FRÉTTABRÉF

Íslenska stærðfræðafélagsins

2. tbl. 1. árg. Nóvember 1989

(1) $$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \cdot \ldots \, dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)}.$$

(2) $$\alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right) = \beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right), \quad \alpha\beta=\pi^2.$$

(3) $$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\ldots}}}}}$$

Fréttabréf Íslenska stærðfræðafélagsins

Póstfang:

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Ritstjórn:

Ritstjóri: Ragnar Sigurðsson
Jón Hafsteinn Jónsson

Efni:

Forsíðan og baksíðan eru skreyttar uppgötvunum indverska stærðfræðingsins Ramanujans. Hann hét Srinivasa Iyengar Ramanujan Iyengar fullu nafni og fæddist þann 22. desember árið 1887 í bænum Erode á suður Indlandi. Hann fæddist á heimili móðurforeldra sinna, en faðir hans var bókari í vefnaðarvöruverslun í borginni Kumbakonam og þar ólst hann upp. Árið 1892, þegar strákurinn Srinivasa var á fimmta árinu, var hann sendur í indverskan barnaskóla en tveimur árum síðar fékk hann inngöngu í gagnfræðaskóla Kumbakonam. Indverskir ævisöguritarar Ramanujans segja að andlegir hæfileikar hans hafi snemma komið í ljós og að hann hafi verið hljóðlátur og íhugull. Til marks um þetta segja þeir að hann hafi uppgötvað reglu Pyþagórasar og reglu Eulers um sambandið milli veldisvísisfallsins og hornafallanna á unga aldri.

Áhugi Ramanujans á stærðfræði vaknaði fyrst fyrir alvöru þegar hann var í fjórða bekk og byrjaði að læra hornafræði. Þá fékk hann lánaða bók hjá nágranna sínum sem var háskólastúdent og náði strax undraverðum tökum á efninu. Fréttin barst manna á meðal í bænum og svo fór að stúdentar leituðu til hans með hornafræðidæmin sín.

Framhald á bls. 42.

TIL LESENDA

Lesandi góður! Fyrsta tölublaði þessa nýja fréttabréfs var vel tekið af þeim félagsmönnum, sem samband hafa haft við ritstjórnina, jafnvel þótt efni þess væri lítið annað en áskorun til félagsmanna um að setja saman greinar um hugðarefni sín. Því miður hefur lítið efni borist, annað en það sem ritstjórnin skrifaði sjálf eða falaðist eftir hjá ákveðnum mönnum. Það er því full ástæða til að endurtaka þessa áskorun.

Félagsmenn Íslenska stærðfræðafélagsins eru sundurleitur hópur með ólík stærðfræðileg áhugasvið. Inntökuskilyrði í félagið hefur verði að menn hafi lokið háskólaprófi í stærðfræði eða skyldum greinum. Flestir félagar eru stærðfræðingar, en auk þeirra eru eðlisfræðingar, tölvufræðingar og verkfræðingar í félaginu. Efni fréttabréfsins verður að vera fjölbreytilegt ef allir eiga að finna eitthvað við sitt hæfi í því. Það er því ljóst, lesandi góður, að þú verður að leggja hönd á plóginn til þess að þetta rit verði það sem vonast er til að það verði.

Flestar tímaritsgreinar um rannsóknir í stærðfræði eru skrifaðar fyrir þröngan hóp sérfræðinga og eru ólæsilegar öðrum. Það er ekki þar með sagt að ekki sé hægt að skrifa greinar sem ætlaðar eru stærri hópi. Ritstjórnin hefur fengið þá hugmynd að birta greinar þar sem íslenskir stærðfræðingar segja frá rannsóknarverkefnum sem þeir eru að vinna að. Að sjálfsögðu er ekki unnt að fara nákvæmlega út í hlutina og sanna niðurstöðurnar í smáatriðum. Tilgangurinn getur aldrei orðið annar en að varpa ljósi á ný hugtök og niðurstöður. Við vonumst til að þessi hugmynd hljóti góðar viðtökur og að þeir sem eru virkir í rannsóknum takist á við þetta skemmtilega verkefni. Við báðum Eggert Briem um að skrifa fyrstu greinina og birtist hún í þessu tölublaði.

Eggert Briem:

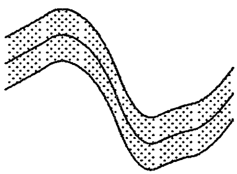
FÖLL SEM VERKA Á FALLARÚM

Á seinni hluta síðustu aldar sýndi þýski stærðfræðingurinn Karl Weierstrass fram á það, að sérhvert samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ megi nálga með margliðum. Hér má segja, að Weierstrass hafi verið að bæta fyrir fyrri misgerðir; áður hafði hann smíðað samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ sem var hvergi diffranlegt.

Við þurfum að tilgreina nánar hvað átt er við með orðinu ***nálga.*** Sem mælikvarða á nálgun notum við hinn svonefnda sup–staðal, sem táknaður er með $\|\cdot\|_\infty$, en hann er þannig skilgeindur: Ef f er samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ þá er

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Að samfellt fall f megi nálga eins vel og vera vill með margliðum þýðir að fyrir sérhverja tölu $\varepsilon > 0$ (sama hversu lítil talan ε er) má finna margliðu p þannig að $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.



Þetta þýðir, að grafið af p lendir innan skyggða svæðisins á myndinni.

Fyrir um það bil 50 árum uppgötvaði M. H. Stone alhæfingu á setningu Weierstrass. Lítum á mengið P af öllum margliðum. Ef p og q eru í P og c er einhver rauntala, þá eru $p + q$, cp og $p \cdot q$ líka margliður og þar með í P. Ennfremur þá er fastafallið 1 (þ.e.a.s. fallið sem tekur gildið 1 í öllum punktum) í P. Mengi A af samfelldum föllum á bilinu $[0, 1]$ kallast *algebra* ef A fullnægir sömu skilyrðum og P, þ.e.a.s. eftirfarandi skilyrðum:

i) $a_1 + a_2 \in A$ fyrir öll $a_1, a_2 \in A$
ii) $ca \in A$ fyrir öll $a \in A$ og $c \in \mathbb{R}$

iii) $a_1 \cdot a_2 \in A$ fyrir öll $a_1, a_2 \in A$
iv) $1 \in A$.

Mengi af samfelldum föllum á bilinu $[0, 1]$ sem eingöngu fullnægir skilyrðunum i), ii) og iv) kallast *fallarúm* á bilinu $[0, 1]$.

Margliðumengið P *aðgreinir einnig punkta* á bilinu $[0, 1]$: Ef t_1 og t_2 eru mismunandi punktar á bilinu $[0, 1]$ þá er til margliða p þannig að $p(t_1) \neq p(t_2)$.

Stone alhæfði setningu Weierstrass á eftirfarandi hátt: *Ef A er algebra á bilinu $[0, 1]$ sem aðgreinir punkta þá má nálga sérhvert samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ eins vel og vera vill með föllum úr A.*

Uppgötvun Stones er því sú að það eru eingöngu eiginleikarnir i)–iv), sem margliðumengið P fullnægir, ásamt þeim eiginleika að geta aðgreint punkta sem gera það að verkum, að nálga má sérhvert samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ með margliðum.

Stone setti alhæfingu sína fram fyrir almennara tilfelli en hér er gert. Í stað bilsins $[0, 1]$ má setja það sem kallað er þjappað Hausdorffrúm X. Þetta gildir raunar alls staðar í þessari grein.

Þeim lesendum, sem vilja vita meira um setningar Weierstrass og Stones er bent á ágætan kafla um þetta efni eftir Jón R. Stefánsson sem er ugglaust fáanlegur hjá höfundi.

En við höldum áfram. Lítum á eftirfarandi skilyrði um mengi A af föllum:

iii') $a^2 \in A$ fyrir öll $a \in A$.

Hér er greinilega sett fram veikara skilyrði en skilyrði iii). En skilyrðin i), ii), og iii') til samans eru jafnsterk og skilyrðin i), ii), og iii) til samans eins og jafnan

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)^2 - \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}a_2^2$$

sýnir. Setningu Stones má því líka orða þannig : *Ef A er fallarúm á bilinu $[0, 1]$ sem aðgreinir punkta og fullnægir iii'), þá má nálga sérhvert samfellt fall á bilinu $[0, 1]$ eins vel og vera vill með föllum úr A.*

Enn ætlum við að umorða setningu Stones. Fall h sem skilgreint er á einhverju hlutbili I af $\mathbb{R}$ er sagt *verka* á fallarúmið A ef samskeytta fallið $h \circ a$ er í A fyrir öll a í A þannig að samskeytingin er skilgreind. (Samskeytta fallið $h \circ a$ er fallið $(h \circ a)(t) = h(a(t))$.) Við getum nú sett skilyrði iii') fram á eftirfarandi hátt:

Fallið $h(t) = t^2$ verkar á A.

Setning Stones lítur nú svona út: *Ef A er fallarúm á bilinu* $[0,1]$ *sem aðgreinir punkta og ef fallið $h(t) = t^2$ verkar á A, þá má nálga sérhvert samfellt fall á bilinu* $[0,1]$ *eins vel og vera vill með föllum úr A.*

Nú blasir eftirfarandi spurnig við: Hvaða ályktun má draga ef eitthvað annað fall en fallið $h(t) = t^2$ verkar á A, t.d. $h(t) = t^3$?

Svarið gáfu K. de Leeuw og Y. Katznelson árið 1962. Við skulum kalla fall h *línulegt* ef $h(t) = \alpha t + \beta$. Það er augljóst að sérhvert línulegt fall verkar á fallarúm A. Fallið $h(t) = t^2$ er dæmi um fall sem er ekki línulegt. Eftirfarandi niðurstaða sem de Leeuw og Katznelson komust að er því greinilega alhæfing á setningu Stones: *Látum A vera fallarúm á bilinu* $[0,1]$ *sem aðgreinir punkta. Ef til er samfellt fall h sem verkar á A og er ekki línulegt, þá má nálga sérhvert samfellt fall á bilinu* $[0,1]$ *eins vel og vera vill með föllum úr A.*

Ef A er mengi af samfelldum föllum á bilinu $[0,1]$ þá er *lokunin* á A í sup–staðlinum $\|\cdot\|_\infty$ mengið af öllum samfelldum föllum á bilinu $[0,1]$ sem nálga má eins vel og vera vill með stökum úr A. Við látum $\overline{A}$ tákna lokunina á A í sup–staðlinum. Ef $A = \overline{A}$ þá segjum við að A sé *lokað.*

Ef h er samfellt fall sem verkar á A, þá verkar h líka á $\overline{A}$. Setningu de Leeuw og Katznelsons má því setja fram á eftirfarandi hátt: *Látum A vera lokað fallarúm á* $[0,1]$ *sem aðgreinir punkta. Ef til er samfellt fall h sem verkar á A og er ekki línulegt, þá inniheldur A öll samfelld föll á bilinu* $[0,1]$.

Nú er það svo að aðrir staðlar en sup–staðallinn koma oft fyrir þegar fengist er við nálganir. *Banach fallarúm* á $[0,1]$ er fallarúm A á $[0,1]$ sem aðgreinir punkta, ásamt staðli $\|\cdot\|$ sem yfirgnæfir sup–staðalinn, þ.e.a.s $\|a\| \geq \|a\|_\infty$ fyrir öll a úr A. Einnig er þess krafist, að A sé fullkomið í $\|\cdot\|$–staðlinum. (Þetta skilyrði er sterkara en lokunarskilyrðið.)

Það sem ég hef verið að fást við undanfarið eru föll sem verka á Banach fallarúm. Í þessu tilviki er ekki án viðbótarskilyrða hægt að búast við sömu niðurstöðu og í setningu de Leeuw og Katznelsons eins og sést af eftirfarandi dæmi:

Látum B tákna fallarúmið af öllum diffranlegum föllum á bilinu $[0,1]$ sem hafa samfelldan diffurkvóta. Í staðlinum

$$||f|| = \sup\{|f(t)| + |f'(t)| : t \in [0,1]\}$$

er B Banach fallarúm. Það eru til mörg samfelld föll sem verka á B og eru ekki línuleg t.d. fallið $h(t) = t^2$. En augljóslega má finna samfelld föll á bilinu $[0,1]$ sem eru ekki í B. Til þess nægir að taka fall sem er ekki diffranlegt eins og t.d. fallið $f(t) = |t - \frac{1}{2}|$.

Við fyrstu sýn virðist hér vera komin mótsögn við setningu de Leeuw og Katznelsons. Svo er þó ekki. Ef $\overline{B}$ táknar lokun Banach fallarúmsins B í sup–staðlinum $||\cdot||_\infty$, þá segir setning de Leeuw og Katznelsons okkur að $\overline{B}$ sé rúm allra samfelldra falla á bilinu $[0,1]$. Þar sem staðallinn $||\cdot||$ yfirgnæfir staðalinn $||\cdot||_\infty$ þá er $\overline{B}$ stærra mengi en B svo að $B \neq \overline{B}$.

Ef alhæfa á niðurstöður de Leeuw og Katznelsons til Banach fallarúma þarf því viðbótarskilyrði. Eitt slíkt var sett fram af A. Bernard árið 1970, skilyrðið um *ofuraðgreiningu punkta.*

Við skulum eftirleiðis skrifa X í stað $[0,1]$. Ef vill þá getur X verið þjappað Hausdorff rúm. Ef A er Banach fallarúm á X með staðli $||\cdot||$, þá táknar $\ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ rúm allra takmarkaðra runa með stökum úr A. Rúmið $\ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ er hlutrúm í $\ell^\infty(\mathbb{N}, C(X))$ þar sem $C(X)$ er rúm allra samfelldra falla á X. Rúmið $\ell^\infty(\mathbb{N}, C(X))$ má samsama við rúm allra samfelldra falla á $\beta(\mathbb{N} \times X)$, sem er Stone-Čech þjöppun $\mathbb{N} \times X$. Þannig má líta á $\ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ sem rúm af samfelldum föllum á $\beta(\mathbb{N} \times X)$. Við segjum að A *ofuraðgreini punkta* í X ef $\ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ aðgreinir punkta í $\beta(\mathbb{N} \times X)$.

Ein af niðurstöðum Bernards var sú, *að ef lokunin á $\ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ í sup–staðlinum* (á rúm samfelldra falla á $\beta(\mathbb{N}, X)$) *er allt rúmið $\ell^\infty(\mathbb{N}, C(X))$ þá er $A = C(X)$.*

Nú gæti eftirfarandi fullyrðing verið útvíkkun á niðurstöðum de Leeuw og Katznelsons. *Ef B er ofuraðgreinandi Banach fallarúm á X og ef til er samfellt fall, ekki línulegt, sem verkar á B, þá er $B = C(X)$.*

Ein leið til að reyna að sanna þessa fullyrðingu gæti verið sú, að kanna hvort h verkar á $\ell^\infty(\mathbb{N}, B)$. Þá er nefnilega $B = C(X)$ samkvæmt setningum de Leeuws, Katznelsons og Bernards. Vandinn er bara sá að það er alls ekki ljóst að h verki á $\ell^\infty(\mathbb{N}, B)$ vegna þess, að þótt runan $\{b_n\}$ sé takmörkuð í staðlinum $\|\cdot\|$, þá er ekki augljóst að runan $\{h \circ b_n\}$ sé líka takmörkuð. Þennan vanda má þó að hluta yfirstíga. Helsta niðurstaðan sem ég hef fengið er þessi:

Látum B vera ofuraðgreinandi Banach fallarúm á X og gerum ráð fyrir því, að til sé samfellt fall h sem verkar á B og er ekki línulegt. Þá má finna endanlega marga punkta $t_1, t_2, \ldots, t_k$ í X þannig að, ef t er í X og t er ekki einn punktanna $t_1, t_2, \ldots, t_k$ þá er til þjöppuð grennd K um t þannig að sérhvert samfellt fall á K má fá sem einskorðun falls í B við grenndina K.

ÝMIS TÍÐINDI

Næsta **Heimsþing stærðfræðinga** verður haldið í Kyoto í Japan dagana 21.–29. ágúst 1990. Það er alþjóðasamband stærðfræðinga sem stendur fyrir þinginu, en Japanska stærðfræðifélagið ásamt nokkrum sérsamböndum stærðfræðifélaga sjá um framkvæmdahliðina. Kyoto er forn borg, full af sögulegum minjum. Hún var höfuðborg Japans 794–1868 og í henni eru tvær miklar keisarahallir auk ótal helgidóma og mustera búddatrúarmanna. Heimsþingið verður haldið í alþjóðlegri ráðstefnuhöll Kyotoborgar. Haldnir verða 16 yfirlitsfyrirlestrar, klukkutími að lengd hver, auk þess hefur 140 manns verið boðið að halda 45 mínútna fyrirlestra. Þeim verður skipt í 18 deildir og spanna þær öll svið stærðfræðinnar. Þess má einnig geta að öllum þingheimi er boðið að halda 10 mínútna kynningu á eigin efni.

Íslenska stærðfræðafélaginu barst fyrsta tilkynning um þingið frá Japan í haust. Því miður bárust fá eintök, svo ekki var unnt að senda tilkynninguna til allra. Þeir sem áhuga hafa á að fá hana eru beðnir að hafa samband við ritstjórnina.

Framhald á bls. 24.

Lárus H. Bjarnason:

FRÓÐLEIKSMOLAR UM ÞRÓUN OG TILURÐ TVINNTALNA

Í mörgum kennslubólum er gefið í skyn að tvinntölur eigi rætur að rekja til þess að menn vildu geta leyst allar 2. stigs jöfnur. Þessa söguskýringu er t.d. að finna í bók Apostols sem um árabil hefur verið notuð í Háskóla Íslands. Þetta er hins vegar rangt, því að tvinntölur (þ.e. ferningsrætur neikvæðra talna) skutu fyrst upp kollinum í tengslum við lausn á þriðja stigs jöfnum. Þessi saga skal nú rakin að nokkru.

Í einni af fyrstu stærðfræðibókunum sem prentaðar voru, „Summa de Aritmetica", sem skrifuð var af Fransiskumunknum Lusa Pacioli og kom út árið 1494, er þess getið í bókarlok að jöfnuna

$$x^3 + mx = n$$

sé ekki unnt að leysa með þekktum aðferðum. Þessi jafna varð síðan meðal viðfangsefna fræðimanna við hinn fræga Bolognaháskóla á Ítalíu. Niðurstöðurnar birtust fyrst á prenti 1545 í „Ars Magna" eftir Cardano. Þar segir m.a. að $x^3 = ax + b$ hafi lausnina

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}}.$$

Sérstaklega er athugað tilfellið $x^3 = 15x + 4$ sem skv. þessu gefur

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{1}$$

Vegna stærðarinnar $\sqrt{-121}$ taldi Cardano að almenna formúlan væri ónothæf í þessu ákveðna tilviki. Reyndar birtust slíkar yfirnáttúrulegar stærðir á öðrum stað í sömu bók, nefnilega þegar Cardano reynir að skipta tölunni 10 í tvo hluta þannig að margfeldið verði 40. Það leiddi samt ekki til neinna frekari vangaveltna, enda þótti eðlilegt að á þessu væri engin lausn. Öðru máli gegndi um (1) því að með ágiskun fundu menn að talan 4 uppfyllir jöfnuna. Því varð ögrandi viðfangsefni að reyna að finna einhver tengsl milli hinnar formlegu en merkingarlausu lausnar og tölunnar 4. Nokkru eftir útkomu „Ars Magna“ fékk Bombelli þá ágætu hugmynd að þar sem aðeins munaði formerki á hinum dularfullu tölum í þriðjurótarstofnunum tveimur í (1) gilti e.t.v. það sama um sjálfar ræturnar. Til að kanna þett reit hann

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

og reyndi að leysa jöfnurnar með því að ganga út frá venjulegum reiknireglum fyrir rauntölur. Hann fékk út að $a = 2$ og $b = 1$ og þar með

$$(2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

Þetta dæmi sýndi að ekki þurfti lengur að líta á umræddar tölur sem merkingarlaus tákn eingöngu, án tengsla við raunveruleikann. Í framhaldi af þessari uppgötvun setti Bombelli fram fáeinar grundvallarreglur um reikning með ferningsrætur neikvæðra talna. Með þessu verki sínu sem birtist í bókinni „Algebra“ árið 1572 er hann talinn hafa lagt hornsteininn að smíð tvinntalna.

Langur tími leið þó áður en tilveruréttur tvinntalna varð almennt viðurkenndur. Mörgum fannst þær byggja á rökbrellum fremur en einhvers konar sannleika. Í bréfi sem Huygens skrifaði til Leibniz 1673 segir t.d.:

„Athugasemd þín um að tvær ímyndaðar stærðir geti samanlagðar orðið rauntala er óvænt og frumleg. Maður hefði aldrei trúað að $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ *væri* $\sqrt{6}$*, og þarna er eitthvað hulið sem er mér óskiljanlegt.“*

Jafnvel eftir að Gauss og Hamilton höfðu sett fram nákvæma skilgreiningu á tvinntölum snemma á síðustu öld áttu þær eftir að koma mönnum á óvart. Dæmi um slíkt var er frakkinn Lamé taldi sig hafa sannað síðustu „setningu“ Fermats 1847. Þar yfirsást honum að frumþáttun í baugnum $\mathbb{Z}[e^{i2\pi/n}]$ er ekki ótvíræð fyrir öll n. Hér má geta þess að þýski stærðfræðingurinn Kummer rannsakaði um svipað leyti þáttun í baugum algebrulegra heiltalna og innleiddi það sem kalla mætti *íðaltölur* sem var undanfari þess að menn skilgreindu hugtakið íðal almennt.

Að lokum læt ég fljóta með eitt dæmi um það að „the shortest path between two truths in the real domain always passes through the complex domain“: Setninguna, um að margfeldi tveggja summa af ferningstölum er sjálft summa ferningstalna, má sanna mjög snaggaralega á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)\\ &= ((a+bi)(c+di))\,((a-bi)(c-di))\\ &= (u+iv)(u-iv)\\ &= u^2+v^2.\end{aligned}$$

Til umhugsunar: Er æskilegt að flétta sögulegri þróun meira inn í stærðfræðikennslu en nú er gert? Hvers virði er það fyrir þann sem nemur að vita hvað liggur að baki hnitmiðaðri skilgreiningu eða yfirgripsmikilli setningu?

Heimildir:

Israel Kleiner, *Think the unthinkable: The story of complex numbers,* Mathematical Teacher, Okt. (1988).

Dirk J. Struik, „A Concise History of Mathematics“, Dover Publications (1967).

I. N. Stewart og D. O. Tall, „Algebraic Number Theory“, Cambridge University Press (1978).

AF GÖMLUM BLÖÐUM

Á árunum 1929-34 birtust í tímariti Verkfræðingafélagsins fjórar greinar um menningar- og skólamál eftir dr. Ólaf Daníelsson, kennara við Menntaskólann í Reykjavík. Hann hafði þá áratug áður komið á fót stærðfræðideild við Menntaskólann í Reykjavík, og er sá sem öðrum fremur getur talist frumkvöðull að innreið stærðfræðinnar í íslenska skóla. Greinar þessar vöktu verulega athygli, en opnar umræður urðu engar svo okkur sé kunnugt. Ekki mun þó hafa skort að til væru áhrifamenn með aðra skoðun á málunum og að ýmsum var vegið. Þó að önnur mál séu nú efst á baugi en fyrir 60 árum síðan, má merkja að svipaður afstöðumunur til menntunar og menntamála skiptir enn fólki í fylkingar. Dr. Ólafur Daníelsson var svo sem fram kemur vel að sér á fleiri sviðum en þeim, sem sérgrein hans telst til. Hann hefur t.d. haft smekk fyrir og áhuga á bókmenntum í víðri merkingu. Gefum dr. Ólafi Daníelssyni orðið. Fyrsta greinin nefnist Húmaníóra og tilefnið er það að niður var felld kennsla í stærðfræði í máladeild Menntaskólans.

Grein eftir
dr. Ólaf Daníelsson frá 1929 :

HÚMANÍÓRA

Nú hafa húmanistarnir okkar - jeg hefi ekki annað betra nafn á þá, blessaða - loksins sigrað til fulls: Þeir hafa útrýmt stærðfræðinni úr mentaskólum sínum, máladeildunum svo kölluðu, og þar með girt fyrir það, að nokkurntíma komist í gegnum þær nokkur maður, sem kynni að vera læs á slík fræði eins og stærðfræði eða t.d. eðlisfræði - þetta ómerkilega gutl, sem þeir eru að káka eitthvað við í útlöndum - hverskonar verkfræði og iðnfræði, stjörnufræði, statistik og jafnvel almenna fílósófí. Nei, en þeir geta lesið dömulitteratúr, smásögur og kvæði. Því verður að vísu ekki neitað, að stærðfræðikunnáttunni í máladeild mentaskólans hefir verið ákaflega ábótavant, alla þá stund, sem jeg hefi þekt til skólans. En þó hafa oftast verið stúdentar, sem að afloknu stúdentsprófi hafa lagt fyrir sig ýmsar greinir mannlegrar þekkingar, sem ekki verður komist niður í til neinnar hlítar, nema með töluverðri kunnáttu í undirstöðuatriðum stærðfræðinnar, en þau fræði eru mörg og eru að verða fleiri og fleiri. Jeg man enn að nefna byggingafræði, skógræktarfræði og fleira mætti sjálfsagt telja. En hafi máladeildarstúdentar verið illa að sjer í stærðfræðinni, þessu höfuðmáli, sem svo mörg önnur fræði eru að miklu leyti skrifuð á, og eigi verður þýtt á önnur mál, þá er það þó að bíta höfuðið af skömminni að útrýma námsgreininni, í stað þess að reyna að bæta úr því sem ábótavant var. Er illt til þess að vita, að þó að stjórnin hafi að vísu framkvæmt óperatíónina, þá þykir mjer þó líklegast að það sje gert í fullu samræmi við vilja mikils þorra mentamanna á landi hjer. Þeir eru margir svo illa að sjer í þessum greinum, að þeir hafa litla hugmynd um sína eigin takmörkun, vita naumast hvers þeir fara á mis. Jeg hefi meira að segja heyrt, að skólastjórn nýja skólans á Akureyri hafi sótt um það, að losna við mathematikina, fundist óþarfi að kvelja nemendur með því að láta þá læra svo heimska fræðigrein.

„Hvað eigum við að gera við mathematik“, segja húmanistarnir, „við þurfum aldrei á henni að halda“. Jeg svara þeim stundum á þessa leið: Jeg kann því miður ekki rússnesku, hef aldrei lagt stund á það mál, og aldrei þurft á því að halda. Af hverju þarf jeg ekki á rússnesku að halda? Af því að jeg kann hana ekki. Jeg er ekki í neinum vafa um það, að ef jeg kynni rússnesku, mundi jeg lesa hana mjer til gagns og gleði og margvíslegra sálarheilla. En jeg kann hana nú ekki og þess vegna sneiði jeg mig hjá þeim viðfangsefnum, sem rússnesku-kunnáttu þarf til að fást við, og það sem jeg hef lesið í rússneskum litteratúr, sem sumt er með því besta, sem jeg yfir höfuð að tala hef lesið af því tæi, hef jeg lesið í þýðingum.

Af hverju þurfa húmanistarnir ekki á mathematik að halda? Af því að þeir kunna hana ekki. Þeir sneiða sig bara - ef þeir þá hafa vit á því - hjá þeim verkefnum, sem ekki er hægt að fást við án kunnáttu í mathematik. Þeir geta þó ekki lesið neinn mathematískan litteratúr í þýðingum, því að merkjamál stærðfræðinnar verður eigi þýtt, fremur en t.d. söngnótur: það verður að læra það eins og það er. En það sem húmanistarnir eru útilokaðir frá að fást við, er eins og áður er á drepið, nokkuð margvíslegt, og alls ekki eins ómerkilegt eins og þeir vilja vera láta. Það er náttúrulega leiðinlegt, að fullorðnir mentamenn sjeu óhæfilega illa að sjer í undirstöðuatriðum margra þekkingargreina, en þó er það nú svo, að þetta hefir minni þýðingu fyrir þá, sem búnir eru að velja sjer starfssvið og hafa sín sjerstöku verkefni að fást við. En hitt er ákaflega varhugavert, að loka brautum fyrirfram, með því að útskrifa stúdenta, sem eru gersamlega óhæfir til framhaldsnáms í fjölda þeirra greina, sem mesta þýðingu hafa fyrir nútímann, og geta naumast gert sig hæfa til þess síðar, þar sem þeir eru löngu búnir að tapa allri æfingu í þeim ónógu undirstöðuatriðum, sem þeir kunna að hafa lært í gagnfræðadeildunum. Með þessu eru íslenskir stúdentar alveg teknir út úr, og verða að almennri mentun alls ekki sambærilegir við stúdenta annara landa. Þessu til sönnunar vil jeg benda á verkefni til skriflegs stúdentaprófs í mathematik við latínudeildir sænsku skólanna síðastliðið ár, sem prentuð eru annarsstaðar hjer í blaðinu. Geta þá íslenskir málastúdentar sjeð, að eitthvað muni vera öðruvísi háttað kunnáttu sænskra kollega þeirra í þessum greinum.

Nú eru engar námsgreinar eftir í máladeildunum fyrir utan málin sjálf, nema sagan og náttúrufræðin. Söguna ætla jeg ekki að minnast á að þessu sinni, en um náttúrufræðina er það að segja, að bæði hefir verið fremur lítil áhersla lögð á hana, enda hlýtur hún nú að hverfa að nokkru leyti, þar sem undirstöðunni er kippt burtu, stærðfræðinni. Húmanistarnir svindla nefnilega með nafnið „náttúrufræði“, tala um hana digurbarklega, eins og þeir ættu ráð á henni allri, en í hjarta sínu meina þeir aðeins þá skækla hennar, sem þeir geta sjálfir lært. Jeg hefi nú um undanfarin ár haft á hendi kenslu í efstu bekkjum máladeildar, í stjörnufræði og í nokkrum atriðum ljósfræðinnar. En þetta hlýtur að hverfa, og það líklega strax á næsta ári, það er að minnsta kosti ekki mitt meðfæri að kenna astrónómí þeim, sem enga hugmynd hafa um undirstöðuatriði trígónómetríunnar, þekkja alls ekki lógarithma og eru á tveim árum búnir að steingleyma þeim frumatriðum, sem þeir áttu að hafa lært í gagnfræðadeildinni, enda veit jeg ekki hvar er að finna kenslubækur við slíkra nemenda hæfi. Hjer kem jeg nú að atriði, sem er afar athugavert. Í ýmsum greinum eigum við engar kenslubækur sjálfir, og fengjum þær naumast gefnar út, þó að einhver yrði til þess að semja þær. Við verðum því að bjargast við útlendar kenslubækur, en til þess að nemendur geti skilið þær, er óhjákvæmilega nauðsynlegt, að þeir hafi sömu þekkingu á undirstöðuatriðum, eins og þeir nemendur í hinum erlendu skólum, sem kenslubækurnar eru samdar fyrir. Þetta nær lengra en til mentaskólanna. Jeg hef sjeð kenslubók þá í efnafræði, sem kend er í læknadeild háskólans, og jeg verð að segja það, að mjer er óskiljanlegt, að stúdentar, eins og þeir væntanlega verða hjer eftir frá máladeildunum, geti lesið hana sjer til gagns. Svo kann og að vera um fleira, þó að mjer sje það ekki kunnugt.

Það er feykilegur munur á því, hvernig við, sem stundað höfum mathematisk fræði, stöndum í mentalegu tilliti gagnvart húmanistunum, eða þeir gagnvart okkur. Við getum oft og einatt fylgst með í þeirra greinum og jafnvel interesserað okkur fyrir þeim, en um þá er alt öðru máli að gegna. Það kann satt að vera að við sjeum ónýtari eða ver að okkur í málunum en þeir, en þó er sá munur miklu minni en í hinum greinunum. Flestir okkar hafa borið við að læra fimm eða sex tungumál, auk íslenskunnar, og við getum hagnýtt okkur þau (að einu undanteknu, kannske, grískunni, sem margir gleyma) til þess að lesa bækur og greinar um þau fræði sem við stundum. Við stúdentar í Kaupmannahöfn, sem lögðum stund á stærðfræði, lásum mest á þýsku og ensku, og einn höfuðþátt stærðfræðinnar lærðum við, ásamt verkfræðingunum, á frönsku. Jeg fyrir mitt leyti hef borið við að lesa þrjú mál, auk þeirra, sem jeg hefi lært. Jeg hefi varla þekt ingenieur eða t.d. lækni, sem geti ekki lesið fræði sín á höfuðmálunum og norðurlandamálunum. Að því er jeg veit, er þetta eins um hina yngri kandidata, sem eru útskrifaðir úr stærðfræðideild mentaskólans. Það getur því enginn sagt með neinum sanni, að við höfum ekki lært málin okkur til gagns, jafnvel þó að við getum ekki talað nema sum þeirra, og okkur veiti kannske erfitt að lesa á þeim dömulitteratúr og kvæði. En hvað kunna íslenskir húmanistar í mathematísku fræðunum? Ekkert, í stuttu máli, alls ekkert. Þau eru þeim algerlega lokuð bók. Svo hæla þeir sjer af vanþekkingu sinni, sem vissulega er undrunarverð oft og einatt. Jeg hef t.d. þekt marga þá, sem ekki hafa öðlast hlutdeild í skilningnum á þeirri almennu „heimsmynd“, sem talin hefur verið sameign allra sæmilega upplýstra manna nú um nokkrar aldir. Spyrjið þið húmanista, svona af betri sortinni, hvers vegna sólargangurinn eiginlega sje lengri á sumrin en á veturna. Hann veit það ekki og skilur það naumast, þó að honum sje sagt það. Þeim sem þykir þetta ofmælt, ræð jeg til að gera tilraunina. Það verður kannske sagt þeim til málsbóta, að þeir eru, margir hverjir, gagnkunnugir í öðrum heimi, eins og smalar í heimahögum, svo að það verður ekki sagt um þá, að þeir viti hvorki í þennan heim nje annan.

Hún mamma, sem er ákaflega gömul, hefir sagt mjer að þegar hún var unglingur hjá foreldrum sínum norður í Grenivík, heyrði hún getið um veislur þær, sem kallaðar voru „brauðveislur“ eða „sírópsveislur“. Jeg man nú ekki hvernig þessum veislum var háttað, en til veitinga var haft laufabrauð og síróp, og skemmtu blessaðir karlarnir sjer við þetta í sínum einfaldleik. Húmanistunum fer nokkuð líkt. Þeir skemmta sjer við smásögur og kvæði og ræður Cícerós og brjef Horazar - húmaníóra -. Þeir kalla sjálfa sig fjölfróða, en okkur einhliða! Okkur, sem skiljum þeirra fræði oft til nokkurrar hlítar, já, og höfum stundum af þeim bæði gaman og gagn, því að til ber það að vísu. En ekki veit jeg hvað það er að hafa endaskipti á sannleikanum, ef það er ekki að kalla sannan íslenskan húmanista „fjölfróðan“. Flest önnur lýsingarorð eiga þar betur við. Nú streymir kvæðaflóðið yfir landið, bókmentirnar - - því að „bókmentir“ þýðir á íslensku „dömulitteratúr“. Við sem í þetta rit skrifum, leggjum ekkert af mörkum sem til „bókmenta“ megi teljast, „andinn legst ekki svo lágt“, eins og Nordal segir. Jeg minnist þess ekki, að hafa sjeð kvæði í Tímaritinu, og er það víst einsdæmi um íslenskt tímarit. „Bókmenta“-flóðið fyllir alt, dagblöðin líka. Í blaðinu, sem jeg held, voru í morgun tvö kvæði. Annað þeirra var um „Þór“, og „ort á strandstaðnum“. Einhver húmanisti hefur líklega staðið á bökkunum fyrir innan Laxá og horft á skipverja vera að velkjast í brimrótinu, sett sig síðan niður og ort kvæði, 15 cm á lengd og 9 á breidd. Hitt kvæðið var lengra, 25 cm, en ekki nema 5 á breidd, svo að það var hóti minna en það fyrra.

Í sama blaðinu voru 5 - fimm - smásögur og nokkrar skrýtlur að auki. Þetta var mjer sagt um daginn: Ungur stúdent hafði gefið út kvæðabók, sem hjet „Hjarðir“ eða „Hrannir“ eða „Strítlur“, jeg man annars ekki, hvað hún hjet. Kunningi hans sagði við hann, að mikið væri hann nú búinn að yrkja, ekki eldri, heila kvæðabók. Skáldið svaraði á þá leið, að hann hefði því miður lítinn tíma afgangs skyldustörfum, annars mundi hann geta ort miklu meira – framleitt miklu meiri lýrik, próportiónala að flatarmáli við þann tíma, sem hann hefði afgangs daglegum skyldustörfum. En húmanistunum þykir framleiðslan ekki nóg. Þessvegna er nú í ráði að flytja inn 50 - fimmtíu - arkir af lýrik, „virkilegum bókmentum“ frá Ameríku. Það heyrði jeg í gær. Það er líkt um blómdaggarúðalýrikkina og um sírópið. Hún er andleg fæða handa einföldum sálum, sem þekkja ekki aðra betri. Jeg gat lesið hana þegar jeg var um tvítugt, það geta margir á þeim aldri. Ef jeg væri einvaldur, skyldi jeg láta ríkar stúlkur á aldrinum frá 16 til 25 ára framleiða alla lýrik í landinu fyrir ekkert. Jú, mjer er alvara, jeg get varla hugsað mjer auðvirðilegra karlmannsverk, en að sitja og prjóna saman hendingar. Svo telja þeir alþýðunni trú um, að lýrikin sje „fín“, svo að hún þorir varla að lesa það sem hún hefir gaman af. Sjer er nú hver vitleysan.

Jeg get ekki stilt mig um að minnast á „Stúdentablaðið“ í þessu sambandi, þó að jeg eigi ekkert útistandandi við stúdentana, síður en svo. Þeir halda aðalhátíð einu sinni á ári og gefa þá út blað. Nú skyldi maður halda, að þegar stúdentar - „blóminn af íslenskum æskulýð“ eru þeir venjulega nefndir - leggjast á eitt til þess að gefa út eitt aðalblað, einu sinni á ári, mundi þar gefa á að líta eitthvað nýtt, eitthvað djarft og skemmtilegt, óvanalegt. En margt fer öðruvísi en ætlað er. Þar voru eitthvað um tuttugu kvæði, að jeg held, jeg týndi blaðinu og taldi ekki kvæðin. Og þau voru öll í þessum venjulega dúr, eða rjettara sagt moll, þar vantaði hvorki „Vornótt“ nje „Sumarkvöld“ og kyrfilega hugsa jeg að „Horfnar ástir“ hafi setið þar á sínum stað, þó að jeg muni það ekki. Öll voru skáldin sem jeg las þar full af heilagri alvöru, engum stökk bros. Ekki svoleiðis, þetta var allt sauðmeinlaust og hneyxlaði engan. En vei þeim, er ekki veldur hneyxlunum. Betra væri honum að skrifa eins og Þórbergur eða Kiljan, svo að einhver nenti að lesa það, þó að útí kynni að slá fyrir honum við og við - hvar vorum við nú aftur? Jú, jeg var að skrifa um Stúdentablaðið, til þess að sýna, hvernig „bókmentirnar“ liggja eins og farg á hinum mentaða æskulýð landsins.

Jeg sný mjer svo aftur að skólunum. Húmanistarnir segja, að þeir sem þurfi endilega að læra þessa stærðfræði og eðlisfræði eða hvað það nú er, geti þá farið í stærðfræðideildina í mentaskólanum. En þetta er alveg rangt. Bæði er það, að skólarnir eru tveir, hvor á sínu landshorni, en stærðfræðideildin ein, og svo miklu frekar hitt, að það er eigi von á því, að unglingar um fermingu, sem nú taka gagnfræðapróf, geti strax áttað sig á því, hvorn veginn þeir eigi að fara, og leiti því heldur til hinnar deildarinnar, þar sem þeir eiga frekar von á feitum vitnisburðum, án þess að þurfa að gera sjer þá fyrirhöfn að setja sig inn í greinir, sem þeim veitir erfitt að læra. Þar þurfa þeir ekki annað en fletta upp í orðabókum, og sjá! Þær leysa fyrir þá öll próblem. Er það ekki munur? Þó er mjer ekki grunlaust um, að ýmsir nemendur máladeildanna í mentaskólanum hjerna hafi eitthvað hugboð um, að hjer sje ekki alt með feldu, en það er varla hægt að snúa við, þegar búið er að velja. Þeir verða að halda áfram með sínar smásögur og sín kvæði, á latínu, ensku, þýsku, frönsku, dönsku og íslensku, eintómar smásögur og kvæði, því að efni kennslubókanna er aldrei annað.

Annars hef jeg heyrt, að í nágrannalöndunum sjeu nýmála-deildirnar langmest sóttar af kvenfólki, sem leiti sjer svo atvinnu við skrifstofustörf og þessháttar að afloknu stúdentsprófi. Sjeð hefi jeg sjálfur skólaskýrslu frá Danmörku, þar sem í máladeild var einn karlmaður, hitt alt kvenfólk, en í stærðfræðideildinni voru tómir karlmenn. Og mjer hefir verið sagt af kunnugum að í enskum skólum sje algengast að karlmenn sæki stærðfræðideildirnar, þá fornmáladeildirnar, en síður hinar. En hjer er alt öðru máli að gegna, því að hjer svífur „bókmenta“-andinn yfir vötnunum.

Það er nú af sem áður var. Það stendur einhversstaðar í mínum historíubókum, að við innganginn að skóla Platons í Aþenu hafi verið letruð orðin: *Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.*[1] Þessum orðum ættu nú húmanistarnir okkar að víkja við, og letra yfir útganginn úr sínum skólum: *Μηδεὶς γεωμέτρητος ἐξίτω.*[2]

1 Enginn ógeómetriskur gangi hjer inn.

2 Enginn geómetriskur gangi hjer út.

Reynir Axelsson:

„ORÐ MÉR AF ORÐI“

2. þáttur

Ekki verður sagt að félagsmenn Stærðfræðafélagsins hafi rokið upp til handa og fóta til að svara þeim spurningum sem ég lagði fyrir þá í pistlinum frá Orðaskrá Íslenska stærðfræðafélagsins sem birtist í síðasta Fréttabréfi. Satt að segja hefur hvorki heyrst frá þeim stuna né hósti. Við ætlum samt aftur að leita álits og ráðlegginga lesenda.

Athyglisvert umhugsunarefni er tregða margra til að taka upp nýyrði. Þeim sem hafa vanist slettu finnst nýyrði oft ljótt og ótækt, og stundum líða áratugir áður en það nær útbreiðslu. Gott dæmi er orðið *fall* fyrir *function*. Það er komið frá Guðmundi Finnbogasyni og sá fyrst dagsins ljós árið 1921. Ólafur Daníelsson notaði það svo í *Kenslubók í hornafræði* árið 1923, og Guðmundur sjálfur í þýðingu sinni á *Stærðfræði* A. N. Whiteheads árið 1931. (Um þetta orð og fleiri nýyrði Guðmundar má lesa í bókinni *Mályrkja Guðmundar Finnbogasonar* eftir Baldur Jónsson.) Samt sem áður held ég að notkun þess hafi ekki orðið almenn fyrr en löngu síðar. Ég man ekki betur en að á menntaskólaárum mínum 1959–1963 hafi ævinlega verið talað um *fúnksjónir*, og ég held að orðið *fall* hafi ekki slegið í gegn fyrr en um eða upp úr 1970. En þá náði það algjörri yfirhönd, og það er jafnvel orðið sjaldgæft að heyra menn sletta orðinu *fúnksjón* í venjulegu tali þegar þeir eru ekki að vanda sig.

Eitt af þeim erlendu orðum sem ennþá lifa góðu lífi sem sletta í málinu er *logarithm*, ýmist í myndinni *lógariþmi* eða *lógaritmi*. Báðar þessar myndir má finna í *Íslenzkri orðabók* Menningarsjóðs. Þó hafa margar tilraunir verið gerðar til að búa til íslenskt nýyrði yfir fyrirbærið, en menn hafa veigrað sér við að nota þau. Til er vélritaður orðalisti eftir Björn Franzson sem ber yfirskriftina *Orðaskrá handa Alfræðibókinni um ýmis mikilvæg hugtök stærðfræðinnar*. Ekki er ég viss um hve gamall listinn er, en ég fékk einhverntíma eintak af honum frá Leifi Ásgeirssyni prófessor. Í listanum stingur Björn upp á orðunum *lægi* og *lægitala* fyrir *logarithm*. Hann segir:

> Allir, sem skyn bera á „lógarithma“-hugtakið, hljóta að sjá, að hér er komið rétta orðið, myndað með hljóðvarpi af stofni orðsins „lágur“, því að „logarithma“-reikningur er einmitt fólginn í því að lægja stofntölurnar 1, 10, 100, 1000 o. s. frv. (og það, sem þar er á milli) niður í tölurnar 0, 1, 2, 3 o. s. frv. (og það sem þar er á milli), svo og stofntölurnar frá 0 og upp í 1 ofan í tölurnar frá $-\infty$ upp í 0 og reikna með þessum lægri tölum, þannig að reikningsaðferðirnar földun og deiling eru lægðar í hinar frumstæðari aðferðir samlagningar og frádráttar, en veldun og ræting lægðar í földun og deilingu. Allar nauðsynlegar samsetningar eru auðmyndaðar af orðinu. — Kostur er það vegna hinnar alþjóðlegu skammstöfunar **log** og **ln**, að orðin hefjist á stafnum „l“. Meira að segja mætti öðrum þræði, til gamans, líta á „lægi“ sem hljóðvarp af stofninum í „logarithmus“, þ. e. stofninum „lóg“ með linu „g-i“!

Ekki veit ég til að orðið *lægi* hafi verið notað, og Björn Franzson hefur ekki numið staðar við það, því að frá honum mun einnig vera komin önnur þýðing á *logarithm*, orðið *lygri*. Að minnsta kosti notar Björn það í bókinni *Undur veraldar*. Þar kemur það einnig fyrir í samsetningunni *lygratafla*, og auk þess notar Björn sögnina að *lygra* fyrir að finna lygrann af tölu, t. d. í orðasambandinu ***að lygra töluna 10***. Orðið *lygri* hefur náð nokkurri útbreiðslu, en þó geta margir ekki sætt sig við það. Mun það einkum vera i-hljóðvarpið sem mönnum finnst ankannalegt, og sumum finnst *lygri* minna fullmikið á orðin *lygi* og *lygari*.

Ég verð að játa að ég var sjálfur lengi vel í hópi þeirra sem slettu orðinu *lógaritmi*. Það sem sneri mér frá villu míns vegar var reiðilestur sem ég heyrði Helga Hálfdanarson eitt sinn flytja um orðið, raunar í myndinni *lógariþmi*. Ekki er þessi lestur prentaður, þannig að ég get ekki vitnað í hann beint. (Mig minnir hann hafi endað þannig: „*Ló-ga-riþ-mi*: fjögur atkvæði, og hvert atkvæði er hneyksli!“) Hins vegar birti Helgi svipaðan pistil í Morgunblaðinu árið 1980, sem ég leyfi mér að vitna í:

> Eitthvert hraksmánarlegasta orð, ef orð skyldi kalla, sem reynt hefur verið að troða inn í málið, held ég sé „lógariþmi“. Það er eins og sumir haldi, að hvaða erlent orð sem er, hljóti að verða að íslenzku ef hægt er að smygla þ-i inn í stafsetningu þess. Nú er það ljóst, að í voru máli fengi þ ekki staðizt í þeirri stöðu sem þarna verður.

> Raunar gæti t það varla heldur; það væri kannski helzt ð. Og g ætti að vera lint á þessum stað: „lóariþmi". Með hliðsjón af framburði ætti að rita orðið með k-i, hvernig sem okkur litist á það. Tillögur til úrbóta ætla ég ekki að ræða að sinni; en það kæmi víst ýmislegt til álita.

Skásti kosturinn sem ég fann var að taka upp orðið *lygri*, sem var eina nýyrðið sem ég vissi til að hefði eitthvað verið notað. Ég kunni fljótt ágætlega við það, og hef notað það í kennslu æ síðan. Það kæmi vel til greina að breyta því lítillega. Til dæmis má spyrja hvort i-hljóðvarpið sé nauðsynlegt: Eins og Helgi Hálfdanarson hefur bent mér á gæti orðið *logri* fullvel gengið. Aðrar uppástungur sem hafa verið ræddar í ritstjórn Orðaskrárinnar eru hvorugkynsorðið *log* og karlkynsorðið *logari*.

Skammstöfunin „log" er yfirleitt borin fram með hörðu g-i; þannig er „log x" oftast lesið „logg ex" fremur en „log ex". Því finnst mörgum eðlilegra að velja orð með hörðu g-i. Einhverntíma heyrði ég tillögu um orðið *loggur*. Væntanlega á einnig að vera hart g í orðinu *lógrími*. Um þetta orð er helsta heimild mín greinarstúfur í Morgunblaðinu 1987 eftir Hrólf Sveinsson, en þar stendur:

> Á bak við raus hans[3] um **sýrustig** laumaðist einungis hvöt hans til að koma á framfæri nýyrðinu **lógrími** um lógariþma. Og auðvitað reynir hann að láta líta svo út, að það orð hafi hann sjálfur búið til. En þar veit ég betur. Orðið **lógrími** er komið beint af steðja forstöðumanns íslenskrar málstöðvar, Baldurs Jónssonar prófessors.

Hvað af þessum orðum finnst lesendum best? Hafa þeir kannski betri tillögur? Mín tilhneiging er að halda mig við orðið *lygri*, eða kannski *logri*, nema eitthvert nýtt orð komi fram sem hefur alveg ótvíræða yfirburði.

Orðið *lógrími* leiðir hugann að hvorugkynsorðinu *algrím*, sem hefur verið notað fyrir *algorithm*. Þetta orð mun einnig vera eftir Baldur Jónsson, og það má finna í *Tölvuorðasafni*. Það er kannski ekki úr vegi að rifja upp að erlendu orðin *logarithm* og *algorithm* eru óskyld. Hið fyrra er komið úr grísku og myndað af orðunum *logos*, sem merkir *orð*, og *ariþmos*, sem merkir *tala*. Hið seinna er komið úr arabísku og er afbökun á nafni

[3] „Hann" er að sjálfsögðu vinur og frændi Hrólfs, Helgi Hálfdanarson, sem Hrólfi virðist vera alveg sérstaklega uppsigað við.

arabíska stærðfræðingsins *al-Khwârizmi*. Ensk mynd orðsins var áður *algorism*, en breyttist í *algorithm* fyrir áhrif frá orðinu *logarithm*. Orðið *algórismus* kemur fyrir í Hauksbók í upphaflegri merkingu, en það var notað um talnareikning með arabískum (eða indverskum) tölum. Tillaga okkar um orð fyrir *algorithm* er *reiknirit*. Það orð er myndað með hliðsjón af orðinu *forrit*. (Í *Tölvuorðasafni* má auk orðsins *algrím* einnig finna orðið *reiknisögn*.) Að þessari tillögu hefur það verið fundið að reiknirit þurfi ekki alltaf að segja fyrir um reikninga, heldur einnig miklu almennari aðferðir. En það virðist algjör óþarfi að skilja orðið *reikningur* svo þröngum skilningi.

Að lokum nokkrar tillögur og spurningar af handahófi:

Orðið *element* eins og í samhenginu *element of a set* hefur verið þýtt sem *stak*. Það er nú orðið fast í málinu, enda ágætt orð. En þar með er orðið *element* ekki afgreitt, því að kemur einnig fyrir í annarri merkingu, eins og í orðasambandinu *element of area*. Þetta hefur áður verið kallað *örbútur*, en það orð hefur varla fengið útbreiðslu. Nú höfum við nýja tillögu, *frymi*. *Element of area* verður þá *flatarmálsfrymi*, *element of length* verður *lengdarfrymi* og *element of volume* verður *rúmmálsfrymi*.

Af orðinu *element* er einnig dregið lýsingarorðið *elementary*, sem hefur valdið okkur talsverðum heilabrotum, án þess að við höfum komist að niðurstöðu. *Elementary function* er fall sem er myndað úr margliðum og (tvinngilda) veldisvísisfallinu með grunnreikniaðgerðunum fjórum og með því að taka andhverfur falla. Meðal þeirra eru rótarföll, lygrar (lograr?), hornaföll og umhverfur þeirra, og breiðbogaföll og umhverfur þeirra. Hvaða orð má nota sem samheiti um slík föll? Við höfum enga skárri tillögu fengið en *einfalt fall*. Orðið er einnig notað í orðasamböndum á borð við *elementary geometry* og *elementary number theory*. Orðasambandið *elementary geometry* er stundum notað til aðgreiningar frá *frumsendurúmfræði* eða frá *hnitarúmfræði*, en stundum í tæknilegri merkingu um þá hluta frumsendurúmfræðinnar sem komast af án hugtaka úr mengjafræði. Orðasambandið *elementary number theory* er einkum notað í tæknilegri merkingu um þá hluta talnafræðinnar sem komast af án tvinnfallagreiningar eða flókinna hugtaka úr algebru, m. ö. o. til aðgreiningar frá *analytic number theory* eða *fágaðri talnafræði* og *algebraic number theory* eða *algebrulegri talnafræði*. Hér hefur stundum verið talað um *einfalda rúmfræði* og *einfalda talnafræði*. Ekki alls fyrir löngu barst okkur tillaga um að kalla þetta *grunnstæða rúmfræði* og *grunnstæða talnafræði*. Hefur einhver betri tillögur?

Critical point er punktur þar sem afleiða falls verður núll. Stundum hefur þetta verið kallað *jafnvægispunktur* eða *stöðupunktur* (jafnvel *stöðugleikapunktur*) á íslensku. Ný tillaga, sem okkur líst vel á, er *hvarfpunktur* eða einfaldlega *hvarf*. Þá mætti þýða *critical value* sem *hvarfgildi*.

Í kúluhornafræði er hornasumma þríhyrnings stærri er tvö rétt horn. Það sem er fram yfir tvö rétt horn er kallað *angular excess*. Tillaga okkar um þýðingu á því er *ofhorn*. Sömuleiðis er *angular defect* það sem vantar upp á að hornasumma þríhyrnings sé tvö rétt horn í breiðgerri (þ. e. hýperbólískri) rúmfræði; þetta mætti þá kalla *vanhorn*.

Sagnirnar *interpolate* og *extrapolate* og nafnorðin *interpolation* og *extrapolation* þarf helst að þýða einhvernveginn sambærilega. Gömul tillaga um þýðingar eru *innreikna* fyrir *interpolate* og *útreikna* fyrir *extrapolate*. Samsvarandi nafnorð yrðu þá *innreikningur* og *útreikningur*. En enginn færi víst að nota orðið *útreikningur* fyrir *extrapolation*, því að það merkir þegar allt annað. Aðrar tillögur eru *inngiska* og *útgiska* ásamt nafnorðunum *inngiskun* og *útgiskun*. Þetta mætti kannski notast við. En fyrir *interpolate* og *interpolation* hafa sumir lengi notað orðin *brúa* og *brúun*, og þau virðast fara vel í munni og lýsa fyrirbærunum ágætlega. Hins vegar er erfitt að finna samsvarandi orð fyrir *extrapolate* og *extrapolation*. Nýlega fengum við þó tillögu um að búa til sögnina að *bryggja* og nafnorðið *bryggjun*. Hvernig líst lesendum á það?

Face á margflötungi hefur lengi verið kallað *hliðarflötur*. En sumir margflötungar, svo sem strýtur (þ. e. pýramítar) og strendingar hafa það sem kallað er *lateral faces* eða *„hliðarandlit“* til aðgreiningar frá *grunnfleti* eða *endaflötum*. Tillaga okkar er að nota orðið *möttulflötur* fyrir *lateral face*. *Möttull* væri þá *lateral surface* eða sá hluti yfirborðsins sem er samsettur úr möttulflötunum. Þá mætti einnig nota orðið *möttulbrún* fyrir *lateral edge* og *möttulflatarmál* fyrir *lateral area*.

Forngrikkir ræddu um *þríhyrningstölur*, *ferningstölur*, *fimmhyrningstölur* o. s. frv. Samheiti fyrir slíkar tölur er *figurate numbers*. Kæmi til greina að kalla þær *myndtölur* á íslensku?

Axiom hefur verið kallað *frumsetning* á íslensku. Í *Orðaskrá úr uppeldis- og sálarfræði* má hins vegar einnig finna þýðinguna *frumsenda*, sem virðist vera eins konar stytting úr *frumforsenda*. Þetta sýnist mér vera ágætt orð. En hvernig á þá að þýða sögnina *axiomatize* og lýsingarorðið *axiomatizable*? Mætti búa til sögnina að *frumsenda* og tala um *frumsendanlegar* kenningar, og þá *endanlega frumsendanlegar kenningar* ef þær eru *finitely axiomatizable*? Þetta virðist vera hálfklúðurslegt, en hefur einhver betri tillögur?

Framhald af bls. 8.

Við höldum áfram með að rekja þá stórviðburði sem framundan eru í heimi stræðfræðinnar. Nýlega barst okkur fyrsta tilkynning um **heimsþing reiknifræðinga**. Það verður haldið í höfuðborg Bandaríkjanna, Washington, dagana 8.–12. júlí árið 1991. Þetta þing er annað í röðinni. Fyrsta þingið héldu fransmenn í París árið 1987 og þangað komu 1800 manns frá um 50 löndum. Þeir sem áhuga hafa geta fengið afrit af tilkynningunni hjá ritstjóra.

Sameining Evrópu er daglega í fréttum um þessar mundir. Stærðfræðingar álfunnar eru einnig að sameinast, því fyrir dyrum stendur stofnun **Evrópska stærðfræðifélagsins**. Nefnd á vegum Evrópusambands stærðfræðifélaga stendur fyrir undirbúningi stofnunarinnar og er Sir Micael Atiyah formaður hennar. Í drögum að lögum fyrir félagið segir að markmið þess sé að vinna að framþróun stærðfræðinnar í löndum álfunnar með sérstakri áherslu á þau verkefni sem best verða leyst með alþjóðlegu samstarfi. Meðal þeirra atriða sem áhersla er lögð á er að efla samhug og einingu meðal evrópskra stærðfræðinga. Félaginu hefur verið valið aðsetur í Helsinki í Finnlandi og mun það lúta finnskri lögsögu. Gert er ráð fyrir að félagið samanstandi af félagasamtökum, stofnunum og einstaklingum, og verði þannig útvíkkun á Evrópusambandinu. Það er mjög athyglisvert að félagssvæðið er öll Evrópa að Sovétríkjunum meðtöldum, en Evrópusambandið er einungis samband stærðfræðifélaga vesturhluta álfunnar. Íslenska stærðfræðafélagið er aðili að Evrópusambandinu og mun einnig eiga aðild að hinu nýja félagi.

Höldum áfram með sameiningu Evrópu. Þau boð hafa borist frá **Franska stærðfræðifélaginu** að það muni standa fyrir fyrsta **Evrópuþingi stærð-**

fræðinga í París fyrstu vikuna í júlí á því mikla sameiningarári í sögu gamla heimsins 1992. Fransmennirnir vonast síðan til að þingið verði haldið á fjögurra ára fresti eftir það og að það flytjist á milli landa álfunnar. (Spennandi verður að vita, hvar þingið árið 2000 verður haldið, og hver tekur að sér að leggja línurnar fyrir stærðfræðirannsóknir næsta árþúsundið!)

Þetta leiðir hugann að Norðurlöndunum, en árið 1992 verður 21. norræna stærðfræðingaþingið haldið í Svíþjóð. Það er alveg ljóst að hugur margra mun frekar stefna til Parísar en til Svíþjóðar, og þurfa forystumenn norrænu félaganna að hugsa sinn gang.

Á næsta ári verða að minnsta kosti tvær stærðfræðiráðstefnur haldnar hér á landi. Samband norrænna raungreinakennara í framhaldsskólum mun halda þing sitt í Reykjavík síðustu vikuna í júní. Íslendingar sjá að sjálfsögðu um þinghaldið og er undirbúningur í fullum gangi. Þingið verður haldið í Háskóla Íslands. Fyrstu vikuna í júlí verður síðan haldin ráðstefna á Laugarvatni til heiðurs Bjarna Jónssyni, en hann verður sjötugur snemma á næsta ári. Viðfangsefni ráðstefnunnar verða rannsóknarsvið Bjarna, algebrur, grindur og rökfræði. Að ráðstefnunni standa, Vanderbilt háskólinn, Kaliforníuháskólinn í Berkeley, Háskóli Suður–Karólínu, allir í Bandaríkjunum, Háskóli Íslands og Íslenska stærðfræðafélagið. Við munum fjalla ítarlegar um þessar ráðstefnur í næsta tölublaði Fréttabréfsins.

Við endum þennan pistil með örstuttri frétt um **Euromath**, sem er samstarfsverkefni Evrópusambandins til þess að koma upp alþjóðlegu tölvuneti fyrir samskipti stærðfræðinga á meðal. Hugmyndin er að koma upp samskiptakerfi og tölvubanka sem geymi stærðfræðigreinar og aðrar upplýsingar, sem stærðfræðingum koma að notum. Fyrsta áfanga verksins er nú lokið, en hann fólst í því að hanna kerfið og gefa nákvæma lýsingu á því. Búið er að skrifa samskiptaforrit, en það er einungis lítill hluti af þeim forritum sem skrifa þarf. Síðari áfangi verksins felst í því að skrifa öll forritin eftir þeim lýsingum, sem fyrir liggja. Áætlað að þessi vinna taki tvö ár, þannig að kerfið kemst ekki í notkun fyrr en á árinu 1992.

Robert Magnus:

ÓLYMPÍUKEPPNIN Í STÆRÐFRÆÐI 1989

Dagana 13.–24. júlí var 30. Ólympíukeppnin í stærðfræði haldin. Í þetta skipti var hún í Braunschweig í Vestur-Þýskalandi. Íslendingar sendu fjóra keppendur ásamt tveimur fylgdarmönnum. Keppendurnir voru: Guðbjörn Freyr Jónsson (Menntaskólanum á Akureyri), Halldór Árnason (Menntaskólanum í Reykjavík), Ólafur Örn Jónsson (Fjölbrautaskóla Suðurnesja) og Hrafnkell Kárason (Menntaskólanum við Sund). Fylgdarmenn voru: Kristín Halla Jónsdóttir (fararstjóri) og Robert Magnus (dómnefndarfulltrúi).

Allar aðstæður voru til fyrirmyndar (nema það að Robert fann ekki Macintosh tölvu til að vélrita verkefnin á, en slíkur tæknibúnaður er orðinn honum ómissandi!). Keppnin var vel skipulögð en samt ekki um of. Stemningin var alltaf vingjarnleg og afslöppuð, og oft gáfust tækifæri til að skemmta sér þó vinnuálag væri mikið.

Fyrir íslenska liðið var keppnin hápunktur undirbúnings, sem staðið hafði í heilt ár. Hann hófst með landskeppninni haustið áður, hélt áfram með fjarkennslu um veturinn, lokakeppninni og norrænu keppninni í vor, og lauk með þriggja vikna þjálfun í háskólanum fyrir þá nemendur, sem voru valdir í liðið.

Fimmtíu lönd tóku þátt í keppninni en auk þeirra var danskur piltur sem keppti óformlega. (Danir taka ekki þátt í stærðfræðikeppnum yfirleitt!) Flest lönd voru með sex manna lið. Þátttökulöndin hafa aldrei verið fleiri.

Árangur íslenska liðsins í heild var lakari en í fyrra, en þegar litið er á einstaklinga, (keppnin er formlega séð einungis einstaklingskeppni), er ánægjulegt að nefna að Guðbjörn var mjög nálægt því að fá verðlaun; reyndar munaði aðeins einum punkti. Hann hlaut 17 punkta af 42, og hafnaði í 148. sæti af 291 keppanda. Auk þess fengu Guðbjörn og Hrafnkell báðir viðurkenningu fyrir það að hafa leyst a.m.k. eitt dæmi til fulls.

Meðfylgjandi tafla sýnir löndin sem þátt tóku og punktafjöldann sem þau hlutu. Þegar litið er á árangur liðanna sést að Kínverjar sigruðu með nokkrum yfirburðum. Það er kannski ekki furðulegt að einn fjórði

sæti	land	punktar	sæti	land	punktar
1	Kína	237	26	Ísrael	105
2	Rúmenía	223	27	Belgía	104
3	Sovétríkin	217	28	Suður-Kórea	97
4	Austur-Þýskaland	216	29	Holland	92
5	Bandaríkin	207	30	Túnis	81
6	Tékkóslóvakía	202	31	Mexíkó	79
7	Búlgaría	195	32	Svíþjóð	73
8	Vestur-Þýskaland	187	33	Kúba	69
9	Víetnam	183	33	Nýja-Sjáland	69
10	Ungverjaland	175	35	Luxemborg	65
11	Júgóslavía	170	36	Brasilía	64
12	Pólland	157	36	Noregur	64
13	Frakkland	156	38	Marokkó	63
14	Íran	147	39	Spánn	61
15	Singapúr	143	40	Finnland	58
16	Tyrkland	133	41	Tailand	54
17	Hongkong	127	42	Perú	51
18	Ítalía	124	43	Filipseyjur	45
19	Kanada	123	44	Portúgal	39
20	Grikkland	122	45	Írland	37
20	Stóra Bretland	122	46	Ísland	33
22	Ástralía	119	47	Kúvait	31
22	Kolumbía	119	48	Kýpur	24
24	Austurríki	111	49	Indónesía	21
25	Indland	107	50	Venesúela	6

mannkynsins geti sett saman slíkt lið. Í öðru sæti lentu rúmenar en þeir teljast ekki til stórþjóða. Hér er áreiðanlega um góðar þjálfunaraðferðir að ræða (fyrir þær eru rúmenar frægir) og maður velti fyrir sér þeim möguleika að bandaríkjamenn gætu keypt rúmenskan þjálfara fyrir næstu keppni, eins og gerðist í fimleikakeppni einu sinni! Ísland skipaði 46. sæti með 33 punkta, en þetta er ekki alveg marktækt því að við vorum með fjögurra manna lið. Sex manna lið með sama meðalárangri yrði með 49,5 punkta sem svarar til 43. sætis.

Í þetta skipti gerðist það að eitt dæmi var valið úr þeim sem íslendingar lögðu til í keppnina. Það var dæmi 4 (fyrsta dæmið seinni daginn) sem Eggert Briem bjó til. Þetta er í annað skipti sem slíkt hefur gerst síðan íslendingar hófu þátttöku í keppninni 1985. Þetta telst vera góður árangur fyrir dæmasmiði okkar! Í lok keppninnar var boð kínverja um að halda 31. Ólympíukeppnina árið 1990 í Peking þegið.

Hér á eftir fylgja dæmin úr keppninni. Lausnirnar eru á bls. 37. (Ekki kíkja fyrr en þið hafið glímt við dæmin!) Þess má geta að dæmi 6 var talið erfiðast, enda var opinbera lausnin flókinn útreikningur. Nokkrir keppendur fundu þó mjög stutta lausn án neins reiknings. Í dæmi 3 er óþarfi að gera ráð fyrir því að engir þrír punktar liggi á beinni línu. Þetta kom í ljós aðeins vegna þess að einn keppandi leysti það án þess að nota þessa forsendu. Í íslenska dæminu er orðið „kúptan“ óþarfi. Það var sett inn að ósk dómnefndarinnar til þess að létta dæmið. Keppninni var skipt í tvö próf hvort á sínum degi. Leyfður tími í hvoru prófi var $4\frac{1}{2}$ tími.

Fyrri dagur

1. Sýnið að hægt er að skrifa mengið $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ sem sammengi 117 sundurlægra hlutmengja A_1, A_2, $\ldots$,A_{117} þannig að:

(i) Sérhvert hlutmengi A_i hafi 17 stök, og (ii) summa allra staka í sérhverju A_i sé sú sama.

2. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning. Innri helmingalínur hornanna A, B og C skera umritaðan hring þríhyrningsins í punktunum A_1, B_1 og C_1 í þessari röð. Ytri helmingalínur hornanna B og C skera línuna AA_1 í punktinum A_0. Punktarnir B_0 og C_0 eru skilgreindir á hliðstæðan hátt. Sýnið að:

(a) Flatarmál þríhyrningsins $A_0B_0C_0$ er jafnt tvöföldu flatarmáli sexhyrningsins $AC_1BA_1CB_1$.

(b) Flatarmál þríhyrningsins $A_0B_0C_0$ er stærra en eða jafnt og ferfalt flatarmál þríhyrningsins ABC.

3. Látum k og n vera jákvæðar heilar tölur og látum S vera mengi í sléttu sem inniheldur n punkta og hefur eftirfarandi tvo eiginleika:

(i) Engir þrír punktar úr S liggja á beinni línu, og
(ii) fyrir sérhvern punkt P í S eru til a.m.k. k punktar í S sem liggja jafnlangt frá P.

Sýnið að $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Seinni dagur

4. Látum $ABCD$ vera kúptan ferhyrning sem hefur eftirfarandi tvo eiginleika:

(i) Hliðarnar AB, AD og BC uppfylla $AB = AD + BC$.
(ii) Til er punktur P innan í ferhyrningnum þannig að, ef við táknum með h fjarlægðina frá P til línunnar CD, þá gilda jöfnurnar $AP = h + AD$ og $BP = h + BC$.

Sannið að

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Sannið að fyrir sérhverja jákvæða heila tölu n eru til n jákvæðar heilar tölur í röð þannig að engin þeirra sé heiltöluveldi af frumtölu.

6. Sagt er að umröðun $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ af menginu $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, þar sem n er jákvæð heil tala, hafi eiginleika P ef $|x_i - x_{i+1}| = n$ fyrir a.m.k. eitt i úr $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Sýnið að, fyrir sérhverja tölu n, hafi meira en helmingur allra umraðana eiginleikann P.

BÓKAVERÐLAUN

Í vor veitti Íslenska stærðfræðafélagið nýstúdentum bókaverðlaun eins og undanfarin ár. Þeir sem hlutu verðlaunin eru:

Aðalbjörn Þórólfsson, MH	Helgi Bjarnason, MS
Arnar Baldursson, MÍ	Leifur Geir Hjaltason, MH
Ásta Kristjana Sveinsdóttir, MR	Magnús Haukur Rögnvaldsson, MK
Guðbjörn Freyr Jónsson, MA	Pálmi Símonarson, MS
Guðmundur Mar Magnússon, FB	Sigurður Freyr Jónatansson, MH

Venjan hefur verið að stúdentar hljóti verðlaun frá félaginu, ef þeir eru í eðlisfræðideild og allar einkunnir þeirra fyrir stærðfræði eru ágætiseinkunnir. Í þeim skólum, sem hafa áfangakerfi og gefa ekki einkunnir með hefðbundnum hætti, er miðað við að stúdentar hafi lokið öllum stærðfræðiáföngum, sem kenndir eru við skólann með einkuninni A.

Í ár gáfum við tvær bækur, „Encounter with Mathematics" eftir Lars Gårding, gefin út af Springer–Verlag 1977, og einnig „For all Practical Purposes; Introduction to Contemporary Mathematics", sem skrifuð er af 13 bandarískum stærðfræðingum undir ritstjórn Lynn S. Steen og gefin út af Freeman and Company 1988. Sú fyrrnefnda er fræðilegs eðlis og er ætluð sem skemmtilesning fyrir áhugasama háskólastúdenta á fyrsta námsári. Sú síðarnefnda er hins vegar almenn kynning á viðfangsefnum í hagnýttri stærðfræði.

Félagið hefur gefið bókaverðlaun allt frá árinu 1952. Því miður hafa sumir ritarar félagsins gegnum tíðina ekki hirt um að skrá niður nöfn verðlaunahafanna. Nöfnin voru skráð samviskusamlega fyrstu árin en áratuginn 1961–1970 var ekkert skráð og upp frá því með nokkrum gloppum. Stjórnin ákvað að reyna að grafa upp nöfn allra þeirra sem fengið hafa verðlaunin frá upphafi. Fyrst leituðum við skýrslur skólanna uppi og gátum fundið nokkur nöfn í þeim. Síðan var haft samband við alla framhaldsskólana og þeir beðnir um að senda okkur nöfn verðlaunahafanna. Í sumum tilfellum voru engin nöfn skráð hjá skólunum og þá var ekkert annað að gera en að fara í einkunnabækurnar og athuga hverjir það voru sem uppfylltu skilyrðin sem áður voru nefnd. Á þessu sést að hugsanlegt getur verið að við höfum skráð hjá okkur nöfn manna sem aldrei hafa fengið verðlaunin og jafnframt að nöfn hafi fallið niður.

Við birtum hér lista yfir alla þá sem við teljum að hafi fengið bókaverðlaunin frá upphafi. Allir þeir sem sjá einhverjar villur eru vinsamlega beðnir um að hafa samband við stjórn félagsins.

Skammstafanir á nöfnum skólanna eru:

FB - Fjölbrautaskólinn í Breiðholti
FG - Fjölbrautaskólinn í Garðabæ,
FH - Flensborgarskólinn í Hafnarfirði,
MA - Menntaskólinn á Akureyri,
ML - Menntaskólinn að Laugarvatni,
MH - Menntaskólinn við Hamrahlíð,
MÍ - Menntaskólinn á Ísafirði,
MK - Menntaskólinn í Kópavogi,
MR - Menntaskólinn í Reykjavík,
MS - Menntaskólinn við Sund,
MT - Menntaskólinn við Tjörnina.

1952
Guðmundur Jónsson, MR
Gunnar Baldursson, MA
Gunnar Sigurðsson, MR

1953
Björn Höskuldsson, MR
Kjartan Kristjánsson, MA
Sigurbjörn Guðmundsson, MR

1954
Ottó J. Björnsson, MR
Sveinn Jónsson, MA
Þorsteinn Sæmundsson, MR

1955
Helgi Jónsson, MA

1956
Hólmgeir Björnsson, MR
Ketill Ingólfsson, MR
Pálmi Lárusson, MR
Sveinbjörn Björnsson, MR

1959

Baldur Sigfússon, MR
Guðmundur Ólafsson, MR
Guðmundur Steinsson, MA
Halldór I. Elíasson, MA
Halldór Guðjónsson, MR
Jón Þór Þórhallsson, MR
Júlíus Stefánsson, MA
Kjartan Jóhannsson, MR
Reynir Eyjólfsson, MA
Sigfús Johnsen, MA
Sigurður Gizurarson, MR
Sigurður Þórðarson, MR
Sverrir Bjarnason, MR

Verðlaun til þeirra sem sýnt höfðu áhuga, kunnáttu og færni í ritgerðasamkeppni Kjarnfræðanefndar Íslands, en nefndin hafði eigi getað veitt verðlaun:

Einar Júlíusson, MR
Jón Þór Þórhallsson, MR
Magnús Jóhannsson, MR
Reynir Eyjólfsson, MA
Sigfús Johnsen, MA
Sverrir Hólmarsson, MR
Þorkell Helgason, MR
Þorsteinn J. Halldórsson, MR

1960

Ástvaldur Guðmundsson, MR
Einar Júlíusson, MR
Eysteinn Hafberg, MR
Eysteinn Pétursson, ML
Helgi Hafliðason, MA
Jón Sigurðsson, MA
Jón R. Stefánsson, MR
Sigurður Dagbjartsson, MA
Stefán Einarsson, MA
Þorsteinn Vilhjálmsson, MR

1961

Elías Elíasson, MA
Erna Jakobsdóttir, MA
Guðmundur Sigurðsson, MA
Gunnar Benediktsson, MR
Hjalti Þórðarson, MA
Jóhannes F. Skaftason, ML
Jón G. Skúlason, ML
Reynir Vilhjálmsson, MA
Þorgeir Pálsson, MR

1962

Egill Egilsson, MA
Guðmundur Eiríksson, MA
Halldór Friðgeirsson, MA
Leó Kristjánsson, MA
Magnús Þór Magnússon, MR
Þorkell Helgason, MR

1963

Baldur Hermannsson, MR
Halldór Sveinsson, MR
Geir A. Gunnlaugsson, MR
Rögnvaldur Ólafsson, MR

Ingvar Árnason, MA
Stefán Glúmsson, MR
Reynir Axelsson, MR
Valdimar Ragnarsson, MA

1964
Ásbjörn Einarsson, MR
Bergljót Magnadóttir, ML
Bragi Ólafsson, MA
Guðbrandur Steinþórsson, MR
Guðjón Samúelsson, MA
Haraldur Jóhannesson, MA
Jakob Yngvason, MR
Sven Þórarinn Sigurðsson, MR
Tómas Tómasson, MR
Þengill Oddsson, MA
Þorsteinn Þorsteinsson, MR
Þorvaldur Ólafsson, MR

1965
Einar Þorvarðarson, MA
Gunnar St. Ólafsson, MR
Hreinn Hjartarson, MA
Jóhannes Vigfússon, MA
Jón Kr. Arason, MA
Ólafur Bjarnason, ML
Pálmi Frímannsson, MA
Pétur Blöndal, MR
Pétur Maack, MR
Rögnvaldur Gíslason, MA
Sigmundur Sigfússon, MR
Sigrún Helgadóttir, MR
Örn Þorleifsson, MR

1966
Ágúst H. Bjarnason, MR
Árni Konráðsson, MA
Ásmundur Jakobsson, MR
Gunnar Haraldsson, MA
Gunnlaugur Jónsson, MR
Guðmundur Viggósson, MR
Guðmundur Þorgeirsson, MR
Hans Kr. Guðmundsson, MR
Páll Jensson, MR
Ríkharður Kristjánsson, MA
Stefán Ingólfsson, MR

1967
Ásbjörn Jóhannesson, MA
Benedikt Steingrímsson, MR
Bergþór Hjaltason, MR
Einar Guðmundsson, MR
Guðmundur Karlsson, MR
Guðmundur Pétursson, MA
Inga Hersteinsdóttir, MR
Jón Grétar Hálfdánarson, MR
Jón Pétursson, MR
Páll Einarsson, MR
Páll Ammendrup, MR
Sigurður Eyjólfsson, MA
Snorri P. Kjaran, MR
Þórarinn Hjaltason, MR

1968
Alda Möller, MA
Helga Ögmundsdóttir, MR

Bjarni Ómar Jónsson, MA
Björn Stefánsson, MA
Erlendur P. H. Sen Jónsson, MR
Halldór Halldórsson, MR
Helgi Skúli Kjartansson, MR
Kristján Haraldsson, ML
Örn Lýðsson, ML

1969

Emilía Marteinsdóttir, MR
Geir Jóhannesson, MR
Guðmundur Vigfússon, MR
Höskuldur Kristvinsson, MR
Jóhann Tómasson, MA
Jón Örn Bjarnason, MR
Runólfur Maack, MR
Sigurður Jóhannsson, ML
Þórir Sigurðsson, MR

1970

Axel Jóhannsson, MR
Árni Kjartánsson, ML
Benedikt Ásgeirsson, MA
Eyjólfur Sæmundsson, MR
Gísli Halldórsson, ML
Jóhann Malmquist, MA
Jörundur Þórðarson, MH
Kristján Sig. Kristjánsson, MH
Pétur Thorsteinsson, MR
Ragnheiður Guðmundsdóttir, MH
Sigríður Hlíðar, MR
Stefán Karlsson, MR

1971

Andrés Magnússon, ML
Helgi Þórsson, MH
Hörður Kristjánsson, MH
Ingjaldur Hannibalsson, MR
Lars Valdimarsson, MR
Ólafur Andrésson, MH
Ragna Briem, MR
Runólfur Ingólfsson, MA
Þorsteinn Hannesson, MR

1972

Árni Ragnarsson, MR
Björn Ólafsson, MH
Einar Kjartansson, MA
Einar Stefánsson, MR
Guðmundur Böðvarsson, ML
Gunnlaugur Pétursson, MA
Hafsteinn Pálsson, MH
Heimir Hauksson, MR
Hermann Guðjónsson, MA
Hermann Þórisson, MR

1973

Emma Eyþórsdóttir, MH
Guðmundur Þór Axelsson, MH
Halla Björg Baldursdóttir, MT
Hilmar Skarphéðinsson, MT
Sigríður Jóhannsdóttir, MR
Snæbjörn Friðriksson, MA
Þorsteinn Sigurðsson, MA
Þórður Jónsson, MR

1974

Bjarni Guðmundsson, MR
Franz Árni Siemsen, MA
Grétar A. Halldórsson, MT
Jón Kristjánsson, MR
Kjartan Ottósson, MH
Páll Jónsson, MA
Ragnar Sigurðsson, MT

1975

Benedikt Jóhannesson, MR
Guðni Axelsson, MR
Guðrún Magnúsdóttir, MR
Jón Björgvin Hauksson, MH
Jón Vilhjálmsson, MT
Kristín Baldursdóttir, MH
Reynir Jónasson, MR
Sigurjón Hauksson, MA
Snorri Agnarsson, MR

1976

Friðrik Már Baldursson, MT
Gunnar Baldvinsson, MR
Jón Logi Sigurbjörnsson, MR
Kristján G. Sveinsson, MT
Magnús Gíslason, MR
Sigurbjörg Albertsdóttir, MT
Sigurður Harðarson, MA
Skeggi G. Þormar, MT
Stefán Gíslason, MH
Þorvarður K. Ólafsson, MH

1977

Ari Ingólfsson, MR
Áskell Harðarson, MA
Birgir Árnason, MR
Birgir Guðjónsson, MR
Guðmundur Kolka, MR
Kristján Jónasson, MR
Ólafur Guðmundsson, MR
Óskar Einarsson, MR
Steingrímur Jónsson, MA
Tómas Jóhannesson, MS
Trausti Þór Sverrisson, MR
Þorsteinn Sigurjónsson, MR
Þórarinn Sveinsson, ML

1978

Andri Geir Arinbjarnarson, MH
Atli Vilhelm Harðarson, ML
Hafliði S. Magnússon, MS
Jón Egill Kristjánsson, MH
Margrét Baldursdóttir, MH
Magnús Hartmann Gíslason, MA
Stefán Steinsson, ML

1979

Aðalsteinn Jónsson, MA
Gunnar Björn Gunnarsson, MR
Gunnar Freyr Stefánsson, MS
Ólafur Kjartansson, MK
Sigríður Sóley Kristjánsdóttir, MR
Ögmundur Snorrason, MA

1980

Alexander K. Smárason, MA
Árni Sveinn Sigurðsson, MA
Ásdís Auðunsdóttir, MR
Höskuldur Björnsson, FH
Ólafur Gíslason, FB
Ragnhildur Hjartardóttir, MR
Reynir Guðmundsson, FB
Sigmundur Guðmundsson, MS
Þórarinn Árni Eiríksson, MH
Þórður G. Möller, MK
Þórunn I. Pálsdóttir, MK

1981

Haraldur Sigþórsson, MR
Ingunn Þorsteinsdóttir, MK
Kolbeinn Arinbjarnarson, MH
Stefán Þormar Guttormsson, MS

1982

Bera Pálsdóttir, MK
Guðbrandur Guðmundsson, MS
Gunnar Guðni Tómasson, MH
Ingimar Ragnarsson, MR
Ólafur Jóhann Ólafsson, MR
Óttar Ísberg, MR
Reynir Bjarnar Eiríksson, MA
Sveinn Baldursson, FB
Þorkell Guðmundsson, FB

1983

Borghildur Jóhannsdóttir, MR
Einir Valdimarsson, MR
Hólmfríður Guðmundsdóttir, MS
Ingibjörg Guðmundsdóttir, MS
Magnús Kristjánsson, FB
Ólafur Mar Jósefsson, MR
Sigurður Guðmundsson, MH

1984

Bjarni Birgisson, MS
Björn Kristinsson, MR
Eysteinn Einarsson, MK
Finnur Lárusson, MH
Harpa Rúnarsdóttir, MS
Kristján B. Einarsson, MS
Svava Ósk Jónsdóttir, MA

1985

Agnar Rúnar Agnarsson, MS
Ásgeir Karl Ólafsson, MR
Bjarni Gunnarsson, MR
Björn Jónsson, FG
Elfar Aðalsteinsson, MA
Freysteinn Sigmundsson, MH
Guðrún Karlsdóttir, MR
Hrafn Loftsson, MH
Ingveldur Jónsdóttir, MH
Linda Stefánsdóttir, MA
Ragnar Gunnarsson, FH
Rögnvaldur Möller, MH
Sigurður Kristinsson, ML
Vilmundur Pálmason, MK

Halldóra Gunnlaugsdóttir, MA
Helgi Þór Ingason, MS
Þorlákur Jónsson, MR

1986

Andri Teitsson, MA
Anna Þórdís Sigurðardóttir, MS
Auður Freyja Kjartansdóttir, MS
Ágúst S. Egilsson, MR
Björn Þorsteinsson, MH
Eiríkur Pálsson, MH
Fjóla Rún Björnsdóttir, MH
Hákon Guðbjartsson, MR
Jón Lárus Stefánsson, MH
Róbert Jón Rascofer, MS
Sigurbjörn Þorkelsson, MH
Sigurjón Árnason, MR

1987

Ari Jónsson, MR
Geir Agnarsson, MR
Guðmundur K. Birgisson, MS
Matthías Magnússon, MR
Rögnvaldur Sæmundsson, MH
Sigurður M. Garðarsson, MS
Steingrímur P. Kárason, MA
Örnólfur Rögnvaldsson, MH

1988

Anna Herborg Traustadóttir, MH
Árni Guðmundur Hauksson, MA
Guðmundur G. Guðmundsson, MS
Guðmundur Jónsson, MS
Halldóra Kristín Þórarinsd., MR
Helga Þórhallsdóttir, MR
Jens Fylkisson, MS
Kristján Halldórsson, MH
Pétur Lúðvík Jónsson, MR
Sigurður Ásgeirsson, FB
Stefán Hjörleifsson, MR
Sverrir Örn Þorvaldsson, MR
Valdimar Bragi Bragason, MH
Valtýr Þórisson, MK

LAUSNIR Á DÆMUNUM Í ÓLYMPÍUKEPPNINNI

1. Við leysum hér almennara verkefni: Hvenær er hægt að skrifa tölurnar frá 1 til mn sem n sundurlæg mengi með m stök í hverju, þannig að summa stakanna í hverju mengi sé sú sama?

Gerum ráð fyrir að sundurgreining af þessari gerð sé möguleg. Vegna þess að

$$1 + 2 + \cdots + mn = \frac{1}{2}mn(mn + 1)$$

er summa staka í hverju mengi $\frac{1}{2}m(mn + 1)$. Af því leiðir að annaðhvort er m slétt tala eða bæði m og n eru oddatölur. Við sýnum næst að þessi skilyrði séu einnig nægjanleg.

Fyrst gerum við ráð fyrir að m sé slétt tala. Skrifum tölurnar frá 1 til mn í rétthyrnt fylki með n dálka og m raðir. Setjum fyrst tölurnar frá 1 til n í fyrstu röð frá vinstri til hægri. Setjum svo tölurnar frá $n + 1$ til $2n$ í aðra röð en frá hægri til vinstri. Höldum svo áfram frá vinstri til hægri og frá hægri til vinstri á víxl. Vegna þess að m er slétt tala er síðasta röð skrifuð frá hægri til vinstri. Ljóst er að summa stakanna í hverjum dálki er sú sama.

Næst gerum við ráð fyrir að bæði m og n séu oddatölur. Byrjum eins og í tilfellinu þar sem m var slétt tala, en hættum þegar $m - 3$ raðir eru komnar. Í fylkinu sem hér er komið er summa stakanna í hverjum dálk sú sama. Enn eru eftir $3n$ tölur sem við þurfum að dreifa í n mengi, þremur í hvert, þannig að summa hverrar þrenndar verði sú sama. Um er að ræða tölurnar frá $mn - 3n + 1$ til mn. En ljóst er að til að útskýra hvernig þessi dreifing er framkvæmd nægir að taka einhverjar $3n$ tölur í röð. Látum $n = 2k + 1$ og tökum tölurnar í röð frá $-3k - 1$ til $3k + 1$. Við setjum þær í þrenndir þannig að summa í hverri þrennd sé 0. Þrenndirnar eru

$$\{-3k - 1 + i, i, 3k + 1 - 2i\}, \qquad i = 0, \ldots, k$$

og

$$\{-2k + i, -k + i, 3k - 2i\} \qquad i = 0, \ldots, k - 1$$

Þessi aðferð virðist vera gripin úr lausu lofti, en ef maður reynir við lágar tölur, t.d. frá -7 til 7 þá dettur manni rétta leiðin í hug.

2. Við munum nota þann rithátt að ef A, B, C, ... eru hornpunktar marghyrnings þá er $(ABC\ldots)$ flatarmál hans.

(a) AA_0, BB_0 og CC_0 skerast í I, miðpunkti innritaðan hrings þríhyrningsins ABC. En I er jafnframt hæðamiðja þríhyrningsins $A_0B_0C_0$ því að innri og ytri helmingalínur sama horns standa hornrétt hvor á aðra. Hringurinn ABC er því níupunktahringur þríhyrningsins $A_0B_0C_0$ en af því leiðir að hann helmingar strikin A_0I, B_0I og C_0I, það er, A_1 er miðpunktur striksins A_0I o.s.frv. Þá fæst að $(A_0CI) = 2(A_1CI)$, $(A_0BI) = 2(A_1BI)$, $(B_0AI) = 2(B_1AI)$, $(B_0CI) = 2(B_1CI)$, $(C_0AI) = 2(C_1AI)$, $(C_0BI) = 2(C_1BI)$. Þegar lagt er saman fæst $(A_0B_0C_0) = 2(AC_1BA_1CB_1)$.

(b) Samkvæmt (a) nægir að sýna að $(AC_1BA_1CB_1) \geq 2(ABC)$. Nú er A_1 miðpunktur bogans BC en af því leiðir að $(CA_1B) \geq (CDB)$ ef D er annar punktur á boganum BC. Lesandanum er ráðlagt að teikna nýja mynd sem sýnir þríhyrninginn ABC og umritaðan hring hans. Teiknum hæðarlínur og látum D, E og F vera skurðpunkta hæðarlína frá A, B og C (í þessari röð) og umritaða hringsins. Þá fæst $(AC_1BA_1CB_1) \geq (AFBDCE)$. Táknum hæðarmiðjuna með H. Þríhyrningarnir AFB og AHB eru eins. Sama gildir um BDC og BHC, og CEA og CHA. Af því leiðir að $(AFBDCE) = 2(ABC)$ svo að $(AC_1BA_1CB_1) \geq 2(ABC)$.

3. Fyrir sérhvern punkt P í S veljum við hring h_P þannig að til séu a.m.k. k punktar úr S á h_P. Veljum nákvæmlega k þessara punkta. Hægt er að mynda með þessum punktum $\binom{k}{2}$ ólíkar óraðaðar tvenndir. Í mesta lagi ein tvennd getur verið sameiginleg tveimur hringjum, þannig að fjöldi tvennda úr öllum hringjunum h_P er a.m.k.

$$n \cdot \binom{k}{2} - \binom{n}{2} \cdot 1$$

En þessi tala getur ekki verið stærri en $\binom{n}{2}$ þannig að

$$n \cdot \binom{k}{2} - \binom{n}{2} \leq \binom{n}{2}$$

sem leiðir til

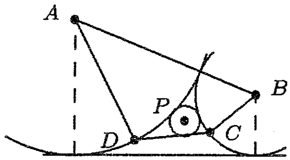
$$k^2 - k + 2 - 2n \leq 0.$$

Af því leiðir

$$k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Við notuðum ekki þá forsendu að engir þrír punktar lægju á sömu línu.

4.



Teiknum hring S_1 með miðju A og geisla AD, hring S_2 með miðju B og geisla BC og hring S_3 með miðju P og geisla h. Þá snertast hringirnir tveir og tveir. Auk þess snertir S_3 línuna CD og liggur sömu megin við CD og punktarnir A og B. Þá sést greinilega að h er stærst þegar CD snertir einnig hringina S_1 og S_2, en þá eru hornin C og D bæði $90°$. Það nægir að sýna að í þessu tilfelli gildir

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

Látum M vera punktinn þar sem S_3 snertir CD. Beitum reglu Pýþagórasar þrisvar sinnum

$$(AD+h)^2 = (AD-h)^2 + DM^2,$$

$$(BC+h)^2 = (BC-h)^2 + MC^2,$$

$$(AD+BC)^2 = (AD-BC)^2 + DC^2.$$

Þá fást jöfnurnar

$$4AD \cdot h = DM^2$$

$$4BC \cdot h = MC^2$$

$$4AD \cdot BC = DC^2$$

En $DM + MC = DC$. Þá fæst

$$\sqrt{AD \cdot h} + \sqrt{BC \cdot h} = \sqrt{AD \cdot BC}$$

þ.e.

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Setjum $x = ((n+1)!)^2$ og lítum á tölurnar $x + k$, $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Við sýnum að engin þessara talna er veldi af frumtölu. Lítum á eina þeirra t.d. $x + k$. Látum p vera frumtölu sem gengur upp í k, látum p^r vera hæsta veldi af p sem gengur upp í k. Þá gengur p^{2r} upp í x og við höfum

$$x + k = p^r(a + b)$$

þar sem p gengur upp í a en ekki í b. Þá hlýtur $a + b$ að hafa frumþátt q þannig að $q \neq p$ sem sýnir að $x + k$ hefur a.m.k. tvo ólíka frumþætti.

6. Látum S vera mengi allra umraðana mengisins $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ og látum M vera mengi þeirra umraðana sem hafa eiginleika P. Við búum til eintæka vörpun frá $S \setminus M$ í M. Þannig verður ljóst að fjöldi staka í M er a.m.k. helmingur fjölda staka í S. Ef i og j eru í $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ segjum við að i og j myndi *hjón* ef $|i - j| = n$. Lítum þá á umröðun úr $S \setminus M$ t.d. $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$. Hjón eru hvergi hlið við hlið. Látum x_i vera stakið þannig að x_i og x_{2n} myndi hjón. Búum til umröðunina

$$(x_1, \ldots, x_i, x_{2n}, x_{i+1}, \ldots, x_{2n-1}).$$

Þessi umröðun hefur eiginleika P. Þannig fæst vörpun frá $S \setminus M$ í M. Sú vörpun er eintæk, því að mynd hennar er mengi allra umraðana þannig að nákvæmlega ein hjón séu hlið við hlið en þau séu ekki síðustu tvö stökin. Andhverfa vörpunarinnar hefur eftirfarandi lýsingu: Aðskiljið hjónin með því að færa hægra stakið í síðasta sætið.

Af þessu dæmi leiðir: Ef tveir spilastokkar eru stokkaðir saman, þá eru líkindi á því að einhvers staðar lendi tvö eins spil hlið við hlið meiri en hálfur.

Framhald af bls. 2.

Árið 1903, þegar Ramanujan var í sjötta bekk, fékk vinur hans bókina „*A synopsis of elementary results in pure and applied mathematics*, eftir G. S. Carr, lánaða fyrir hann á bókasafni háskólans í Kumbakonam. Í bókinni eru 6165 stærðfræðisetningar úr algebru, hornafræði, stærðfræðigreiningu og rúmfræði. Þeim er raðað upp á vísindalega skipulegan hátt, en sannanir eru nánast engar. Þessi bók opnaði Ramanujan nýjan heim og hann hófst handa við að sanna setningarnar í bókinni og skilja þær. Sama ár byrjaði hann að skrá hjá sér niðurstöður eigin stærðfræðiathugana í minnisbækur. Minnisbækurnar eru safn formúla og stærðfræðisetninga, en engar sannanir er að finna, líkt og í bók Carrs.

Árið 1903 náði Ramanujan inntökuprófi í háskólann í Madras og hlaut styrk til námsins fyrir góðan námsárangur. Árið eftir hóf hann nám við heimspekideild skólans. Hann lagði eingöngu stund á stærðfræði, en vanrækti allar aðrar greinar, með þeim afleiðingum að hann féll á prófum, missti styrkinn og varð að hætta námi. Hann gerði aðra tilraun til að hefja háskólanám, en hún fór líka út um þúfur.

Ramanujan hafði enga atvinnu á árunum 1905–1910, en einbeitti sér algerlega að stærðfræðirannsóknum. Hann kvæntist árið 1909 og ákvað þá að reyna að fá sér fasta atvinnu. Það var ógerningur fyrir hann að fá vinnu við stærðfræðikennslu eða rannsóknir vegna menntunarleysis og ósveigjanleika menntakerfisins. Að lokum tókst nokkrum vinum hans að fá vinnu fyrir hann hjá hafnarstjórn Madras og þar starfaði hann sem bókari næstu árin. Vandamál Ramanujans var að hann var algerlega einangraður við rannsóknir sínar, hann hafði nánast engar bækur til að styðjast við og vissi lítið um það sem var að gerast í stærðfræði í Evrópu. Hann birti fyrstu ritgerð sína árið 1911 í tímariti Indverska stærðfræðifélagsins og fjallaði hún um Bernoulli–tölur. Það var ekki fyrr en árið 1912 að hagur Ramanujans fór að vænkast. Það atvikaðist þannig að dr. G. T. Walker, félagi í konunglega breska vísindafélaginu og yfirmaður bresku veðurstofunnar, áður lektor í stærðfræði og félagi á Þrenningargarði í Cambridge, kom til Madras í opinberum erindagjörðum. Hann hitti þar fyrir Sir Francis Spring yfirmann hafnarstjórnar Madras, sem kynnti hann fyrir Ramanujan. Ramanujan sýndi honum minnisbækur sínar og dr. Walker sá strax hvað þarna var á ferðinni, þó svo að viðfangsefni Ramanujans væru óskild hugðarefnum hans. Hann ritaði umsvifalaust bréf til yfirstjórnar háskólans í Madras og fór fram á að Ramanujan fengi styrk til stærðfræðirannsókna. Í apríl 1913 veitti sjórn háskólans honum síðan styrk að upphæð 60 pund á ári til tveggja ára og þar með rættist langþráður draumur Ramanujans um að verða atvinnustærðfræðingur.

Þann 13. janúar 1913 ritaði Ramanujan bréf til Englands og átti það eftir að valda straumhvörfum í lífi hans. Viðtakandi bréfsins var Godfrey Harold Hardy, en á þeim tíma báru þeir Hardy og Littlewood ægishjálm yfir aðra breska stærðfræðinga. Rithöfundurinn C. P. Snow segir meðal annars um þennan atburð í inngangi sínum að bókinni „Málsvörn stærðfræðings" eftir Hardy:

„Dag nokkurn, snemma ársins 1913, fann hann stórt, rytjulegt umslag með indverskum frímerkjum meðal bréfanna á morgunverðarborðinu. Í því voru nokkrar velktar pappírsarkir, þéttskrifaðar stærðfræðitáknum með útlendingslegri rithendi. Hardy lét sér fátt um finnast. Hann var þá þrjátíu og sex ára gamall og heimskunnur stærðfræðingur, og hann hafði þegar fengið að reyna, að heimskunnir stærðfræðingar liggja öðrum fremur undir aðsókn sérvillinga. Hann var alvanur bréfum frá ókunnugu fólki, sem búið var að sanna spádómskraft pýramídans mikla, ráða opinberanir öldunga Zíons eða dulmálsskeytin, sem Bacon hafði lætt inn í leikrit hins svokallaða Shakespeares.

Umfram allt leiddust Hardy slíkar sendingar. Hann renndi augum yfir bréfið. Það var skrifað á bjagaðri ensku og bar undirskrift ókunns Indverja, sem bað um álit Hardys á þessum stærðfræðiuppgötvunum. Handritið var samsafn af stærðfræðisetningum. Flestar voru kynlegar eða virtust fráleitar með öllu. Ein eða tvær voru alþekktar, en settar fram eins og nýjar uppgötvanir. Í bréfinu var enginn vísir að sönnunum. Við leiða Hardys bættist gremja. Þetta leit út eins og undarlegt gabb. Hann lagði handritið til hliðar og tók til við dagleg störf sín. ... Hið ytra leið þessi dagur eftir venju, en hið innra var ekki allt með felldu. Innst í hugskoti hans var indverska handritið að brjótast um, ... Fráleitar stærðfræðisetningar, ólíkar öllum sem hann hafði áður séð. Snjöll fölsun? Spurning var að mótast í huga hans, kjarnyrt og skýr að vanda. Er snjall falsari sennilegri en óþekktur snillingur? Auðvitað ekki. Þegar hann var kom-inn aftur heim í herbergi sín á Þrenningargarði, leit hann yfir handritið á ný. Hann gerði Littlewood boð um að hitta sig eftir kvöldmat, sennilega með vikadreng, því að hann vantreysti síma eins og öllum flóknum tólum, þar á meðal lindarpennum.

Eftir kvöldmat kann að hafa orðið nokkur bið. Hardy fannst gott að fá sér glas af víni, en þótt hin gullnu fyrirheit í frásögn Alans St. Aubin af setustofunni á Þrenningargarði hafi heillað hann í æsku, hafði hann litla ánægju af að sitja þar lengi frameftir yfir portvíni og valhnetum. Littlewood kunni hins vegar betur að njóta lystisemda lífsins og skemmti sér þar vel. Fundur þeirra kann því að hafa dregizt. Um níuleytið voru þeir samt setztir að í einu herbergi Hardys með handritið fyrir framan sig.

Það hefði verið gaman að hafa orðið vitni að þessum fundi. Annars vegar Hardy, skarpskyggn, óvæginn og snarorður: hann var afar enskur í háttum, en í rökræðum var látbragð hans á þá lund, sem suðrænar þjóðir telja oft til þjóðareinkenna sinna. Hins vegar Littlewood, hugmyndaríkur, hugsterkur og gamansamur. Þeir þurftu ekki að ræðast lengi við. Fyrir miðnætti höfðu þeir komizt að óyggjandi niðurstöðu: höfundur handritsins var snillingur. Svo mikið gátu þeir fullyrt þetta kvöld. Það var ekki fyrr en seinna, að Hardy kvað upp þann úrskurð að Ramanujan væri *náttúrusnilli* á borð við þá Gauss og Euler, en vegna lélegrar menntunar og vegna þess, hve seint í framvindu stærðfræðinnar hann kom fram á sjónarsviðið, gæti hann ekki vænzt þess að leggja neitt svipað af mörkum og þeir ... “

Höfundur þessarar frásagnar, C. P. Snow, var um árabil náinn vinur Hardys og var krikket sameiginlegt áhugamál þeirra. Þeir fóru oft saman á völlinn til að horfa á leiki og þar gafst þeim góður tími til að spjalla saman. Því er ekki að efa að frásögnin er í stórum dráttum rétt, þó svo að höfundurinn hafi ef til vill getið í eyðurnar þar sem þess þurfti.

Jæja, lesandi góður, við erum þá komnir að efninu eftir þennan langa inngang. Formúlurnar á forsíðu, baksíðu og næst síðustu síðu þessa tölublaðs eru teknar upp úr fyrsta bréfi Ramanujans til Hardys. Hardy flutti marga fyrirlestra um Ramanujan og verk hans og tók saman bók upp úr þeim. Í fyrsta kafla bókarinnar fjallar hann um viðbrögð sín við þessum formúlum:

„Mig langar til að biðja ykkur að reyna að ímynda ykkur fyrstu viðbrögð venjulegs atvinnustærðfræðings sem fær bréf eins og þetta frá óþekktum indverskum skrifstofumanni.

Fyrsta spurningin var, hvort ég þekkti einhverjar af þessum niðurstöðum. Ég hafði sannað formúlur eins og (2) sjálfur, og kannaðist óljóst við (3). Formúlan (3) er reyndar sígild; hún er uppgötvun Laplace og Jacobi sannaði hana fyrstur manna ... Ég taldi mig kannski geta sannað (1) og (5), því ég áleit mig vera sérfræðing í ákveðnum heildum. Það hafðist, en með miklu meiri fyrirhöfn en ég hafði búist við ... Það kom fjótlega í ljós við skoðun á þeim röðum, sem ritaðar voru í bréfinu, að Ramanujan kunni miklu almennari setningar um raðir og geymdi þær í erminni ... Formúlurnar (6) (7) og (8) komu mér gersamlega í opna skjöldu; ég hafði aldrei á ævinni séð neitt sem líktist þeim. Það sést strax að það þarf fyrsta flokks stærðfræðing til að skrifa þær niður. Þær hlutu að vera réttar, því enginn maður hefur nægjanlegt ímyndunarafl til að finna þær upp. Að lokum (hafið það hugfast að ég vissi nákvæmlega ekki neitt um Ramanujan, og varð að gera ráð fyrir öllum möguleikum), sá sem skrifaði bréfið hlaut að vera fullkomlega heiðarlegur, því það er þrátt fyrir allt algengara að miklir stærðfræðingar hafi slíka afburðarhæfileika heldur en þjófar og svikahrappar ... “

Hardy tókst að fá Ramanujan til að koma til Englands árið 1914. Þar hófst eitt frægasta samstarf í sögu stærðfræðinnar og hlaut Ramanujan af því mikla frægð og vegsemd. Þessi saga er rakin í Málsvörninni og er mjög merkileg lesning. Ramanujan veiktist alvarlega árið 1917 og varð að dvelja á sjúkrahúsum og hjúkrunarheimilum í tvö ár, þar til hann sneri aftur heim til Indlands. Honum var þá boðin prófessorsstaða í stærðfræði, en hann treysti sér ekki til að taka við henni vegna heilsubrests. Hann lést á heimili sínu aðeins 32 ára að aldri þann 26. apríl 1920.

Afköst Ramanujans voru ótrúleg. Hann skildi eftir sig 37 birtar greinar, fjöldann allan af vandamálum sem birtust í tímariti Indverska stærðfræðifélagsins, yfir hundrað setningar í bréfum sínum til Hardys, fjórar minnisbækur, og nokkrar óbirtar greinar og handrit. Safn greina hans var gefið út árið 1927. Tata Institute for Fundamental Research í Bombay gaf út ljósrit af minnisbókum Ramanujans árið 1957.

Minnisbækurnar eru enn langt frá því að vera fullrannsakaðar, enda ákaflega erfið lesning. Eins og áður sagði, þá samanstanda þær einungis af formúlum og setningum, en sannanir eru engar. Menn hafa velt fyrir sér hvers vegna Ramanujan valdi þennan knappa framsetningarhátt. Ýmsar skýringar hafa verið gefnar. Ein er sú að kennslubókin, „Synopsis ... “ eftir Carr, sem hann studdist við var sett fram á þennan hátt og hún var nærtækasta fyrirmyndin. Önnur skýring er sú að fátæktin hafi knúið hann til að spara pappírinn. Þriðja skýringin er að hann hafi einfaldlega talið sig muna allar sannanir og geta skrifað þær niður þegar honum sýndist.

Eftir að safn greina Ramanujans var komið út tóku bresku stærðfræðingarnir C. T. Preece og G. N. Watson sér fyrir hendur að athuga minnisbækurnar, og skrifuðu þeir fjöldann allan af greinum, einkum um formúlurnar í bréfunum til Hardys. Þeim tókst að týna einni minnisbókinni og fannst hún í pappírum Watsons árið 1976. Bandaríkjamaðurinn Bruce Berndt hefur nú um tólf ára skeið eytt kröftum sínum í að sanna formúlur Ramanujans. Markmið hans er að fara í gegnum allar minnisbækurnar og gefa niðurstöðurnar út með sönnunum. Honum hefur tekist að gefa út fyrsta bindið í ritverki sínu, sem hann áætlar að verði fjögur bindi. (Springer–Verlag 1985).

Þrátt fyrir það að mönnum takist að sanna formúlur Ramanujans, verða aðferðir hans og hugsunarháttur áfram ráðgáta.

Heimildir:

[1] B. Berndt, *„Ramanujan–100 years old (fashioned) or 100 years new (fangled)? “*, The Mathematical Intelligencer, **10**, 3 (1988).

[2] G. H. Hardy, „Ramanujan“, Chelsea Publ. Comp., (1940).

[3] G. H. Hardy, „Málsvörn stærðfræðings“, Hið íslenzka bókmenntafélag, Reykjavík (1972).

[4] S. Ramanujan, „Collected Papers“, Chelsea Publ. Comp., (1962).

(6) Ef

$$u = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^5}{1 + \cfrac{x^{10}}{1 + \cfrac{x^{15}}{1+ \quad \ldots \atop \ddots}}}}, \qquad v = \cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{1 + \cfrac{x^3}{1+ \quad \ldots \atop \ddots}}}},$$

þá er

$$v^5 = u\frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}$$

(7)
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1+ \quad \ldots \atop \ddots}}} = \left\{ \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\} e^{\frac{2}{5}\pi}$$

(8)

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+ \quad \ldots \atop \ddots}}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{\left\{5^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - 1\right\}}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right] e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

Viðtakandi:

$$(4)\quad 1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\dots$$
$$=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\dots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\dots\right)$$

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots}=$$
$$=\frac{\pi}{2(1+r^1+r^{1+2}+r^{1+2+3}+r^{1+2+3+4}+\dots)}$$

Íslenska stærðfræðafélagið
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Fjölritunarstofa Daníels Halldórssonar