

FLATARMÁL

TÍMARIT SAMTAKA STÆRÐFRÆÐIKENNARA

2. tbl. 2016



Flatarmál 2. tbl., 23. árg. 2016

rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2016 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Formaður Þórunn Jónasdóttir

Hörðuvallaskóla thorunnjona@kopavogur.is

Varaformaður Hrafnhildur Pálsdóttir

Álfhólsskóla hrafnpal@kopavogur.is

Gjaldkeri Jóhann Örn Sigurjónsson

Háskóla Íslands jos34@hi.is

Ritari Kristín Einarsdóttir

Salaskóla kristine@kopavogur.is

Meðstjórandi Kristjana Skúladóttir

Melaskóla Kristjana.Skuladottir@rvkskolar.is

Meðstjórandi Edda Jónsdóttir

Árbæjarskóla Edda.Jonsdottir@rvkskolar.is

Ritnefnd Flatarmála

Birna Hugrún Bjarnardóttir

Vatnsendaskóla

Guðbjörg Pálsdóttir

Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Hafdís Einarsdóttir

Árskóla

Prófarkalestur

Kristín Einarsdóttir

Kristín Bjarnadóttir

Birna Hugrún Bjarnardóttir

Umbrot og myndvinnsla

Hallfríður G. Blöndal

Vefsíða

Vefsíða Flatar er óvirk sem stendur.

Vinsamlega hafið samband við fulltrúa
í stjórn Flatar með tölvupósti.

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda með tölvupósti til ritstjóra Flatarmála Birnu Hugrúnar á netfangið birnahugrun@gmail.com. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Ritstjórn Flatarmála tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.



Hafnarsvæðið í Hamburg



Listaverk fyrir framan lestarstöð í Hamborg.

Ritstjórapistill

Ágætu lesendur

Segja má að þetta Flatarmál sem hér lítur dagsins ljós sé einstakt í tvennum skilningi.

Í fyrsta lagi er hér um að ræða fyrsta eintak Flatarmáls sem fer beint á nýja heimasíðu Flatar. Þetta er ný nálgun á að koma Flatarmáli til lesenda og verður gaman að fylgjast með hvort fleiri komi til með að lesa blaðið þegar það er komið á vefinn.

Í öðru lagi er þetta blað helgað ICME13 ráðstefnunni sem þýðir að í því er eingöngu sagt frá því sem fram fór á ráðstefnunni sem var haldin í Hamborg í Þýskalandi síðastliðið sumar. Ráðstefnuna sóttu 35 íslenskir kennarar af ýmsum skólastigum. Fjölmarginir fyrirlestrar og vinnustofur voru í boði og gátu allir fundið eitthvað við sitt hæfi. Við fengum nokkra af íslensku þátttakendunum til að skrifa um það sem þeim þótti áhugavert á ráðstefnunni. Greinarnar eru fjölbreyttar að efni og áherslum. Einnig eru margar myndir í blaðinu til að gefa lesendum til kynna hvernig stemmingin er á ráðstefnum sem þessum og hvað ber fyrir augu.

Undanfarið hefur stjórn Flatar unnið að því að setja

upp nýja heimasíðu fyrir samtökin og verður gaman að fylgjast með hvernig vefsíðan kemur til með að nýtast Fleti og félagsmönnum samtakanna. Það er tilhlökkunarefni að geta farið inn á vefsíðuna til að leita upplýsinga eða hafa samband við samtökin.

Ekki hefur verið tekin ákvörðun um hvort Flatarmál verður eingöngu sett á vefinn í framtíðinni eða hvort einstaka blað verður prentað og sent félagsmönnum. Það mun tíminn leiða í ljós og gott væri að heyra í félagsmönnum ef þeir hafa skoðun á því.

Ég minni á að greinar um áhugaverð viðfangsefni og frásagnir úr kennslustofum eru alltaf vel þegnar í Flatarmál. Við viljum gjarnan hafa efni blaðsins sem fjölbreyttast þannig að það höfði til kennara af öllum skólastigum og til að svo geti orðið þurfum við að leita liðsinnis lesenda.

*Með góðum kveðjum,
Birna Hugrún Bjarnardóttir
ritstjóri*

Myndasafn Upphaf ...



Margir Íslendingar komu með sömu flugvél til Hamborgar. Þar á meðal voru þessar þressu konur.



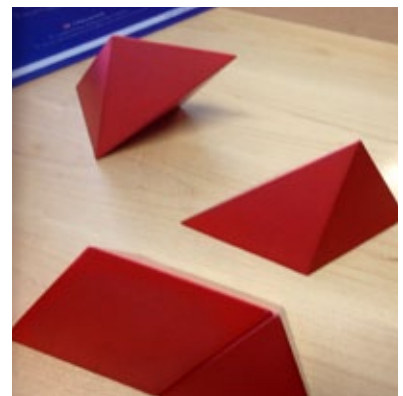
Ýmislegt var spjallað á meðan beðið var eftir farangrinum.



Hér eru þrjár til viðbótar sem biðu eftir farangri.



Það var mikil gleði í íslenska hópnunum eins og sjá má á þessum tveimur sem brugðu á leik á háskólasvæðinu.



Ýmsar þrautir frá Mathematikum safninu í Gissen voru á ráðstefnunni í Hamborg.

ICME13



Dagana 24. – 31. júlí 2016 var haldin alþjóðleg ráðstefna um rannsóknir í stærðfræðimenntun í Hamburg í Þýskalandi. Hún var haldin á vegum alþjóðlegu samtakanna um stærðfræðimenntun, *The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)* og var þetta 13. ráðstefnan. Sjá nánar á <http://www.icme13.org/>. Ráðstefnan var fyrst haldin í Lyon í Frakklandi árið 1969 og hefur hún verið haldin á fjögurra ára fresti síðan þá.

Flötur, samtök stærðfræðikennara, stóð fyrir hópferð á ráðstefnuna og sóttu hana 35 einstaklingar frá Íslandi sem flestir starfa á Menntavísindasviði HÍ eða í grunn- og framhaldsskólum landsins. Boðað var til tveggja kynningarfundu vegna ferðarinnar og stofnaður Facebook-hópur í kjölfarið á þeim fyrri undir nafninu ICME13. Þátttakendur sáu sjálfir um að skrá sig á ráðstefnuna og koma sér á staðinn og voru flestir á sama hóteli.

Öll umgjörð var til fyrirmyndar og mátti sjá merktar starfsmenn á ráðstefnusvæðinu sjálfu, flugvellinum, lestarstöðinni og víðar. Í Hamburg eru margir háskólar og var ráðstefnan haldin í fimmta stærsta háskóla Þýskalands eða Háskólanum í Hamburg. Þar stunda að jafnaði um 39.000 nemendur nám í sex deildum. Allir stærri atburðir fóru fram í Ráðstefnumiðstöð Hamburgar (CCH) og síðan dreifðust aðrir dagskrárliðir í 10 aðrar byggingar á háskólasvæðinu.

Dagskráin á ráðstefnunni stóð yfirleitt frá kl. 8:30–18:00. Þá tók við félagslegi þátturinn þar sem boðið var upp á veitingar, tónlist og fleira. Það var því nóg við að vera frá morgni til kvölds. Á fimmtudeginum var þátttakendum boðið í skoðunarferðir sem þeir höfðu valið fyrirfram. Þær voru allt frá gönguferðum upp í siglingar. Við lok hvers ráðstefnudags mæltum við frá Íslandi okkur mót og bárum saman bækur okkar varðandi dagskrá dagsins. Á föstudeginum fór svo stór hluti hópsins á þýskan veitingastað til að upplifa ekta þýska stemningu.

Ráðstefnan var mjög vel sótt en gestir hennar voru um 3.500 talsins fyrir utan 250 þýska kennara sem tóku þátt í sérstakri dagskrá.

Dagskráin var afar vegleg og má í því samhengi nefna að 1952 erindi og 533 plaköt fengu samþykki fyrir ráðstefnuna. Þeir sem vildu taka þátt sendu inn erindi og lásu einnig yfir hjá öðrum. Fyrir ráðstefnuna var haldinn sérstakur dagur fyrir nýja fræðimenn og voru þar 450 þátttakendur.

Gestafyrirlestrar voru 64 talsins ásamt 42 vinnustofum og 38 umræðuhópum og lengi mætti telja en einn tilgangur ráðstefnunnar er að vera vettvangur fyrir fræðimenn til að kynna eigin rannsóknir og komast í alþjóðlegt samstarf við aðra rannsakendur.

Í upphafi ráðstefnunnar fengu fimm einstaklingar sérstaka viðurkenningu fyrir framúrskarandi störf í þágu rannsókna en þeir kynntu jafnframt vinnu sína. Sjá nánar í síðasta tölublaði Flatarmála (1. tbl., 23. árg.).

Hægt var að velja úr yfir 54 viðfangsefnum til að fylgja eftir (e. Topic Study Groups) og fluttu nokkrir einstaklingar frá HÍ erindi í slíkum hópum.

Guðbjörg Pálsdóttir dósent og Guðný Helga Gunnarsdóttir lektor fjölluðu um sérhæfð námskeið í menntun stærðfræðikennara (e. Specialised courses in mathematics teacher education).

Jónína Vala Kristinsdóttir lektor tók fyrir samvinnunám starfandi kennara (e. Co-learning partnership in mathematics teacher in-service education) en hún hefur nýlega lokið við doktorsritgerð sama efnis.

Freyja Hreinsdóttir doktor flutti erindi um norrænt samstarf um forritið GeoGebra (e. Nordic Geogebra network – A network for learning, experimenting and research for mathematics teachers and researchers).

Kristín Bjarnadóttir prófessor emerita gerði tillögur um reikniáðgerðir og algebrukennslu fyrir lægri fram-



Setning ráðstefnunar.

haldsskólastig að umræðuefni (e. Royauumont – proposals on arithmetic and algebra teaching for lower-secondary school level).

Einnig var Bjarnheiður Kristinsdóttir, doktorsnemi við HÍ, með vinnustofu um notkunarmöguleika GeoGebra við gerð þögulla myndbanda í kennslu.

Hóparnir sem tengdust ákveðnum viðfangsefnum (e. Topic Study Groups) hittust nokkuð oft til að kynna eigin rannsóknir og hlýða á niðurstöður frá rannsóknum annarra. Það gaf góða möguleika á því að kynnast þátttakendum frá öðrum löndum og komast í alþjóðlegt samstarf við aðra rannsakendur sem, eins og áður segir, er einn tilgangur ráðstefnunar.

Næsta ráðstefna ICME14 verður haldin árið 2020 í Sjanghæ í Kína dagana 12.–19. júlí. Sjá nánar á <http://www.icme14.org/>.

Margrét S. Björnsdóttir
starfsmaður við
Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Í fyrsta sinn

á ráðstefnu um stærðfræðimenntun

Í júlí síðastliðnum var haldin ráðstefna í Þýskalandi, ICME13, þar sem fjallað var um þróun og rannsóknir í stærðfræðimenntun. Ég ákvað að fara á ráðstefnuna án þess að hafa hugmynd um hvað biði mín, þar sem ég hef ekki áður farið á ráðstefnu um stærðfræðimenntun. Það að fara á stað þar sem fólk hefur svipuð áhugamál og ég var svolítið sérkennilegt, þar sem að í samfélaginu er yfirleitt talað um að ef einhver hefur áhuga á stærðfræði þá sé hann skítinn.

Þegar ég settist inn í stóran fyrirlestrarsal þar sem staddir voru þúsundir manna þá spurði ég mig hvort ég ætti heima þarna. Til að byrja með fannst mér stórkostlegt að svona margt fólk hefði sömu áhugamál og ég, allir voru svo glaðir, spenntir og ánægðir yfir höfuð með að vera á staðnum. Þarna var fólk frá öllum heims-hornum og sumir með fjölskyldurnar með sér. Fljótlega fór ég að velta fyrir mér hvort ég ætti heima þarna, hvort mín menntun og starfsvettvangur væri fullnægjandi til að ég skildi allt sem gengi á.

Ég hafði valið mér að fylgja eftir hóp sem fjallaði um algebru í grunnskólum. Til að byrja með hlustaði ég eingöngu á það sem verið var að ræða en fljótlega fór ég að spyrja og koma með athugasemdir. Þegar fólk úr hópnum var farið að kalla mig kollega og heilsa mér á háskólasvæðinu þá skildi ég að það var ekki menntun mín sem skipti öllu máli heldur áhugi minn.

Að fá tækifæri til að fylgjast með nýjungum og því sem verið er að rannsaka í stærðfræðimenntun var stórkostlegt tækifæri og upplifun. Ég lærði nýja hluti og fékk líka fullvissu um hluti sem ég hafði haft grun um. Það var vissulega erfitt að sitja á fyrirlestrum frá hálf níu á morgnana til sex á kvöldin en ákaflega gefandi.

Sigríður Helga Ármannsdóttir
kennari við Nesskóla

Áhrif stjórnmála á stærðfræðimenntun í Norður-Kóreu

Það vantaði ekki framboðið af fyrirlestrum frá öllum heimsálfum á ICME13 í Hamborg síðastliðinn júlí, fjöldinn allur af áhugaverðu efni fyllti viðamikla og þétta efnisskrána. Á ráðstefnunni var boðið upp á smáforrit eða app þar sem hægt var að skoða hvern dag fyrir sig og útbúa eigin dagskrá fyrir vikuna. Þegar við undirritaðar vorum að skipuleggja okkur rákum við augun í áhugaverða vinnustofu sem bar heitið „Shout from the most silent nation, North Korea: (Can mathematics education be politically neutral?)“. Yfirskrift fyrirlestrarins var hvort stjórnmál hefðu áhrif á stærðfræðikennslu í Norður-Kóreu.

Aðstoðarprófessorinn Jung Hang Lee við Nyack College í New York kynnti niðurstöður rannsóknar sinnar sem var eigindleg og byggð á viðtölum við fimm kennara og tíu nemendur. Nemendurnir sem hann ræddi við voru á aldrinum tuttugu til þrjátíu og fimm ára. Viðmælendurnir úr röðum kennara voru allt konur en öll höfðu þau flúið Norður-Kóreu.

Bakgrunnur kennaranna

Kennari A kom frá vel menntaðri og auðugri fjölskyldu. Hún útskrifaðist frá einum besta kennaraháskóla landsins en forðaðist að tala mikið um það, því hún fyrirvarð sig fyrir að hafa flúið landið þrátt fyrir að hafa notið þar betri lífskjara en margir landar hennar.

Kennari B hafði sótt um í fjölmiðlafræði við Kim Il Sung University en var synjað um inngöngu eftir að yfirvöld höfðu skoðað fjölskyldubakgrunn hennar. Hún starfaði við kennslu en komst í kynni við veröldina utan Norður-Kóreu og eins og hún orðaði það sjálf þá fannst henni hún vera misnotuð af yfirvöldum. Henni fannst hún ekki metin af verðleikum og launin vera of lág miðað við það sem hún hafði haft kynni af erlendis.



*Fyrirlesarinn
Jung Hang Lee*

Foreldrar kennara C voru vel menntaðir, faðirinn útskrifaðist frá Kim Il Sung University og móðirin var skólastjóri í 25 ár. Kennari C áleit að fólk utan Norður-Kóreu hefði lítinn skilning á því hvernig skólakerfið þar væri uppbyggt. Henni fannst út í hött að bera það saman við menntakerfið til dæmis í Bandaríkjunum, því þar væru önnur viðmið og aðrar aðstæður.

Kennari D leit á sig sem Norður-Kóreubúa en hún hafði þó búið í Suður-Kóreu í níu ár. Að hennar mati vilja Suður-Kóreubúar yfirtaka norðurhlutann með sameiningu. Viðhorf hennar í garð gamla landsins var frekar jákvætt miðað við aðra viðmælendur.

Kennari E var fædd og uppalin í Kína og bjó þar þangað til hún fór í menntaskóla. Hún hafði ekki kennaramenntun en hafði farið á fimm mánaða námskeið í Norður-Kóreu sem var ætlað kennurum.

Skólakerfið og námskráin

Í landinu er samræmd námskrá og einungis boðið upp á eina tegund af kennslubókum fyrir nemendur í

framhaldsskólum. Í námskránni er nákvæmlega tiltekið hvernig skuli kennt, hvenær og hve löngum tíma skuli varið í hvern þátt. Að sögn kennara D mátti gera ráð fyrir því nokkuð örugglega að allir nemendur í sama árgangi í Norður-Kóreu lærðu efni sama kafla í sömu vikunni. Áður en nýjasta námskráin (2013) tók gildi var engin kennsla í líkindum og tölfræði. Ekki var talin þörf á að nemendur lærðu þá þætti stærðfræðinnar því í landinu voru hvorki hlutabréfamarkaður né tryggingafélög og engin spilavíti eða happdrætti.

Í námskránni er tiltekið nákvæmlega hvernig hver kennslustund á að vera uppbyggð í mínútum eins og eftirfarandi dæmi sýnir:

Hver kennslustund er 45 mínútur með fimm nauðsynlegum stigum:

- Yfirlit (3 mín./16.7%)
- Farið yfir heimavinnu (2 mín./4.4%)
- Áhersla lögð á stefnu stjórnvalda (7 mín./15.6%)
- Kynning á nýju efni (28 mín./62.2%)
- Skerpt á nýrri þekkingu (5 mín./11.1%)

Að mati kennara A voru 45 mínútur of stuttur tími. Hún sagðist þó aldrei sleppa að leggja áherslu á stefnu stjórnvalda. Tíminn sem hún hafði til að kenna nýja þætti fannst henni of stuttur og hún þurfti líka að skrifa á töfluna spurningar sem nemendur áttu að svara heima.

Viðmælendurnir (kennararnir) höfðu yfirleitt lítinn áhuga á að koma stefnu stjórnvalda á framfæri, sem kemur ekki á óvart þar sem þeir höfðu flúið landið. Stefnan gekk út á að breiða út boðskap einræðis-herrans og ítreka hve stórkostlegar leiðbeiningar hans væru fyrir þegnana. Boðskapurinn átti að hjálpa fólki að öðlast betra og innihaldsríkara líf. Kennari E sagðist oft hafa sleppt, eða styt, þann hluta kennslunnar sem sneri að innrætingunni, tíminn var einfaldlega of stuttur að hennar mati. Að sögn kennara C fengu kennarar stundum skilaboð um að auka tímann sem fór í stefnu stjórnvalda í 20%. Hún sagði þó að þau hefðu notað skynsemina og gert eins vel og þau gátu hverju sinni. Í niðurstöðum rannsóknarinnar kom einnig fram að nemendurnir voru ekki sérlega áhugasamir. Þeir tóku illa eftir í tímum og því ljóst að skipun að ofan virðist ekki hafa meiri áhrif í Norður-Kóreu en annars staðar.

Flestum nemendunum bar saman um að stærðfræðinámið hefði ekki alltaf verið dans á rósum því kennarar refsuðu nemendum harðlega bæði andlega og líkamlega ef þeir stóðu sig ekki vel. Þegar nemendur stóðu sig ekki í náminu þá var kennurum refsað af skólastjórum fyrir lélegan árangur nemenda og því nýttu kennarar allar mögulegar leiðir til að fá nemendur til að læra.



Norður-Kórea er lituð rauð á kortinu

Þeir nemendur sem höfðu metnað til að læra nýttu sér samvirkusemi kennara sinna og fóru jafnvel heim til þeirra til þess að fá aðstoð við námið. En það var sama hversu góðir nemendurnir voru námslega, þeir komust ekki inn í háskóla vegna hæfni sinnar heldur var fjölskyldusaga hvers umsækjanda skoðuð og hún réði úrslitum um það hvort hann kæmist í háskólanám.

Það var einnig þannig að nemendur sem bjuggu í dreifbýli áttu erfiðara með að komast inn í framhaldsskóla eða háskóla og stundum fékk enginn í einhverri sveitinni jákvætt svar um inngöngu.

Þrautagangan

Þegar múrarnir milli austurs og vesturs féllu missti Norður-Kórea stuðning Sovétríkjanna fyrrverandi og þurfti eingöngu að reida sig á eigin framleiðslu. Árin frá 1990 að aldamótum voru landsmönnum því erfið og er það tímabil nú kallað þrautagangan (e. March of suffering). Á þessum tíma er áætlað að um 10% þjóðarinnar hafi látist úr hungri. Margt stuðlaði að þeim hörmungum fyrir utan það að hafa ekki stuðning stórbjóðar, stjórnskipulagið var ósveigjanlegt og ekki var brugðist við breytingunum á þann hátt sem reikna má með að aðrar þjóðir í svipuðum sporum hefðu gert. Uppskerubrestur varð vegna ótíðar, fólkið svalt og stjórnvöld hættu að borga kennurum laun. Það væri eðlilegt fyrir okkur að álykta að kennarar hefðu lagt niður störf við þessar aðstæður og skólakerfið lamast. Sú varð þó ekki raunin að öllu leyti. Kennararnir sem Lee ræddi

við virtust vera kennarar af lífi og sál og höfðu mikinn metnað fyrir því að kenna nemendum sínum stærðfræði. Þeir reyndu að leggja meiri áherslu á kennsluna en boðskap stjórnvalda þegar kennslustundum fækkaði í skólunum. En auðvitað riðlaðist skólastarfið mikið. Kennarar, eins og aðrir þegnar, þurftu að finna leiðir til að afla sér og fjölskyldunni matar. Að sögn nemendanna sem Lee ræddi við komu kennarar stundum í skólann með ýmsan varning og buðu til sölu. Einnig kom fram að suma daga var ekki kennt eftir hádegi því kennararnir þurftu að fara og leita að mat og aðra daga var ekki kennsluhæft eftir hádegi því nemendur höfðu hvorki líkamlegt né andlegt úthald fyrir allan daginn. Undantekning var þó frá þessu, stjórnvöld lögðu ofuráherslu á að mennta afburðanemendur. Þeim nemendum bauðst að stunda nám í bestu skólunum og kennarar þar fengu borguð 50 – 60% af kennaralaunum.

Gera má ráð fyrir því að litlar breytingar hafi orðið á kennsluháttum í stærðfræði í Norður-Kóreu eða þær yfirhöfuð verði, á meðan óbreytt stjórn málaástand varir þar. Fyrir okkur Vesturlandabúa eru þessar aðstæður svo ótrúlegar að við getum ekki með nokkru móti sett okkur inn í þær eða skilið hvernig fólk sættir sig við þetta.

Samkvæmt þessari rannsókn er það óumdeilanlegt að stjórn mála hafa bein áhrif á stærðfræðikennslu í Norður-

Kóreu og þá vaknar sú spurning hvort stjórn mála hafi áhrif í okkar kennslubókum og kennsluháttum. Eigum við að vera meira vakandi yfir því og þurfum við að vera á varðbergi?

Að lokum látum við fylgja með tvö dæmi úr norður-kóreönskum stærðfræðibókum.

Dæmi 1:

Á samyrkjubúi var ræktuð ný tegund af hrisgrjónum undir handleiðslu okkar Stórfenglega leiðtoga Kim Jong Un. Nýja uppskeran varð 11 11/14 tonn á akri sem áður hafði gefið 9 1/2 tonn. Hve mörgum tonnum meiri var uppskeran þetta ár?

Dæmi 2:

„The bandits, Americans“, komu í þorp eitt og yfirtóku akurlendi undir hernaðarleg umsvif. Landið var ferhyrningur að lögun, lengdin var 4 sinnum meiri en breiddin. Landið var alls 0,64 m². Hver var lengd og breidd landsins?

*Klara Sigurmundadóttir
María Ásmundsdóttir
kennarar við Vatnsendaskóla*



Þraut frá Mathematikum safninu í Gissen.

Myndasafn
Ráðstefnan ...



Ráðstefnugestir streyma inn í aðalbygginguna til að hlýða á fyrirlestra.



Stundum var boðið upp á tónlist í lok dags og þá var dansað.



Gudbjörg og Kristín tóku tal saman á förnum vegi.



Ásta er hér stödd á háskólasvæðinu.

Rökstuðningur og sannanir í stærðfræðimenntun

Það hefur tíðkast á ICME ráðstefnum að þátttakendur velji sér „Topic study group“, sem er hópur tileinkaður ákveðnu málefni eða viðfangsefni. Sérhver þátttakandi ráðstefnunnar velur sér einn slíkan hóp, sem fundar svo einu sinni eða oftast flesta ráðstefnudaga. Ég var í hópi 18, sem fjallaði um rökstuðning og sannanir í stærðfræðimenntun (e. reasoning and proof in mathematical education).

Fyrsti fundur hófst með erindi Gila Hanna, sem hefur verið áberandi í umræðu um þetta málefni. Hún er prófessor við Torontoháskóla í Kanada. Erindi hennar gekk út á að reyna að leggja mat á útskýringargildi sannana, hvaða sannanir eða hvers konar sannanir hafa útskýringargildi (explanatory proofs). Í stuttu mál var innihaldið í meginatriðum þetta:

Í stærðfræðilegri heimspeki er sönnun talin hafa útskýringargildi þegar hún styður niðurstöðuna þannig að ljóst er á hvern hátt hún sé afleiðing viðurkenndra sanninda. Útskýringin er eingöngu rökfræðileg (stærðfræðileg), án allra vísana út fyrir það.

Önnur skilgreining á útskýringargildi sönnunar (explanatory proof) er algeng meðal þeirra sem fást við stærðfræðimenntun. Þá er útskýringargildi sönnunar falið í því að auka innsæi þeirra sem lesa sönnunina, á innihald niðurstöðunnar, eða tileinka sér hana á annan hátt. Þar með er sönnunin, að einhverju leyti að minnsta kosti, flutt inn í hugarheim lesandans. Áherslan er þá flutt frá rökfræðinni yfir á „pedagógiskari“ hliðar.

Hanna var síðan með ýmis dæmi þess að sönnun af fyrri gerðinni geti verið grunnur að sönnun af þeirri seinni og á þann hátt mætti oft auðga námsefnið. Hún lagði áherslu á að sýna tengsl milli þessara tveggja skilgreininga.

Það er reyndar viss núningur meðal fræðimanna varðandi nákvæmlega þetta efni, þótt engar athugasemdir hafi komið fram við þennan fyrirlestur. Það gerðist hins vegar seinna, á öðrum fundi að ýmsir gerðu athugasemdir við það að kalla ýmislegt „sannanir“ sem að þeirra dómi væru það alls ekki. Og þá væri oft talað um *mismunandi gerðir sannana*, og þær flokkaðar eftir



Ársæll Mátsson

því hvaða áhrif þær hafa á „lesandann“, en ekki eftir stærðfræðilegu efni eða rökfræðilegri gerð.

Estela Aurora og Vallejo Vargas voru með innlegg sem nefndist „When is a generic argument a proof?“ eða „Hvenær eru almenn rök sönnun?“ Svarið við spurningunni gefur þá um leið eitthvert svar við því hvað séu almenn rök yfirhöfuð. Spurningin gerir reyndar ráð fyrir því að í einhverjum tilvikum hljóti almenn rök að teljast sönnun, nema henni sé alfarið neitað. Í fyrirlesturinum voru síðan tíunduð skilyrði sem „almenn rök“ þyrftu að uppfylla til þess að geta kallast sönnun og þau skilyrði voru tvenns konar. Annars vegar sálfræðileg en þá verða rökin að orsaka sannfærandi röksemdafærslu í huga lesandans. Og hins vegar félagsleg þar sem rökin verða að samræmast bæði félagslegu samhengi og umhverfi innihalds/viðfangs efnisins sem verið er að fást við.

Í fleiri en einum fyrirlestri var einnig fjallað um hvernig skuli *kenna fólki að sanna* og oft var verið að segja

frá rannsóknum á því hvernig stærðfræðingar, kennarar og nemendur bæru sig að við að leita að sönnun. Þar var ýmislegt nefnt, til dæmis það að fíkra sig áfram með einstök dæmi, og þannig sannfæra sjálfan sig um að fullyrðingin geti staðist. Á síðasta fundi hópsins voru fluttir þrír fyrirlestrar sem allir fjölluðu um þetta efni – um hlutverk dæma í því ferli að búa til sönnun.

Helena Johansson frá Svíþjóð flutti erindi um gildi daglegs lífs í stærðfræðilegum viðfangsefnum. Hún sagði frá athugun á áhrifum dæma og skírskotunar til daglegs lífs á prófsárangur hjá nemendum (upper secondary students). Þessi athugun var gerð í framhaldi af eldri athugunum á stærðfræðilegri rökhugsun nemenda á samræmdum prófum í Svíþjóð. Tekin voru verkefni úr sex samræmdum stærðfræðiprófum og árangur nemenda (829 – 3841 nemendur á hverju prófi) athugaður. Verkefnin voru flokkuð á tvennan hátt:

- 1) Eftir því hvort þau hefðu skírskotun til daglegs lífs eða ekki.
- 2) Eftir því hvort þau kröfðust stærðfræðilegrar rökhugsunar eða ekki.

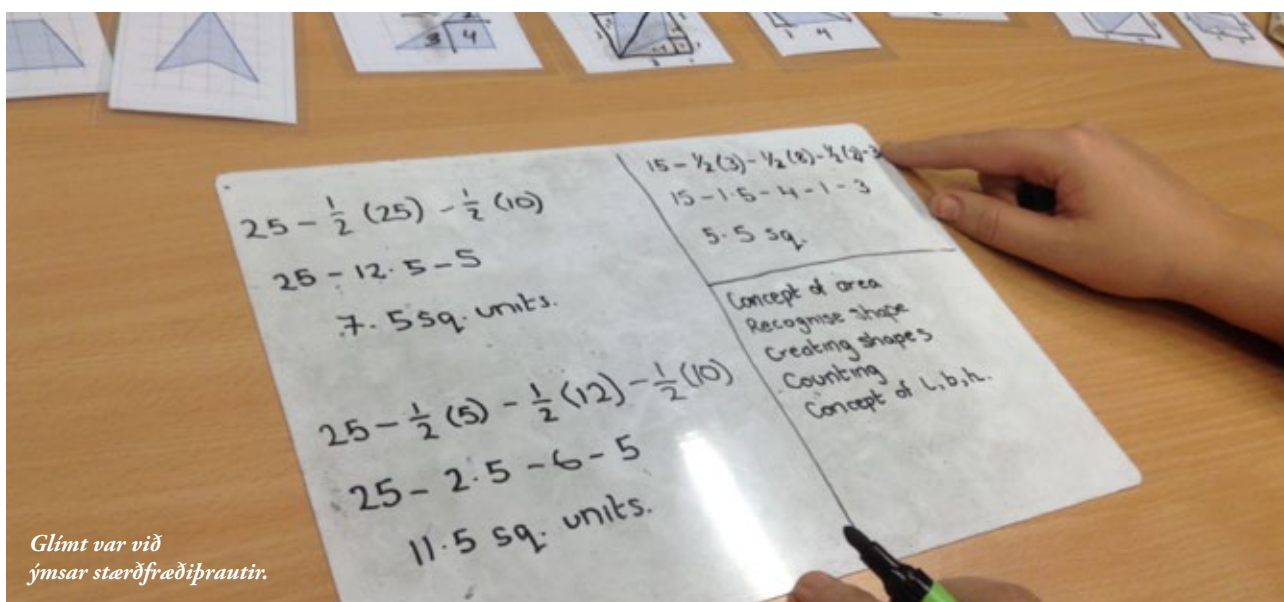
Bæði lýsandi tölfræði og áreiðanleikaprófun var beitt í úrvinnslunni. Niðurstöðurnar bentu til þess að ef innihald verkefna sneri að daglegu lífi hafði það jákvæð áhrif á árangur nemenda ef verkefnið krafðist stærðfræðilegrar rökhugsunar. Einnig virtust þessi áhrif vera meiri hjá þeim nemendum sem voru með lægri einkunn á prófunum.

Nokkur fleiri viðfangsefni rannsákenda voru kynnt í hópnum og má þar til dæmis nefna:

- Sex vikna athugun á áhrifum hópumræðna í litlum hópum á skilning nemenda á heildun og heildunarreikningi.
- Zwelithini Bongani Dhlamini frá Suður–Afríku sagði frá rannsókn á samræmdum prófum og niðurstöðum þeirra í 9. bekk í Suður–Afríku (Annual National Assessments) árin 2012, 2013 og 2014. Athugað var hversu mikið reyndi á stærðfræðilega rökhugsun í þessum prófum. Í ljós kom að mjög fá verkefni kröfðust rökhugsunar af einhverju tagi. Auk þess stóðu nemendur sig afar illa í þeim verkefnum og svörðu þeim í mörgum tilvikum alls ekki.
- Kwong Cheong Wong frá Hong Kong sagði frá því að í algengum kennslubókum í Hong Kong sé lítil áhersla á sannanir. Einnig séu tækifæri nemenda til að læra að sanna og beita rökhugsun takmörkuð af þessum ástæðum.

Þótt vissulega hafi mér ekki þótt allt merkilegt sem kom fram í fyrirlestrum og umræðum í þessum hópi, þá kom það mér skemmtilega á óvart hvað viðfangsefnin voru fjölbreytt. Það komu líka innlegg víða að, eins og sjá má af þessum dæmum. Má þar nefna fyrirlesara frá Írak, Ítalíu, Bandaríkjunum, Kína og fleiri ríkjum. Oft kom fram hversu mikill munur getur verið á skólastarfi á ólíkum stöðum.

Ársall Mátsson
stærðfræðikennari við
Kvennaskólann í Reykjavík



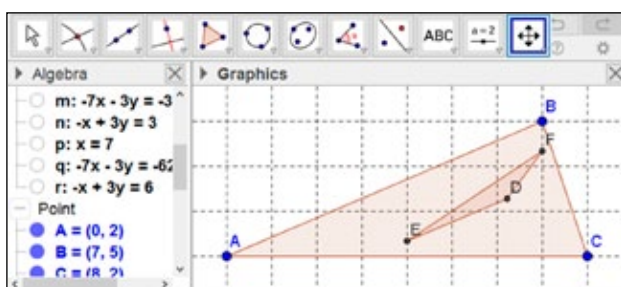
Glímt var við ýmsar stærðfræðipróf.

„Þetta dæmi er ekki til!“

Fyrirlestur haldinn af stærðfræðingnum
Petar Stoyanov Kenderov frá Búlgaríu

„Þetta dæmi er ekki til!“ sagði reyndur kennari við Petar þegar hann kynnti fyrir honum dæmið: *Gefinn er þríhyrningur T. Finndu flatarmál þríhyrningsins sem hefur þyngdarpunkt (skurðpunkt miðlína), miðju innritaðs hrings (skurðpunkt helmingalína) og hæðarskurðpunkt (skurðpunkt hæða) T sem hornpunkta sína.*

Viðbrögð kennarans voru í samræmi við það að dæmið telst of erfitt til að standa í skólabók um stærðfræði og einnig of tæknilegt og tímafrekt til að koma fyrir í stærðfræðikeppni. Þó er þarna um að ræða dæmi sem nemendur *skilja* þegar þeim er gefið það – þau vita hvað átt er við og geta teiknað rissmynd eða tölvuteikningu af því. Nemendur í 8.–12. bekk fengu þetta dæmi til að glíma við í „VIVA – stærðfræði með tölvum“ verkefni í Búlgaríu og leystu það með númerískum aðferðum með ásættanlegri nákvæmni með því að nota stærðfræðihugbúnaðinn GeoGebra.



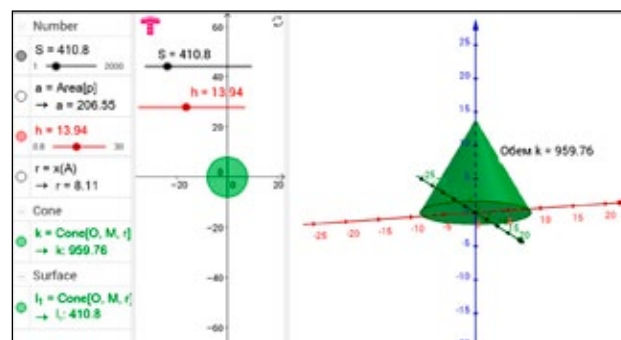
Sá hugbúnaður sem nú er völ á gerir okkur, að mati Petar og félaga, kleift að bjóða upp á dæmi sem vekja forvitni, spurningar og mun ríkara stærðfræðilegt inntak en hingað til hefur verið mögulegt. Við úrlausn dæmisins fengu nemendur tækifæri til að gerast litlir vísindamenn; gera tilraunir, setja fram tilgátur, koma með mótdæmi, ræða við aðra og kynna niðurstöður sínar. Dæmið bauð með öðrum orðum upp á leitarnám (e. learning by inquiry).

Petar kynnti í fyrirlestri sínum lausnir nemenda á hinum ýmsu dæmum sem lögð voru fyrir í VIVA verkefni og færði rök fyrir því að ekki væri einungis um að ræða að nemendur færðu ómarkvisst til rennistikur þar til þau kæmust að lausn dæmisins heldur þyrfti talsvert innsæi til að nýta rennistikurnar og einnig væri í flestum tilvikum þörf á því að breyta og endurbæta GeoGebra skjölin sem nemendur fengu til afnota í verkefni.

Vefurinn sem heldur utan um dæmin (http://viva-cognita.org/_/viva-math/) er á búlgörsku en hægt er að þýða hann grófllega yfir á ensku með google-þýðingu. Petar valdi nokkur dæmanna til kynningar í fyrirlestri sínum og þau voru auk inngangs-dæmisins um þríhyrninginn eftirfarandi þrjú dæmi:

Hönnunarverkefni fyrir verksmiðju sem framleiðir brauðform fyrir ís

Úr hring H er skorinn hringgeiri með topphornið α og búin til keila. Hvernig skal velja stærð hornsins α til þess að keilan hafi sem mest rúmmál ef flatarmál opsins er 100 cm^2 ?



Glerkrús með vatni

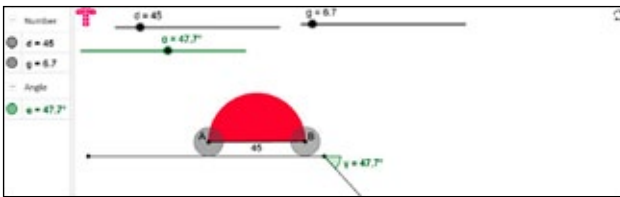
Sívalningslaga glas er fyllt að þremur fjórðu hlutum með vatni. Nú er sett lok á glasið og það lagt á hliðina. Hversu hátt nær vatnið þá?

Reisum glasið aftur við, hellum úr því og bætum kúlu með radíus r út í glasið. Fyllum upp með vatni þannig að það sé fullt að þremur fjórðu, lokum aftur og leggjum á hliðina. Hversu hátt nær vatnið?

Ýmist voru gefnar upplýsingar um það að sívalningurinn hefði radíus 5 cm og hæð 25 cm og að kúlan hefði radíus 4,5 cm (í yngri bekkjum) eða að hlutfallið milli radíuss og hæðar væri 1:5 og radíus kúlunnar væri 90% af radíus sívalningsins (í eldri bekkjum).

Bílakjallarinn

Dekk bíls hafa radíus g og fjarlægð milli dekkjanna er d . Nú skal hanna bílakjallara þannig að hvers kyns fólksbílar og litlir sendibílar geti ekið niður í bílakjallarann. Gatan er lárétt og gólf bílakjallarans er lárétt en rampur milli götunnar og kjallaragólfsins hallar undir horninu γ miðað við lárétt. Hvernig skal ákvarða hornið γ ?



Þessu almenna dæmi var skipt niður í stig og gefin nokkur GeoGebra skjöl til að vinna að því og raunar gildi það sama um flest dæmin að gefið var GeoGebra-grunnskjal en yfirleitt þurftu nemendur að bæta einhverju við skjalið til þess að komast að niðurstöðu.



Petar Kenderov tekur við viðurkenningu frá Gabrielu Kaiser prófessor í stærðfræðimenntunarfræði við háskólann í Hamburg. Við hlið þeirra standa Alexander Soifer prófessor við háskólann í Colorado í Bandaríkjunum og forseti WFNMC og María Falk de Losada prófessor við Santiago háskóla í Kólumbíu.

Um fyrirlesarann:

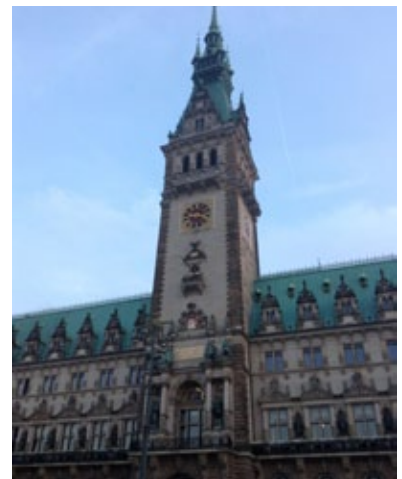
Petar S. Kenderov er stærðfræðingur við háskólann í Sofíu í Búlgaríu. Sérsvið hans eru grannfræði fellagreining, kúpt greining og bestun og hann á um 100 birtar greinar á þessum sviðum auk yfir 30 greina um stærðfræðikeppnir, kennslu og kynningu á stærðfræði.

Petar hefur fengið ýmsar viðurkenningar gegnum tíðina og á ráðstefnunni ICME-13 fékk hann afhenta viðurkenningu Alheimssamtaka landskeppna í stærðfræði (World Federation of National Mathematics Competitions) fyrir áratugastarf að þróun og skipulagningu landskeppna í stærðfræði í Búlgaríu, einstakt samstarf við kennara þar í landi og skipulagningu fyrstu alþjóðlegu forritunarkeppni framhaldsskólanema árið 1987 og fyrstu alþjóðlegu málvísindakeppni framhaldsskólanema árið 2003 sem báðar hafa verið árvissir viðburðir síðan þá.

Fyrir Petar Kenderov eru stærðfræðikeppnir tæki til að bæta kennslu og teygja hana út fyrir kennslustofuna, finna nemendur sem standa sig vel og opna fyrir þeim möguleika framhaldsnáms og starfs á sviði náttúruvísinda, stærðfræði og tæknigreina. Hann lítur svo á að ekki sé mikilvægast hver sigrar í keppninni heldur sé sigur fyrst og fremst fólgin í því að hafa kynnt stærðfræði fyrir stórum hópi hæfileikaríkra nemenda og þá ekki einungis þeim sem komast í ólympíulíðið heldur öllum sem að landskeppnum koma. Auk samstarfs við kennara hefur hann staðið að kennsluverðlaunum í stærðfræði og verið virkur fyrirlesari á málfundum og ráðstefnum kennara.

Um höfund greinarinnar:

Bjarnheiður Kristinsdóttir er framhaldsskólakennari og doktorsnemi í stærðfræðimenntafræði við Háskóla Íslands.



Rådhusið í Hamburg.

Kynning á Shell Center for Mathematical Education

Á ICME13 voru handhafar fimm verðlauna heiðraðir. Þeirra á meðal voru Hugh Burkhardt og Malcolm Swan leiðtogar Shell Center hópsins og fengu þeir Emma Castelnuovo verðlaunin fyrir framúrskarandi störf í þágu stærðfræðikennslu. Verðlaunahafarnir voru síðan með kynningu á því starfi sem þeir voru heiðraðir fyrir. Um kynninguna sá Hugh Burkhardt en því miður var samstarfsmaður hans Malcolm Swan ekki á staðnum eins og til stóð þar sem hann forfallaðist vegna veikinda.

Shell Center er rannsóknarmiðstöð í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið Nottingham háskóla og er þekkt um allan heim fyrir nýstárlegar hugmyndir um kennslu og nám í stærðfræði. Í kynningunni fór Burkhardt yfir sviðið hjá Shell Center teyminu síðastliðin 35 ár. Hann er framkvæmdastjóri og undir hans stjórn vinnur stofnunin að rannsóknum og þróunarvinnu sem miðar að því að hafa bein áhrif á starfið í kennslustofunni. Samvinna hans og Malcolm Swan er lykilatriðið að velgengni þeirra þar sem Burkhardt heldur utan um stjórnun, skipulagningu og framleiðslu en Swan sér um hönnun námsefnis fyrir nemendur og þróun kennsluáferða sem styðja við faglega þróun stærðfræðikennara og hjálpar þeim að breyta starfsháttum sínum.

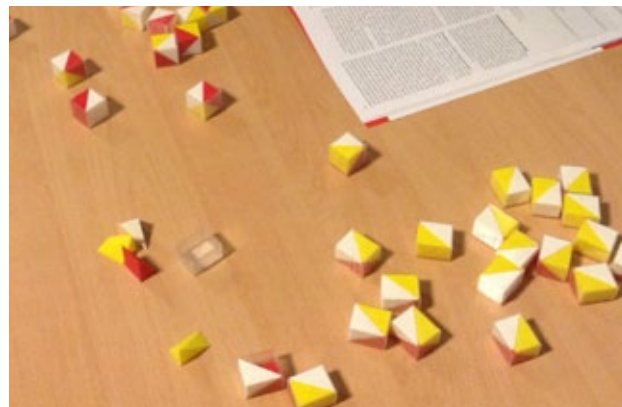
Burkhardt fór hratt yfir sögu en sagði frá og sýndi dæmi um námsefni sem þeir hafa gefið út. Viðamesta verkefnið, Mathematics Assessment Project, hefur Shell Center hópurinn hannað og þróað í samstarfi við Berkeley, University of California. Mathematics Assessment Project er heimasíða hópsins og þar er mikið magn af kennsluefni og námsmatsverkefnum. Þar er meðal annars að finna Classroom Challenges sem eru fullmótaðar kennslustundir með ítarlegum kennsluleiðbeiningum og verkefnum sem styðja kennara í kennslu með leiðsagnarmati. Verkefni eru hugsuð til að byggja upp og þróa skilning nemenda á helstu hugmyndum og aðferðum stærðfræðinnar. Mikið er lagt upp úr að nemendur séu virkir og læri með því að leysa verkefni með umræðum, rökstuðningi og samvinnu. Allt efnið á heimasíðunni er frítt og öllum er frjálst að hlaða því niður.

Ég hef nýtt mörg verkefni þeirra í kennslu og einnig notað þau á námskeiðum með stærðfræðikennurum og mæli með því að kennarar fylgist með Shell Center hópnum og noti efnið á vefsíðunni: map.mathshell.org.

*Dóra Þórðardóttir
kennari við Fjölbrautarskóla Vesturlands*



Þetta undurfagra fiðrildi var á flögrum um Hamborg.



Þessir kubbar bjóða upp á fjölmarga möguleika til að skapa falleg form og myndur.

Myndasafn

Safnast saman í lok dags ...



Íslendingar nutu samveru og veðurbliðu í lok dags.



Þessar fengu sér ís á leiðinni heim á hótél.



Þetta eru Kristínarnar þrjár; Kristín E., Kristín B. og Kristín G.F.



Birna, Þuríður og Hafðís ræða málin.



Í lok hvers dags var boðið upp á einn drykk og ýmsa smárétti á ráðstefnusvæðinu.



Freyja hlustar áhugasöm á frásögn Ingólfs. Sjá má fleiri Íslendinga í bakgrunni.

*Hvað einkennir góða kennslu
og hvernig hjálpum við kennurum að skapa hana?*

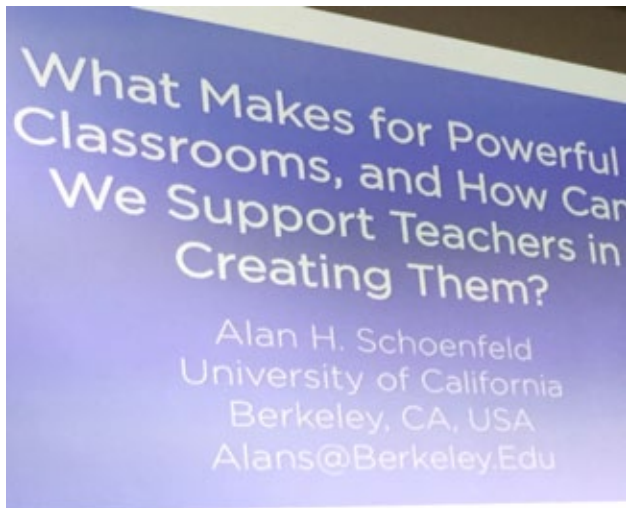
Saga um áhrifaríka samfléttun rannsókna og starfs

Erindi Alan Schoenfelds á ICME 13

Í lok júlí síðastliðinn var ráðstefnan ICME13 (International Congress on Mathematical Education) haldin í Hamborg í Þýskalandi á vegum alþjóðasamtakanna í stærðfræðimenntun (The International Commission on Mathematical Instruction). Ráðstefnan er haldin á fjögurra ára fresti. Var hún nú haldin í þrettánda sinn og sóttu hana að þessu sinni um 3500 þátttakendur frá 105 löndum. Fyrsti dagur ráðstefnunnar var svokallaður „Early Career Researcher Day“ en þá voru erindi sérstaklega miðuð að rannsókendum sem eru að stíga sín fyrstu skref í rannsóknum í stærðfræðimenntun. Einn af þeim sem voru með erindi á fyrsta degi ráðstefnunnar var stærðfræðingurinn Alan Schoenfeld. Heiti erindis hans var „What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined“. Heiti erindisins mætti lauslega þýða yfir á íslensku sem „Hvað einkennir góða kennslu og hvernig hjálpum við kennurum að skapa hana? Saga um áhrifaríka samfléttun rannsókna og starfs“. Erindið bar sama heiti og grein sem birt var eftir Schoenfeld í tímaritinu *Educational Research* 2014 (Schoenfeld, 2014). Í erindi sínu fjallaði Schoenfeld um tæplega 40 ára sögu sína í rannsóknum og starfi og hvernig sú vinna hefur skilað auknum skilningi á námi og kennslu í stærðfræði, bæði fyrir hann sem fræðimann í stærðfræði og stærðfræðimenntun sem og fyrir fræðasviðið allt. Þannig lagði Schoenfeld aðaláherslu á tvennt. Í fyrsta lagi að rannsóknir og störf geti og eigi að samfléttast þannig að hvort vinni með öðru svo niðurstöður rannsókna nýtist í starfi á vettvangi. Í öðru lagi að vel gerðar rannsóknir á námi og kennslu á einu fræðasviði eru ekki endilega bundnar tilteknu fræðasviði heldur hafi þær yfirfærslugildi á önnur fræðasvið (Schoenfeld, 2014).

Alan Schoenfeld er prófessor við Kaliforníuháskólann í Berkeley og er á meðal afkastamestu fræðimanna á sviði stærðfræðimenntunar í heiminum. Hann er til að mynda annar af tveimur Bandaríkjamönnum sem hafa hlotið Felix Klein orðuna í stærðfræðimenntun fyrir störf sín á lífsleiðinni en hún er veitt fræðimönnum sem skara fram úr. Eftir hann liggur fjöldinn allur af vísindagreinum auk þess sem hann hefur skrifað bækur og verið áhrifamikill í bandarísku menntakerfi.

Alan Schoenfeld er fæddur í Bandaríkjunum árið 1947. Hann lærði stærðfræði við bæði Queen's College og Stanford háskóla þaðan sem hann lauk doktorsprófi í stærðfræði árið 1973. Schoenfeld fór fljótlega að beina kröftum sínum að rannsóknum í stærðfræðimenntun og hefur hann stundað rannsóknir á því sviði alla tíð síðan. Í byrjun ferils síns í stærðfræðimenntun lagði Schoenfeld mesta áherslu á það hvernig nemendur læra stærðfræði og aðferðir þeirra við þrautalausnir (Schoenfeld, 1985). Áhugi hans á efninu kviknaði þegar hann las bók Polyá *How to solve it* og gerði sér grein fyrir að þær þrautalausnaaðferðir, sem í þeirri bók var lýst, voru keimlíkar þeim aðferðum sem hann sjálfur hafði tamið sér og beitt í sínu stærðfræðinámi við lausn viðfangsefna. Schoenfeld áttaði sig þó á því að hann hafði aldrei fengið neina formlega kennslu í þessum þrautalausnaleiðum þegar hann var að læra stærðfræði heldur hafði hann uppgötvad þær sjálfur og beitt með góðum árangri. Í kjölfar þessarar uppgötvunar fékk hann brennandi áhuga á að betrumbæta og útfæra þessar lausnaleiðir svo þær hentudu betur í stærðfræðinámi í kennslustofu. Hann byrjaði því rannsóknarstarf sitt í stærðfræðimenntun á því að leitast við að svara spurningunum: Hvað er átt við þegar talað eru um að „hugsa stærðfræðilega“? Og hvernig er hægt að hjálpa



Alan Schoenfeld á ICME13

nemendum að gera það? Þannig vildi hann komast að því hvaða leiðir nemendur færu þegar þeir takast á við ný viðfangsefni sem þeir hafa ekki séð áður og hvaða leiðir væru líklegastar til árangurs. Schoenfeld skrifaði fjölda greina um rannsóknir sínar tengdar þessu efni og gaf í kjölfarið út bókina *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985) eða *Þrautalausnir í stærðfræði* sem hann taldi að ætti erindi við alla þá sem kenna stærðfræði eða hyggjast stunda rannsóknir sem á einhvern hátt tengjast stærðfræðilegri hugsun. Bókin var að vissu leyti tímamótaverk og jók til muna skilning manna á þrautalausnaferlinu í stærðfræði.

Um miðjan áttunda áratuginn fór áhersla Schoenfelds í auknum mæli að færast frá því hvernig nemendur læra stærðfræði yfir í það hvað ræður ákvarðanatöku kennara í kennslu og hvernig þær ákvarðanir tengjast stærðfræðilegri hugsun nemenda (Li og Moschkovich, 2013). Hann vildi meina að það sem væri viðurkennt sem „góð“ kennsla væri ekki endilega að skila sér í skilningi nemenda í stærðfræði. Til að mynda skrifaði hann grein sem nefnist „When good teaching leads to bad results: The disaster of „well taught“ mathematics course“. Þar tekur hann á hinni hefðbundnu stærðfræðikennslu sem algengust var á þeim tíma og sýndi fram á að sú kennsla skilaði nemendum litlum skilningi á efninu. Greinin var byggð á rannsókn hans á kennslu 16 ára ungmenna í rúmfræði í bandarískum skóla í New York sem fylgst var með í eitt skólaár (Schoenfeld, 1988). Þar kemst Schoenfeld að þeirri niðurstöðu að þrátt fyrir að rúmfræðiáfanginn hafi að öllu leyti gengið fyrir sig eins og lagt var upp með, kennslan þótt „góð“ og nemendur hafi staðið sig vel á New York svæðisprófinu

í stærðfræði, þá skilaði áfanginn nemendum ekki skilningi á námsefninu nema að takmörkuðu leyti. Þá benti hann einnig á að kennslan, þrátt fyrir að teljast góð, leiddi til þess að nemendur þróuðu með sér óæskilegar ranghugmyndir um eðli stærðfræðinnar. Schoenfeld vildi meina að ef þunginn í kennslunni liggur í því að læra formfastar ákveðnar aðferðir, þar sem farin er leið sem kennarinn hefur sýnt nemendum á töflunni, þá eru nemendur ekki að beita neinni stærðfræðilegri hugsun heldur aðeins að æfa sig í aðferðum. Í þessu sambandi benti Schoenfeld á þrenns konar ranghugmyndir sem nemendum hættir til að fá af slíkri kennslu og leiða af sér óæskileg viðhorf til stærðfræði:

- a) nemendur telja að formleg stærðfræði (sannanir) hafi litla eða enga tengingu við þrautalausnir og nota því ekki það sem þeim hefur verið kennt í formlegri stærðfræði við lausn dæma,
- b) nemendur trúa því að ef þú kannt efnið áttu að geta leyst dæmi á fimm mínútum eða skemur og lengri tími en það þýðir að þú kannt ekki efnið og ert því ófær um að leysa dæmið,
- c) nemendur telja að einungis snillingar séu færir um að uppgötva, skapa eða skilja stærðfræði almennilega sem leiðir af sér að þeir læra stærðfræði á óvirkan hátt þar sem áherslan er á að læra aðferðir en gera enga kröfu um að þeir skilji endilega efnið (Schoenfeld, 1988).

Í ljósi þessa benti Schoenfeld á að hverfa yrði frá því viðhorfi að góð kennsla og námsmat í stærðfræði einkenndist af utanbókarlærdómi á formúlum og aðferðum því það stuðlaði ekki stærðfræðilegri hugsun hjá nemendum. Hann benti jafnframt á að ekki yrði auðvelt að koma slíkum breytingum á enda kerfið fast í skorðum og hefðir ríkar. Hann taldi að það ætti að vera forgangsmál þeirra sem stunda rannsóknir í stærðfræðimenntun að leggja ríka áherslu á að kortleggja hvers konar stærðfræðikennsla myndi stuðla að stærðfræðilegri hugsun nemenda (Schoenfeld, 1988).

Í framhaldinu snérist rannsóknir Schoenfelds að miklu leyti um það hvaða ákvarðanir kennarar taka í kennslu og hvað mótast þær, þ.e. hvað grundvallar ákvarðanir kennara, hverjar eru bjargir þeirra og viðhorf og hvernig tengjast þessir þættir árangursríkri kennslu. Hann komst að þeirri niðurstöðu að mikilvægustu þættir í kennslu væru bundnir þekkingu kennara, markmiðum þeirra og viðhorfum (Schoenfeld, 1998; Schoenfeld, 2000). Þessar niðurstöður Schoenfelds má lesa um í bók hans *How We Think* sem kom út árið 2010 þar sem hann tekur saman rannsóknir sínar á ákvarðanatöku kennara og hvað sé líklegt til árangurs í kennslu.

Schoenfeld hélt áfram rannsóknnum á árangursríkum kennsluháttum og hvað mótar ákvarðanir kennara í kennslustofunni í því skyni að kortleggja hvað það er sem einkennir árangursríka og góða kennslu í stærðfræði. Hann ásamt kollegum sínum komst að þeirri niðurstöðu að fimm lykilþættir einkenndu það umhverfi sem góð stærðfræðikennsla og stærðfræðinámsferu fram í. Þeir settu því fram einskonar matsramma eða viðmið fyrir árangursríka kennslu sem fékk nafnið Teaching for Robust Understanding of Mathematics (TRU Math) (Schoenfeld, 2014). Þeir fimm þættir sem Schoenfeld og félagar töldu að þurfi að vera til staðar svo árangursrík kennsla gæti átt sér stað eru í grófum dráttum eftirfarandi:

1. Stærðfræðilegar áherslur, samhengi og nákvæmni (e. mathematical focus, coherence and accuracy): Stærðfræðilegt inntak efnisins sem nemendur fást við þarf að vera vel skilgreint og réttlætjanlegt þar sem nemendur takast á við viðeigandi efni sem tengist hugtökum stærðfræðinnar.
2. Krefjandi hugsun (e. cognitive demand): Viðfangsefni sem tekin eru fyrir þurfa að vera krefjandi og stuðla að stærðfræðilegri hugsun.
3. Aðgengi (e. access): Í kennslustofunni þarf að styðja við og virkja þátttöku allra nemenda bekkjarins.
4. Áhrif, eignarhald, ábyrgð (e. agency, authority and accountability): Nemendur þurfa að fá tækifæri til að setja fram stærðfræðilegar getgátur og útskýringar ásamt því að færa rök fyrir hugmyndum sínum.
5. Námsmat (e. assessment): Námsmatið þarf að gera kröfur til nemandans þannig að það stuðli að rökhugsun og endurmati.

Schoenfeld lagði áherslu á það í erindi sínu að þessi rammi væri alls ekki hannaður í því skyni að skólastjórnendur notuðu hann við mat á kennurum því hann taldi það ekki líklegt til árangurs. Hann taldi mun skynsamlegra að vinna á uppbyggilegan og markvissan hátt með kennurum við að bæta kennslu frekar en að meta þá eingöngu. Hann sagði einnig að TRU Math innihéldi ekki neinar róttækar nýjar hugmyndir eða lausnir á vanda í stærðfræðikennslu. Heldur sé hugmyndin miklu frekar hugsuð sem rammi utan um það sem þegar er búið að sýna fram á með rannsóknnum að virki vel í kennslustofunni og stuðli að stærðfræðilegri hugsun nemenda (Schoenfeld, 2014).

Það er auðvelt að fyllast innblæstri við að hlusta að vísindamann eins og Alan Schoenfeld sem hefur tæplega 40 ára reynslu af rannsóknnum í stærðfræðimenntun. Ekki aðeins hefur hann birt yfir 200 greinar í vísinda-

tímaritum sem vitnað hefur verið í tugþúsund sinnum heldur hefur hann einnig verið leiðandi í að samtvinna rannsóknir og starf á þann hátt að það styðji beint við stærðfræðikennslu á vettvangi. Hann hefur gert það bæði með því að vinna að því að finna leiðir til að bæta nám og kennslu í stærðfræði og einnig með því að sinna alls konar nefndarstörfum sem tengjast námskrárgerð og reglugerðum í stærðfræðimenntun í Bandaríkjunum. Það er því óhætt að fullyrða að Schoenfeld hafi unnið markvisst að því að finna hvað það er sem einkennir góða stærðfræðikennslu og hafi verið ötull talsmaður þess að styðja kennara í að tileinka sér hana.

Fyrir þá sem vilja kynna sér nánar TRU Math má benda á vefsíðuna „Mathematics assessment project“ <http://map.mathshell.org> en þar má nálgast alls kyns lesefni varðandi verkefnið. Einnig má á þeirri síðu finna fjöldann allan af kennsluáætlunum með leiðsagnarmati og ýmislegt annað er stuðlar að bættu námi í skólustofunni.

Heimildir

- Li, Y., & Moschkovich, J. N. (Eds.). (2013). *Proficiency and beliefs in learning and teaching mathematics: learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145–166.
- Schoenfeld, A. H. (1999). Models of the teaching process. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243–261. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0)
- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. [Borg]: Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404–412. <https://doi.org/10.3102/0013189X14554450>

Berglind Gísladóttir

lektor við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Myndasafn
Svipmyndir ...



Safnast saman fyrir fram hótelid.



Málin rædd í lok dags.



Hvert er verið að halda?



Stund milli stríða hjá Ágústi, Gísla, Þorkeli og Andreu.



Trausti, Guðbjörg og Guðný Helga eru ánægð með daginn.



Það var gaman hjá þessum félögum.

Rannsóknir

á sviði stærðfræðiörðugleika

ICME 13 er alþjóðleg ráðstefna um stærðfræðináms- og -kennslu sem haldin var í 13. sinn í Hamborg síðastliðið sumar. Á ráðstefnunni voru svokallaðir Topic Study Groups hópar en boðið var upp á tæplega 50 hópa, alla með sitthvert viðfangsefnið. Í TSG eru kynntar rannsóknir þar sem 3 – 4 rannsakendur deila með sér um það bil einni klukkustund. Þátttakendur velja einn TSG hóp til að taka þátt í. Topic Study Groups voru á dagskrá fjórum sinnum yfir vikuna.

Hér er ritað um TSG 5 þar sem fjallað var um rannsóknir á sviði stærðfræðiörðugleika, eða eins og sagði á ráðstefnusiðunni: *Activities for, and research on, students with special needs.*

Margar áhugaverðar rannsóknir voru kynntar í málstofunum og taldi hópurinn sem sótti þetta viðfangsefni í kringum 35 manns, þar af voru fjórir Íslendingar. Flestir þeirra, sem voru í hópnum, voru rannsakendur sem kynntu niðurstöður sínar í einhverri af málstofunum og fylgdu umræður í kjölfar hverrar kynningar.

Rannsóknir á sviði stærðfræðiörðugleika spanna breitt svið og náðu rannsóknirnar þar af leiðandi yfir marga þætti örðugleikanna. Ráðstefnan fór að mestu fram á ensku og gekk yfirleitt vel að skilja flytjendur.

Hér að neðan er að líta hluta af því sem ég punktaði hjá mér að lokinni ráðstefnunni:

- *Rannsókn þar sem 17 þör nemenda voru rannsökuð í samvinnunámi til að mæla árangur nemenda í námi. Þörin voru samsett af einum nemanda sem átti við námsörðugleika að etja og öðrum sem átti ekki við örðugleika að etja. Helstu niðurstöðurnar voru þær að báðir nemendur læra af samvinnunni og dýpka skilning sinn.*
- *Snemmtækar íhlutanir skila árangri í langflestum tilfellum en nokkrar rannsóknir fjölluðu um íhlutanir meðal ungra barna. Einn rannsakandinn hafði komist að því að tölvunotkun við innngrip skilaði ekki betri árangri en „maður á mann“*

innngrip en aðrir höfðu þróað forrit sem sérstaklega voru hönnuð fyrir innngrip hjá nemendum og töldu þau vera mjög áhrifamikil.

- *Prósentu- og brotareikningur reyndist erfður nemendum sem eiga við stærðfræðiörðugleika að etja. Skilningur þeirra er lengi að þróa og til dæmis kom fram að nemendur eigi erfitt með að deila pizzu á milli þriggja. Í því tilfalli var algengasta villan að skipta fyrst í tvennt og lenda þá í vandræðum.*
- *Skólakerfið „skóli fyrir alla“ er flókið og að mörgu að huga. Nemendur geta átt við stærðfræðiörðugleika að etja út frá ýmsum ástæðum og þurfa kennarar að huga að því að hafa verkefni af þeim toga að allir nemendur geti tekið þátt í þeim og þróað skilning sinn. Skólakerfið þarf að breyta hugsun sinni frá því að sjá erfðleikana sem hindrun í það að taka fjölbreytileikanum fagnandi.*
- *Huga þarf að því hvaða stuðning kennarar þurfi á að halda inni í kennslustofu þar sem lögð er áhersla á skóla fyrir alla. Mikilvægt er að kennarar fái viðeigandi stuðning sérkennara eða annarra fagaðila.*
- *Samkvæmt einni rannsókninni voru nemendur sem eiga eingöngu við stærðfræðiörðugleika að etja svipað staddir og þeir sem eiga við stærðfræðiörðugleika og lestrarörðugleika að etja.*
- *Talnalínuverkefni auka skilning nemenda.*
- *Ein rannsókn fjallaði um vinnu með börnum sem hafa verið í föstri. Þar ræddi konan mikið um muninn á fösturbörnum, meðal annars með tilliti til*

heimanáms. Slæm reynsla úr fyrri tíð, mikil streita og minni stuðningur heima fyrir voru meðal þeirra þátta sem hún taldi hafa áhrif á nám nemenda. Mun lægra hlutfall nemenda í fóstri ná stöðluðu prófi sem lagt er fyrir þegar þeir eru 11 ára og enn lægri prósentu þegar þeir eru 16 ára.

- *Rannsókn sálfræðings. Hann skildi sjálfur ekki hvers vegna fullgreint barn gæti ekki skilið stærðfræði. Þetta var taugafræðilegur fyrirlestur sem sýndi ýmis konar línurit yfir virkni heilans. Hann sýndi á myndum hvernig virkni heilans jókst eftir 15 mínútna virkni á dag í tilteknu efni.*

Eins og sjá má var farið um víðan völl í málstofunum. Flest voru þetta atriði sem hafa heyrst áður en umræður og kynning á rannsóknum eru ávallt af hinu góða og alltaf lærist eitthvað nýtt.

Helsti ókosturinn fannst mér vera sá að skólakerfin eru misjöfn á milli landa og ekki var alltaf víst um hvaða nemendur rannsakendur töluðu, samanber mun á milli erfiðleikastiga nemenda.

*Hafdís Einarsdóttir
umsjónarkennari á unglingastigi
Árskóla á Sauðárkróki*

Myndasafn

Sameiginlegur kvöldverður



Harpa og Rósa biða eftir matnum.



Ingólfur og Berglind á góðri stundu.



Gísli, Jónína og Imke spjalla saman.



Það var glatt á hjalla við þetta borð.



Rúmlega 30 Íslendingar fóru saman út að borða á hefðbundinn þýskan veitingastað.



Þóra og Sigríður Helga glæsilegar að vanda.



Gunnur og Guðlaug glaðar á góðri stundu.



María, Guðbjörg og Þuríður njóta kvöldsins.



Andrea og Þórgunnur velta fyrir sér hvað þær eigi að panta.



Efnisyfirlit

Ritstjórapistill

Birna Hugrún Bjarnardóttir 3

ICME13

Margrét S. Björnsdóttir 5

Í fyrsta sinn á ráðstefnu um stærðfræðimenntun

Sigríður Helga Ármannsdóttir 6

Áhrif stjórnmála á stærðfræðimenntun í Norður-Kóreu

Klara Sigurmundadóttir

María Ásmundsdóttir 7

Rökstuðningur og sannanir í stærðfræðimenntun

Ársæll Músson. 11

„Þetta dæmi er ekki til!“

Bjarnheiður Kristinsdóttir 13

Kynning á Shell Center for Mathematical Education

Þóra Þórðardóttir 15

Saga um áhrifaríka samfléttun rannsókna og starfs

Berglind Gísladóttir. 17

Rannsóknir á sviði stærðfræðiörðugleika

Hafþís Einarsdóttir 21