltaf jafngildum. Margar leiðir má fara við lausnir jafna og nýtist það nemendum vel að hafa vald á ýmsum leiðum. Þeir ættu því að íhuga áður en þeir byrja að leysa jöfnuna hvaða leið gæti hentað best. Við lausn jafna þarf að leggja áherslu á að alltaf verður að gera sömu aðgerð báðum megin jafnaðarmerkisins til að halda stærðum jafngildum. Jöfnur með brotum eru kynntar í kaflanum og hvaða leiðir má fara til að losna við brotin úr jöfnunum. Nemendur þurfa því að nýta sér þekkingu sína á reikniaðgerðunum og reikningi með rauntölur við lausn jafna.

Þegar setja þarf upp jöfnu þarf að lesa af nákvæmni úr þeim upplýsingum sem liggja fyrir. Einnig þarf að taka mið af því eftir hverju er leitað. Myndræn túlkun getur verið gagnleg en einnig finnst mörgum gott að setja samband stærða fram með eigin orðum áður en því er lýst með táknmáli stærðfræðinnar. Oft er heppilegt að byrja á því að setja upp tvær stærður og gera þær síðan jafngildar. Nemendur þurfa töluverða hvatningu og umræður við að setja upp jöfnur.

Í jöfnum gefur jafnaðarmerki til kynna að um jafngildar stærður sé að ræða. Í ójöfnum segir ójöfnumerkið til um samband stærðanna sitt hvoru megin við það. Heppilegt er að sýna lausnir ójafna á talnalínu þar sem þær ná oftast yfir ákveðið talnabil eða þær byrja frá og með einhverri tölu. Ójöfnur koma fyrir í ýmsu samhengi í daglegu lífi. Í kaflanum eru tekin dæmi um notkun á rútum. Ef um jöfnu hefði verið að ræða hefði lausnin falið í sér að öll sæti í rútu hefðu nýst. Í lausn á ójöfnu koma hins vegar mörg hugsanleg svör til greina, þar sem t.d. kemur fram á hvaða talnabili farþegafjöldi í rútu geti verið. Glíma við einfaldar ójöfnur getur styrkt skilning nemenda á jöfnum og lausnum þeirra.

Reiknireglurnar víxlregla, dreifiregla og tengiregla eru mikilvægar og nýtast oft vel til að einfalda útreikninga. Margir nýta sér þær ómeðvitað og þarf að ítreka við nemendur að þeir geri sér alltaf grein fyrir því hvaða reglum þeir eru að beita við lausnir jafna. Samlagningarandhverfur og margföldunarandhverfur eru markvisst notaðar til að einangra óþekktu stærðirnar. Allar stærðir eiga sér samlagningar- og margföldunarandhverfu nema talan 0. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu

hennar er margföldunarhlutleysan. Hún er einn og ekkert margfeldi af 0 getur orðið einn. Við lausnir jafna kemur það ekki að sök að 0 eigi sér ekki margföldunarandhverfu. Í hugtökunum andhverfa og hlutleysa felst að beita má þeim við lausnir jafna.

Algebra er fyrirferðarmikill og mikilvægur efnisþáttur í stærðfræðinámi á unglingastigi. Ýmis vandamál koma upp við kennslu hennar. Nemendur eiga erfitt með að sjá hvernig algebra tengist við önnur svið innan og utan stærðfræðinnar. Algebra er oft skilin sem formlegt, einangrað kerfi þar sem fyrst og fremst er fengist við að færa til tákna og fara eftir uppgefnum reglum. Þessi þrönga sýn á stærðfræði leiðir til þess að nemendur reyna að fylgja ferli án þess að gera tilraun til að skilja það. Nemendur sem skortir grundvallarskilning á reikniaðgerðum lenda oft í slíkum vandræðum en í algebrunámi má vinna að því að byggja grundvallarskilning upp.

Hefð er fyrir því að tæknileg hlið algebrunnar fái mikið vægi í efstu bekkjum grunnskólans. Í þessu námsefni er lögð áhersla á að sýna fleiri hliðar algebrunnar og flétta þær saman. Það er mikilvægt að nota algebru til að tjá og skrá upplýsingar og tengsl, beita svo aðferðum algebrunnar til að einfalda þær og setja fram niðurstöður sem síðan þarf að túlka. Með því að nota táknmál algebrunnar má formgera skráningu á tengslum. Munurinn á reikningi og algebru felst í formgerðinni. Þegar ekki er notuð algebra við lausn þrauta er oft reiknað aftur á bak en þegar notuð er algebra eru settar upp formlegar stæður og jöfnur. Þá er byggt á greiningu á upplýsingum og skráningu á samhengi. Veigamikil ástæða fyrir því að algebra er námsþáttur í grunnskóla er að hún er tæki til að rökstyðja og útskýra með. Í þessu námsefni er tekið mið af því.

Kennsluhugmyndir

Í kaflanum er megináhersla lögð á skráningu og meðferð stæðna og jafna. Ástæða er til að leggja áherslu á meginhugtök og að nemendur geti alltaf útskýrt leiðir sínar við lausn viðfangsefna.

Í upphafi er unnið með að skrá ummál svæða með stæðu. Þannig er nemendum gefið tækifæri til að sjá fyrir sér myndrænt hvaða sambandi stæður geta verið að lýsa. Einnig eru nokkur æfingadæmi í að einfalda og finna gildi stæðna. Í dæmunum er fengist við stæður sem skráðar eru með heilum tölum, brotum og bókstöfum. Í dæmi 14 eru tekin dæmi úr daglegu lífi. Í tengslum við vinnu við það er tilvalið að nemendur kanni verð eða velti fyrir sér hve langur tími sparast ef hraði er aukinn um 10 km/klst. á mismunandi vegalengdum. Þeir geta valið sér viðfangsefni og nýtt töflureikni við úrvinnslu.

Á blaðsíðum 93–98 er fengist við andhverfu aðgerðirnar þáttun og að breyta margfeldi í liðastærð. Hvetja þarf nemendur til að leita að samhengi og skoða hvað felst í viðfangsefnunum. Í byrjun eru sett fram æfingadæmi um þáttun og margföldun inn í sviga. Gott er að nýta þau til að og hvetja nemendur til að ganga úr skugga um að um andhverfar aðgerðir er að ræða. Þegar stæður eru settar upp á brotastrík

er oft einfaldara að sjá hvernig stytta má út en gæta þarf nákvæmni. Í dæmi 23 eiga nemendur að greina villu og gefur það tilefni til umræðna um styttingu og hvers ber að gæta við hana. Á blaðsíðu 6 eru rannsóknarverkefni þar sem nemendum er ætlað að skrá reglu. Þessi verkefni gætu hentað vel til vinnu í litlum hópum. Í umræðum um verkefni ber að beina athygli að skráningu reglnanna.

Á blaðsíðum 96–98 er margföldun sviga skoðuð. Þar er sýnt hvernig nota má töflu til að skrá milliniðurstöður við margföldun sviga. Áherslu þarf að leggja á hve mikla nákvæmni þarf að sýna við margföldunina. Sjónum er sérstaklega beint að þeim reglum sem gilda þegar summa eða mismunur tveggja liða er hafinn í annað veldi. Ítreka þarf þó að þessar reglur er auðvelt að sýna með margföldun og ekki er ástæða til að leggja áherslu á að nemendur læri þær utanbókar. Sama gildir um margfeldi summu og mismunar tveggja liða. En þessar reglur ættu að hvetja nemendur til að skoða regluleikann sem fram kemur við margföldun tveggja sviga. Það er mikilvægur grunnur fyrir því að geta þáttað þriggja liða stærðir í margfeldi tveggja liða stærða. Það er einnig gott fyrir nemendur að æfa sig í að nota reglur sem þeir skilja á hverju byggja.

Það er gagnlegt við lausnir þrauta og ýmissa verkefna að geta skráð upplýsingar og sett þær fram með stæðum og jöfnum. Niðurstaða er fengin með því að leysa jöfnur en síðan þarf að athuga hvort niðurstaðan nýtist til að leysa viðkomandi þraut. Nemendur hafa kynnst ýmsum leiðum við lausnir jafna og þarf að rifja þær upp og ræða um hvaða leiðir eru hentugar hverju sinni. Oft þarf að einfalda stæður með því að draga saman líka liði, stytta eða breyta margfeldi í liðastærð þegar leysa á jöfnur. Það geta því verið mörg skref að lausn og til að henda reiður á því þarf skráning að vera skipuleg.

Á blaðsíðum 101 og 102 eru ójöfnur kynntar og hvernig skrá má lausnir þeirra á talnalínu. Glíman við ójöfnurnar ætti að geta skerpt skilning nemenda á jöfnum og lausnum þeirra. Í daglegu lífi eru mörg viðfangsefni sem leysa má með ójöfnum og er gott að nemendur finni fleiri dæmi en um farþegaflutninga. Í dæmi 71 eiga nemendur að rannsaka sanngildi fullyrðingar sem er ójafna. Gott væri að ræða þetta dæmi í nemendahópnum þegar nemendur hafa glímt við það.

Jöfnur með brotum eru næsta viðfangsefni. Þar reynir á að nemendur hafi vanið sig á að skoða dæmi áður en þeir ráðast í að leysa það. Hvetja ætti þá til að staldra við og velta fyrir sér leiðum og mögulegum svörum. Í dæmum 73–75 er sjónum beint að því þegar finna þarf samnefnara við lausn jöfnu.

Á blaðsíðu 104 er að finna viðfangsefni sem í mörgum tilfellum gæti hentað að kennari vinni með nemendahópnum því þá gefst tækifæri til að kafa í efnið. Sjónum er beint að því hvernig reiknireglur og andhverfur eru notaðar við lausnir jafna. Á lokablaðsíðu kaflans er skoðað hvernig þær upplýsingar sem leitað er eftir hafa áhrif á það hvernig jafna er sett upp. Þessi verkefni gætu hentað vel til vinnu í litlum hópum. Við lok kaflans er góð hugmynd að ræða um algebru, tilgang og gagnsemi hennar.

Dulmálfræði

Inntak

Markmið að nemendur:

- Kynnist nýju sviði innan stærðfræðinnar, undirgreininni dulmálfræði.
- Þekki dæmi um dulmál og geti notað dulmálskerfi.
- Þjálfist í að búa til og greina reglu.
- Öðlist aukna færni og nákvæmni í að fylgja flóknum reikniritum.
- Þekki dæmi um hvernig stærðfræði er nýtt við tæknilegar lausnir.



Aðferðir

Markmið að nemendur:

- Efli færni sína í að nota hugtök stærðfræðinnar í umræðum og við röksemdafærslu.
- Geri sér grein fyrir að skráningarkerfi eru byggð á stærðfræði.
- Kynnist dæmi um hvernig stærðfræðileg hugmynd er þróuð og notuð öldum saman á mismunandi hátt.

Umfjöllun um inntak og vinnubrögð

Dulmálfræði hefur lengi heillað manninn. Dulmálfræði er undirgrein stærðfræðinnar og fæst hún við dulritun og dulráðningu. Margs konar dulmál hafa verið þróuð og enn þá er verið að þróa dulmál. Fyrr á tímum var dulmál ekki síst notað til að dulkóða upplýsingar og skilaboð. Nú er dulmál mikið notað í tölvuheiminum. Almennigur verður mest var við það í gegnum öll þau lykilorð og aðgangsnúmer sem nota þarf, til dæmis í bankaviðskiptum. Það að búa til dulmál og ráða dulmál krefst rökhusunar, hugmyndaauðgi, frumleika, sköpunar og stærðfræðiþekkingar. Oft er notuð innsetningaraðferð sem byggist á því að setja staf eða merki í stað upprunalega stafsins eftir tilteknu kerfi. Þá þarf að búa til lykilorð sem nota má við dulkóðun og dulráðningu.

Stærðfræði fer inn á mörg svið daglegs lífs. Í námsefninu hefur verið reynt að kynna margar hliðar stærðfræðinnar og er þessi kafli dæmi um slíkt. Margir krakkar og unglingar hafa leikið sér með dulmál í anda Sesars án þess að velta fyrir sér á hvaða grunnhugmynd slíkt dulmál byggja. Dulkóðun í nútímanum byggist á sömu hugmyndum, þó að tölvutæknin hafi gert kleift að nota flóknari kerfi, en um leið grundvallast tölvutæknin á tvíundarkerfi sem setur allri dulkóðun ákveðin mörk.

Allir Íslendingar og þeir sem hafa dvalarleyfi á Íslandi hafa íslenska kennitölu. Aðferðin sem notuð er við gerð slíkra kennitalna kallast *Modulus 11*. Kennitölur

eru tíu tölustafir. Fyrstu sex tölustafirnir eru fæðingardagur og -ár. Næstu tvær tölur eru valdar af handahófi. Því næst er öryggistala, þ.e. svokölluð vartala, sem reiknuð er út eftir ákveðinni forskrift sem sýnd er í kaflanum. Tíunda og síðasta talan gefur svo til kynna á hvaða öld viðkomandi er fæddur. Upplýsingar um gerð kennitölu má finna á heimasíðu Hagstofu Íslands. Þessi aðferð sem notuð er á Íslandi getur hentað þar sem öruggt er að það fæðist mun færri en 100 manns á dag því ekki mega tveir einstaklingar hafa sömu kennitölu. Á Norðurlöndunum eru einnig notaðar kennitölur sem byrja á sama hátt nema hvað síðustu fjórir stafirnir eru valdir eftir annarri reglu en á Íslandi vegna stærðar þjóðfélaganna.

Strikamerkingar eru annað dæmi um notkun dulkóðunar með tölvutækni. Allar vörur í verslunum eru nú strikamerktar og þegar greitt er fyrir vöru er víða notaður lesari sem les upplýsingar um vöruna. Verð hennar birtist í glugga kassans en fleiri upplýsingar fara í bókhald fyrirtækisins. Strikamerking felur í sér skráningu á framleiðslulandi, númer framleiðslufyrirtækis, vörunúmer sem fyrirtækið velur og vartölu (öryggistölu). Strikamerking byggist á landsnúmeri og síðan tveimur sex tölustafa bitum. Hver tölustafur er skráður með samsetningu af svörtum og hvítum strikum eftir ákveðnu kerfi og er ekki sama kerfi í hvorum bita. Strikamerking byggist því á flóknu kerfi sem tölva getur lesið úr á svipstundu. Á heimasíðunni <http://www.matematikk.org> er að finna áhugaverðar upplýsingar og námsefni (strekkoder). Á enski síðu wikipedia (<http://en.wikipedia.org>) er einnig að finna góða lýsingu á þessu kerfi (universal product code).

Kennitölur og strikamerkingar hafa verið valdar sem dæmi um dulkóðun í þessum kafla. Margt fleira hefði verið hægt að velja, svo sem ISBN-númer á bókum, póstnúmer, kortanúmer og aðgangsorð. Gaman gæti verið að kynna sér kerfin á bak við fleiri þætti.

Kennsluhugmyndir

Þessi kafli er hugsaður sem kynning á dulmálfræði og á um leið að gefa innsýn í að stærðfræðin á sér margar undirgreinar. Dulmálfræði í dag fléttast óneitanlega mikið saman við tölvunarfræði og er gott dæmi um tengsl stærðfræði og tölvunarfræði. Í upphafi getur því verið gott að ræða um hvaða undirgreinar stærðfræðinnar nemendur þekkja og hvernig stærðfræði fléttast við ýmsar aðrar greinar. Kaflinn byrjar á stuttri umfjöllun um á hverju dulmálfræði byggist. Ýmsar kvikmyndir hafa verið gerðar þar sem sýnt er það umhverfi sem dulmálfræði er notuð í. Í kvikmyndinni *Beautiful mind* er sagt frá ævi stærðfræðings sem meðal annars fæst við að ráða dulmál og margar kvikmyndir um seinni heimsstyrjöldina sýna dulmálfræðinga að störfum. Gaman gæti verið að nemendur horfðu saman á kvikmynd og ræddu í framhaldi af því um notkun dulmálfræði.

Í upphafi eru kynnt þrjú gömul dulmálskerfi sem byggjast á innsetningaraðferð. Þar er unnið út frá stafrófinu og ættu nemendur að geta leyst verkefni 1–8 nokkuð sjálfstætt. Tilvalið er að ræða um kerfin, kosti þeirra og galla, samhliða því sem nemendur vinna að verkefnunum.

Skráning í íslenskri þjóðskrá er gerð með kennitölum fyrir hvern einstakling og fyrirtæki. Ræða þarf við nemendur um gerð kennitalna og heppilegt getur verið að lesa og ræða saman um lýsinguna í kaflanum. Nemendur þurfa að prófa að reikna út vartölur nokkurra kennitalna til að fá tilfinningu fyrir reikniaðferðinni. Í framhaldi má ræða um tilgang vartalna. Einhverjir nemendur gætu haft áhuga á skoða hvernig kennitölur annars staðar eru byggðar upp eða önnur kerfi þar sem notaðar eru vartölur. Auðvelt er að nálgast upplýsingar um þetta á Netinu og því gott að gefa nemendum tækifæri til að afla upplýsinga og kynna niðurstöður sínar fyrir nemendahópnum.

Strikamerkingar eru dæmi um skráningu sem hefur margvíslegan tilgang. Strikamerkingar hafa einfaldað margt í rekstri verslana. Það gæti því verið gagnlegt að fá verslunarstjóra í heimsókn eða fara í heimsókn í stórverslun og heyra hvernig strikamerkingar eru notaðar í birgðabókhaldi og fleiru. Uppbygging strikamerkinga er áhugaverð og merkilegt er hvernig hver tala hefur eigin kóða sem skráður er með tvíundarkerfi. Það gefur tilefni til að ræða um tvíundakerfið og hvernig tölvur byggja á því.

Í umfjöllun um þennan kafla gefast ýmis tækifæri til að fara inn á svið tölvunarfræði. Áhugavert er því að skoða þá grein nánar eftir því sem aðstæður leyfa. En meginhugmyndin er að nemendur kynnist og skoði hvernig dulmálfræðin byggir á stærðfræðilegri hugsun.