

2009

FELATTARMÁL

TÍMARIT SAMTAKA
STÆRÐFRÆÐIKENNARA
I TBL., 16 ÁRG.



Flatarmál 1. tbl., 16. árg.
rit Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2009 Flatarmál

Útgefandi

Flötur, samtök stærðfræðikennara,
Laufásvegi 81, 101 Reykjavík

Stjórn Flatar

Ingólfur Gíslason formaður,
Háskólanum í Reykjavík
Rannveig A. Guðmundsdóttir gjaldkeri,
Breiðagerðisskóla
Rannveig Þorvaldsdóttir ritari og vefumsjón,
Öldutúnsskóla
Laufey Einarsdóttir ritstjóri Flatarmála,
Víkurskóla
Borghildur Jósúadóttir meðstjórnandi,
Grundaskóla
Martin Kollmar meðstjórnandi,
Verzlunarskóla Íslands
Þórgunnur Óttarsdóttir meðstjórnandi,
Brekubæjarskóla

Ritstjóri

Laufey Einarsdóttir

Prófarkalestur

Jónína Marteinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir

Umbrot og myndvinnsla

Kristinn Pétursson, minervamidlun.is

Prentun

Prentsmiðjan Oddi hf.

Veffang / pósthfang

www.flotur.ismennt.is
flotur@ismennt.is

Til höfundu greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda sem tölvupóst til stjórnar Flatar á flotur@ismennt.is. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu helst ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð í sér skrá. Í texta komi fram númer eða nafn teikningar. Stjórn Flatar tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.



Stjórn Flatar 2007-8 ásamt John Mason á námstefnu
samtakanna á Selfossi haustið 2008.

Heil og sæl!

Efni Flatarmála að þessu sinni endurspeglar þau viðfangsefni sem voru til umfjöllunar á sjöttu námstefnu Flatar. Námstefnan var haldin á Selfossi í lok september 2008 og samkvæmt venju voru erindin fjölbreytt og áhugaverð. Námstefna Flatar er kjörinn vettvangur fyrir alla sem hafa áhuga á stærðfræðinámi og -kennslu til að skiptast á skoðunum og ræða um stærðfræðimenntun. Slíkur vettvangur er ekki aðeins mikil-



vægur til að efla þróunarstarf á sviði stærðfræðimenntunar, heldur veitir hann einnig kennurum stuðning við að takast á við fjölbreytt viðfangsefni og vinnubrögð. Stjórn Flatar hvetur því alla sem láta sig stærðfræðimenntun varða að sækja næstu námstefnu félagsins sem haldin verður á Selfossi dagana 2. - 3. október næstkomandi. Nánari upplýsingar eru að finna á vef Flatar, www.flotur.ismennt.is.

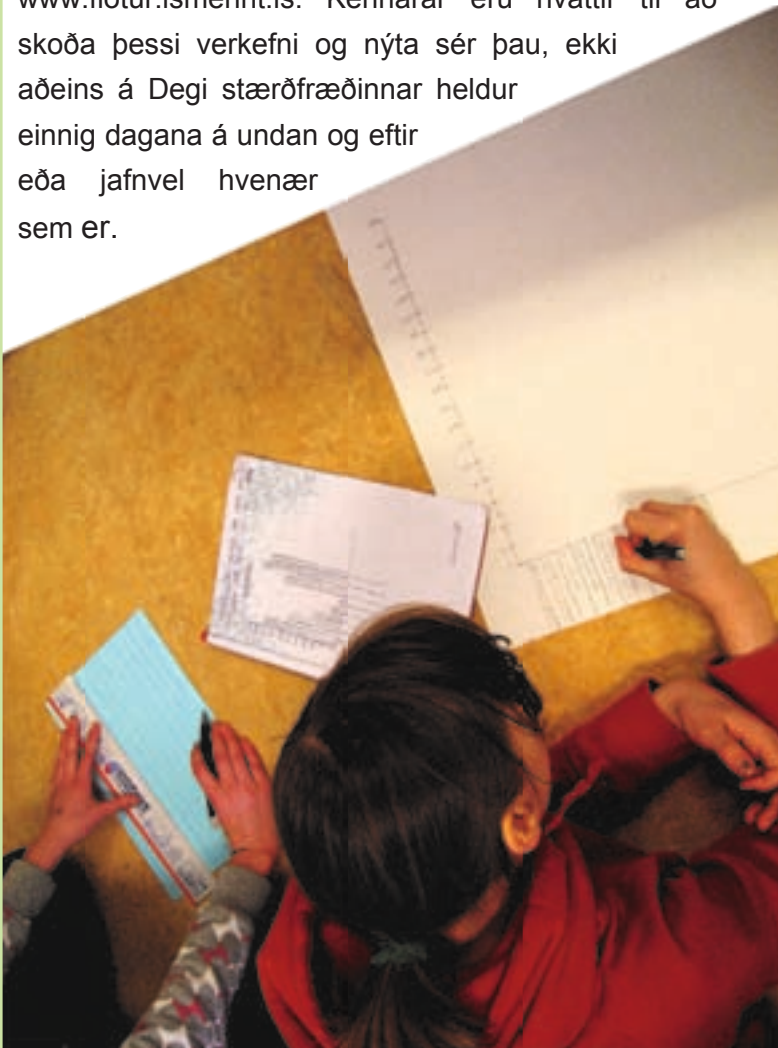
Við óskum einnig eftir efni í næsta tölublað Flatarmála, til dæmis greinar um stærðfræði, stærðfræðinám og -kennslu eða námsmat, reynslusögur úr stærðfræðitímum, lýsingar á áhugaverðum og krefjandi verkefnum eða samþættingu stærðfræði við aðrar faggreinar, svo eitthvað sé nefnt.

Fyrir hönd stjórnar Flatar,
Laufey Einarsdóttir, ritstjóri

Dagur stærðfræðinnar

6. febrúar 2009: ÞRÍHYRNINGAR

Dagur stærðfræðinnar er haldinn fyrsta föstudag í febrúar ár hvert. Helstu markmið með degi stærðfræðinnar er að vekja bæði nemendur og aðra til umhugsunar um stærðfræði og hlutverk hennar í samfélaginu, að koma auga á möguleika stærðfræðinnar og sjá hana í víðara samhengi. Árið 2009 ber dag stærðfræðinnar upp á föstudaginn 6. febrúar og er þema dagsins að þessu sinni þríhyrningar. Ýmsar hugmyndir og verkefni sem tengjast þema dagsins er að finna á heimasíðu Flatar, www.flatur.ismennt.is. Kennarar eru hvattir til að skoða þessi verkefni og nýta sér þau, ekki aðeins á Degi stærðfræðinnar heldur einnig dagana á undan og eftir eða jafnvel hvenær sem er.



Norræn samtök fagmanna, rannsakenda og kennara, sem starfa undir heitinu *Nordic Research network on Special Needs Education in Mathematics* voru stofnuð árið 2001 af þekktum fræðimönnum innan tveggja fagsviða, stærðfræði og sérkennslu. Samtökin halda ráðstefnu annað hvert ár á Norðurlöndunum um kennslu nemenda sem eiga í erfiðleikum með stærðfræðinám þar sem kynntar eru rannsóknir á sviðinu.

Dagana 15.-16. október verður ráðstefnan haldin á Íslandi í húsnæði menntavísindasviðs HÍ við Stakkahlíð. Heiti ráðstefnunnar er **Challenges in teaching mathematics: Becoming special for all.**

Í tengslum við hana verður námskeiðsdagur haldinn fyrir kennara miðvikudaginn 14. október á sama stað og munu fyrirlesarar á ráðstefnunni kenna á námskeiðinu. Námskeiðið og ráðstefnan verða auglýst betur síðar á heimasíðu Flatar.

Fyrir hönd undirbúningsnefndar:

Edda Óskarsdóttir edo6@hi.is

Hafdís Guðjónsdóttir hafdgud@hi.is

Jónína Vala Kristinsdóttir joninav@hi.is

Ráðstefna um stærðfræði fyrir alla





Námstefna Flatar 2008

Sjötta námstefna Flatar var haldin á Selfossi dagana 26. - 27. september síðastliðinn. Að venju var námstefnan opin öllum áhugamönnum um stærðfræðinám og -kennslu. Þátttakendur voru rúmlega 60 af öllum skólastigum og komu víðsvegar af landinu.

Námstefnan var auglýst á veggspjaldi sem sent var í alla grunn- og framhaldsskóla landsins. Skáning var rafræn og fór fram á heimasíðu félagsins. Dagskráin var fjölbreytt og margir áhugaverðir fyrirlestrar fluttir. Boðið var upp á erindi fyrir alla en einnig var skipt í hópa eftir áhugasviði. Aðal-fyrirlesari var prófessor John Mason. Hélt hann inngangsfyrirlestur sem hann nefndi *Developing mathematical thinking*. Mason stýrði líka þremur vinnustofum: *Construction tasks for releasing creativity*, *Using mental imagery in teaching* og *The role of attention in teaching mathematics*.

Laufey Einarsdóttir, kennari í Víkurskóla, og Guðbjörg Pálsdóttir, lektor við HÍ, voru með vinnustofu um námsmat. Borghildur Jósúadóttir, kennari í Grundaskóla, fjallaði um skapandi kennslu í stærðfræði. Ásta Ólafsdóttir, kennari í Réttarholtsskóla, var með fyrirlestur um algebrunám og táknlesi og Guðlaug Ósk Gunnarsdóttir, aðstoðarskólastjóri í Rimaskóla, kynnti stærðfræðistofu í Varmárskóla (grein eftir Guðlaugu Ósk er að finna í Flatarmálum 1. tbl., 15. árg., bls. 11-13). Á vefsíðu Flatar eru glærur frá

fyrirlesurum. Skólavörubúðin og Rasmus.is voru með sýningar fyrir námstefnugesti.

Á föstudagskvöldið komu þátttakendur saman og borðuðu hátíðarkvöldverð undir veislustjórn Borghildar Jósúadóttur. Margir höfðu gaman af nafnagátum sem lagðar voru fyrir gesti og kom í ljós leyndur hæfileiki gesta í kveðskap. Að lokum var slegið upp dansleik við undirleik hljómsveitarinnar Vírus.

Að venju lauk námstefnunni með pallborði eftir hádegi á laugardag undir yfirskriftinni: *Til hvers erum við að kenna stærðfræði?* Frummælendur í pallborði voru Anna Kristjánsdóttir, prófessor við Háskólann í Agder og við Háskóla Íslands, Einar Steingrímsson úr Háskólanum í Reykjavík og Atli Harðarson frá Fjölbautaskóla Vesturlands. Að loknum erindum allra frummælenda upphófust líflegar og áhugaverðar umræður. Aðstaðan á hótelinu á Selfossi var til fyrirmyndar og þátttakendur voru almennt ánægðir með námstefnuna í heild.



1



2



3

- 1 Uppdúkað hádegisverðarborð námstefnunnar. Takið eftir gulu pýramíðunum sem stjórnin hafði mikið fyrir að fönðra.
- 2 Borghildur Jósúadóttir deilir út efni á fyrirlestri sínum *Skapandi stærðfræði*.
- 3 Guðrún og Þóra tilbúnar fyrir skemmtun kvöldsins.
- 4 Mason á spjalli við Birnu Huguínu og Helen, Ingólfur baka til.
- 5 Einn af fyrirlestrum Masons.



4



5



Mason kemur

eftir
INGÓLF GÍSLASON

John Mason hefur kennt stærðfræði frá því hann kenndi félögum sínum sem unglingur. Hann menntaði sig í stærðfræði og lauk doktorsprófi á sviði flétturúmfræði áður en hann sá kvikmyndina *Let us Teach Guessing*, eftir ungversk ættaða stærðfræðinginn og kennsluhugsuðinn George Polya, sem breytti hugmyndum hans um nám og kennslu á einni nóttu. Eftir hann liggja 20 bækur og 275 greinar um stærðfræðinám og kennslu, en vinnustaður hans frá 1970 hefur verið Open University í London.

Ég uppgötvaði John fyrir nokkrum árum þegar ég lá yfir því hvað hugsað hafði verið og sagt um stærðfræðinám, og varð fyrir miklum áhrifum. Til þess að breiða út þessa sýn og viðhorf til stærðfræðimenntunar ákvað ég að reyna að fá hann hingað, á ráðstefnu Flatar, og það tókst. Hann var með okkur á Hótel Selfossi 26. og 27. september síðastliðinn.

John byrjar yfirleitt á orðum þess efnis að allt sem hann fullyrði beri að líta á sem tilgátur og uppástungur til að máta við eigin hugsun og reynslu. Ég vil ekki nota orðið fyrirlestur, vegna þess að það sem um er að ræða er ekki

fyrirlestur, heldur samræða, gagnvirkni, fullyrðingar, spurningar, svör og viðbrögð.

Að þroska stærðfræðilega hugsun

Það sem þú færð út úr þessum fundi er það sem þú tekur eftir að gerist innra með þér.

Ef mismunur tveggja talna er slétt tala, þá er margfeldi þeirra mismunur tveggja ferningstalna.

Hvernig á maður við slíka fullyrðingu í stærðfræði? Er þetta rétt? Fyrst er ef til vill að prófa einhverjar tölur, tókum 1 og 3, og sjá $3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$. Þetta passar. Prófa fleiri pör, og þetta virðist ganga. (Hvað er ég að gera núna? Ég er að sérhæfa fullyrðinguna, ef ég þýði þannig enska orðið *specializing*.) En er þetta alltaf satt? Get ég *alhæft*? Hvernig næ ég tókum á þessu almennt? Hér gæti verið mögulegt að nota táknmál bókstafareiknings, eins og ég gerði, en það er líka hægt að teikna þessa stöðu upp sem flatarmynd, eins og félagi minn gerði á næsta borði. *Ef þú gefur þig ekki að verkefnunum færðu ekkert út úr þessu.*

Inngangstíminn fer í að skoða þetta verkefni og nokkur önnur. Rætt er um nokkrar hliðar á því hvað felst í því að hugsa stærðfræðilega. John hefur ekki tíma til að sýna nema örfá af verkefnunum í glærusafninu. Það er gott, eitthvað hefur gerst, stærðfræðileg hugsun hefur átt sér stað.

Að byggja hugsmíðar

Á þessum fundi kynnir John eina tegund af verkefnum: að smíða stærðfræðilega hluti. Með því er ekki átt við að nota kubba eða önnur föst efni, heldur að hugsa sér eða skrifa niður stærðfræðilega hluti eins og tölur, talnapör, og þríhyrninga, með einhverjum skilyrðum.

Skrifaðu niður tvær tölur þannig að mismunur þeirra sé 2.

Og aðrar tvær.

Og aðrar tvær.

Og aðrar tvær sem þú heldur að enginn annar í stofunni muni skrifa niður.

Og aðrar tvær sem hafa líklega aldrei verið skrifaðar niður áður, í öllum heiminum.

Með þessari æfingu er þér ætlað að leiða hugann að því hvaða mögulega frelsi þú hefur til að búa til dæmi um eitthvað, og hvaða skilyrði takmarka

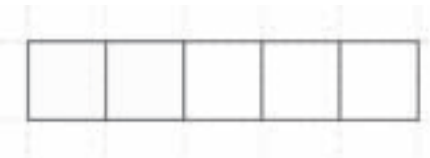
Þetta frelsi. Þau dæmi sem þér detta í hug þegar þú heyrir orð eða sérð tákni, afmarka þinn dæmaheim. Eftir því sem stærðfræðilegur þroski þinn er meiri, þeim mun stærri er dæmaheimurinn, þeim mun sveigjanlegri er hugsun þín, og þeim mun meðvitaðri ertu um frelsi þitt og takmörk við að velja dæmi um eitthvað. Þegar þú valdir tölur, hér áðan, valdirðu jákvæðar heiltölur? Datt þér í hug að nota neikvæðar tölur, eða brot, eða tugabrot? Hvað með ferningsrætur? Skrifaðirðu bara talnadæmi eða stóðstu ekki mátið að skrifa almenna lýsingu (til dæmis með bókstafareikningi) á talnapari þar sem mismunurinn er 2?

Eitt af því sem kennarar komast stundum að, um hugsun nemenda sinna, er að þeir hafa allt aðra tilfinningu fyrir því um hvað dæmi er. Yfirleitt hafa þeir mun takmarkaðri dæmaheim. Það getur verið vel þess virði að gefa nemendum verkefni til þess að útvíkka dæmaheim sinn og gera hann ríkulegri, auk þess sem hugsmíðaverkefni sem þessi krefjast þess að nemandi sé virkur, að hann sjálfur búi eitthvað til.

Að taka eftir athygli

Á næsta fundi beindi John athygli viðstaddra að því hvernig stærðfræðinám og stærðfræðihugsun felst í því að taka eftir.

Réttu upp hönd þegar þú sérð ...



eitthvað sem er $\frac{2}{5}$ af einhverju
eitthvað sem er $\frac{3}{5}$ af einhverju
eitthvað sem er $\frac{2}{3}$ af einhverju
eitthvað sem er $\frac{1}{3}$ af $\frac{3}{5}$ af einhverju
eitthvað sem er $\frac{3}{5}$ af $\frac{1}{3}$ af einhverju
eitthvað sem er $\frac{2}{5}$ af $\frac{5}{2}$ af einhverju
eitthvað sem er $1 \div \frac{2}{5}$ af einhverju

Upplifun þín af þessu gæti verið eitt-hvað á þessa leið: Fyrst horfðir þú á heildarmyndina (til dæmis: rétthyrningur gerður úr minni rétthyrningum, hluti skyggður), en fórst síðan að taka eftir ákveðnari atriðum (til dæmis: tveir af fimm eru skyggðir). Þar á eftir barstu kennsl á einhver tengsl (til dæmis: skyggði hlutinn plús hvíti hlutinn er heildin), og fórst að skynja einhverja eiginleika á myndinni (til dæmis eitthvað af því sem nefnt er við myndina). Stærðfræði er meðal annars þetta: að rökræða á grunni einhverra eiginleika sem sammælst er um.

Hverju tókstu eftir við sjálfan þig á meðan þú last þessa grein? Tókstu á við verkefnin með fullri athygli? Ákvaðstu að renna yfir hana fyrst og geyma verkefnin þar til síðar?

Yfirviðfang þessa fundar var athygli, hvernig hún er uppbyggð, hvernig hún virkar. Og það er best að hugsa um það með því að beina athygli sinni að eigin athygli.

Að ímynda sér

Þegar aðrir gestir hótelsins á Selfossi gengu framhjá salnum og litu sem snöggvast inn til okkar um leið og þeir héldu áfram sína leið má vera að þeir hafi hugsað: „Hvað er nú þetta?“ Stærðfræðijóga? Við sátum í hring. John bað okkur að sjá fyrir okkur hluti í huganum. Við áttum að lýsa þeim hlutum sem við hugsuðum okkur en máttum ekki nota hendurnar, líkamann, eða skriffæri. Það kemur á óvart hve erfitt það er.

Sjáðu fyrir þér línu á blaði. Sjáðu fyrir þér aðra línu sem sker fyrri línuna. Hugsðu þér núna hring sem snertir báðar línurnar, í einum punkti á hvorri línu, án þess að skarast við þær. Hvað eru margir möguleikar? Hugsðu þér að þú megir færa hringinn, hann má stækka og minnka, en hann verður að snerta línurnar eins og áður. Hvar getur miðja

hringsins verið? Eftir hvernig ferli færast miðpunktur hringsins? Hugsu okkur þriðju línuna, sem sker hinar tvær. Geturðu komið hringnum fyrir þannig að hann snerti allar þrjár línurnar (en skarast við enga þeirra)? Hversu margir slíkir hringir eru mögulegir? Segðu frá því, lýstu því hvar þeir eru, án þess að benda, teikna, skrifa.

Æfingar sem þessar vekja mig til hugsunar um það hve öflug hjálpartæki blað og blýantur eru, en ef til vill þarf að vekja hjá nemendum þörf til þess að nota þau; þeir þurfa að upplifa þessa sterku þörf til að teikna, til að sjá hlutina fyrir sér. Aldrei hefði mig grunað hve hjálparlaus maður er við að lýsa hlutum ef maður má alls ekki hreyfa hendur. Stærðfræði snýst að miklu leyti um að vera (og búa til) tungumál til þess að hægt sé að tala um hluti og tengsl og eiginleika. Það tungumál má ekki þurfa á bendingum að halda.

Að sækja Ísland heim

John Mason skildi eftir sig fræ hugsunar um stærðfræðinám sem eiga vonandi eftir að spíra í hugum einhverra kennara á Íslandi. Hann kom til landsins við upphaf svonefndrar kreppu, sem sumir gárungar segja að sé að miklu leyti tilkomin vegna þess að háþróaðri fjármálastærðfræði var misbeitt í fjárfestingarbönkum heimsins. Ekki tókst þó betur til en svo að komudagur Johns víxlaðist í huga stjórnar Flatar, sem reyndi að sækja hann daginn eftir að hann kom til landsins. En hann bjargaði sér sem betur fer sjálfur á gististað. John Mason veitti íslenskum stærðfræðikennurum góðan innblástur.

Vefur Masons:

www.mcs.open.ac.uk/People/j.h.mason

Numicon



eftir
SESSELJU G. GUÐJÓNSDÓTTUR
grunnskólakennara

Numicon er eitt af þeim „tækjum“ sem hægt er að nota til að örva stærðfræðilæsi hjá nemendum, bæði hjá þeim sem eru lengra komnir og þeim sem eru stutt á veg komnir í talnaskilningi. Sjónrænt myndmál og verkefnavinna í litlum skrefum er sérstaklega góð fyrir nemendur sem eiga í erfiðleikum með að muna.

Numicon hefur sterkt sýnilegt myndmál þar sem áhersla er lögð á mynstur, fjölskynjun og verkefni í smáum skrefum þar sem byggt er á fyrri skilningi. Mikill sýnilegur árangur er hjá nemendum á öllum aldri með mismunandi sérþarfir, m.a. hjá börnum með snertifælni, Downs heilkenni og stærð-fræðiörðugleika. Numicon námsgögnin hjálpa börnum að sjá tengsl milli talna og talnagilda með því að handleika formin og búa til og sjá tengsl milli þeirra.

Kennslufnið er byggt þannig upp að hver þáttur byggir á öðrum þannig að nemendur þurfa að nota fyrri skilning sinn til að meðtaka það sem kennt er. Námsgögnin sjálf eru sérstaklega litrík og auðvelt að handfjatla þau til að nota önnur skynfæri til að „lesa.“ Stærðfræðilæsi nemenda er styrkt með því að nota námsgögnin á mismunandi vegu.

Ég hef notað Numicon stærðfræðiefnið í fjögur ár, bæði sem bekkjakennari og í sérkennslu. Það sem mér finnst best við að nota Numicon er að nemendur mínir eiga svo auðvelt

með að skilja verkefnið með því að nota Numicon stærð-fræðigögnin.

Fyrir yngstu nemendurnar er auðvelt að útskýra talnahugtökin og hvað liggur að baki. Við notum fleiri skilningarvit til að styrkja grunntalnaskilning. Það er mikilvægt að nemendur fái góðan skilning á talnagildum því það er undirstaðan fyrir alla aðra talnavinnu. Með eldri nemendur hefur mér þótt gott að nota talnabrettin og talnaspjöldin til að útskýra margföldun og deilingu. Það er svo auðvelt fyrir krakkana að skilja hvað til dæmis 7×7 er með því að sjá það fyrir framan sig, geta þreifað á „tölunum“ og talið þær.

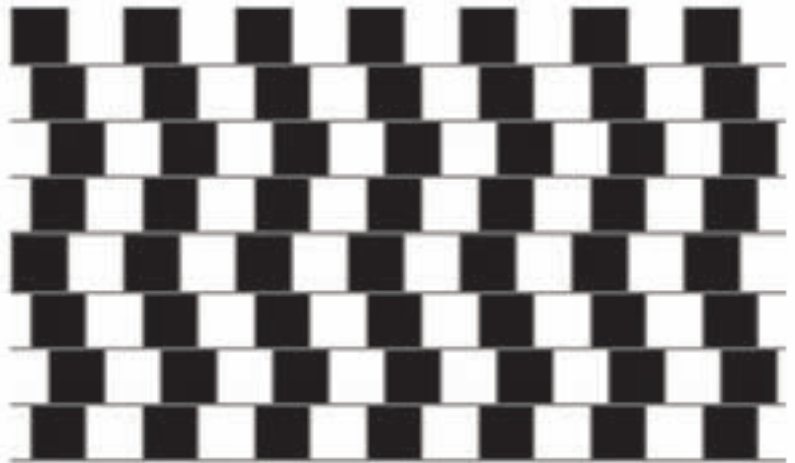
Fyrir marga er nauðsynlegt að geta upplifað talnahugtökin á mismunandi vegu til að auka skilninginn á stærðfræðinni. Numicon kerfið gerir manni kleift að gera það á auðveldan hátt. Nemendum finnst skemmtilegt að vinna með stærðfræðigögnin og verkefnið. Það er auðvelt að halda athyglinni og skipta um verkefni þó unnið sé með sama þema.

Undanfarið hef ég unnið með Numicon með 3-5 ára börnum. Þeim finnst sérstaklega gaman að leika með stærðfræðigögnin og uppgötva tölur og talnagildin sem liggja að baki. Þau leika sér en læra um leið mikilvæga lexíu um talnagildi, flokkun, o.fl. Numicon er því frábært kennslutæki til að efla skilning á stærðfræði.

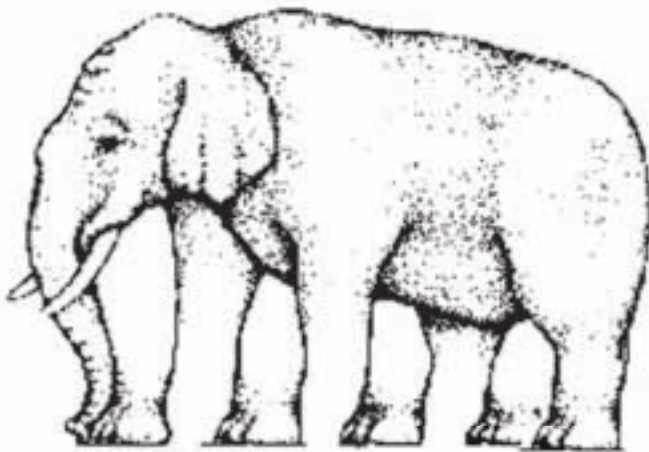
Sjón blekkingar



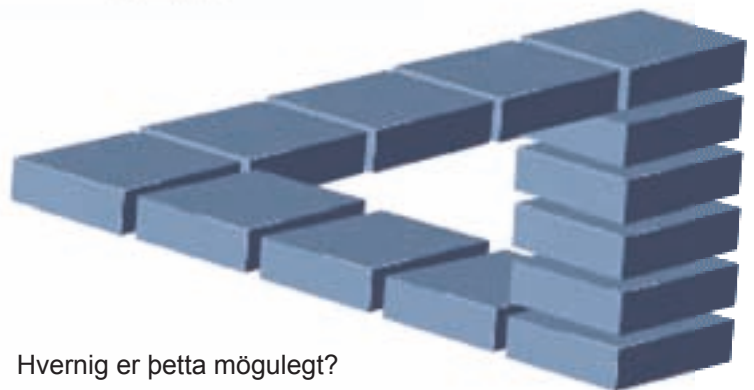
Hvor hringurinn í miðjunni er stærri?



Eru láréttu línurnar samsíða?



Hvað hefur fíllinn marga fætur?



Hvernig er þetta mögulegt?

Öskjur



Námsmatsverkefni fyrir 9. bekk í lok haustannar

Lokaverkefni mitt við Kennaraháskóla Íslands fjallaði um mynstur og flutninga og því lá beinast við að ég og nemendur mínir tækjumst á við viðfangsefni tengd þessum þáttum mitt fyrsta ár sem kennari. Ennfremur fannst mér mikilvægt að nemendur fengju tækifæri til að styrkja skilning sinn á þáttum stærðfræðinnar í gegnum fjölbreytta nálgun á viðfangsefnum hennar, að nemendur gætu tjáð sig um stærðfræði, ynnu verkleg verkefni og lærðu að sýna sjálfstæði og ábyrgð í námi. Síðast en ekki síst vildi ég byggja upp og efla jákvætt viðhorf nemenda til stærðfræði.

Mynstur

Það varð því úr að meginviðfangsefni 9. bekkjar á haustönn voru mynstur og glímdu nemendur við margs konar verkefni, bæði verkleg og skrifleg, sem aðallega tengdust hnitakerfi og flutningum en auk þess fengust nemendur við efnispættina tölur, rými og algebra. Nemendur leystu dæmi úr samnefndum köflum í *Átta-tíu 2* og 3 og unnu þar að auki ýmis verkleg verkefni bæði í hópum og sem einstaklingar. Stór hluti annarinnar var nýttur í flutninga og mynsturgerð: nemendur sýndu m.a. flutningana - hliðrun, speglun og snúning - með

myndum eða mynstri á fulllituðu A4 blaði, þeir tóku myndir af mynstrum í umhverfinu og greindu hvernig þau voru mynduð, þeir kynntu sér mynstur nokkurra menningarheima og bjuggu til, með hjálp flutninga, sín eigin mynstur sem þeir máluðu á vegg skólafunnar. Á önninni skoðuðu nemendur einnig mynstur talnaruna, bjuggu til margflötunga Platóns og mældu yfirborðsflatarmál og rúmmál ýmissa hluta í skólafunni. (Sjá dæmi um mynstur á næstu opnu).

eftir

LAUFHEYJU EINARSDÓTTUR

ÖSKJUR

Námsmatsverkefni fyrir 9. bekk í lok haustannar - Heimaverkefni

Nemandi á að:

- hanna og búa til öskju
- skreyta öskjuna með mynstri og sýna hliðrun, speglun og snúning
- finna rúmmál öskjunnar
- finna yfirborðsflatarmál öskjunnar
- sýna alla útreikninga og niðurstöður (setja blað með útreikningum og niðurstöðum í öskjuna)
- velta fyrir sér reglum við útreikninga
- nota viðeigandi hugtök stærðfræðinnar
- vera skapandi og sýna frumleika.

Ég hvet þig til að fara ekki einföldustu leiðina heldur nota tækifærið til að sýna hvað í þér býr.

Gangi þér vel!

Óhefðbundið námsmat

Þar sem nemendur höfðu kynnst nýjum vinnubrögðum í stærðfræði og unnið fjölbreytt verkefni á haustönninni gafst kjörið tækifæri til að meta nám þeirra í lok annar á fremur óhefðbundinn hátt og úr varð námsmatsverkefnið öskjur. Verkefnið vann ég í samvinnu við Guðbjörgu Pálsdóttur, lektor við menntavísindasvið Háskóla Íslands, sem var leiðsagnarkennari minn þetta fyrsta ár mitt sem kennari.

Nemendur fengu viku til að leysa verkefnið, aðallega vegna þess að þeir voru líka í öðrum prófum á þessu tímabili. Aðalkosturinn við að hafa svona langt vinnutímabil var að þá gat ég fylgst með vinnuferlinu og fengið að skyggjast inn í hugsun nemenda. Þeir spurðu mig spurninga og sögðu frá vangaveltum sínum en einnig töluðu þeir um verkefnið sín á milli og var mjög fróðlegt að fylgjast með því.

Að mínu mati er margt gott við þetta verkefni. Það er fremur einfalt og auðvelt í framkvæmd en það tekur samt sem áður til margra þátta stærðfræðinnar, sérstaklega mynsturs, rúmmáls, yfirborðsflatarmáls, algebru og lengdarmælinga. Auk þess gefur verkefnið möguleika á fjölbreyttum útfærslum, þar sem nemendur fá nokkuð frjálsar hendur við að búa til öskjurnar (t.d. pappírsbrot, endurnýting á umbúðum) og þeir hvattir til að vera skapandi og sýna frumleika. Síðast en ekki síst verður til raunveruleg afurð. (Sjá dæmi um öskjur á bls. 10 og hér til hliðar).

Mikilvægi umsagnar

Ennfremur fannst mér mikilvægt að nemendur fengju ítarlega og skriflega umsögn í lok námsmatsins, þar sem fram kæmi bæði allt það góða við lausn nemandans og einnig það sem



Rúmfræði og algebra: Sýnishorn af verkefnum nemenda.



Askja: Sýnishorn af verkefnum nemenda.

betur mátti fara. Nemendur fengu síðan umsögnina í formi viðurkenningarskjals. Hér á eftir eru sýnishorn af þremur mismunandi umsögnum fyrir verkefnið, þar sem umsögnin er miðuð við nemandann en einkunnin tekur mið af námsmarkmiðum hópsins.

Eitt verkefni til

Að lokum lét ég hér fylgja fyrirmæli að sams konar verkefni sem ég lagði fyrir 10. bekk í haust (hópurinn er ekki sá sami og leysti öskjuverkefnið). Þetta verkefni var ekki lokaverkefni á haustönn, líkt og öskjurnar, heldur námsmatsverkefni fyrir afmarkaðan hluta námsefnis annarinnar.

Ég tel að það sé hægt að útfæra öskjuverkefnið á ýmsa vegu fyrir nemendur á öllum skólastigum og er það von mín að sem flestir kennarar nýti sér þessa hugmynd að námsmatsverkefni.



Mynd að ofan og miðjumynd á bls. 13 eru dæmi um öskjur nemenda. Efsta og neðsta mynd á næstu síðu sýna mynstur sem nemendur hönnuðu og máluðu á veggj skólastofunnar.

RÚMFRÆÐI OG ALGEBRA

Námsmatsverkefni í 10. bekk
- Heimaverkefni -

Nemandi á að:

- búa til samsett þrívítt form úr 2 ólíkum þrívíðum formum (notaðu hugmyndaflugið)
- lýsa þrívíða forminu með orðum (mundu að nota líka hugtök stærðfræðinnar)
- mæla nákvæmlega allar stærðir og skrá með viðeigandi mælieiningum
- reikna rúmmál og skrá með viðeigandi mælieiningum
- reikna yfirborðsflatarmál og skrá með viðeigandi mælieiningum
- skrá allar reiknireglur sem eru notaðar og velta fyrir sér af hverju þær virka
- skila forminu og skýrslu þar sem öllum ofangreindum atriðum er vel lýst með orðum og útreikningum.

Ég hvet þig til að fara ekki einföldustu leiðina heldur nota tækifærið til að sýna hvað í þér býr.

Gangi þér vell!



DÆMI UM UMSAGNIR

Nemandi X

Þú býrð til einfalda öskju með pappírsbroti úr fallegum appelsínugulum pappír og þú býrð til mynstur sem sýnir alla flutningana. Þú hefur þurft að vanda gerð mynstranna betur. Þú útskýrir útreikninga, skráir lengdir og notar viðeigandi mælieiningar. Mælingarnar eru örlítið ónákvæmar hjá þér og þú hefur mátt útskýra hliðarlengdir aðeins betur skriflega, t.d. skrifað hæðin er 6 cm, lengdin er 16 cm og breiddin er 16 cm. Þú finnur ekki yfirborðsflatarmál þar sem þú reiknar aðeins flatarmál eins flatar öskjunnar. Þú veltir ekki fyrir þér reiknireglum.

Einkunn: 6,5

Nemandi Y

Þú skilar hugvitssamri lausn á öskju með loki þar sem þú nýtir þér framleiddan sælgætiskassa. Þú skreytir öskjuna með einföldu mynstri sem sýnir alla flutningana og þú útskýrir mynstursgerðina á skýran hátt með orðum. Þú reiknar rúmmál og yfirborðsflatarmál og skilar niðurstöðum með viðeigandi mælieiningum. Mælingarnar hjá þér eru mjög nákvæmar og útreikningar settir fram á skipulagðan hátt. Þú veltir ekki fyrir þér reiknireglum en súkkulaðið var gott!

Einkunn: 8

Nemandi Z

Þú býrð til afar fallega og flókna öskju á mjög hugvitssaman hátt. Þú sýnir alla flutninga með skemmtilegu mynstri. Þú setur fram útreikninga á skipulagðan hátt. Hefur mátt útskýra betur hvað þú ert að reikna hverju sinni. Þú reiknar rúmmál og yfirborðsflatarmál með viðeigandi mælieiningum. Þú gleymir þó að reikna botn öskjunnar með í yfirborðsflatarmálinu. Þú hefur mátt velta reiknireglum aðeins betur fyrir þér, t.d. með því að teikna myndir. Þú sýndir verkefninu greinilega alúð.

Einkunn: 9





Ska pan di stærð fræði

eftir
BORGHILDI JÓSÚADÓTTUR

Hvaða möguleika hef ég til að lifga upp á stærðfræðikennsluna? Þeir eru margir, en hver kennari verður að velja viðfangsefni fyrir sig. Valgreinar mínar í Kennaraháskólanum voru textíl og stærðfræði og ég er því bæði list- og verkgreinakennari og stærðfræðikennari. Auk þess hef ég verið umsjónarkennari í öllum aldursflokkum. Ég hef því tengt saman þessar tvær greinar og tvinnað stærðfræðina inn í textíl-kennsluna og textíl inn í stærðfræðikennsluna, bæði til að skemmta mér og nemendum. Mig langar til að nefna það að lokaritgerðin mín fjallaði um John Dewey og kenningu hans um *Learning by doing*, en þá kenningu hef ég haft að leiðarljósi í minni kennslu.

Með því að bjóða upp á fjölbreytileg og skapandi verkefni nær maður að höfða til einhverra nemenda í hverju verkefni fyrir sig. Fyrir mér er einstaklingsmiðað nám ekki það að vera með sama verkefnið miserfitt heldur að hafa margs konar verkefni, þannig að allir finni einhvern tímann eitthvað við sitt hæfi.

Ég hef látið nemendur búa til krosssaumsmunstur úr upphafsstöfunum sínum og sauma síðan í jafa. Mín reynsla er sú að langflestum nemendum finnst gaman að sauma krosssaum og strákum ekki síður en stelpum. Sumir

nemendur detta alveg á kaf í þessi verkefni og það getur verið mjög gott fyrir marga nemendur að hafa eitthvað verklegt til að grípa í með bókavinnunni.

Sem betur fer er mikið af verklegum æfingum í *Geisla*-bókunum og ég hef nýtt mér það. Þessi verkefni eru mörg hver tímafrek, en skilar mér ánægðari nemendum. Nái maður fram jákvæðu viðhorfi nemenda til greinarinnar hefur mikið áunnist.

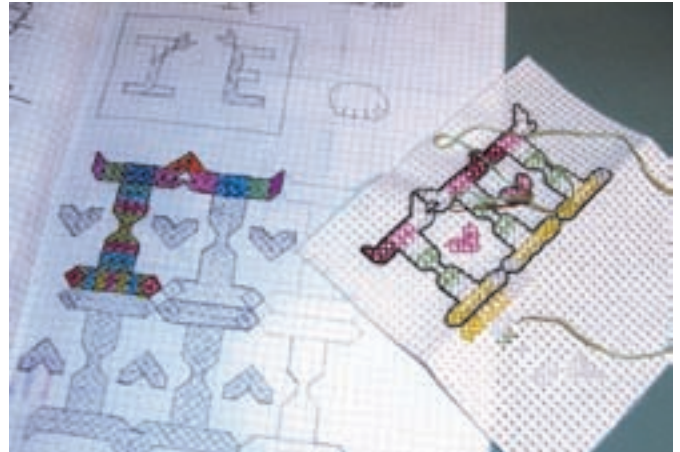
Hugmyndaflug er
meira virði en þekking
- Albert Einstein

Munsturgerð er í miklu uppáhaldi hjá mér. Nemendur vinna til dæmis með grunnformin, fjórminur, speglun, snúning og hlutföll. Einnig förum við vel í gegnum hnitakerfið í tengslum við krosssauminn.

Mér finnst mjög gaman að taka myndir og nýti mér það líka í kennslunni. Eitt slíkt verkefni er að nemendur (tveir og

tveir saman) fara út til að taka myndir af formum. Þeir velja sjálfir af hvaða formum þeir taka myndir og það er alltaf forvitnilegt að sjá hvað myndað er og hvernig nemendurnir lesa umhverfið. Síðan vel ég með þeim úr myndunum, stækka upp og læt þá síðan mæla og reikna út flatarmál og fer útreikningurinn eftir því hvar þeir eru staddir í stærðfræðibókunum.

Ég er núna að kenna stærðfræði í 8. bekk og hef eytt miklum tíma í fyrsta kaflann í fyrri bókinni *Átta-tíu, Hringir og hyrningar*. Þið sem ekki þekkið efnið þá er viðfangsefnið að vinna með hringfara. Nemendum finnst almennt mjög gaman að vinna með hringfara og höfðu mikla ánægju af



DAEMI UM VERKEFNI

Munsturgerð og krosssaumur

- Nemandinn teiknar upphafsstafina sína í rúðunet sem krosssaumsmunstur.
- Nemandinn saumar einn staf í grófan jafa og sama stafinn í fínan jafa og rætt er um hlutföll.
- Nemandinn hefur val um að búa til stærra munstur úr stöfunum og nota þá speglun, hliðrun eða snúning. Sumir nemendur sauma síðan þetta munstur.
- Farið vel í gegnum hnitakerfið.

þessari vinnu. Í 7. bekk í fyrra för mikill tími í hlutfalla-kaflann í *Geisla 3*. Ég hef einnig nýtt mér þemaheftið *Mynstur* og bý líka til eigin verkefni.

Nýtið ykkur endilega verklegu æfingarnar og hópverkefnið í íslensku stærðfræðibókunum, gefið nemendum tíma til að rannsaka og skoða: það mun skila ykkur ánægðari og um leið duglegri nemendum. Og munum þetta:

Það sem ég heyri gleymi ég

Það sem ég sé man ég

Það sem ég geri skil ég

John Mason (2005) segir að í raun sé algebra og algebruleg hugsun grundvöllur í grunnmenntun allra nemenda og byrja ætti að þjálfa strax við upphaf grunnskóla. Algebra og algebruhugsun er einkum og sér í lagi sú hæfni að bera kennsl á og setja fram almenn sannindi. Hér er komið aukið áhersluatriði í stærðfræðikennslu grunnskólanemenda á 21. öldinni. Hlutverk kennarans er því einnig að koma auga á það sem felst í verkefnum nemenda. Hann þarf að nýta verkefni til hins ítrasta til eflingar dýpri skilnings og ekki síst að vera meðvitaður um þá þætti sem efla táknskyn og stuðla að algebruhugsun.

Í þessari grein ætla ég að taka fyrir þá þætti sem tengjast táknskyni (symbol sense) eins og Abraham Arcavi (1994;1995;2005) hefur greint þá. Auk þess ætla ég að tengja þá við efni úr námsefnisflokknum *Átta-10*. Námsgagnastofnun þessi inniheldur nýtt námsefni í stærðfræði fyrir 8.-10. bekk grunnskóla. Alls er um að ræða sex grunnbækur sem gefnar voru út af Námsgagnastofnun á árunum 2005-8 ásamt viðbótarefni, s.s. á vef (Námsgagnastofnun, 2006).

Hugmyndin um hugtakið *táknskyn* (symbol sense) kom fram 1990. Hugtakið á sér fjölmargar rætur. Ein þeirra er að í framhaldi af rannsóknum á talnaskilningi á árunum 1970-80 beindust sjónir manna að því að stefna lengra í skólaalgebru. (Arcavi, A., 2005). „Number sense“ hefur verið þýtt sem talnaskilningur, en „sense“ er meira en skilningur; það er að sjá lengra og dýpra með næmni það sem fyrir augu ber. „Symbol sense“ mætti því þýða sem „táknskyn“ og nota ég það hér eftir sem slíkt. Það væri því e.t.v. vert að velja því fyrir sér hvort hugtakið talnaskyn væri betra en talnaskilningur og í framhaldi af því táknskyn (Ásta Ólafsdóttir, 2007). Í umfjöllun Christer Bergsten (1997) um táknskyn styðst hann við skilgreiningu Picciotto og Wah (1993):

„Um leið og skilningur nemenda í algebru dýpkar öðlast þeir táknskyn: hæfileiki til að geta metið gildi táknrænnar hugsunar, skilningur á því hvenær og hvers vegna á að nota hana, og tilfinning fyrir stærðfræðilegri byggingu. Táknskyn er stig stærðfræðilegs læsis umfram talnaskilning sem er undirflokkur þess.“

Rétt fyrir 1990 fer Arcavi ásamt fleirum að rannsaka kennara og nemendur í algebrukennslu fyrir byrjendur. Hann safnaði gögnum um vinnu nemenda og kennara við lausnir algebrulegra þrauta. Í framhaldi af gagnasöfnuninni leitast hann til við að leggja grunn að skilgreiningu á táknskyni á líkan hátt og gert hafði verið fyrir talnaskilning (Arcavi, A., 1994; 1995; 2005). Í tilraun sinni við að leggja grunn að skilgreiningunni tekur hann fram að hún sé ekki endanleg heldur frekar vinnutæki til frekari skoðunar. Hann lítur svo á að með því að leggja grunn að skilgreiningu megi dýpka skilninginn á hugmyndinni um táknskyn, finpússa þurfi hana og gera aðgerðarlega, annaðhvort sem ramma fyrir stærðfræðimenntunarfræðinga eða sem tæki fyrir kennslufræðilega uppbyggingu, jafnvel fyrir hvort tveggja.

Táknskyn

eftir

ÁSTU ÓLAFSDÓTTUR

„Í þessari grein leitast ég við að skoða hugtakið *táknskyn* og tengja þætti þess við námsefni unglingastigs. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að vinna þannig að algebrutákn séu ekki eingöngu merkingarlaus bókstafareikningur heldur hafi sýnilegan tilgang og tengingu við daglegt líf.“

Samantekt þessara þátta er:

1. „*Vinsemd*“ við tákn.
2. Hæfni til að vinna með táknaðar af leikni og geta „lesið í gegnum þær“ sem tvö samtengda þætti við lausn á algebruþrautum.
3. Meðvitund þess að geta á árangursríkan hátt með leikni dregið fram tákntengsl, út frá munnlegum eða myndrænum upplýsingum, sem þarf í ferlinu við að leysa þraut og hæfni til að búa til stæður.
4. Hæfni til að velja mögulega framsetningu tákna fyrir þraut (t.d. hanna tákn fyrir ákveðna breytu) og, ef nauðsynlegt er, hafa í fyrsta lagi hugrekki til að þekkja og gefa gaum að einum ófullnægjandi þætti við valið og í öðru lagi vera úrræðagóður við að leita eftir betra vali.

5. Að gera sér grein fyrir þörf þess að *athuga nánar merkingu tákna* á meðan framkvæmdarferlið á sér stað við lausn þrautar, skoðun á niðurstöðum og samanburður og andstæður þessarar merkingar við eigið innsæi um væntanlegar niðurstöðu(r).

6. Að gera sér grein fyrir að tákn geta *haft mismunandi hlutverk í mismunandi samhengi* og að þróa með sér innsæi fyrir þessum mismun.

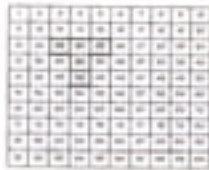
(Arcavi, A., 2005)

Skoðum nánar á hverju Arcavi byggir ofangreinda samantekt:

1. „Vinsemd“ við tákn

„*Vinsemd*“ við tákn merkir að láta sér detta í hug að nota tákn sem tæki til rannsókna á alhæfðan hátt við lausn þrauta, án þess að vera leið til þess. Einnig felur það í sér að geta metið hvort það er viðeigandi að nota tákn í tilteknu tilviki frekar en aðrar nálganir eða framsetningar. Rannsóknir á verkefnum með töfraferning eru grunnur að þessum lið. Í 8-10, *stærðfræði 3* (Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2006: 36) eru verkefni með töfraferninga en ekki síður er áhugavert að nýta verkefnið í hundradtaltatöflu (sjá mynd 1).

1. Skoðuðu T-formið sem hefur verið afmarkað á hundradtaltatöflunni.
- a. Hver er summa tákna í T-forminu?
- b. Afmarkaðu T á tveimur öðrum stöðum á töflunni og finndu summuna.
- c. Hvert er samband milli þeirra summa sem þú fæst?
- 2.4. Teiknaðu upp T-form og skrðu í rúðum stærðu fyrir hverja tölu.
- b. Skrðu nina stærðu fyrir summuna.
- c. Hvað segir stöðan um summu tákna sem mynda T-form í hundradtaltatöflu?
- d. Hvaða staðsetning T-forms myndi gefa summuna 200?




2. Hæfni til að vinna með táknstæður af leikni og geta „lesið í gegnum þær“ sem tvo samtengda þætti við lausn á algebrubrautum

Hér er átt við við reikningslega hæfni annars vegar og heildarskoðun dæma hins vegar. Arcavi tekur sem dæmi

$$3x + 5 = 4x$$

og í stað þess að leysa jöfnuna væri táknlæstur að sjá að $4x$ væru jafnt og $3x$ og $1x$ í viðbót þannig að $x=5$. Þá tekur hann annað dæmi:

$$\frac{2x + 3}{4x + 6} = 2$$

Leysa má jöfnuna og fá $x = -1 \frac{1}{2}$. Við nánari athugun sést að þá yrði nefnarinn 0 þannig að sú lausn gengur ekki. Ef við lesum í gegnum dæmið heildrænt má sjá að með því að þátta nefnarann fæst:

$$\frac{2x + 3}{2(2x + 3)} = 2$$

sem sýnir að lausn er ekki til þar sem $\frac{1}{2} \neq 2$

Á mynd 2 og 3 má sjá dæmi sem leiða nemendur áfram í að lesa í gengum tákntæður.

72. Leystu jöfnurnar með því að finna fyrst hvaða tala ætti að standa í litaða fletinum.

$$\begin{array}{llll} a. \frac{2x}{4} + 5 = 14 & c. \frac{0}{x+3} + 5 = 8 & e. \frac{25}{3(x+1)} = \frac{25}{7} & g. 2 = \frac{3(x-1)}{5} \\ b. \frac{x+2}{2} = -4 & d. 6 = \frac{3x-1}{4} & f. \frac{20}{x} + 2 = 20 - 8 & h. 7 - 4 = \frac{3(x+3)}{8} \end{array}$$

22. Einfaldaðu stæðurnar.

$$\begin{array}{llll} a. \frac{4(x+3)}{4} & c. \frac{4x+12}{x+3} & e. \frac{3x^2-9x}{3x} & g. \frac{10cd^2-5d}{2cd^2-d} \\ b. \frac{4(x+3)}{x+3} & d. \frac{6x+12}{x+2} & f. \frac{7b+14ab}{7b} & h. \frac{xy^2-x^2y^2}{y^2-xy} \end{array}$$

3. Meðvitund þess að geta á árangursríkan hátt með leikni dregið fram tákntengsl

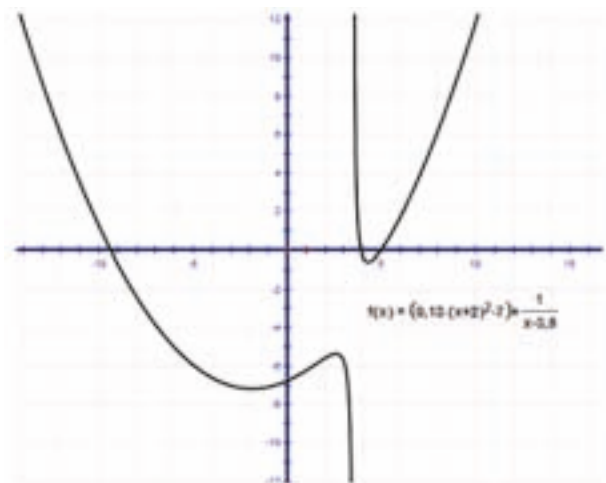
Hér notar Arcavi dæmi byggt á tölvuleik þar sem skjóta á sem oftast á graf í hnitakerfi (líkt gamla leiknum „skjóta herskip“). Leikmaðurinn þarf að sjá fyrir sér grafið og algebruform þess til að ná sem bestum árangri. Þarna tekur hann dæmi um nemanda sem sýnir meiri vitsmunalega hugsun táknskynjunar en þá sem tilgreind er í lið 2.

$$\frac{1}{x-3,5}$$

Nemandinn bætti við hlutfallspættinum $x-3,5$, eftir að hafa þegar fundið út að grafið væri fleygboginn

$$y = 0,13(x+2)^2 - 7,$$

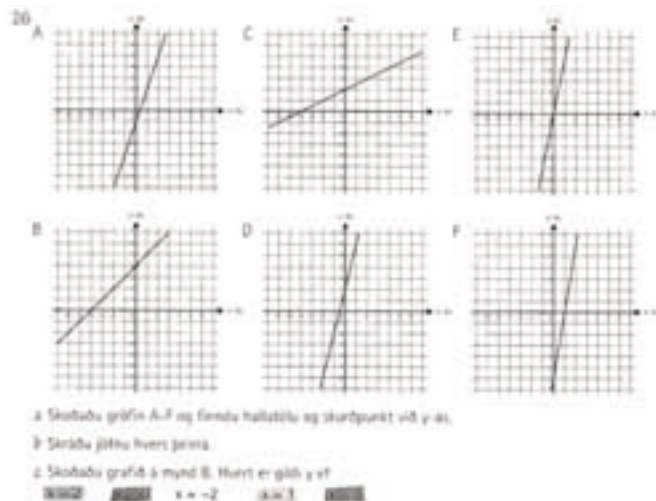
og náði þannig undraverðum árangri í leiknum (Arcavi, A. 1994), (sjá mynd 4).



Hér er verið að ræða um hæfni til að skilja samsetningu falla og uppbyggingu stæðna ásamt meðvitaðri þekkingu á einkennum þeirra til að geta búið þær til út frá mismunandi endurframsetningamáta.

Ef til vill má nota dæmin í 8-tíu, *stærðfræði 3* (sjá mynd 5) til að fara í leik að skjóta á graf. Útaf fyrir sig reyna þau á

hæfileikann að geta dregið fram tengsl milli myndrænnar framsetningar og tákna, í þessu tilviki að skrá jöfnu út frá grafi.



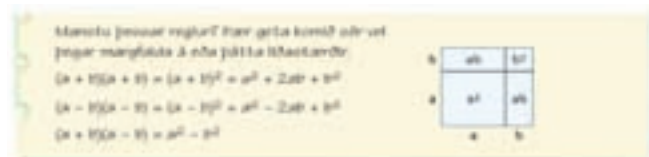
4. og 5. Hæfni til að velja mögulega framsetningu tákna fyrir þraut og að gera sér grein fyrir þörfinni að athuga nánar merkingu tákna á meðan framkvæmdarferlið á sér stað

Hér er átt við að greina við framsetningu stærða að jafngildar stærður geta haft mismunandi merkingu. Tökum sem dæmi skráningu á stærðu fyrir þrjár samliggjandi tölur í röð eins og vinna mætti í verkefni eins og á mynd 1. Við lausnarferlið er viðeigandi að hugleiða hvort það væri meira við hæfi að endurframsetja þrjár samliggjandi tölur sem

$n-1$, n og $n+1$ eða n , $n+1$ og $n+2$

annars vegar samantekið sem $3n$ og hins vegar $3n+3 = 3(n+1)$.

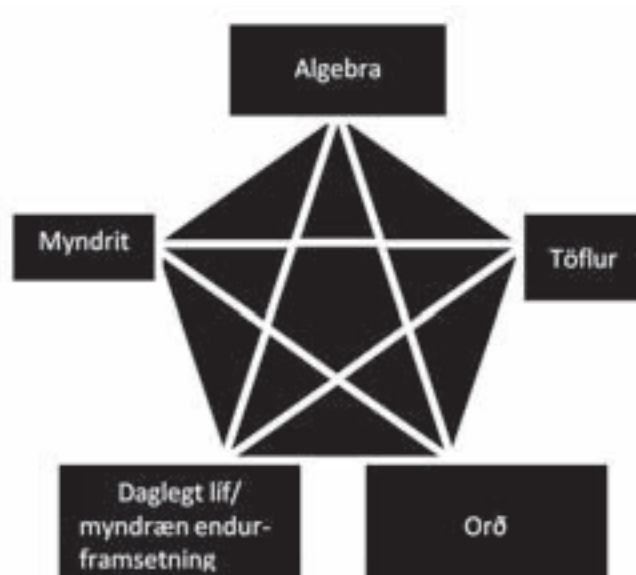
Einnig má velja fyrir sér skráningu á ferningstölu sem n^2 eða $(n+1)^2$ en þá er ferningstalan $n^2+(2n+1)$ sem sýnir að næsta ferningstala er sú fyrri í röðinni að viðbætti næstu oddatölu og birtist þannig sem vaxandi mynstur ferningstalna (sjá mynd 6).



6. Að gera sér grein fyrir að tákna geta haft mismunandi hlutverk í mismunandi samhengi

Táknin geta verið bæði breytur eða stærri heild, s.s. ummál, $U=2(1+b)$. Við getum þannig vikkað hugsun okkar um ferningsreglurnar og samokaregluna sem sjónrænt flatarmál og að í formúlum geta stærðir haft mismunandi tákna s.s. $F=1 \cdot b$ er það sama og $a \cdot b$ á formúlublaði sem fylgt hefur samræmdum prófum hingað til. Það er gaman að velja því fyrir sér hvaða mynd hver og einn gerir sér í hugarlund þegar horft er á stærðuna $3(a+4)$. Hvernig breytist myndin er

breytan tekur hin ýmsu gildi? Er hér um að ræða stærri heild s.s. ummál jafnhliða þríhyrnings, flatarmál rétthyrnings eða er stæðan tákna fyrir þrjá poka með góðu innihaldi?



Á tækniöld eru breyttar áherslur í algebrunámi í grunnskóla og fleiri þættir hennar eru teknir fyrir. Bak við þessar áherslur eru ákveðnar hugmyndir sem snúa að námi og kennslu. Eins og áður er komið fram þá öðlast nemendur táknskyn við aukinn skilning þeirra á algebru (Bergstern, C. O.fl., 1997). Nauðsynlegt er því að gera sér grein fyrir því að dýpkun á skilningi í algebru felst í fjölbreyttum framsetningarmáta. Að geta tengt á milli þátta algebrunnar með mismunandi endurframsetningum er það sem nemendur þurfa að fá tækifæri til að vinna við. Þessa þætti algebrunnar, sem nemendur þurfa að geta tengt á milli, má sjá á mynd 7. Þá þarf nemendum að gefast tími til að rannsaka og skoða dæmin og vinnsluferli sitt ásamt því að velja fyrir sér fjölbreyttum lausnarleiðum. Það að rannsaka og skoða ætti að gefa nemendum tækifæri til að greina hið reglulega út frá mynstrum hvort heldur talnalegum eða myndrænum þannig að greining þeirra beinist að því að greina hið algilda frá hinu sértæka.

Lokaorð

Í þessari grein hef ég leitast við að skoða hugtakið táknskyn og tengja þætti þess við námsefni unglingastigs. Ég valdi að fjalla ekki heildstætt um algebru og algebruhugsun heldur hef afmarkað mig við táknskynið. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að vinna þannig að algebrutákna séu ekki eingöngu merkingarlaus bókstafareikningur heldur hafi sýnilegan tilgang og tengingu við daglegt líf. Í grunnbókum 8-tíu (Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2005; 2006; 2007; 2008) sem er hluti af *Námsefnisflokknum Átta-10* (Námshagstofnun, 2006) er fjöldi verkefna sem gefa nemendum tækifæri til eflingar þeirra þátta sem Abraham Arcavi (1994; 1995; 2005) setur fram til grundvallar fyrir skilgreiningu á táknskyni. Ég hef í greininni tekið dæmi um hvernig styðja

megi nemendur þannig að tákinn verði þeim vinsamleg og þeir nýti þau sem tæki ásamt því að geta lesið þau á heildrænan hátt frekar en að festast í reikniritum. Stærðfræðikennarar þurfa að vera meðvitaðir um mikilvægi táknskyns og hvernig styðja megi nemendur í að öðlast það.

Mig langar í lokin að færa Guðbjörgu Pálsdóttur þakkir fyrir ráðleggingar og yfirlestur greinarinnar.

Heimildir

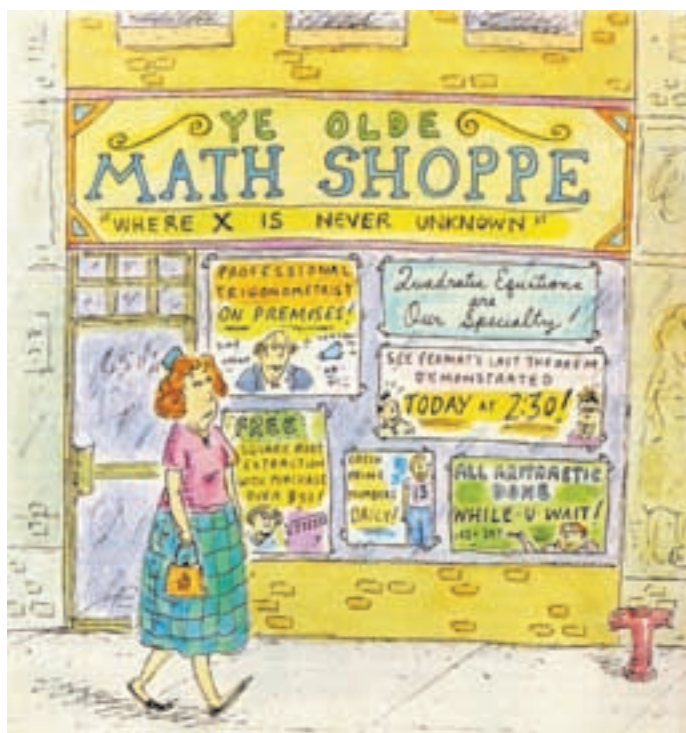
- Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14 (3), s. 24-35.
- Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematic Behavior*. 14, s. 154-162.
- Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 25 (2), s. 50-55.
- Ásta Ólafsdóttir (2007). *Algebra fyrir alla: Áhersla á táknskyn og algebrulega hugsun*. Óútg. lokaritgerð við KHÍ.
- Bergsten, Christer o. fl. (1997). *Algebra för alla*. Möndal: Nämnaren.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir (2005). *8-tíu, stærðfræði 1*. Rvk.: Námsgagnastofnun.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir (2006). *8-tíu, stærðfræði 3*. Rvk.: Námsgagnastofnun.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir (2007). *8-tíu, stærðfræði 5*. Rvk.: Námsgagnastofnun.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir (2008). *8-tíu, stærðfræði 6*. Rvk.: Námsgagnastofnun.
- Námsgagnastofnun (2006). *Stærðfræði fyrir unglingastig*. Vefefni með námsefnisflokknum Átta -10. Veffang: www.nams.is/stae_ungl_stig/index.htm
- Swan, Malcolm. 2000. Making sense of algebra. MT 171 june.
- Swan, Malcolm. 2007. Towards more active learning approaches. NRDC. Sótt á vef www.maths4life.org 22.3.2007.
- Van de Walle, J. A. 1998. *Elementary and Middle School Mathematic: Teaching Developmentally*. 3. útg. NY: Longman. Inc.

Myndir

- Mynd 1: Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2006: 35.
- Mynd 2: Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2007: 103.
- Mynd 3: Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2007: 94.
- Mynd 5: Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2006: 57.
- Mynd 6: Guðbjörg P. og Guðný H. G., 2006: 29.
- Mynd 7: Van de Walle, J., 1998; Friel, Susan, o.fl., 2001.



John Mason á góðri stund á námstefnu Flatar haustið 2008.



Rasmus.is

- stærðfræðivefurinn

Nú eru 10 ár liðin síðan hugmyndin að stærðfræðivefnum Rasmus.is kviknaði. Heimsóknunum á vefinn fer stöðugt fjölgandi. Netsamband hefur batnað, meiri tölvuvæðing hefur orðið í skólum og á heimilum, áskrifendum fjölgað, vefurinn stækkað og fjölbreytnin meiri en nokkur tímann.

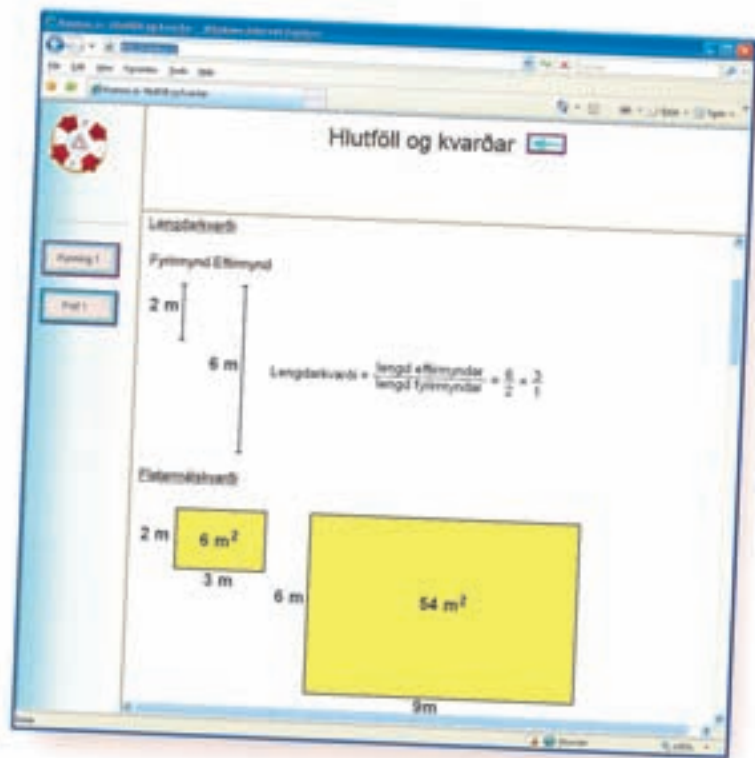
Það er misjafnt hvernig skólar nýta vefinn, það fer allt eftir aðstæðum á hverjum stað. Skólaáskrift gefur kennurum, nemendum og aðstandendum þeirra aðgang að vefnum.

Fyrstu árin var efnið sniðið að námskrá grunnskólans, en smám saman bættist við efni fyrir framhaldsskólann. Fyrir rúmum tveimur árum fengum við Jóhann Ísak Pétursson kennara við Menntaskólann í Kópavogi til liðs við okkur. Jóhann er mikill reynslubolti og hefur kennt á öllum stigum framhaldsskólans. Hann hefur einnig þýtt og samið námsefni, bæði í jarðfræði og stærðfræði.

Nú nær vefurinn langt upp raungreinabrautir, frá grunnskóla og upp í áfanga 503. Þýðingar á önnur tungumál hafa haldið áfram, efni fyrir framhaldsskólastigið er komið á ensku og að hluta til á norsku, dönsku og sænsku. Pólsk útgáfa er í þýðingu og rússnesk og spænsk útgáfa eru til fyrir grunnskólastigið.

Hér hefur nú bæst við nýr möguleiki fyrir kennara og nemendur í grunn- og framhaldsskólum og er vert að benda sérstaklega á möguleika á upprifjun. Á vefnum hafa nemendur möguleika á að tileinka sér nýtt efni, fá annað sjónarhorn til viðbótar við námsbókina og rifja upp.

Á sama hátt geta nemendur á háskólastigi nýtt sér vefinn, hann er upplagður fyrir frumgreinadeildir. Hnappurinn



námsbækur er mikið notaður, en þar er auðvelt að finna efni sem hver og einn er að fást við. (Einungis eru komnar bækur í 3000 flokknum en möguleiki að bæta við ef höfundar óska þess).

Áskriftarverð hefur verið óbreytt frá upphafi og verður áfram óbreytt þetta skólaár. Skólum í áskrift hefur fjölgað, en það hefur gert okkur kleift að halda verðinu óbreyttu. Við stefnum á að fá alla skóla með og erum alltaf tilbúnir að koma í heimsókn og kynna vefinn.

Hugo Rasmus

s. 897 5379, hugo@rasmus.is

Tómas Rasmus

s. 899 3698 tomas@rasmus.is

Umsagnir nemenda og kennara

Borghildur Jósúadóttir, kennari í Grundaskóla:

Ég er að kenna núna stærðfræði í 8. bekk og nota Rasmusvefinn töluvert. Það eru nokkrir krakkar í mínum bekk sem spyrja mig oft um það hvort að þeir megi fara inn á Rasmus.is og vinna í stærðfræði. Það er líka kostur að nemendur geta valið auðveld eða þung verkefni. Það getur líka verið mjög gott fyrir nemendur sem eru ekki góðir í stærðfræði að vinna verkefni við hæfi og fá svörin strax. Það virkar eins og próf fyrir þá. Vefurinn hentar ekki öllum en mjög gott er að hafa val og fjölbreytni og ég leyfi nemendum mínum alltaf að fara inn á vefinn ef þeir biðja um það. Hér á eftir koma nokkrar umsagnir frá nemendum í mínum bekk.

Umsagnir nemenda í 8. bekk í Grundaskóla:

Það er gott að æfa sig í stærðfræði. Ég nota Rasmus.is í skólanum og mér finnst það nauðsynlegt.

Mér finnst hann ágætur að öllu leyti, gagnlegur og góður.

Það er hægt að læra af honum og hann er gagnlegur.

Mér finnst kostur að ég geti séð svörin strax, en mér finnst ekkert svo skemmtilegt inná honum.

Það er þægilegt að vinna í vefnum.

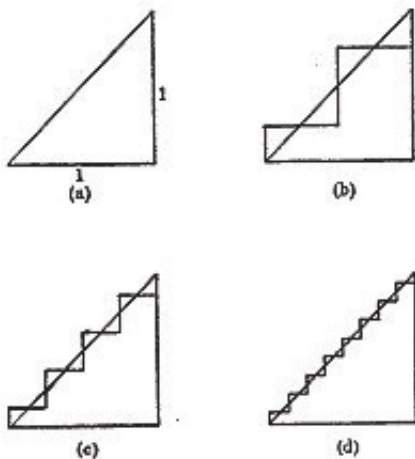


Pólsku nemendurnir Mateusz og Patryk eru ánægðir með pólska hluta Rasmus.is og hafa þetta að segja um vefinn:

Við höfum oft notað Rasmus.is. Okkur finnst vefurinn skemmtilegur, vegna þess að við sjáum útskýringar, dæmi og lausnir. Þetta er góð upprifjun, en við erum búnir með flest dæmin, sem okkur fannst frekar létt.

Þríhyrninga- verkefni fyrir framhaldsskóla

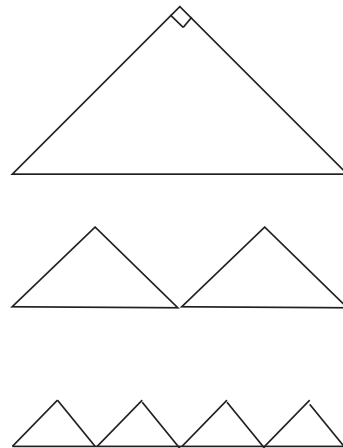
Geturðu ímyndað þér hluti sem ekki er hægt að mæla? Þegar þú ert spurð, eða spyrð sjálf, um lengd einhvers hlutar, hæð þína, þvermál jarðarinnar, fjarlægðina til endimarka Vetrarbrautarinnar, þá efstu ef til vill ekki um að það sé til svar. Hvort sem það er þekkt eða ekki. Í raunveruleikanum hefurðu kannski rétt fyrir þér, en geturðu ímyndað þér hluti sem ekki er hægt að mæla? Ekki hluti sem eru ekki til, heldur raunverulega hluti sem hafa enga lengd eða flatarmál eða rúmmál? Byrjum á verkefni til að rifja aðeins upp ummál og flatarmál þríhyrninga.



1 Á myndinni hér fyrir ofan er rétthyrndur jafnarma þríhyrningur og skammhliðarnar hafa lengdina 1. Nú teiknum við „stiga“ inn á myndina. Byrjum í vinstra horninu. Förmum upp um $1/4$, til hægri um $1/2$, upp um $1/2$, og svo til hægri um $1/2$ og þá upp um $1/4$. Á mynd (c) höfum við skipt hverju þrepi í stiganum til helminga, og þannig ætlum við að halda áfram að skipta, alltaf hverju þrepi í tvo helminga.

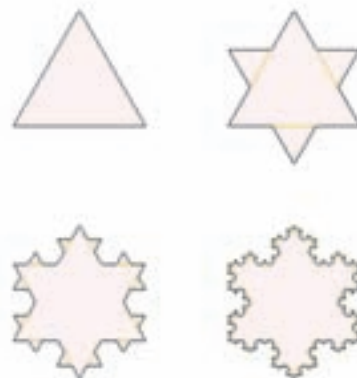
- Hve löng er langhlið þríhyrningsins? Hvert er ummál hans? En flatarmál?
- Hve mörg þrep eru í fjórða stiganum? En stiga númer n ?
- Hvert er ummál tröppumyndanna, þ.e.a.s. ef við notum tröppurnar en ekki langhlið þríhyrningsins?
- Rökstyðjið hvernig þið vitið ummál hvaða tröppumyndar sem er, þó við teiknum nýjar og nýjar myndir með fleiri tröppum. Aukaspurning: svarið sömu spurningum um flatarmál tröppumyndanna.

2 Byrjum með jafnarma rétthyrndan þríhyrning. (Gefið hliðum hvaða lengd sem ykkur þykir henta, en þær verða að vera í innbyrðis samræmi). Svo teiknum við tvo minni, einslaga þríhyrninga, hvor um sig með helmingi styttri langhlið. Höldum svona áfram.



- Hvert er ummál fyrsta þríhyrningsins? En flatarmál?
- Hvert er heildar ummál 30. myndarinnar? En flatarmál?
- Ef við höldum áfram, hver eru ummál og flatarmál myndar númer n ? En ef við höldum áfram óendanlega, hvert verður heildarrúmmálið og hvert verður flatarmálið?

3 Byrjum með jafnhliða þríhyrning. Búum svo til eins þríhyrninga á hverri hlið, með því að skipta hverri hlið í þrjá jafna bíta. Höldum áfram að skipta hverri einustu hlið sem eftir er, alltaf í þrjá jafna bíta.

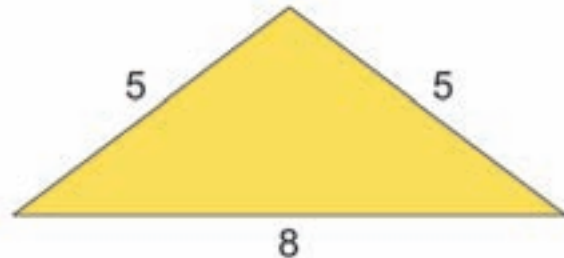
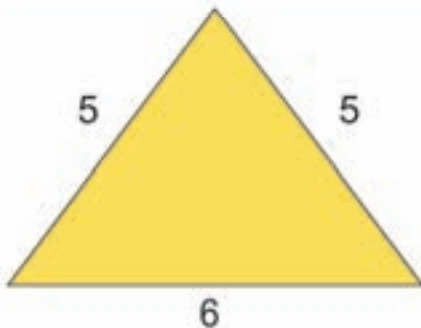
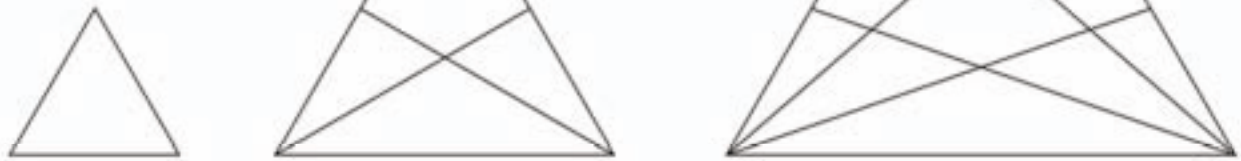


- Hver eru ummál og flatarmál fyrstu fjögurra myndanna?
- En 10. og almennt, hvert er ummál og hvert er flatarmál n -ta marghyrningsins?
- En ef við höldum áfram óendanlega oft, hvert verður heildarummálið og hvert verður flatarmálið?

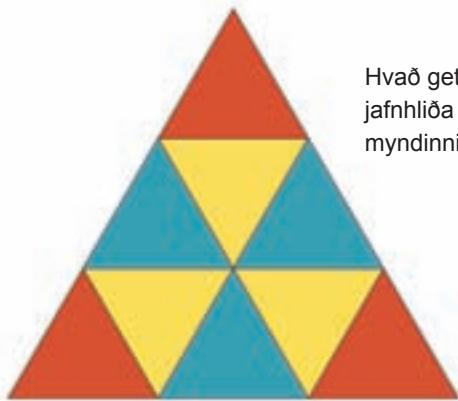
Í þessum verkefnum voruð þið beðin að hugsa ykkur að eitthvað gerðist óendanlega oft. Þið sáuð að til eru óendanlega margar myndir með sama ummál en eins lítið flatarmál og maður vill. Þið sáuð myndir þar sem ummálið getur orðið eins stórt og maður vill („óendanlega stórt“) en flatarmálið helst alltaf takmarkað.

Nokkrar þríhyrningauprautir fyrir grunnskóla

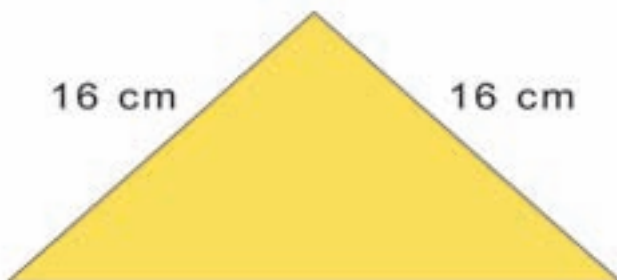
Hve margir þríhyrningar eru á hverri þessara mynda? Hvernig er myndin sem kemur næst á eftir þessum og hve margir þríhyrningar eru í henni?



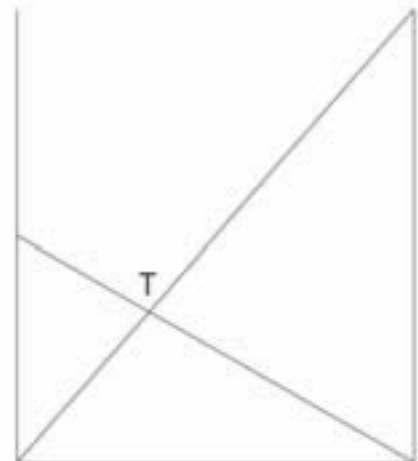
Lengdir hliða þríhyrninganna tveggja eru eins og myndirnar sýna. Hvor þríhyrninganna hefur stærra flatarmál?



Hvað getur þú fundið marga jafnhliða þríhyrninga í myndinni?



Tvær hliðar jafnarma þríhyrningsins eru 16 cm. Þriðja hlið þríhyrningsins er 40 cm styttri en tvöföld summa hinna hliðanna. Finndu flatarmál þríhyrningsins?



Tveimur stigum er komið fyrir í mjóu sundi milli tveggja bygginga sem báðar eru lóðréttar. Endar stiganna eru 4 m og 8 m yfir jörðu. Finnið hæð punktsins T þar sem stigarnir mætast.

Dagur stærðfræðinnar 3
Námstefna Flatar 2008 4
Mason kemur í heimsókn 6

Ingólfur Gislason

Numicon 8

Sesselja G. Guðjónsdóttir

Öskjur - námsmatsverkefni 10

Laufey Einarisdóttir

Skapandi stærðfræði 14

Borghildur Jósúadóttir

Táknskyn 16

Ásta Ólafsdóttir

Rasmus.is 20

Hugo og Tomas Rasmus

Þríhyrningaverkefni 22