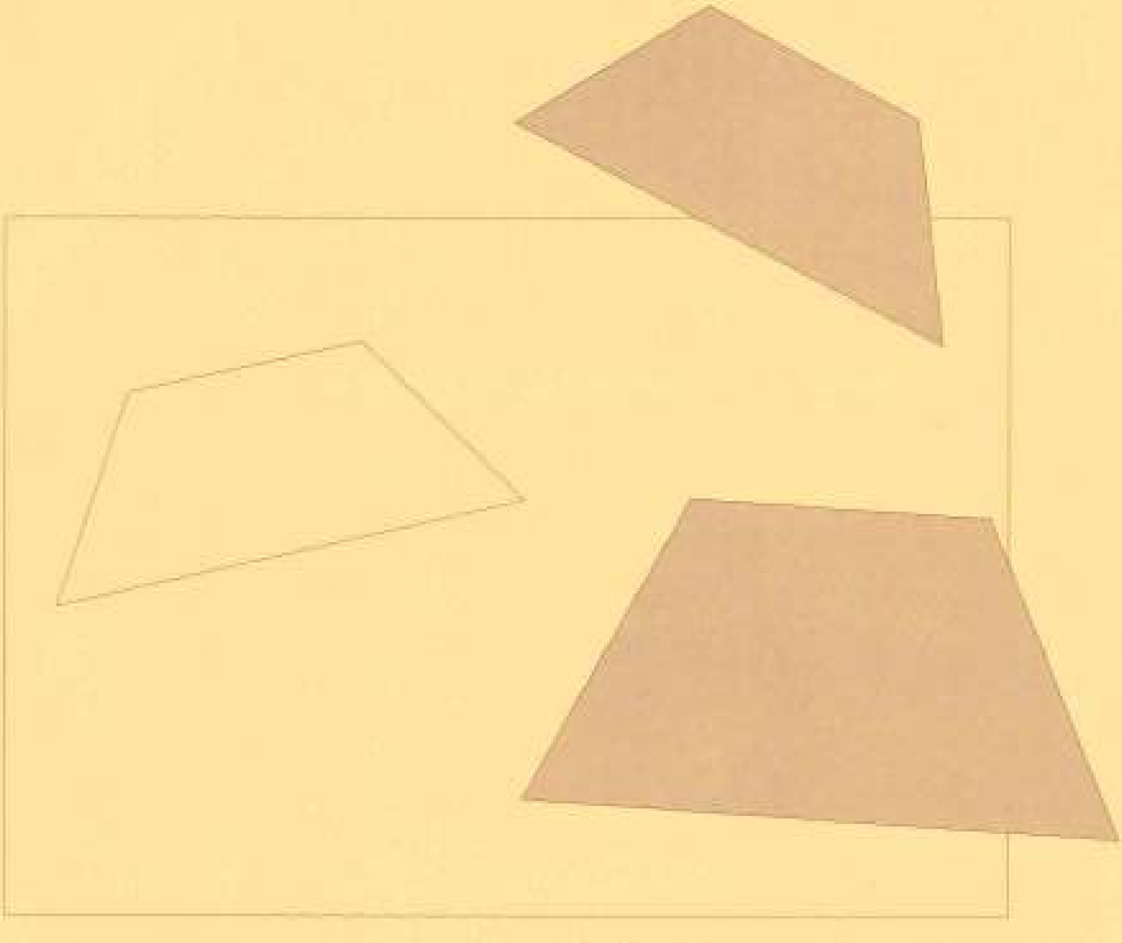
FLATAR mál



2. tbl. 9. árg. september 2001

Málgagn Flatar
samtaka stærðfræðikennara

FLATARmál

Útgefandi: Flötur, samtök stærðfræðikennara, Faxabraut 39, 230 Keflavík.
Ritstjórar og ábyrgðarmenn: Kristinn Jónsson og Sigrún Ingimarsdóttir.
Aðrir í ritnefnd: Jóhann Ísak Pétursson, Kristjana Skúladóttir og Ragnheiður Benediktsson.
Aðstoð við útgáfu: Jóna Benediktsdóttir og Kristín Ósk Jónasdóttir.
Stjórn Flatar: Ragnheiður Gunnarsdóttir formaður, Guðrún Angantýsdóttir varaformaður, Rögnvaldur G. Möller ritari, Birna Hugrún Bjarnardóttir gjaldkeri, Kolbrún Hjaltadóttir meðstjórnandi, Jón Páll Haraldsson og Marta María Oddsdóttir í varastjórn.
Umbrot: Kristinn Jónsson.
Prófarkalestur: Birna Hugrún Bjarnardóttir og Meyvant Þórólfsson.
Teikningar: Jón Kristján Kristinsson.
Upplag: 500 eintök.
Prentun: H-prent ehf, Ísafirði

NÝJAR LEIÐIR Í STÆRÐFRÆÐIKENNSLU

Guðrún Angantýsdóttir
og Kolbrún Hjaltadóttir

Nú á haustdögum sátum við nokkrir kennarar að spjalli um skólamál og ræddum meðal annars um stærðfræðikennslu á unglingastigi og þörfina fyrir breytta starfs- og kennsluhætti á því stigi. Kom þetta kannski aðallega til vegna löggildingar nýrrar aðalnámsskrár og vöntunar á heppilegu námsefni. Í hópnum voru Guðbjörg Pálsdóttir Háteigsskóla, Guðrún Angantýsdóttir Lindaskóla, Kolbrún Hjaltadóttir Breiðholtsskóla, Kristrún Guðjónsdóttir og Marta Gunnarsdóttir báðar úr Foldaskóla, allt kennarar með langa kennslureynslu í stærðfræði að baka og langaði hópinn einfaldlega að breyta til.

Í framhaldi af þessu spjalli ákváðum við að taka upp samstarf, það er að segja við vildum vinna saman um veturinn og styðja hverja aðra við að fara nýjar leiðir og breyta starfsháttum okkar. Það sem við vildum hafa að leiðarljósi var að koma til móts við mismunandi þarfir, getu og áhuga nemenda, vinna stærðfræðiverkefni í tölvu og stuðla að nettengdum samskiptum. Við höfðum áhuga á að leggja fyrir nemendur verkefni sem kræfðust rökhugsunar og annarrar þekkingar í stærðfræði en hefðbundins dæmareiknings. Okkur langaði að þróa nýjar leiðir að vinna verkefni með forritanlega vasareikna, kynna fyrir nemendum tengsl stærðfræði við daglegt líf með því að fá vísindamenn í heimsókn sem kynntu fyrir þeim hvernig þeir notuðu stærðfræði í sínu starfi. Þá vildum við þróa bætt mat á námi nemenda sem hjálpaði þeim að leggja mat á eigin vinnu á faglegan hátt og fá nemendur til að vinna saman og miðla hver öðrum af reynslu sinni. Við höfðum mikinn áhuga á að láta nemendur skrifa um stærðfræði og ýmis verkefni tengd stærðfræði ásamt því að kynna þeim sögu stærðfræðinnar.

Þar sem við kennararnir komum frá mismunandi skólum og bæjarfélögum var áhugi á því að koma á tölvusambandi milli skólanna þar sem nemendur gætu jafnvel skoðað verkefni hvers annars og skipst á skoðunum.

Í vetur höfum við síðan hist mánaðarlega og skipst á kennsluáætlunum, verkefnum og samræmt vinnu okkar í stærðfræðikennslu í 8. bekk. Við höfum einnig farið í heimsókn til hverrar annarrar og aðstoðað við kennslu nýrra verkefna. Þá höfum við skipst á ritgerðarverkefnum, þrautum, hugmyndum til námsmats, könnunum og prófum og skoðað mismunandi verkefnavinnu nemenda okkar. Við höfum sótt námskeið hjá Guðmundi Birgissyni, lektor í KHÍ þar sem við ræddum um hvernig nota má forritanlega vasareikna við kennslu og búið til verkefni sem við höfum lagt fyrir nemendur. Vasareiknana fengum við að láni úr smiðju Kennaraháskóla Íslands sem á 15 vasareikna og skjávarpa sem hægt er að tengja við þá.

Við höfum fengið 3 fyrirlesara af raunvísindasviði til að segja frá sínu starfi, þ.e.a.s. jarðfræði, veðurfræði og hafrannsóknarfræði. Mæltist þetta vel fyrir hjá nemendum og skoðanakönnun leiddi í ljós að rúmlega 80 % nemenda vildu fá fleiri vísindamenn í heimsókn og 75% fannst þetta auka áhuga þeirra á stærðfræði almennt.

Þar sem okkur fannst það námsefni sem til boða stóð ekki vera í takt við aðalnámsskrá höfum við notað bækurnar úr gamla bókaflokknum á unglingastigi, *Talnaspegil* og *Hornalínu*. Einnig notuðum við bókina *Almenn stærðfræði I* og útbjuggum fjölda verkefna. Þá sóttum við efni á Netið og í bækur og má þar nefna *Talnapúkann* sem hentar þessu aldursskeiði afar vel. En í þá bók hafa nemendur sótt efni í ritverk sín sem var

Talnapúkinn kafli 4

Róbert dreymdi enn einu sinni Talnapúkann. Hann var alltaf að draga hann eitthvað með sér og núna voru þeir staddir á stórri strönd. Róbert hafði gleymt vasareikninum eins og venjulega. Talnapúkinn galdraði því stóran vasareikni sem leit út eins og sófi. Talnapúkinn sagði Róbert að slá inn

1:3

Hann gerði það og útkoman varð

0,3333333333333333333333....

Róbert vildi frekar skrifa bara

1/3

en Talnapúkinn sagði að þá yrði hann líka að reikna brotabrot. Því nennti alls ekki og vildi frekar nota vasareikni. Hann vildi líka vita

hvaðan allir þessir 3 koma. Talnapúkinn útskýrði það."Fyrstu 3 fyrir aftan kommuna eru 3 tíundu síðan koma næstu 3 sem eru 3 hundruðustu þriðju 3 eru 3 þúsundustu og svo framvegis.

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003

Næst átti Róbert að margfalda allt með 3.

0,3*3=0,9
0,03*3=0,09
0,003*3=0,009
0,0003*3=0,0009

Svo lagði hann tölurnar saman

0,99999999999999....

Nú gerði Talnapúkinn keðju úr öllum níunum og sagði að keðjan væri endalaus en Róbert vildi ekki viðurkenna að það væri satt fyrr en þeir

Úr verkefnum nemenda úr Talnapúkanum eftir Hans Magnus Enzensberger:

eitt af verkefnum nemenda okkar í vetur. Við létum þá velja sér einn kafla úr bókinni Talnapúkanum og þeir áttu að skrifa útdrátt sem þeir kynntu fyrir samnemendum sínum. Áhersla var lögð á stærðfræðileg viðfangsefni kaflans.

Við höfum látið nemendur vinna veggspjöld um stærðfræði sem þeir kynntu fyrir félögum sínum. Nemendur fengu hugtök úr stærðfræði sem þeir áttu að skilgreina og útfæra á veggspjald.

Eftirfarandi vinnureglur voru til viðmiðunar:

- *Skráið niður hugmyndir sem þið viljið að komi fram á veggspjaldinu.*
- *Skráið á blað útskýringar um viðfangsefnið, sem aðrir nemendur fá með sér heim.*
- *Segið frá hvenær viðkomandi viðfangsefni er notað í daglegu lífi.*
- *Segið frá til hvers þið haldið að við séum að læra þennan þátt stærðfræðinnar.*
- *Undirbúið 5 mínútna fyrirlestur um viðfangsefnið.*

Markmið með þessari vinnu er:

- *Að gera nemendur hæfari við að afla sér upplýsinga úr bókum og af Netinu.*
- *Að fá nemendur til að skilgreina með eigin orðum hvað hugtökin þýða og þjálfa þá í að nota tungumál stærðfræðinnar.*
- *Að fá nemendur til að vinna saman og bera sameiginlega ábyrgð á vinnunni.*
- *Að fá nemendur til að koma fram fyrir aðra og tjá sig.*

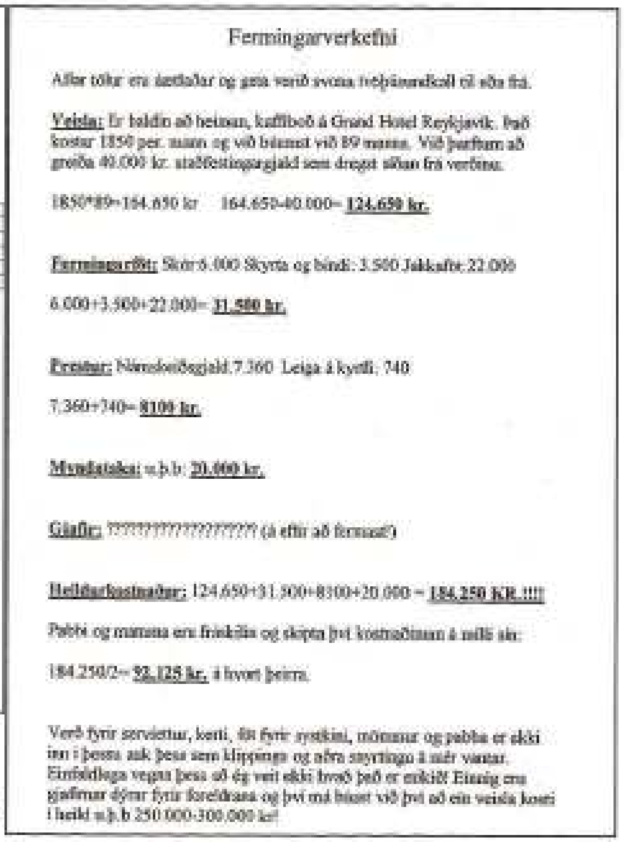
Sýnishorn af veggspjöldum nemenda.

Tvisvar í mánuði fengu nemendur þrautir eða verkefni til að vinna heima. Höfðu þeir viku til að leysa þau og var áhersla lögð á að skila lausnunum vel uppsettum og rökstuddum. Á bls. 10 - 11 hér í blaðinu má sjá lausn á einni þrautinni eftir Andra Bjarnason í 8B Breiðholtsskóla , sem þótti afar vel útfærð. Hér fyrir neðan má einnig sjá nokkur sýnishorn af lausnum og verkefnum.


STÆRÐFRÆÐIVERKEFNI

SPURNINGAR:

Mynd 1 - Símkostnaður


Fermingarverkefni

Veisla: Er haldin að heiman, kaffiboð á Grand Hotel Reykjavík. Það kostar 1850 per. mann og við búumst við 89 manns. Við þurfum að greiða 40.000 kr. staðfestingargjald sem dregst síðan frá verðinu.

1850*89=164.650 kr   164.650-40.000= 124.650 kr.

Fermingarföt: Skór 6.000 Skyrta og bindi: 3.500 Jakkaföt 22.000

6.000+3.500+22.000= 31.500 kr.

Prestur: Námskeiðsgjald 7.360 Leiga á kyrtli: 740

7.360+740= 8100 kr.

Myndataka: u.þ.b: 20.000 kr.

Gjafir: ??????????????????? (á eftir að fermast!)

Heildarkostnaður: 124.650+31.500+8100+20.000 = 184.250 KR.!!!

Pabbi og mamma eru fráskilin og skipta því kostnaðinum á milli sín:

184.250/2= 92.125 kr. á hvort þeirra.

Mynd 2 - Fermingin

Þú mátt velja hvort verkefnið þú vinnur A eða B. Settu verkefnið skipulega og **snyrtilega** upp á rúðustrikað blað og útskýrðu vel alla útreikninga. Gjaldskrár finnur þú á gsm.is eða tal.is.

Verkefni A - heimilissími

Finndu 4 til 5 símareikninga heimilisins síðustu mánuða og flokkaðu símakostnaðinn niður í ýmsa flokka eins og t.d. símtöl í farsíma, símtöl innanlands, símtöl utanlands, mánaðargjald o.s.frv. Hentugt er að búa til töflu svipaða þeirri sem er í verkefni A.

1. Reiknaðu út meðaleyðslu á mánuði í símakostnað fyrir heimilið þennan tíma.
2. Hvað fer mikið að meðaltali á dag í símakostnað?
3. Hve mikið fer í innanlandssímtöl á dag?
4. Hve mikið fer í farsímasímtöl á dag?
5. Finndu tvo aðra flokka á símreikningnum þínum þar sem þú getur reiknað út kostnaðinn.

Verkefni B - GSM-sími

Næstu 4-5 daga skaltu skrá hjá þér hve mörg SMS skilaboð þú sendir og hve oft þú hringir í einhvern annan. Miðaðu við þinn síma. Þú getur búið þér til töflu sem þú skráir í daglega. Hún gæti t.d. litið svona út:

Aðgerð:	**1. dagur**	**2. dagur**	**3. dagur**	**4. dagur**	**5. dagur**
SMS-skilaboð					
Hringt í Tal					
Hringt í Símann					
Hringt í heimasíma					

1. Hve miklu eyðir þú í símakostnað að meðaltali á dag þessa daga?
2. Reiknaðu líka út hve mörg SMS skilaboð þú sendir daglega og hvað það kostar á dag.
3. Hve miklu myndir þú eyða í símakostnað á mánuði með sams konar eyðslu?
4. En á ári?
5. Hve mörg SMS skilaboð myndir þú senda á mánuði miðað við þessa notkun? Hvað kostar það?
6. En á ári? Hvað kostar það?

Fermingarverkefni

Nú er fermingarundirbúningurinn fram undan hjá mörgum ykkar og ekki úr vegi að skoða nánar hve mikið það kostar að halda svona veislu. Jafnvel þótt sum ykkar fermist ekki þá skuluð þið samt skoða þetta.

Nú skaltu fyrst giska á hve mikið fermingarveisla gæti komið til með að kosta: ____________kr.
Aflaðu þér síðan upplýsinga um hina ýmsu útgjaldaliði eftir því sem við á eins og t.d. fjölda gesta (áætla), hvort um matar- eða kaffiboð er að ræða, fermingarföt, myndataka, kostnaður hjá presti, gjafir og fleira er til kann að falla.
Settu þetta skipulega upp á blað og rökstyddu niðurstöður þínar vandlega.

Námsmat

Í sambandi við námsmat höfum við prófað að vera með heimapróf þar sem nemendur fá ákveðinn tíma allt frá einum sólarhring til 5 daga til að leysa ákveðin verkefni og skila. Heimaprófin eru viðamikil og hafa einkum þann tilgang að gefa nemendum tækifæri til að fá hjálp eða aðstoð heima fyrir.

Nokkur dæmi úr heimaprófum sem við höfum lagt fyrir:

1. Íslenskukennari lagði próf fyrir nemendur sína. Þar áttu þeir að tengja saman 6 bókmenntatexta og 6 höfunda. Í bekknum voru 20 nemendur. 5% höfðu ekkert rétt svar, 7% höfðu eitt rétt svar, 13% höfðu tvö rétt svör, 15% höfðu þrjú rétt svör, 40% höfðu 4 rétt svör. Hvað með síðustu 20%?
2. Hver er forgangsröð aðgerða?
3. Skrifaðu sögur um dæmin: $2 \cdot 14 + 5$ og $2 \cdot (14 + 5)$

Þá höfum við leyft nemendum að vera með gögn í prófum t.d. stærðfræðibókina sína eða „svindlmiða" sem þeir hafa búið til sérstaklega fyrir prófið. Þá er á áætlun að leggja fyrir verkleg próf og jafnvel hóppróf seinna meir.

Hvernig hefur þetta svo gengið? Í heild álítum við að þetta hafi gengið nokkuð vel og við erum ánægðar með að hafa farið út í þetta samstarf. Það er alltaf ávinningur af að vinna saman og fá stuðning í svona frumkvöðlastarfi sem við teljum þetta vera. Það sem hefur helst háð okkur er vöntun á heildstæðu námsefni en mikill tími hefur farið í að púsla saman námsefni og búa til verkefni sem taka mið af aðalnámsskrá í stærðfræði. Fundirnir okkar hafa verið frjóir og umræður upplífgandi og nytsamar. Hugmyndir og verkefni hafa verið reifuð, löguð til og skipulögð. Við erum sérlega ánægðar með verkefnin með forritanlegu vasareiknana og ætlum að koma meira inn á þann þáttinn með nemendum okkar næsta vetur.

Við sóttum um styrk í Þróunarsjóð grunnskóla fyrir þetta verkefni í vetur og fengum tæpa hálfa milljón til að fylgja þessum vinnubrögðum eftir.

Í haust er á dagskrá námskeið á vegum Flatar þar sem við segjum nánar frá vasareiknunum og verkefnum tengdum þeim sem við vorum með hjá nemendum okkar.

Guðrún er kennari við Lindaskóla í Kópavogi

Kolbrún er kennari við Breiðholtsskóla í Reykjavík.

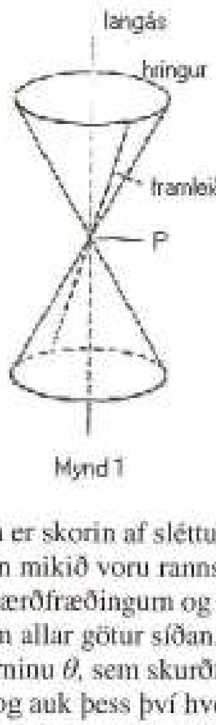
Keilusnið

Magnús Ó Ingvarsson

Þegar talað er um keilu í daglegu tali sjá flestir fyrir sér hlut sem er að lögun eins og brauðform fyrir ís. Þetta var í gamla daga kallað kramarhús. Stærðfræðingur sér fyrir sér hlut, sem er eins og tvö kramarhús, sem snúa oddunum saman. Það er kölluð stærðfræðileg keila. Með stærðfræðilegri keilu er átt við yfirborðsflöt, sem myndast við það að línu, λ, sem kölluð er framleiðari og er föst í einum punkti, P, sé snúið eftir hringlaga ferli, sem liggur í fleti hornréttum á línuna PO, þar sem O er miðja hringsins. Línan PO er langás keilunnar sem myndast.

Hornið á milli λ og langássins er ϕ.

Mynd 1 sýnir stærðfræðilega keilu.



Mynd 1

Þegar keilan er skorin af sléttum fleti myndast skurðferlar, sem mikið voru rannsakaðir af hinum fornu, grísku stærðfræðingum og af seinni tíma stærðfræðingum allar götur síðan. Lögun ferlanna er háð horninu θ, sem skurðflöturinn myndar við langásinn, og auk þess því hvort flöturinn sker punktinn P eða ekki. Þessir skurðferlar nefnast keilusnið.

Gömlu stærðfræðingarnir

Fornu grísku stærðfræðingarnir Evklíð, Archimedes og Apollonius frá Perga fengust við rannsóknir á keilusniðunum. Evklíð (nálægt 300 fK.) skrifaði grundvallarrit í flatarmyndafræði, sem nefnt var Elements. Þetta rit var notað til kennslu í þessum fræðum í meira en 2000 ár. Í ritum Evklíðs er keilusniðum lýst í grundvallaratriðum, en hann mun ekki hafa rannsakað þau fræðilega.

Archimedes (nafnið þýðir „Sá sem mælir bogana", en hann hét í raun eitthvað allt annað) skrifaði eitthvað um keilusnið. Hann bjó í Syrakúsu á Sikiley og var uppi 287 - 212 fK. Hann var drepinn af rómverskum hermanni eftir að Rómverjar höfðu lagt undir sig grísku nýlendurnar á Sikiley í annarri Púnverjastyrjöldinni. Sagt er að Archimedes hafi teiknað rúmfræðilegar myndir í sand á ströndinni og þegar þennan rómverska hermann bar að sagði Archimedes við hann: „Noli tangere circulos meos" eða: „Snertu ekki hringina mína." Þetta urðu hans síðustu orð, segir sagan, því að hermaðurinn móðgaðist og drap hann.

Samtímamaður Archimedesar að hluta, en þó um aldarfjórðungi yngri, var Apollonius frá Perga (f. um 261 fK). Perga er í Litlu Asíu í núverandi Tyrklandi. Hann skrifaði mikið verk um keilusnið og voru það 8 bækur alls. Í þessu riti notar hann fyrstur manna þau nöfn keilusniðanna, sem enn þann dag í dag eru notuð: ellipsa, parabóla og hyperbóla. Með skrifum sínum ávann hann sér mikla virðingu og var jafnan kallaður „rúmfræðingurinn mikli".

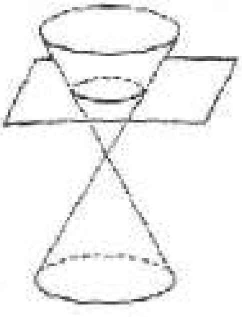
Eftir þessa menn urðu nánast engar framfarir í þekkingu manna á keilusniðum fyrr en tæpum 2000 árum síðar, þegar franski stærðfræðingurinn René Descartes hóf að kanna þau á fyrri hluta 17. aldar. Hann er þekktastur fyrir að vera upphafsmaður hnitakerfisins.

Keilusniðin

Eins og áður hefur komið fram, myndast keilusnið við það að keila sé skorin með fleti. Hornið á milli flatarins og langáss keilunnar nefnist θ og hefur stærð þess áhrif á lögun skurðflatarins. Einnig skiptir máli hvort flöturinn liggur í gegnum P eða ekki. Ef skurðflöturinn sker P, þá koma fram skurðferlar, sem geta verið punktur, ein lína eða tvær línur. Þessi form eru venjulega ekki talin með keilusniðum og eru á ensku kölluð „degenerate forms". Við gætum nefnt þau óeiginleg keilusnið.

Punktur myndast ef keilan er skorin með fleti í gegnum P, sem snýr þannig að $\theta > \phi$. Lína myndast við það að skera í gegnum P þannig að $\theta = \phi$. Ef $\theta < \phi$ fást tvær línur.

Til þess að mynda hin eiginlegu keilusnið, sem eru hringur, sporbaugur, fleygbogi og breiðbogi, þarf að gæta þess að skurðflöturinn liggi ekki í gegnum punktinn P. Hringur fæst með því að skera keiluna undir 90° horni, þ. e. $\theta = 90°$. (Sjá mynd 2).

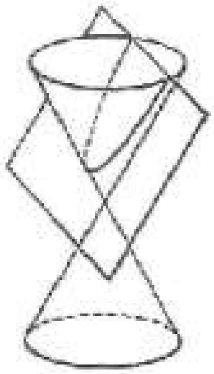


Mynd 2

Sé hornið milli skurðflatar og langáss minnkað, þ. a. $\phi < \theta < 90°$, þá breytist lögun skurðferilsins og hættir að vera hringur, en verður þess í stað sporbaugur (ellipsa, sjá mynd 3).

Mynd 3

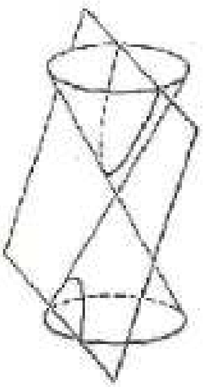
Þessir tveir síðastnefndu ferlar eru lokaðir eins og flestir vita, en önnur keilusnið eru opin (nema ef vera skyldi punkturinn P, sem kannski mætti líta á sem hring með radíus 0). Fleygbogi fæst fram með því að skera keiluna þannig að $\theta = \phi$. Það þýðir það að skurðflöturinn er samsíða hliðarfleti keilunnar.



Mynd 4

Sennilega er þetta það keilusniðanna, sem flestir þekkja vel, næst á eftir hringnum. Fleygbogi, hringur og sporbaugur eiga það sameiginlegt að skurðflöturinn sker eingöngu annan hluta keilunnar.

En þá er eftir síðasti möguleikinn, sem myndast við það að $\theta < \phi$. Þetta tilvik myndar breiðboga (hyperbólu), sem er tvöföld, því að báðir hlutar keilunnar eru skornir. (Sjá mynd 5).



Mynd 5

Í töflunni efst á næstu baðsíðu má sjá þessi atriði dregin saman í stutt mál.

Heiti	inniheldur P	stefna skurð-flatar, θ	eiginlegt keilu-snið	sker báða hluta keilu
punktur	já	$\langle\phi,90°]$	nei	?
ein lína	já	ϕ	nei	já
tvær línur	já	$[0°,\phi\rangle$	nei	já
hringur	nei	90°	já	nei
sporbaugur	nei	$\langle\phi,90°\rangle$	já	nei
fleygbogi	nei	ϕ	já	nei
breiðbogi	nei	$[0°,\phi\rangle$	já	já

Nokkrir eiginleikar eiginlegra keilusniða

Eiginleikar eiginlegu keilusniðanna eru margir og flestir þeirra eru ákaflega mikilvægir, bæði stærðfræðilega og eðlisfræðilega. Hér verður aðeins tæpt á nokkrum þeim helstu.

Hringur er sá ferill, sem hefur alla punkta sína í fastri fjarlægð frá föstum tilteknum punkti, miðju. Miðpunktur hringsins verður að sjálfsögðu til við það að skurðflöturinn sker langás keilunnar. Til þess að benda á hversu mikilvægur þessi eiginleiki hrings er nægir að benda á hjólið, en það hefur löngum verið talið með mikilvægustu uppgötvunum mannkyns. Sporbaugur dregur hið íslenska nafn sitt af því að sú er lögun brauta reikistjarnanna um sólu. Stundum er sagt að sporbaugur sé eins og „útflattur" hringur og er sú hugmynd notuð í nafngiftinni flatvöxtur (eccentricity), sem verður fjallað um hér síðar. Sporbaugsferillinn hefur þann eiginleika, að allir punktar hans hafa jafna summu fjarlægða frá tveimur föstum tilteknum punktum, sem jafnan eru nefndir brennipunktar (foci). Þessi ferill eða einhver hluti hans er mjög algengur í skreytilist.

Fleygbogi er flestum framhaldsskólanemum vel kunnur. Þetta er sá ferill sem myndast af braut hlutar, sem fleygt er skáhallt upp í loftið. Hlutur, sem látinn er renna eftir borðplötu fram af brúninni, fellur í hálfan fleygboga þar til hann hafnar á gólfinu. Fleygbogi hefur þann eiginleika, að allir punktar hans hafa jafna fjarlægð frá föstum punkti (brennipunkti) og fastri línu (leiðilínu), sem er hornrétt á samhverfuás (langás) fleygbogans. Fleygbogamyndaður spegill sendir frá sér samsíða ljósgeislavönd ef ljósuppsprettan (peran) er sett í brennipunktinn. Á hinn bóginn safnar spegillinn öllum geislum frá fjarlægum ljósgjafa eins og sól eða stjörnu saman í brennipunktinn og er það ástæða nafnsins brennipunktur. Slíkir speglar eru til dæmis notaðir til þess að framleiða ofurhita á litlu takmörkuðu svæði. Fleygbogaformið er líka notað í loftnet (skerma) sem algeng (ir) eru til sjónvarpsmóttöku. Ennfremur til þess að beina hljóðbylgjum frá daufri uppsprettu að hljóðnema, sem staðsettur er í brennipunktinum.

Breiðbogi er eina keilusniðið sem er í tveimur aðskildum hlutum. Hann hefur þann eiginleika, að sérhver punktur á breiðboganum hefur fastan mismun fjarlægðanna frá tveimur föstum punktum, brennipunktum. Breiðbogi hefur tvær aðfellur, sem má líta á sem þær beinu línur sem myndast við að hliðra skurðfletinum sem myndar breiðbogann þangað til hann sker topppunkt keilunnar. Sé keilan rétthyrnd eru aðfellurnar hornréttar hvor á aðra. Dæmi um slíkan breiðboga er y = 1/x, sem til dæmis er notaður til þess að skilgreina náttúrulegan logra af x. Í alheiminum hefur breiðboginn líka sitt sæti, því sumir himinhnettir eins og stórar halastjörnur ganga eftir breiðbogabraut. Þær koma þá utan úr fjarskanum inn í sólkerfið, taka allkrappa beygju og fjarlægjast síðan aftur og koma aldrei til baka.

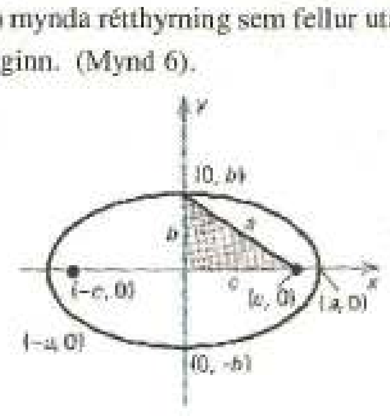
Jöfnur keilusniða

Eiginlegu keilusniðin hafa jöfnur, sem oft eru settar fram á eftirfarandi hátt:

Hringur: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ þar sem miðja hringsins er í (a,b) og radíus er r.

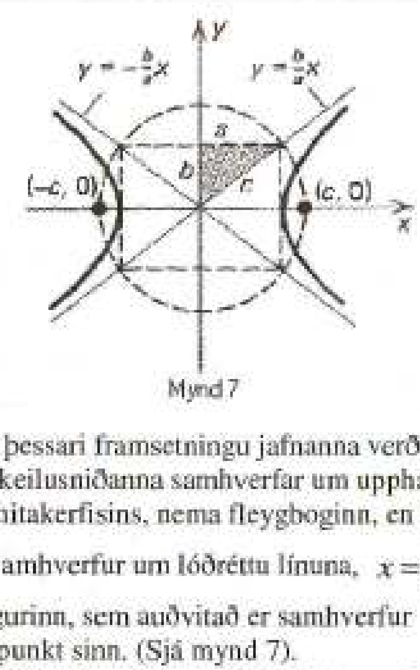
Lóðréttur fleygbogi: $ax^2+bx+cy+d=0$ eða algengara: $y=ax^2+bx+c$.

Sporbaugur: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ þar sem a er hálfur langás og b er hálfur skammás og punktarnir $(\pm a, \pm b)$ mynda rétthyrning sem fellur utan um sporbauginn. (Mynd 6).



Mynd 6

Breiðbogi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ þar sem punktarnir $(\pm a, \pm b)$ mynda rétthyrning á milli boganna og framlengdar hornalínur hans eru aðfellur boganna.



Mynd 7

Með þessari framsetningu jafnanna verða myndir keilusniðanna samhverfar um upphafspunkt hnitakerfisins, nema fleygboginn, en hann verður samhverfur um lóðréttu línuna, $x = \frac{-b}{2a}$ og hringurinn, sem auðvitað er samhverfur um miðpunkt sinn. (Sjá mynd 7).

Að sjálfsögðu er hægt að umrita þessar jöfnur á ýmsa vegu. Einnig er hægt að sýna fram á að öll keilusniðin má tákna með einni algebrujöfnu, sem er annars stigs í x og y, þannig:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sambandið á milli stærðanna A, B og C greinir á milli keilusniðanna sporbaugs, fleygboga og breiðboga. Stæðan $B^2 - 4AC$ nefnist greinir (e. discriminant) og greinir hún á milli tegundanna þannig:

a) fleygbogi ef $B^2 - 4AC = 0$
b) sporbaugur ef $B^2 - 4AC < 0$
c) breiðbogi ef $B^2 - 4AC > 0$

Þó getur átt sér stað að um „degenerate" form sé að ræða (þ.e. línu eða tvær línur). Þannig eru eftirfarandi jöfnur fleygbogi, sporbaugur og breiðbogi í þeirri röð:

$$3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0 \;;$$
$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \;;$$
$$xy - y^2 - 5y + 1 = 0 \;.$$

Í því tilviki að $B = 0$ og $A = C$ er um hring að ræða ef $\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0$.

Ekki verður nánar rætt um þetta hér en aðeins sýnt eitt dæmi um tvær línur sem skerast:

$$-2x^2 - xy + y^2 + 5x - 4y + 3 = 0 \;.$$

Greinirinn er hér $(-1)^2-4(-2)(1) = 1+8 = 9$, sem virðist benda til þess að um breiðboga sé að ræða. Svo er þó ekki því að stæðan hér að ofan þáttast í $(2x-y+1)(-x-y+3) = 0$ sem sýnir að þetta eru beinu línurnar $y = 2x + 1$ og $y = -x + 3$.

Flatvöxtur

Í þeim keilusniðum sem hafa tvo brennipunkta, sporbaug annars vegar og breiðboga hins vegar, er talað um flatvöxt, sem fyrir sporbauginn er mælikvarði á frávik ferilsins frá hringlögun. Einnig er hugtakið til fyrir hring og fleygboga. Í sporbaug er langásinn 2a og skammásinn 2b. Fjarlægðin á milli brennipunktanna er 2c, þar sem $c^2 = a^2 - b^2$. Þar sem $0<b<a$ sést að c er rauntala og $c<a$. Í breiðboga er ekki um að ræða langás og skammás. Þar er hins vegar fjarlægðin á milli „oddpunkta" boganna jöfn 2a. Fjarlægðin á milli brennipunktanna er 2c, þar sem $c>a$. b ákvarðast þannig að $b^2 = c^2 - a^2$ en þá er $c^2 = a^2 + b^2$. Hér má vekja athygli á því að í sporbaug er um mismun ferninga að ræða, en í breiðboga hins vegar summu ferninga.

Flatvöxtur er skilgreindur út frá stærðunum c og a. Flatvöxturinn heitir á ensku (og ýmsum öðrum tungumálum) eccentricity og er því táknaður með bókstafnum e. Skilgreining flatvaxtar er þessi: $e = \frac{c}{a}$. Þetta á jafnt við um sporbaug og breiðboga.

Athugum nú tilvik þar sem flatvöxtur sporbaugs væri núll. Það felur í sér að $c = 0$, en þá er líka $a = b$, eða að langás og skammás eru jafnir. En þá er sporbaugurinn í raun hringur og brennipunktarnir falla saman í einn punkt í miðju hringsins. Sé á hinn bóginn um mjög „teygðan" sporbaug að ræða, er b mjög smátt í samanburði við a, en það leiðir til þess að e stefnir á 1 með vaxandi a fyrir fast b. Svo að sporbaugur hefur flatvöxt á bilinu $\langle 0,1\rangle$ með jaðarform sem eru hringur annars vegar og fleygbogi hins vegar. Ef flatvöxtur er stærri en 1 er um breiðboga að ræða, enda er $\frac{a^2+b^2}{a^2} > 1$.

Greinilega eru engin takmörk fyrir því hve stór tala flatvöxturinn getur orðið. Hins vegar er líka ljóst, að ef c og a eru nokkurn veginn jafnar, verður b lítið miðað við a og e verður nokkurn veginn 1. Þá hefur breiðboginn nokkurn veginn fleygbogaform. Ef á hinn bóginn c er mjög stórt miðað við a, þá felur það í sér að b er mjög stórt miðað við a og breiðboginn verður mjög gleiður. Jaðartilvikið er tvær samsíða línur með millibilið 2a.

Þar sem þverskurður jarðar er ekki hringlaga getum við skoðað flatvöxt hennar. Radíus jarðar er nálægt 6378,1 km við miðbaug, en 6356,8 km við heimskaut. Þessar stærðir eru a og b. Þá fæst að $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 520{,}8$ en þá er flatvöxturinn 520,8/6378,1 = 0,082. Annað dæmi um flatvöxt gætum við tekið sem flatvöxt brautar hinnar frægu halastjörnu Halley's. Eins og kunnugt er hefur hún geysilangan umferðartíma (sást síðast 1986 og er væntanleg næst árið 2061). Langás brautarinnar er 36,18 stjarnfræðieiningar en skammásinn er 9,12. Því er flatvöxtur brautarinnar nokkurn veginn 0,97. Halastjarnan Kohoutek hefur braut með flatvöxtinn 0,9999. (Ein stjarnfræðieining er jöfn meðalradíus jarðbrautarinnar á leið hennar um sólu og er nálægt 150 milljón kílómetrar.)

Magnús er kennari við Fjölbrautaskóla Suðurnesja

Heimildir:

Thomas and Finney: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison Wesley 1984; Shenk: *Calculus and Analytic Geometry*, Scott, Foresman and Company 1984 (myndir); Carman og Carman: *Algebra I og II*, Ísafoldarprentsmiðja 1980; http://www.seds.org/nineplanets/nineplanets/halley.html; *Encyclopaedia Britannica*, 1968; *Encarta '97* 1997; Cristopher Clapham: *Oxford Concise Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press 1996; *Almanak* Hins íslenska þjóðvinafélags 2000, Reykjavík 1999.

***Athugasemd höfundar**: Samstarfsmaður minn í Fjölbrautaskóla Suðurnesja, Ragnheiður Gunnarsdóttir, formaður Flatar, skoraði á mig að skrifa grein í þetta tölublað Flatarmála. Undan því varð ekki vikist. Einnig bað hún mig að skora á einhvern góðan stærðfræðing að skrifa í næsta blað. Þess vegna skora ég hér með á Kristján Ásmundsson, stærðfræðikennara og settan aðstoðarskólameistara Fjölbrautaskóla Suðurnesja að skrifa grein um sjálfvalið stærðfræðilegt efni í næsta tölublað og láti hann síðan boltann ganga.*

Hver á fiskinn?

1. Við götu eru fimm hús í fimm mismunandi litum.
2. Í hverju húsi búa menn af mismunandi þjóðerni.
3. Eigendurnir fimm drekka mismunandi drykk hver, reykja sína tegund af tóbaki hver og eiga hver sína tegund af gæludýri.
4. Enginn á sömu tegund gæludýrs, enginn reykir sömu tóbakstegundina eða drekkur sömu drykkjartegund.

Vísbendingar:

A. Bretinn býr í rauðu húsi.
B. Svíinn á hund.
C. Daninn drekkur te.
D. Græna húsið er vinstra megin við hvíta húsið.
E. Eigandi græna hússins drekkur kaffi.
F. Sá sem reykir Pall Mall vindla á páfagauk.
G. Eigandi gula hússins reykir Dunhill.
H. Maðurinn í miðhúsinu drekkur mjólk.
I. Norðmaðurinn býr í fyrsta húsinu.
J. Sá sem reykir blandað tóbak býr við hlið þess sem á kött.
K. Sá sem á hest býr við hliðina á þeim sem reykir Dunhill.
L. Sá sem reykir BlueMaster drekkur bjór.
M. Þjóðverjinn reykir Prince.
N. Norðmaðurinn býr við hliðina á bláa húsinu.
O. Sá sem reykir blandað tóbak býr við hlið þess sem drekkur vatn.

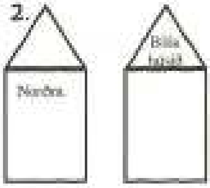
Spurningin er: Hver á fiskinn?

Þrautin hér að ofan birtist í 2. tbl. 8. árgangs Flatarmála og óskaði ritstjórnin eftir frásögnum af vangaveltum nemenda og sýnishornum af lausnum þeirra. Okkur hefur borist lausn Andra Bjarnasonar í 8. bekk í Breiðholtsskóla og birtum við hana hér fyrir neðan.

1.

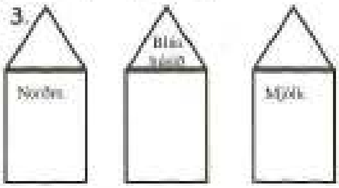
Norðmaðurinn býr í fyrsta húsinu.

2.



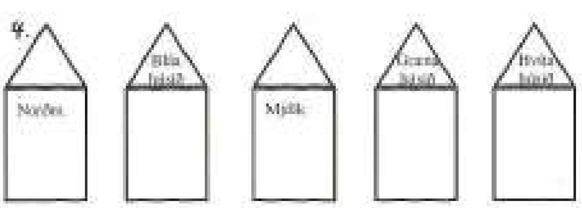
Norðmaðurinn býr við hliðina á bláa húsinu.

3.



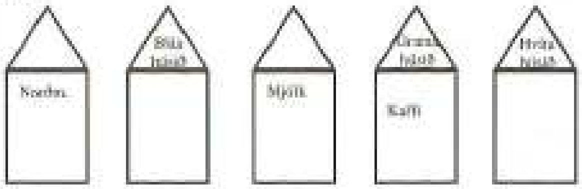
Maðurinn í miðhúsinu drekkur mjólk.

4.



Græna húsið er vinstra megin við hvíta húsið (af því að íbúi græna hússins drekkur kaffi og miðhússins mjólk).

5.



Íbúi græna hússins drekkur kaffi.

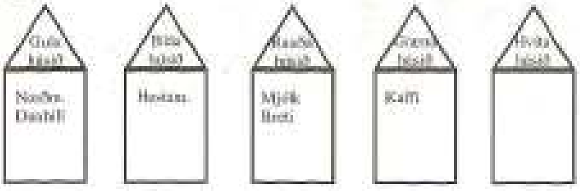
6.

Bretinn býr í rauða húsinu og er þá í miðjunni af því að Norðmaðurinn býr í fyrsta húsinu. Þá er húsið sem eftir er gult.

7.

Sá sem býr í gula húsinu reykir Dunhill.

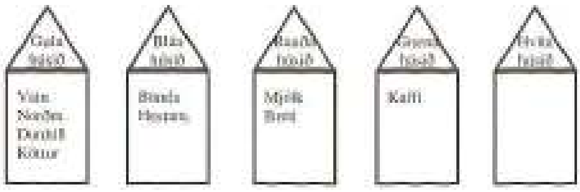
8.



Hestamaðurinn býr við hliðina á þeim sem reykir Dunhill.

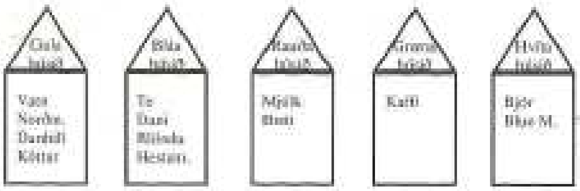
9. Sá sem reykir Blöndu býr við hliðina á þeim sem drekkur vatn (gula húsið eða bláa húsið sem kemur til greina af því að þau eru við hliðina á hvort öðru — rauða/drukkið vatn, græna/drukkið kaffi, hvíta húsið stendur sér).

10. Sá sem reykir Blöndu býr við hliðina á kattareiganda. Getur bara verið gula húsið af því að í bláa er hestamaður.

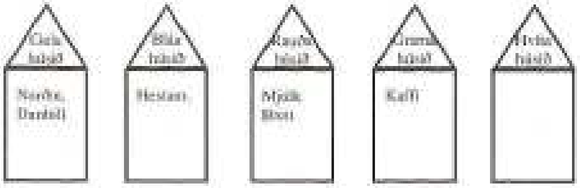


11. Daninn drekkur te. Getur þá bara verið í bláa eða hvíta húsinu.

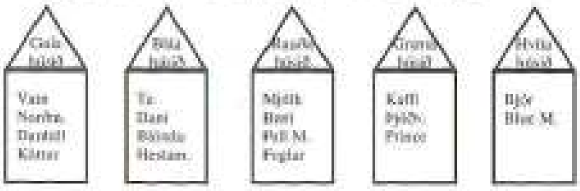
12. Sá sem reykir Blue Master drekkur bjór, þ.e.a.s. getur bara verið í hvíta húsinu af því að í bláa húsinu er reykt Blanda.



13. Þjóðverjinn reykir Prince — getur bara verið í græna húsinu.

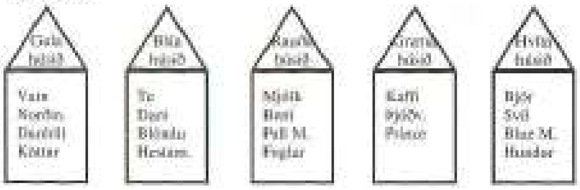


14. Sá sem reykir Pall Mall ræktar fugla.



Getur bara verið Bretinn.

15. Svíinn á hund. Getur bara verið í hvíta húsinu.



Svar: Þjóðverjinn á fiskinn.

Pizzuveisla

Pétur pantar pizzur fyrir 40 manns. Hann pantar 17 pizzur, nokkrar stórar og nokkrar litlar. Hver stór pizza er fyrir fjóra en tveir eru um hverja litla pizzu. Hve margar stórar pizzur pantar Pétur og hve margar litlar?

Tilraunaverkefni fyrir bráðger börn á miðstigi

MEYVANT ÞÓRÓLFSSON

Umræðan um þörf fyrir námstilboð handa hæfileikaríku námsfólki er ekki ný af nálinni, þótt hún hafi farið vaxandi á undanförnum árum. Í núgildandi lögum og námskrám hérlendis kemur áherslan á námstækifæri við hæfi allra sterkt fram og skýrt tekið fram að skólinn verði að bjóða upp á nám við hæfi allra einstaklinga sem efli þá og þroski. Meiri hefð er fyrir því hér á landi að skólinn komi til móts við þarfir nemenda með sértæka námserfiðleika, en nemenda sem þurfa meiri ögrun og viðameiri viðfangsefni en almennt er boðið upp á í bekkjarkennslu. Í Aðalnámskrá grunnskóla, almennum hluta, frá 1999 segir orðrétt um þetta:

> Mjög duglegir nemendur, afburðanámsmenn og nemendur, sem búa yfir sérhæfileikum á vissum sviðum, eiga líka rétt á að fá námstækifæri við sitt hæfi. Þeir eiga að fá tækifæri til að þroska sérhæfileika sína og nýta tímann til hins ítrasta með því að glíma við fleiri og flóknari markmið og krefjandi nám. (bls. 21)

Það kemur jafnvel fyrir að afburðanámsfólk hafi meiri þekkingu og kunnáttu á ákveðnum sviðum en kennarar þeirra, ekki síst þegar komið er fram yfir 10 ára aldur. Slík börn hafa gjarnan verið nefnd bráðger (e. *gifted children*). Margt hefur verið skrifað um aðstæður slíkra barna og rannsóknir gerðar. Menn velta gjarnan fyrir spurningum eins og: Er hér um að ræða sérstakan, afmarkaðan hóp? Hver eru þá einkenni þessa hóps?

Á vef Science and Arts Academy (www.thegiftedschool.org/) segir meðal annars um þennan hóp barna:

- Þroski bráðgerra barna getur verið breytilegur: Sama barn getur verið mjög misjafnlega á vegi statt hvað varðar félagslegan, líkamlegan, tilfinningalegan og vitsmunalegan þroska.
- Bráðger börn eru góð að leysa þrautir og vilja gjarnan fá samþætt og opin verkefni sem kalla ekki endilega á eitt rétt svar. Þau sækjast ekki eingöngu eftir háum einkunnum, heldur lausnum á raunverulegum vandamálum.
- Bráðger börn eiga gott með að hugsa óhlutbundið og finna auðveldlega regluleika í flóknum verkefnum. Þau eiga hins vegar ekki alltaf auðvelt með að velja eitt rétt svar á krossaprófi, vegna þess að þau leita gjarnan leiða til að réttlæta alla svarmöguleika.
- Það er hins vegar algengur misskilningur að bráðger börn séu sjálfbjarga um viðfangsefni og framtíð þeirra sé mjög örugg og full af tækifærum, þau viti hvert þau vilji stefna og ráði nánast við allt sem þau taka sér fyrir hendur. Þvert á móti þá þurfa þau góða leiðsögn ekki síður en önnur börn.

Margir hafa haft áhyggjur af því, ekki síst foreldrar eða forráðamenn bráðgerra barna, að þau fái á sig neikvæðan stimpil þegar gáfur þeirra er dregnar fram í dagsljósið. Þess vegna þarf að gæta að mörgu þegar slíkt er gert. Sé boðið upp á sérstök verkefni fyrir bráðger börn vakna spurningar eins og: Er verið að búa til ofvita eða undrabörn? Eða er verið að búa til elítuskóla?

Samstarf Fræðslumiðstöðvar Reykjavíkur, landssamtakanna Heimilis og skóla og Raunvísindadeildar Háskóla Íslands

Foreldrar og forráðamenn hæfileikaríkra barna hafa oft spurst fyrir um og leitað eftir úrlausnum fyrir börn sín þar sem þarfir þeirra í námi eru í raun meiri en almennt er boðið upp á í skólastarfi.

Óformlegar viðræður nokkurra aðila á haustdögum 2000 leiddu til formlegs samstarfs Fræðslumiðstöðvar Reykjavíkur, Landssamtakanna Heimilis og skóla og Raunvísindadeildar Háskóla Íslands um tilraunaverkefni í þessum efnum sem stóð frá 27. janúar til 28. apríl 2001. Markmið þess var í raun margþætt. Einkum var stefnt að því að koma til móts við námsþarfir bráðgerra barna á miðstigi grunnskóla sem erfitt þykir að uppfylla í venjulegu skólastarfi, að grunnskólabörn kynntust námi og störfum á sviði raunvísinda og að skapa vettvang fyrir bráðger börn til að hitta jafningja og vinna sameiginlega að verkefnum við þeirra hæfi.

Hvað sem sagt verður um mismunandi þroska og þroskasvið bráðgerra barna, þá er vitsmunaþroski þeirra jafnan mikill og greindarvísitala há. Eins og áður er getið eru þau góð að leysa þrautir og vilja gjarnan fá samþætt og opin verkefni sem kalla ekki endilega á eitt rétt svar. Þau sækjast ekki eingöngu eftir háum einkunnum, heldur lausnum á raunverulegum vandamálum.

Ákjósanlegustu viðmið við val á börnum í þessa tilraun þóttu því vera einkunnir í samræmdum prófum og var farin sú leið að velja þann hóp 10, 11 og 12 ára barna úr skólum Reykjavíkur sem hlaut hæstu einkunnir að meðaltali í stærðfræði og íslensku. Einnig var óskað eftir ábendingum frá skólum um aðra nemendur sem telja mætti að ættu erindi í verkefnið.

Um þátttakendur og verkefnin

Í verkefninu tóku þátt 105 börn á aldrinum 10-12 ára (Um 60% stúlkur og um 40% drengir). Viðfangsefnin sem boðið var upp á voru 24 og kennarar um 20. Ástæða er til að hrósa kennurum raunvísindadeildar fyrir myndarlegt framlag og mikla vinnu sem þeir hafa lagt að mörkum í þetta verkefni.

Börnin unnu í 5-20 manna hópum að lausnum mjög fjölbreytilegra verkefna. Dæmi um verkefni af öðrum sviðum en stærðfræði:

- Að nota þurrís, þ.e. koltvísýring á föstu formi við -78°C, sem slökkviefni. Haft var samstarf við slökkviliðið um rannsóknir á hagnýtingu þurríss við slökkvistörf.
- Hönnun rafknúinna farartækja sem leystu ákveðin vandamál.
- Rannsóknir á tunglum Júpiters.
- Mæling á tónblæ hljóðfæra og fjallað um lögmál úr hljóðbylgjufræði.
- Rafeindatækni.
- Jarðskjálftavirkni á Íslandi.
- Spurningum svarað af Vísindavefnum.

Meyvant er kennsluráðgjafi við Fræðslumiðstöð Reykjavíkur.

Rögnvaldur Möller greinir frá stærðfræðiverkefnunum hér á eftir.

Stærðfræðiverkefni fyrir bráðger börn á miðstigi

RÖGNVALDUR MÖLLER

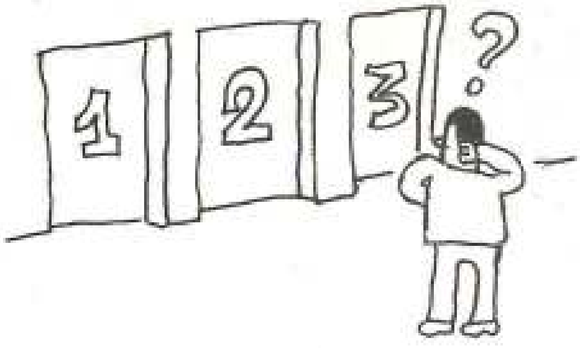
Alls vorum við 5 stærðfræðingar ásamt 2 stærðfræðinemum sem komum að þessu verkefni og hafði enginn okkar tekist á við slíkt áður.

Fyrsta vandamálið var að finna hentug verkefni sem væru aðgengileg og áhugaverð fyrir börn og jafnframt til hliðar við hefðbundið skólanámsefni. Börnin unnu að verkefnum í rúmfræði, talnafræði, líkindafræði og tölfræði.

Í rúmfræði fengust þau við teikningar með sirkli og reglustiku. Börnin fetuðu í fótspor forn-Grikkja og uppgötvuðu sjálf hvernig á að nota þessi tæki til að finna miðpunkt striks, teikna línu hornrétta á aðra línu og annað í svipuðum dúr.

Í talnafræði eru margir leyndardómar. Spurningum sem virðast á yfirborðinu einfaldar og tærar er enn ósvarað þrátt fyrir viðleitni fremstu stærðfræðinga. Einn hópanna skoðaði frumtölur. Meðal annars leituðu börnin að frumtalnatvíburum en það eru tvær frumtölur þannig að mismunur þeirra er 2 (t.d. 3 og 5, 5 og 7, 11 og 13,...). Enginn veit með vissu hvort til eru óendanlega mörg pör af frumtalnatvíburum.

Líkindafræðin hentar vel til hópverkefna. Hægt er að nálgast verkefnin bæði með pælingum og tilraunum. Einn hópur hafði það markmið að leiðbeina keppanda í spurningaleik. Þessi heppni keppandi var kominn nálægt því að vinna stóru



verðlaunin, Kádilják fínan og gljáfægðan. Það eina sem var eftir var að velja þá af þrem hurðum sem Kádiljákurinn var á bak við. Þegar keppandinn heppni hefur valið þá spyr stjórnandi hvort þetta sé lokasvar, og opnar síðan aðra af þeim dyrum sem keppandinn hafði ekki valið og býður keppandanum að skipta. Á keppandinn að skipta? Svarið verður ekki gefið hér en börnunum tókst að finna það og skilja rökin sem liggja að baki.

Tveir hópar glímdu við líkindafræðilegar spurningar tengdar teningaspilinu Yatsý. Annar hópurinn reiknaði hverjar líkurnar eru á að fá 5 sexur í þrem köstum og hinn hópurinn fann út hvaða teningum á að halda eftir ef markmið okkar er það eitt að fá sem hæsta summu á teningana fimm. Svör hópanna við þessum spurningum má finna á Vísindavefnum (http://www.visindavefur.hi.is/). Tveir hópar gerðu skoðanakannanir og unnu úr þeim samkvæmt kúnstarinnar reglum.

Frá sjónarhóli okkar háskólakennaranna, sem leiðbeindum í þessum verkefnum, var reynslan að flestu leyti jákvæð. Okkur fannst mikill munur að fá loksins eldklára nemendur sem eru fljótir að skilja. Að sjálfsögðu sá maður ýmis atriði sem hefði kannski verið betra að gera á annan hátt. Til dæmis er mikill munur á þroska barnanna, bæði einstaklingsbundinn og eftir aldri. Verkefnin henta börnunum misvel og fer það eftir þroska og aldri þeirra, t.d. þá hafa þau yngstu lítið lært í brotareikningi sem kom sér illa í líkindafræðiverkefnunum. Verkefnin verða líka að vera þannig að þau „kveiki í" krökkunum. Það að finna verkefni sem eru áhugaverð fyrir börn, matreiða þau þannig að börn geti glímt við þau og jafnframt gæta þess að innihaldið sé bitastætt vísindi er feikilega erfitt. Börnin verða líka að vera með af því að þau sjálf langar til þess og þau þurfa að vera tilbúin til að sökkva sér í verkefnin.

Rögnvaldur er lektor við HÍ.

EINAR BIRGIR STEINÞÓRSSON

Stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans fyrir grunnskólanema var haldin í sjötta sinn laugardaginn 24. febrúar 2001.

Upphaf keppninnar má rekja til frumkvæðis Dr. Áskels Harðarsonar sem var deildarstjóri í stærðfræði í Flensborgarskólanum þegar farið var af stað 1996. Hann hafði unnið ötullega að því að efla stærðfræðina innan Flensborgarskólans með það að markmiði að undirbúa nemendur skólans sem best undir frekara nám. Hann hafði einnig staðið reglulega fyrir bæði einstaklings- og liðakeppnum í stærðfræði innan skólans meðal annars til að undirbúa nemendur undir þátttöku í *Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema.*

Greinarhöfundur kenndi stærðfræði í Flensborgarskólanum á þessum tíma og kom lítillega að því að aðstoða Áskel við framkvæmd á þessum keppnum. Á þessum árum varpaði Áskell fram þeirri hugmynd hvort ekki væri rétt að koma á sérstakri stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema. Það var síðan ekki fyrr en eftir að greinarhöfundur var ráðinn sem aðstoðarskólameistari í Flensborgarskólanum 1994 sem við fórum alvarlega að ræða um þetta mál og ári seinna fórum við að undirbúa fyrstu keppnina.

Tilgangurinn með keppninni var og er margþættur. Þar má nefna þætti eins og að auka áhuga grunnskólanema á stærðfræðinni með því að sýna þeim aðra hlið hennar en þau eru að fást við daglega og ná til efnilegra nemenda til að undirbúa þá og þjálfa fyrir frekari keppnir og nám. Það var ekki síður mikilvægt að auka tengslin við kennara grunnskólanna og jafnframt að nota tæki-færið fyrir almenna kynningu til að koma á framfæri því þróunarstarfi sem sífellt er unnið innan skólans.

Frá upphafi var keppnin hugsuð fyrir nemendur í 8., 9. og 10 bekk grunnskólanna. Keppnin hefur öll árin verið haldin á laugardegi í seinni hluta febrúar. Fyrsta árið voru sömu verkefnin lögð fyrir alla árganga en síðan hafa verið útbúin sérstök verkefni fyrir hvern árgang. Fyrsta keppnin reyndist full erfið fyrir nemendur í 8. bekk og því tókum við þá ákvörðun að hver árgangur fengi sér verkefni.

Áskell Harðarson hefur frá upphafi séð um að taka saman verkefnin en undirritaður hefur séð um að setja þau upp og skipuleggja framkvæmdina. Við höfum ætið fengið sérstaka yfirdómara til að líta yfir verkefnin og úrskurða um vafaatriði sem upp kunna að koma í tengslum við yfirferð á lausnum. Síðustu þrjú árin hefur Jón Hafsteinn Jónsson fyrrverandi menntaskólakennari tekið að sér þetta starf en fyrstu árin voru það Eggert Briem prófessor, Ragnar Sigurðsson og Rögnvaldur Möller stærðfræðingar við Raunvísindastofnun Háskóla Íslands.

Kennarar grunnskólanna hafa séð um að kynna keppnina meðal nemenda og skrá þátttakendur. Stærðfræðikennarar og áhugasamir nemendur úr Flensborgarskólanum hafa komið til aðstoðar við framkvæmdina.

Frá upphafi höfum við lagt áherslu á að allir þátttakendur fengju með sér heim autt verkefnahefti að lokinni keppni til að öll fjölskyldan hefði tækifæri til að glíma við og ræða um verkefnin. Þátttakendur fá síðan sent lausnarhefti ásamt bréfi sem segir til um hvar í röðinni þeir lentu í sínum árgangi.

Úrslit keppninnar eru síðan kynnt í kaffisamsæti í Flensborgarskólanum en þangað er boðið tíu efstu nemendunum úr hverjum árgangi ásamt foreldrum og kennurum. Þessir tíu efstu fá sérstök viðurkenningarskjöl frá Flensborgarskólanum en auk þess fá þrír efstu sérstök peningaverðlaun frá Sparisjóði Hafnarfjarðar sem hefur styrkt keppnina myndarlega undanfarin ár. Í vor gáfu Opin Kerfi hf sigurvegurunum einnig vandaðar grafískar reiknivélar.

Það þótti mikil bjartsýni í upphafi að ætla að boða nemendur á laugardagsmorgni til að keppa í stærðfræði en raunin varð sú að strax var mikill áhugi. Þátttaka hefur verið nokkuð stöðug og sömu nemendurnir skila sér til keppni ár eftir ár. Þátttakendur hafa alltaf verið flestir í 8. bekk en fæstir í 10. bekk. Jafnræði hefur ríkt meðal kynjanna bæði hvað varðar fjölda og árangur. Frá upphafi hefur keppnin verið öllum opin, ekki bara nemendum í Hafnarfirði. Þrátt fyrir að við gerðum lítið til að auglýsa keppnina þá fengum við strax keppendur víða af Reykjavíkursvæðinu og einnig nokkra utan af landi. Við höfum alla tíð lagt áherslu á að allir þeir sem vilja geti nýtt sér keppnirnar t.d. kennarar í tengslum við kennslu í grunnskólum.

Vorið 1999 óskuðu fjórir framhaldsskólar, Fjölbrautaskóli Suðurnesja, Fjölbrautaskóli Vesturlands, Menntaskólinn í Kópavogi og Menntaskólinn við Sund eftir samstarfi og hafa síðan þá haldið keppnina á sama tíma hjá sér. Fjölbrautaskóli Suðurlands bættist í þennan hóp nú í ár. Hver skóli er með sjálfstæða framkvæmd. Á sumum stöðum eru það skólaskrifstofur sveitarfélaganna sem vinna að framkvæmdinni með skólunum.

Það er mikil samkeppni um frítíma þessa aldurshóps, margir stunda íþróttir og/eða listnám sem fram fer um helgar. Þess vegna er nú til umræðu að halda keppnina á skólatíma í miðri viku til að auðvelda öllum sem vilja taka þátt í keppninni.

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans fyrir grunnskólanema hefur öðlast fastan sess í skólalífinu og margir þeirra sem hafa stigið sín fyrstu skref í þessari keppni hafa síðar haldið áfram og verið áberandi á lista yfir þá sem ná langt í Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema.

Flest ef ekki öll þau markmið sem við settum okkur í upphafi hafa náð fram að ganga og ég er sannfærður um að á þessum árum hafa fjölmargir grunnskólanemar fengið nýja sýn á undraheima stærðfræðinnar í tengslum við þátttöku í þessari keppni. Ég vil því í lokin hvetja fleiri til að fara inn á þessa braut.

Einar Birgir er skólameistari Flensborgarskóla.

Fréttir frá Víetnam

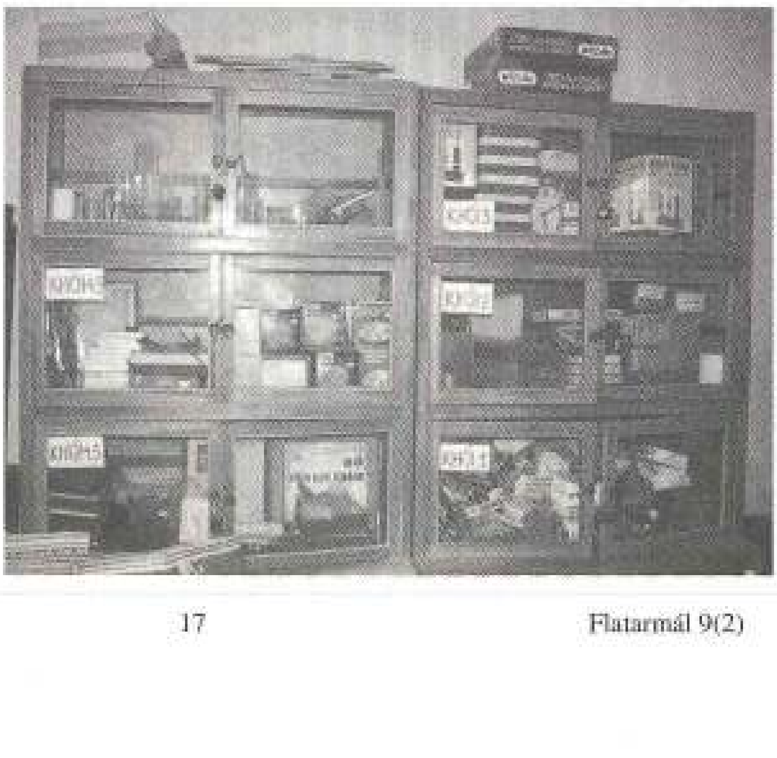
Komið þið sæl.

Í desember síðast liðnum komst ég loks í heimsókn í nokkra skóla hér í Hanoi. Aðdragandi heimsóknanna var að tvær vinkonur mínar Sigrún Ágústsdóttir námsráðgjafi og Sylvía Guðmundsdóttir ritstjóri voru væntanlegar í heimsókn og langaði þær að heimsækja skóla hér og kynna sér skólastarf. Við snérum okkur því til Sendiráðs Víetnams með erindið því hér er mjög mikilvægt fyrir utanaðkomandi gesti, sem og þá sem hér búa, að fara réttar leiðir. Eftir þó nokkur tölvu- og símasamskipti var okkur vísað á Hanoi Union of Friendship Organisations og tók sú skrifstofa að sér að skipuleggja heimsóknirnar. Fulltrúi skrifstofunnar og túlkur fylgdu okkur í allar heimsóknir. Þegar við fórum í heimsókn í skóla í einu af úthverfum borgarinnar slóst í för með okkur fulltrúi nefndar alþýðunnar í hverfinu. Allar samræður fóru fram í gegnum túlk og ekki var alltaf auðvelt að fá svör við spurningum. Að sjálfsögðu var leitast við að draga upp jákvæða mynd og segja víetnamskir vinir mínir að tveir af þeim þremur skólum sem við heimsóttum séu almennt álitnir mjög góðir skólar. Þeir eiga þó erfitt með að skilgreina hvað átt er við þegar sagt er að skóli sé sérstaklega góður en nefna að margir þekktir menn hafi stundað nám þar og að skólarnir hafi á að skipa góðu kennaraliði. Foreldrar aka langar leiðir með börn sín í þessa svokölluðu góðu skóla og margir skrá sig hjá vinum og ættingjum í skólahverfinu til að eiga greiðari aðgang.

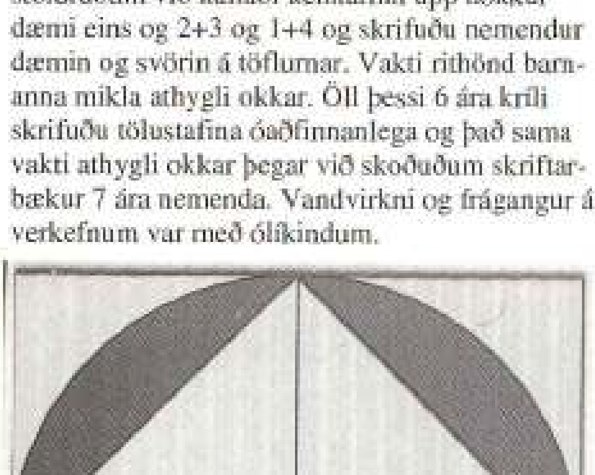
Ég hef áður sagt ykkur svolítið frá skólakerfinu og fengust þær upplýsingar að mestu staðfestar en þó virðist sem margir skólar séu tvísetnir með einn bekk fyrir hádegi og annan

eftir hádegi. Kennsluskylda kennara samsvarar hins vegar einungis kennslu í einum bekk og allflestir kennarar taka nemendur með sér heim að skóla loknum eða fyrir skóla. Þeir gefa nemendum að borða og eru síðan með aukakennslu fyrir þá. Fyrir þetta greiða nemendur sérstaklega og hafa smábarnakennarar af þessu góðar tekjur. Erfitt var að fá nákvæmar upplýsingar um skólagjöld. Nefndar voru tölur frá 60 og upp í 300 krónur á mánuði en í heilsdagsskólum getur gjaldið farið upp í 800 – 1000 krónur sem er há upphæð þegar meðallaun verkafólks eru 2-3000 krónur á mánuði.

Í þeim skólum sem við heimsóttum voru blandaðir bekkir sem virðist vera í samræmi við skólastefnuna. Kennsluhættir virtust einkennast af beinni kennslu enda voru um 30-50 nemendur í bekk. Skólastofur voru stórar, bjartar og snyrtilegar. Nemendur sátu prúðir við borð sín en skólahúsgögn voru trébekkir og samföst borð. Í öllum stofum var stór krítartafla, sums staðar var landakort og yfirleitt var lítill skápur með kennslugögnum í stofunni. Þar voru meðal annars ýmis stærðfræðigögn eins og sætisgildiskubbar, talnagrindur, rúmfræðiform og brotaspjöld úr plasti. Í einum skólanna var sérstakt herbergi fyrir kennslugögn og var þar töluvert af stærðfræðigögnum í sérstökum skáp. Í 6 ára bekk sem við komum inn í var verið að kenna stærðfræði. Þar var búið að teikna mengi með fimm stökum upp á töflu og skrifa við nokkur plúsheiti fyrir 5. Nemendur voru með litla krítartöflu og meðan við



stöldruðum við kallaði kennarinn upp nokkur dæmi eins og 2+3 og 1+4 og skrifuðu nemendur dæmin og svörin á töflurnar. Vakti rithönd barnanna mikla athygli okkar. Öll þessi 6 ára kríli skrifuðu tölustafina óaðfinnanlega og það sama vakti athygli okkar þegar við skoðuðum skriftarbækur 7 ára nemenda. Vandvirkni og frágangur á verkefnum var með ólíkindum.



Eitthvað virðist vera um að kennslugögn séu notuð og sums staðar þurfa nemendur að kaupa lítil sett með námsgögnum fyrir stærðfærði. Í slíku setti fyrir 7 ára nemendur er 10 cm reglustika, lítið plast pinnabretti, tveir ferningar 8 x 8 cm og 6 x 6 cm , tveir rétthyrningar 10 x 6 cm og 4 x 7 cm og tveir óreglulegir ferhyrningar, einslaga en misstórir. Þessi gögn virðast einkum vera notuð til að kenna flatarmál og form en óneitanlega finnst manni vanta inn í form eins og þríhyrning og hring. Ég hef reynt að finna kennslubækur með verkefnum fyrir þessi gögn en þær virðast ekki vera til. Í setti fyrir nemendur í 5. bekk bætast við form eins og hringur og þríhyrningur og einnig nokkur rétthyrnd spjöld með rúðuneti og hringurinn sem sjá má á meðfylgjandi mynd. Hvernig skyldi eiga að nota hann? Hvað dettur ykkur í hug?

Okkur var mjög vel tekið í öllum þeim skólum sem við komum í þó greinilega væri skólaandinn nokkuð mismunandi. Skólinn sem við heimsóttum í úthverfi Hanoi var greinilega ekki eins vanur að fá erlenda gesti og skólinn sem við heimsóttum í miðborg Hanoi, en hann hafði Hillary Clinton sótt heim nokkrum vikum á undan okkur.

Í einum skólanna, sem var unglingaskóli, sáum við tölvu- og myndbandstæki en annars staðar virtust slík tæki ekki vera til. Sá skóli er eini skólinn í Hanoi þar sem nemendur geta valið að læra frönsku í stað ensku og nýtur hann sérstaks stuðnings frá Frökkum, sem skýrir af hverju hann var betur búinn en hinir skólarnir. Á skólalóðunum voru yfirleitt einn eða fleiri bekkir að gera leikfimisæfingar sem stundum minntu fremur á heræfingar en líkamsæfingar.

Töluverð umræða hefur verið um skólamál í dagblöðum hér upp á síðkastið. Víetnamar eru stoltir af því að þeim hefur tekist að byggja upp gott skólakerfi og gera þjóðina læsa á þeim 55 árum sem eru liðin síðan þjóðin öðlaðist sjálfstæði þrátt fyrir stríðsátök. Í dagblaði í dag birtist meðal annars grein þar sem sagt er að greindarvísitala víetnamskra nemenda sé jafn há greindarvísitölu nemenda í Evrópu og Bandaríkjunum þrátt fyrir að þeir búi yfirleitt við mun þrengri kost. En Víetnamar gera sér líka grein fyrir að áframhaldandi framþróun byggir á bættri menntun.

Áætlanir eru uppi um endurskoðun námsefnis og lengingu skólatíma nemenda en minna hefur farið fyrir umræðu um breytta kennsluhætti. Að mati ýmsra, sem ég hef rætt við, bæði háskólakennara og fólks sem starfar með Víetnömum er skortur á frumkvæði og sjálfstæði eitt af meginvandamálunum og sama má segja um gagnrýnar umræður. Inn í þetta blandast ýmsir menningarlegir þættir eins og til dæmis að það er mjög erfitt fyrir víetnamskan starfmann að láta í ljós aðra skoðun en þá sem þeir sem eru eldri eða hærra settir láta í ljós.

Með kveðju frá Hanoi
Guðný Helga

Áskorun

Uppi eru nýjungar og hvað svo?

Jónína Eiríksdóttir

Í síðasta tölublaði Flatarmála skoraði Sólveig Ebba Ólafsdóttir á Jónínu Eiríksdóttur að skrifa í næsta blað

Ég tek áskorun Sólveigar Ebbu Ólafsdóttur um að fjalla um orlofsárið mitt hjá frændum okkar Dönum. Hvort hér fer á eftir lýsing á stærðfræðigóðgæti, eins og hún orðaði það, er hins vegar álitamál. Mér er að verða svo farið að ég sé stærðfræði í öllu mögulegu og ómögulegu. Meira að segja tek ég að mér að skrifa hér grein um stærðfræði í orlofi, sem þó var aldrei sett upp sem sérstakt átak í þá veru. Dæmi svo „góðgætið" hver fyrir sig.

Orlof í Árósum

Í mörg ár hafði mig dreymt um orlof í útlöndum, þegar loksins áræðið dugði til umsóknar, eftir 20 ára starf við sömu stofnun. Þegar jákvætt svar barst frá Kennarasambandi Íslands reyndist eftirleikurinn auðveldur, en auðvitað ekki að öllu leyti einfaldur. Víst er, að orlofið var kærkomið bæði okkur hjónum og börnunum, að ógleymdri stofnuninni „okkar", Kleppjárnsreykjaskóla í Borgarfjarðarsveit.

Við höfðum löngu áður fengið augastað á Árósum í Danmörku. Ekki vegna þess að við værum búin að kanna námsframboð fyrir kennara svo ítarlega, heldur af því að Árósar eru hæfilega lítil stórborg í hæfilega fjarlægu og framandi landi, þar sem veturinn dygði til að komast sæmilega inn í tungumál og menningu. Ekki spillti heldur fyrir að þar búa ákaflega góðir vinir okkar til margra ára. Þangað var ferðinni heitið og þar dvöldum við veturinn 1999-2000. Lengi verður hans minnst sem eins af okkar bestu vetrum.

Danmarks Lærerhøjskole

Danmarks Lærerhøjskole starfar víða í Danmörku, meðal annars í Árósum, en sá skóli hefur til margra ára séð um endurmenntun grunnskólakennara í Danmörku. Þangað sækja kennarar lengri og skemmri námskeið á starfstíma skóla, en einnig er stofnunin í vaxandi mæli farin að bjóða námskeið og leiðsögn út í skólana sjálfa. Fyrir setu á námskeiðum fá kennarar eingöngu ánægjuna og endurnýjaða starfskrafta, ekki launahækkun.

Skólinn býður einnig upp á framhaldsnám í uppeldisfræði, *Pædagogisk Diplomuddannelse (PD)*, sem telst eins árs nám, en er oftast tekið á lengri tíma með starfi.

Nám og upplýsingatækni

Fyrir utan námskeið af ýmsum toga, sem ég sótti yfir veturinn kom ég auga á námsþátt innan PD-námsins, *Nám og upplýsingatækni (IT og læring)*, sem ég valdi að takast á við. Það freistaði mín að skoða námskenningar, sem gætu síðar hjálpað mér að nýta hina margumræddu upplýsingatækni af einhverju viti með nemendum mínum. Ég var að sjálfsögðu spennt að vita, hvort þar væru á ferð kenningar, sem nýst gætu í fleiri námsgreinum, en mest var ég þó upptekin af kenningum, sem allir eru að verða sammála um að beri að nýta í skólastarfi þó raddirnar séu enn dálítið misvísandi um, hvernig og hvenær það verði best gert.

Tengsl kenninga við raunveruleikann

Dönsk - íslensk einkenni !

PD-náminu er ætlað að veita fólki með starfsreynslu innan skóla- og umönnunargeirans og/eða annarra greina atvinnulífsins innsýn í tiltekin sérsvið uppeldisfræðinnar, til þess að geta tekið frumkvæði og fengist við viðfangsefni og álitamál í þröngu jafnt sem víðu samhengi við ýmsar aðstæður í þjóðfélaginu. Í þessari lauslegu þýðingu minni á námslýsingu eins og hún er í kynningarriti skólans[1], birtist að mínu mati vel viðhorf Dana almennt til náms og starfsmenntunar; nám er í sjálfu sér ágætt, en er harla gagnslítið ef það eykur ekki hæfni manneskjunnar til að takast á við og leysa verkefni samfélagsins og miðla öðrum af þekkingu sinni og færni. Samkvæmt þessu álíta þeir að í glímunni við verkefnin og í samstarfi við þær manneskjur, sem að þeim koma, beri fræðin þann ávöxt, sem dugi til þroska og leiði til framfara og þróunar. Þessi viðhorf eiga sér djúpar rætur í danskri menningu og þarf ekki að fara lengra frá okkur en til Grundtvigs til að skýra þá afstöðu, dvelja svo nokkurn tíma á danskri grund og verða þessa viðhorfs áskynja. Fræði án gagns fyrir einstaklinginn í samskiptum við samferðamennina og lífsins verkefni eru harla lítils virði.

Nú hef ég innst inni aldrei verið í vafa um að þetta væri farsælasta mynstrið á milli kenninga og raunveruleikans, en óttinn við að geta ekki heimfært þær upp á eða notað þær í glímunni við raunveruleikann hefur aldrei aftrað mér frá að lesa kenningar. Trú mín hefur að jafnaði litast af því, að með því að fóðra undirvitundina vel af alls kyns hugmyndum og jafnvel loftkastölum, nærist hún og starfi í kyrrþey við að grisja brotin og raða þeim. Það verði svo einn góðviðrisdaginn að myndin verði til og sigli upp í meðvitundina, knýi dyra og gagnist mikið eða lítið eftir aðstæðum.

Óneitanlega hefur afstaða Dananna, eins og ég kynntist henni, hróflað við minni bjargföstu trú á að með því að lesa kenningar verði sérhver sjálfkrafa færari um að skilgreina þann hvundag sem við blasir og betri í að fást við hann. Í verkefninu um nám og upplýsingatækni kvað svo rammt að ólíkri afstöðu minni og danskrar samverkakonu minnar til fræðilesturs og túlkunar, að lá við verkslitum. Hennar óbilandi mótþrói gegn því að lesa of margar kenningar og ennþá meiri mótþrói við að fjalla um þær í verkefninu nema innan mjög þröngs skilgreinds ramma kennaranna, olli mér hugarangri og víli. Mér fannst hugsunin þrengjast og megrast um of og vildi taka til við að skoða allt milli himins og jarðar, fyrst ég væri á annað borð komin í feitt.

Það hvarflaði að mér að í téðum meiningarmun birtust ef til tvær ólíkar þjóðarsálir. Önnur jarðbundin og raunsæ, hin loftkennd og opin fyrir nýjum straumum og dálítið laus í rásinni. Eða var hér bara á ferð eðlilegur meiningarmunur tveggja ólíkra einstaklinga, sem ekki hefðu endilega valið að vinna saman ef þeir hefðu þekkst áður? Læt ég því að sjálfsögðu ósvarað , en ég sit uppi með spurninguna um íslensku þjóðarsálina. Erum við ginnkeypt fyrir nýjungum og loftkastölum og skortir okkur þjálfun og aga til þess að koma þeim heim og saman við raunveruleikann, þannig að úr verði jákvæð þróun og heillavænlegar framfarir?

Kennarar, kenningar og nýbreytni

Nýbreytni í skólastarfi á Íslandi

Ég tel mér óhætt að fullyrða, að Íslendingar hafi verið óragir við að efna til nýbreytni í skólastarfi og að því leyti stöndum við ekki að baki nágrönnum okkar. Allir, sem starfa með lifandi fólki, hafa þörf fyrir þá næringu, sem fylgir því, að fá að sækja fram og leita betri leiða, enda hafa íslenskir kennarar sýnt, að viljann til þess skortir ekki, og dugnaður margra er með hreinum ólíkindum. Ekki þarf að lesa margar síður af Flatarmálum eða öðrum fagtímaritum, nú eða að líta í kring um sig, til þess að verða þess áskynja.

Í ljósi orlofsins og þeirra kenninga, sem ég kynntist þar, langar mig að gera að umræðuefni, hvernig íslenskir kennarar takast á við þær tvær nýjungar, sem nú eru við hvers manns dyr, tölvur og nýtt námsefni í stærðfræði.

Tölvur

Tölvur og innreið þeirra í skólana er sannarlega nýjung, sem allrar athygli er verð. Jafnvel þótt menn keppist við að tölvuvæða skólana fyrir háar fjárhæðir og séu almennt sammála um að brýnt sé að nota þær sem mest, verður oftar en ekki fátt um svör, þegar talið berst að því, að hvaða leyti þetta fjölþætta og öfluga tæki hafi áhrif á nám einstaklingsins og hvenær muni best að nýta það og hvernig. Enn eiga margir kennarar líka langt í land með að læra á tækið sjálfir og möguleika þess í eigin starfi.

Hvernig getum við kennarar sem hraðast tileinkað okkur lágmarksfærni við tölvuna og þær kenningar, sem lúta að námi barna með henni, þannig að við verðum fær um að miðla farsælu og jákvæðu verklagi til nemendanna og styrkja jafnframt hið viðkvæma námsferli þeirra?

Nýtt námsefni í stærðfræði

Nú er í uppsiglingu nýtt námsefni í stærðfræði, *Eining*. Óhætt er að segja að löngu hafi verið orðið tímabært að endurskoða námsefnið, sem notað hefur verið allt frá því að námsefni Agnete Bundgaard féll í valinn. Nýja námsefnið byggir fyrst og fremst á þeirri sýn, að skilningur nemenda verði í fyrirrúmi, og hver og einn fái að þróa sínar aðferðir við útreikninga, þannig að hann nái sem bestri fótfestu við að tileinka sér aðferðir og inntak stærðfræðinnar. Í inngangi námsbókanna er að finna merkilegar og fræðandi samantektir á hugmyndafræðinni, sem liggur að baki námsefninu. Og enn vaknar spurning: Hvernig getum við tryggt að kennarar, sem nota eiga námsefnið kynni sér af einlægni þessa hugmyndafræði og nái tökum á henni í þeim mæli að þeir nýti hana í vinnunni með nemendum sínum? Við heyrum ýmsar kvartanir yfir námsefninu, sem benda til þess að framkvæmdin verði einhverjum strembin og líklega verður einhver hætta á að fólk verði námsefninu afhuga of fljótt. Heyrst hefur m. a. að fólk noti námsefnið og ljósriti svo gömlu bækurnar til að hafa sem „vinnuhefti", þar sem útgáfu þeirra hefur verið hætt.

Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna

Hugurinn hvarflar óneitanlega til þeirrar nýbreytni í stærðfræðikennslu sem kölluð hefur verið „Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna". Hún hefur fengið nokkra umfjöllun á síðum Flatarmála og hópur kennara, m.a. áskorandi minn og ég sjálf, höfum hrifist af þessari hugmyndafræði og nýtt okkur í starfi.

Upphafsfólk þeirrar hugmyndafræði, sem að baki liggur, hefur að meginmarkmiði með vinnu sinni, að kennarar öðlist eigið persónulegt tæki til þess að yfirfæra kenningar og niðurstöður rannsókna um þróun skilnings barna á tölum og reikniaðgerðum yfir á eigin reynsluheim og starf með nemendum sínum.[2] Tæki, sem ekki kostar mikla yfirlegu að kynna sér, af því að það tengist og lýsir þeim raunveruleika, sem við hrærumst í og þekkjum. Út frá þeirri staðreynd reynist kennsluaðferðin aðgengileg fyrir kennara og hana er auðvelt að þróa áfram í takt við nemendur og sjálfan sig.

Þegar fullorðnir nema

Ljóst er að nýjungarnar, sem að ofan greinir, eru ekki að sama marki nýjungar fyrir nemendur okkar og þær eru fyrir okkur kennarana, sem höfum vaxið upp við aðra siði. Því vefst það ekki fyrir nemendunum að vinna með tölvur eða nýtt námsefni í stærðfræði. Það eru kennararnir sem þurfa sérúrræðin. Við getum líklega ekki bara raðað í okkur veitingunum eins og ég lýsti hér áðan og treyst því að eitthvað gott komi út úr því. Nei, allt bendir til, að eitthvað meira þurfi að koma til.

Til eru kenningar um nám fullorðinna. Ein þeirra er komin frá bræðrum í Bandaríkjunum, Hubert og Stuart Dreyfus.[3] Þeir hafa komið auga á 5 þrep, sem nám fullorðinna fer eftir, frá byrjandanum að sérfræðingnum. Fyrsta stigið einkennist af reglum og smáatriðum, sem byrjandinn heldur sér mjög fast í og hefur athyglina við það, hve vel gangi að fylgja þeim. Hann minni um margt á vélmenni. Á síðari stigum sleppi byrjandinn takinu á samhengislausum reglum og dómgreind, reynsla og innsæi fara að skipa stærra hlutverk þangað til efsta stiginu er náð. Til þess að neminn færist eðlilega á milli þrepanna telja Dreyfus bræður að nærvera spyrjandi og hvetjandi leiðbeinanda af holdi og blóði sé afar mikilvæg og raun forsenda þess að námið takist. Hér eru þeir í raun að undirstrika að tölvan geti aldrei leitt nemendur á milli þrepa í námi. Í besta falli þjóni hún á fyrstu stigum námsins til þjálfunar á meðan nemandinn er að fást við reglur og afmarkaða þætti, en lokamarkinu nái maðurinn aðeins með leiðsögn og nærveru annarar hugsandi veru með tilfinningar og innsæi.

Hverfum aftur að kennurum. Þurfum við kennarar að fara í gegnum þessi stig námsferilsins, sem Dreyfus bræður telja að nám fari eftir? Tökum sem dæmi notkun og beitingu tölvunnar sjálfrar, eða nýja kennsluhætti í stærðfræði. Við höfum náð á sérfræðistigið í starfinu okkar, en hvað gerist ef við stöndum andspænis nýjum aðferðum eða hugmyndum? Færumst við þá niður á byrjendastigið og fetum okkur síðan þaðan upp á við? Eða þurfa sérfræðingar ekki að fara í gegnum öll þessi stig þó þeir tileinki sér nýja hluti, sem tengjast grein þeirra? Getum við stytt okkur leiðina, eða er það tálsýn, sem við höfum of oft brennt okkur á þegar við höfum ætlað að koma nýjungum að í starfinu okkar, en minna orðið úr en við ætluðum? Hinn nýi þáttur verður okkur ekki tamur, hann verður undir í vanabundnum óhugsuðum athöfnum okkar, sem við höfum komið okkur upp, fyrst í kennaranáminu sjálfu og síðar við þrotlausa vinnu og baráttu. Erum við líka ófús að lækka flugið og byrja á byrjuninni? Er hugsanlegt að nýbreytni og þróun heftist af því að við gefum okkur ekki tíma eða yfirvegun til að feta okkur í gegnum nauðsynlegt ferli? Mér segir svo hugur að sjaldnast séum við svo heppin að njóta nærveru þess, sem er tilbúinn að spyrja spurninga og leiða okkur áfram til þess að við færumst eðlilega á milli þrepanna alveg að sérfræðingsstiginu.

Gerir íslenskt menntakerfi ráð fyrir því við endurmenntun kennara sinna, að þeir þurfi stuðning við að ná fótfestu á byrjendastigi nýbreytnistarfsins og leiðsögn æ síðan til þess að þeir nái bestu mögulegri færni við framkvæmd nýbreytninnar?

niðurlag

Ég tek undir með þér lesandi góður að lokin á þessari hugleiðingu eru full af spurningum án svara. Á bak við þessar spurningar leynist þó sú skoðun mín, sem ég tel að þú skynjir, að við kennarar þurfum að gæta vel að þeim aðferðum, sem við beitum við að tileinka okkur nýjungar og innleiða þær í starfið. Við verðum að vera tilbúin að lækka flugið og byrja þar sem okkur vantar undirstöðu , og okkur er mikil nauðsyn á að hafa innan seilingar þá, sem af krafti og yfirsýn draga vagninn og veita stuðning. Ég legg því til að þessum undirstöðuþáttum nýbreytnistarfsins verði enn meiri gaumur gefinn, og vona sannarlega að það styrki bæði leit okkar að nýjungum og ekki síður framkvæmd þeirra í íslenskum skólum.

Jónína er kennari við Kleppjárnsreykjaskóla í Reykholtsdal.

Hún skorar á Ragnheiði Benediktsson kennara við Melaskóla að segja okkur í næsta blaði frá reynslu sinni af að nota LOGO við kennslu á tölvur.

Heimildaskrá

[1] *Studieordning for den pædagogiske diplomuddannelse*. 1999. [København], Danmarks Lærerhøjskole.

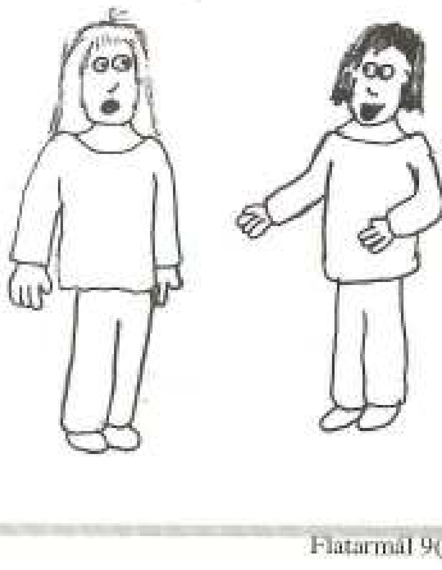
[2] Carpenter, Thomas P., Fennema, Elizabeth, Franke, Megan L. ©1996. "Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction". *The Elementary School Journal*, vol 97.

[3] Dreyfus, Hubert og Stuart. 1991. *Intuitiv Expertise*. Munksgaard

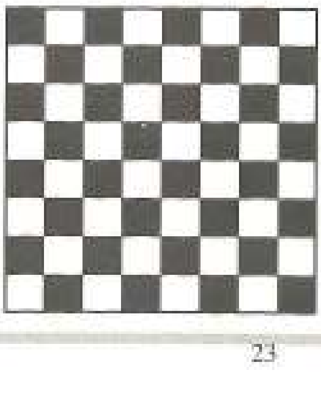
María og Ásta voru að tefla þegar Ásta stakk upp á því að þær teldu alla ferningana á skákborðinu.

„Það er nú ekki erfitt," sagði María, „Það er bara 8 x 8."

„Nei, málið er nú ekki svo einfalt, það er miklu fleiri ferningar og af mörgum stærðum," sagði Ásta.



Geturðu hjálpað Maríu og Ástu að telja ferningana skipulega?



Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000

http://wmy2000.khi.is

Skýrsla formanns íslensku nefndarinnar lögð fyrst fram 9. mars 2001 á aðalfundi Íslenska stærðfræðafélagsins

Á fundi Alþjóðlega stærðfræðisambandsins (the International Mathematical Union - IMU) í Rio de Janeiro hinn 6. maí 1992 var, að frumkvæði formanns þess, lýst yfir ákvörðun um *World Mathematical Year 2000*. IMU hefur ekki áður ráðist í svo víðtæka kynningu á stærðfræði en markmiðið var þríþætt:

- Að beina sjónum að stærðfræðiviðfangsefnum 21. aldarinnar.
- Að varpa ljósi á lykilhlutverk stærðfræði, hreinnar og hagnýttrar, í allri þróun.
- Að fjalla um ímynd stærðfræði í hugum almennings og stjórnvalda og leitast við að kynna í hverju grundvallarhlutverk stærðfræði í upplýsingasamfélagi er fólgið.

Aðild að IMU er nokkuð mismunandi frá einu landi til annars. Sums staðar er það akademía sem fer með hana og annars staðar félag stærðfræðinga, rannsóknaráð, einhver stofnun eða bandalag stofnana eða jafnvel einhver aðili í umboði ríkisstjórnar. Dæmi má taka frá Norðurlöndunum en þar fara eftirtaldir með aðild að IMU: Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Delegation of the Finnish Academies of Science and Letters, Íslenska stærðfræðafélagið, The Norwegian Academy of Science and Letters, The Royal Swedish Academy of Sciences.

Samþykkt IMU var vísað til þeirra sem aðild eiga að heimssambandinu en jafnframt hófst vinna við að fá fylgi UNESCO og stuðning við samþykktina. Á allsherjarfundi UNESCO í nóvember 1997 var samþykkt stuðningsályktun við *World Mathematical Year 2000*. Stuðningsályktuninni fylgdi samþykkt um fjárframlag til starfsemi alþjóðlegrar framkvæmdanefndar IMU vegna stærðfræðiársins en formaður hennar hefur verið prófessor Mireille Chaleyat-Maurel í París. Heimasíða ársins hefur verið vistuð þar og fréttabréf hafa verið send út til aðildarfélaga að jafnaði einu sinni á ári allt frá 1993.

Er árið 2000 nálgaðist hófst undirbúningsvinna í flestum aðildarlöndum IMU. Segja má að þeir sem komu að undirbúningi hafi einkum verið úr þrenns konar farvegi. Meginhlutverki gegndi stjórn þess ráðs, félags eða stofnunar sem fór með aðild að IMU en einnig komu af fullum krafti að starfinu fulltrúar landanna gagnvart International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) og fulltrúar sérstakra stærðfræðinefnda eða ráða. Menntamálaráðuneytið tilnefndi árið 1993 átta manna nefnd til að koma með tillögur um hvernig efla mætti námsgreinina stærðfræði og stærðfræðiáhuga nemenda í skólakerfinu. Á Íslandi voru því fjölmargir aðilar til að vinna að undirbúningi Alþjóðlega stærðfræðiársins 2000 og nýta þetta sjaldgæfa tækifæri til að taka þátt í heimsátaki á þessu sviði. Í september 1999 var hins vegar orðið ljóst að engin undirbúningsvinna að árinu hafði átt sér stað á Íslandi og málið hafði hvergi verið kynnt af þeim sem fóru með umboðið. Þetta var óviðunandi því að ástæða til þess að nýta tækifæri þessa árs var ærin hér og mátti það vera öllum ljóst.

Þótt engin undirbúningur væri hafinn vegna stærðfræðiársins var ljóst að um nokkra atburði yrði að ræða á þessu sviði á Íslandi. Norræna ráðstefnan Matematik 2000 var einn þessara viðburða og hafin var vinna við norræna bók sem stefnt var að útgáfu á árið 2000. Þá var nýafstaðin hauststefna Flatar þar sem árið hafði verið kynnt og samþykkt að stefna að stærðfræðidegi í skólum haustið 2000.

Hinn 19. október var haldinn fundur í Kennaraháskóla Íslands. Til hans boðaði Anna Kristjánsdóttir prófessor á sviði stærðfræðimenntunar. Þangað voru boðnir formenn Íslenska stærðfræðafélagsins, Flatar – samtaka stærðfræðikennara og Félags raungreinakennara auk fulltrúa frá Háskóla Íslands. Á þessum fundi kynnti fundarboðandi stærðfræðiárið og tilefni þess, svo og lítillega það sem aðrar þjóðir höfðu gert í undirbúningi sínum. Lögð var fram eftirfarandi tillaga:

Stofnaður verði samstarfshópur Íslenska stærðfræðafélagsins, Flatar, Félags raungreinakennara, Kennaraháskóla Íslands og Háskóla Íslands vegna Alþjóðlega stærðfræðiársins 2000. Hópurinn verði fimm manna en leiti samstarfs og samráðs við fjölmarga aðra; stofnanir, félög og einstaklinga.

Skipulögð verði röð atburða og aðgerða á árinu sem kynnt verði sem sameiginlegt átak þótt frumkvæði og framkvæmd einstakra atburða geti verið á hendi einstakra aðila innan samstarfsins.

Markmið með samstarfi verði að kynna stærðfræði og stærðfræðinám fyrir almenningi í sem fjölbreyttastri mynd, vekja athygli stjórnvalda og fjölmiðla á áhugaverðum þáttum á sviði stærðfræði og stærðfræðimenntunar og leita fjárhagslegs stuðnings opinberra aðila og annarra til þess að efla stærðfræðinám á öllum skólastigum svo og vitneskju almennings um það.

Tillögunni var mjög vel tekið og nefndin hóf störf strax og gengið hafði verið frá endanlegri tilnefningu fulltrúa. Í nefndinni hafa starfað:

Anna Kristjánsdóttir, Kennaraháskóla Íslands, formaður
Benedikt Jóhannesson, Íslenska stærðfræðafélaginu
Ragnheiður Gunnarsdóttir, Fleti – samtökum stærðfræðikennara
Robert Magnus, Háskóla Íslands
Sveinn Ingi Sveinsson, Félagi raungreinakennara

Þetta verkefni er hið fyrsta hér á landi þar sem fagfélög og háskólar sameinast í því skyni að vekja sérstaka athygli skólamanna, stjórnvalda og almennings á mikilvægi stærðfræði og stærðfræðináms.

Ljóst var að engin fjárveiting væri til starfs nefndarinnar eða verkefna á vegum hennar í heild. Því var ákveðið að leggja áherslu á atburði sem væru í umsjá þeirra samtaka eða háskóla sem áttu aðild að nefndinni og dreifa verkinu við að afla þess fjár sem óhjákvæmilega þyrfti til framkvæmda. Ljóst var þó að æskilegt væri að gera meira en það og einkum að reyna að ná vel athygli almennings og hafa nokkur áhrif á hugmyndir manna um stærðfræði og gildi stærðfræðináms. Þau verk sem þannig voru unnin í nafni nefndarinnar allrar féllu einkum á herðar formanns sem gegndi þar í raun einnig starfi framkvæmdastjóra.

Starf nefndarinnar hófst af krafti í nóvember og var lögð áhersla á að safna hugmyndum til þess að hægt væri að hefja raunhæfan og samstilltan undirbúning. Fjölmargar hugmyndir voru skráðar:

- Fyrirlestraröð íslenskra og erlendra fræðimanna.
- Útvarpsþættir um stærðfræði á aðgengilegu máli.
- Sjónvarpsefni úr stærðfræðikennslu – ætlað foreldrum til fróðleiks og til að sýna í skólum eða á fundum.
- Sjónvarpsefni um stæðfræði.
- Ráðstefnur um afmarkaða þætti stærðfræði eða stærðfræðimenntunar.
- Kynningarspjald eða aðrir hlutir til að minna á árið.
- Samkeppni nemendahópa um stærðfræðileg viðfangsefni.
- Þýðing bóka um stærðfræðileg málefni og fyrirlestar höfunda.

Síðar bættist við tillaga um:

- Þrautir reglulega í Morgunblaðinu.
- Greinaskrif íslenskra stærðfræðinga eða stærðfræðikennara einnig í Morgunblaðinu.
- Heimasíða Alþjóðlega stærðfræðiársins 2000 á Íslandi.

Einstaklingar í nefndinni tóku að sér að fleyta áfram umræðu um það sem þeir höfðu stungið upp á og þar sem það var talsvert, ekki síst fyrir formann þar sem flest verkin voru, var gert nokkurt hlé á formlegum nefndarstörfum. Það var talsvert verk að ná upp tíma sem glatast hafði vegna þess að undirbúningur hófst ekki á eðlilegum tíma. Því er hér með lýst ómerk athugasemd í skýrslu stjórnar Íslenska stærðfræðafélagsins á aðalfundi vorið 2000 þar sem talað var um að nefndarstarf lægi niðri.

Flest það sem settar voru fram hugmyndir um varð að framkvæmd. En færri komu að vinnunni en hugmyndin hafði verið. Líklega má telja það byrjunarbrek í samstarfi sem þessu og að betur muni til takast eftir að samstarfi, sem æskilegt er að halda áfram, vex nokkur fiskur um hrygg.

Að endingu er hér listi yfir þá viðburði sem um var að ræða á árinu og var hann afhentur menntamálaráðherra til upplýsinga í lok ársins. Síðan hefur verið bætt inn á listann því sem gerðist eftir áramót en tengdist árinu. Nefndin mun ljúka formlega störfum innan skamms en mörgum þáttum verður haldið áfram meðal þess sem fengist var við á árinu.

Reykjavík 9. mars 2001
Anna Kristjánsdóttir
formaður íslensku nefndarinnar um Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000

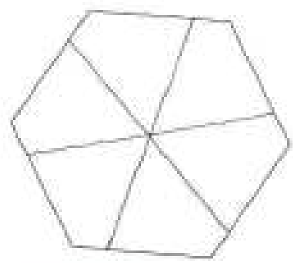
Alþjóðlega stærðfræðiárið 2000 — Viðburðir á Íslandi

1. Heimasíða ársins http://wmy2000.khi.is var opnuð í byrjun maí.
2. Veggspjald Alþjóðlega stærðfræðiársins 2000 með upplýsingum um viðburði hér á landi var sent í alla skóla í byrjun maí.
3. Morgunblaðið hóf að birta stærðfræðiþrautir reglulega í byrjun maí.
4. Félag íslenskra sérkennara gaf út þemahefti af Glæðum sem helgað var stærðfræði.
5. XXIII Scandinavian Congress of Mathematicians var haldin í Danmörku í júní. Íslendingar stjórnuðu þar einum dagskrárlið.
6. Norræna ráðstefnan *Matematik 2000. Fokus i teorier og praksis* var haldin í Borgarnesi dagana 22.-26. júní. Ráðstefnuna sóttu tæplega 30 Íslendingar og flutti þriðjungur þeirra fyrirlestra, var með verkstæði eða aðra liði.
7. Íslenskir framhaldsskólanemar tóku þátt í Ólympíukeppninni í stærðfræði sem haldin var í Kóreu síðari hluta júlí.
8. International Congress on Mathematical Education (ICME-9) haldin í Tokyo dagana 30. júlí til 6. ágúst. Íslenskir þátttakendur voru fjórir auk eins maka.
9. Norðurlönd buðu formlega til heimsráðstefnunnar ICME-10 sem haldin verður í Kaupmannahöfn sumarið 2004. Þetta er í fyrsta sinn sem mörg lönd standa saman að þessari ráðstefnu og er víðtækur áhugi á Norðurlöndum um að nýta undirbúningstímann vel til uppbyggingarstarfa innan landanna. Fulltrúi Íslands í norrænu nefndinni er Anna Kristjánsdóttir.
10. Flötur stóð fyrir Stærðfræðideginum 27. september og gaf út hefti með hugmyndum að verkefnum sem gefið var í alla skóla.
11. Hagsmunafélag um eflingu verk- og tæknimenntunar á háskólastigi á Íslandi og Íslenska stærðfræðafélagið héldu opinn umræðufund um stærðfræðikennslu í hátíðasal Háskóla Íslands hinn 27. september.
12. Norræna bókin *Matematik & undervisning. Norden 2000* kom út í nóvemberlok. Hún er afrakstur samstarfs allra landanna og eiga þrír íslenskir kennarar greinar í henni. Menntamálaráðherra eru afhent að gjöf eintök fyrir alla grunnskóla, framhaldsskóla og skólaskrifstofur.
13. Þemahefti Flatarmála kemur út í mars 2001 helgað viðburðum stærðfræðiársins og þátttöku Íslendinga á fjölþjóðlegum vettvangi.
14. Sjónvarpið hefur hinn 8. janúar sýningu á vandaðri þáttaröð sem frumsýnd var vorið 1998 og nefnist á frummáli *Life by the Numbers*. Þetta er í fyrsta sinn sem íslenskt sjónvarp leggur fram svo vandaða kynningu fyrir almenning og unglinga í skólum á hlutverki og gildi stærðfræði í nútímasamfélagi. Leitað hefur verið til Námsgagnastofnunar um að hafa þættina til útláns fyrir skóla. Kennsluleiðbeiningar með þáttunum eru í þýðingu.
15. Formaður nefndarinnar skrifaði greinar vikulega í Morgunblaðið tímabilið janúar til mars 2001.
16. Menntamálaráðherra veitti styrk til þess að unnt yrði að setja sjónvarpsþættina á myndbönd og unnið er að þýðingu á verkefnahefti og námskeiðatilboði fyrir kennara á unglingastigi og í framhaldsskólum um nýtingu þáttanna í kennslu.
17. Áform eru um að halda opinni heimasíðu Alþjóðlega stærðfræðiársins 2000 í endurgerð. Þar verði reynt að tengja starf kennara og fræðimanna á sviði stærðfræðimenntunar við það sem gerist erlendis og fræða um það.

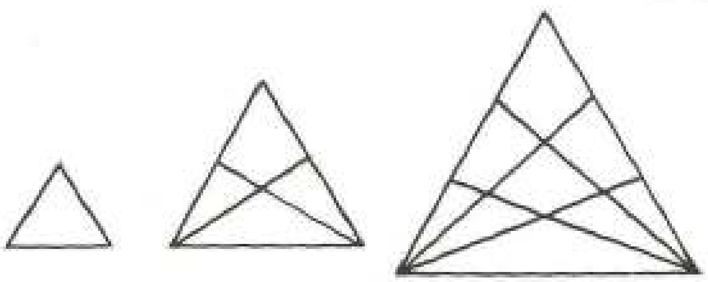
Þrautgóðar að vestan!

Jóna Benediktsdóttir
og Kristín Ósk
Jónasdóttir

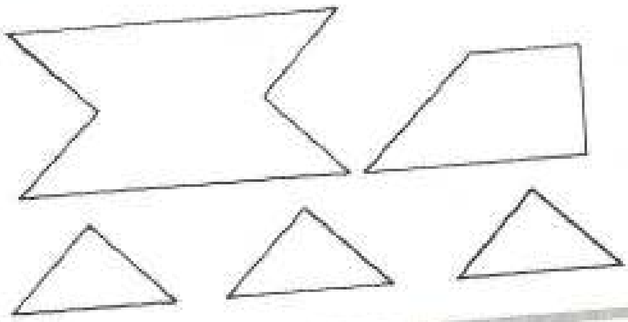
Hér er mynd af reglulegum sexhyrningi sem skipt er í 6 einslaga og jafnstóra ferhyrninga.
Klipptu ferhyrningana 6 út og notaðu þá til búa til tvo reglulega fimmhyrninga. Reglulegur fimmhyrningur hefur fimm jafnlangar hliðar og fimm jafnstór horn.



Hve margir þríhyrningar eru í hverri þessara þriggja mynda? Hvernig verður næsta mynd í þessari röð og hve margir þríhyrningar verða í henni?



Klipptu út þessar myndir og reyndu að mynda kross úr þeim.



Stærðfræði í náttúrunni

Ríkey Sigurbjörnsdóttir

Er stærðfræði í náttúrunni?

Það eru sjálfsagt ekki margir sem leiða hugann að stærðfræðinni í umhverfi okkar eða náttúrunni, eða gera sér yfirleitt grein fyrir henni. Nánast hvar sem við erum leynist stærðfræðin í kringum okkur. Manngert umhverfi byggist einfaldlega á stærðfræði og náttúran sjálf býr yfir ótrúlega mikilli og fjölbreytilegri stærðfræði. En hvernig er hægt að leiða nemendum okkar fyrir sjónir að stærðfræðin er ekki bundin við skólabækurnar eða innkaupaferðir? Hvernig getum við vakið áhuga nemenda á að náttúran er meira en bara lífverur og lífvana efni? Hvernig getum við, á skipulagðan hátt, nýtt okkur náttúruna til dýpri skilnings á stærðfræðinni?

Hvað segir aðalnámskráin um stærðfræði í náttúrunni?

Það er ekki margt í aðalnámskránni sem gæti bent til þess að tengsl séu milli stærðfræði og náttúrunnar. Örfá markmið er að finna, oftast eitt til þrjú, á hverju námsári sem hægt er að heimfæra á þau tengsl.

Í flestum þeirra er talað um umhverfi nemandans en greinilega er þó hægt að heimfæra þau yfir á náttúrulegt umhverfi ekki síður en manngert.

Hvernig getum við notað náttúruna til dýpkunar á stærðfræðinámi nemenda?

Í raun er hægt að tengja stærðfræðina náttúrunni í gegnum mjög marga þætti hennar. Eflaust koma fleiri tengsl í ljós þegar farið er að vinna með náttúruna á þennan hátt.

Ein leið fyrir kennara til að örva nemendur til að mynda tengsl milli stærðfræði og náttúru er að gera nemendum kleift að handfjatla og fást við tengslin á áþreifanlegan hátt (Harrell, Marvin E & Fosnaugh, Linda S 1997:382). Þá er hægt að nota skyggnur og sýna nemendum myndir af hinum ýmsu fyrirbrigðum náttúrunnar sem tengjast stærðfræði og nemendur hafa ekki tök á að nálgast á annan hátt. Hér á eftir eru tilgreindir nokkrir þættir stærðfræðinnar og hvernig tengsl þeirra við náttúruna birtast okkur.

Stærðarhugtök í náttúrunni

Eitt af fyrstu viðfangsefnum nemenda sem eru að stíga sín fyrstu spor á 10 ára langri grunnskólagöngu er að vinna með stærðarhlutföll. Nýja námsbókin *Kátt er í Kynjadal* byggist að miklu leyti á slíkri vinnu. Náttúran býr yfir ótal tækifærum til að vinna með stærðarhugtök eins og *stór, lítill, þungur, léttur, hár, lágur* o.s.frv. og afstöðuhugtök eins og *á milli, undir, yfir, fyrir framan, fyrir aftan* o.s.frv. Reyndar gefur þetta umrædda námsefni töluverð tækifæri til að vinna með nemendur út í náttúrunni.

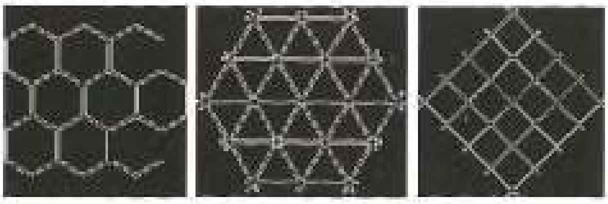
Form í náttúrunni

Formin koma inn í stærðfræðina strax á fyrsta námsári eins og kemur m.a. fram í aðalnámskránni. Formin birtast okkur á margan hátt í náttúrunni. Þríhyrningafomin í fjöllunum og í krónum barrtrjáa. Hringurinn sem birtist í sólinni, ummáli jarðarinnar, hringjum sem regndropar mynda þegar þeir falla ofan í pollana, ummáli trjáa, árhringjum í trjábolum, blómum, blómstönglum o. fl.

Í dýraríkinu eru hringir einnig algengir. Þá má sjá hjá fuglunum í hreiðurgerð þeirra, ummáli eggja o.s.frv. Form koma víða fyrir þar sem augað greinir ekki. Þekjufrumur í yfirborði laufblaða og húðar á dýrum hafa lögun ýmissa forma, sjá nánar í kaflanum þökun. Mjög áhugavert er að fara með nemendur í vettvangsferð og láta þá finna hin ýmsu form í náttúrunni. Oft koma þeir á óvart með því að sjá form sem kennari hefur ekki komið auga á. Í tengslum við vinnu með form er einnig hægt að vinna með horn. Hvar sjá nemendur horn í náttúrunni? Fjallstindar, toppar trjáa, oddar laufblaða o.s.frv. Nemendur geta fundið og flokkað horn í náttúrunni í rétt horn, gleið horn og hvöss horn.

Þökun í náttúrunni

Þökun merkir „að þekja plan (svæði) með mynstri (sniði) á þann hátt að ekkert svæði er óþakið". (http://forum.swarthmore.edu/geometry/rugs/symmetry/grids.html) *Regluleg þökun* merkir að þökun er gerð með aljöfnum reglulegum marghyrningum og reglulegir marghyrningar eru þeir marghyrningar sem hafa allar hliðar jafnlangar. Aðeins þrír reglulegir marghyrningar þekja plan en það eru þríhyrningar, ferningar og sexhyrningar.



(http://forum.swarthmore.edu/geometry/rugs/symmetry/grids.html)

Í náttúrunni finnum við mjög víða dæmi um þökun. Í smásjá er hægt skoða þökun með því að athuga líffræðileg sýnishorn sem tekin eru í náttúrunni. Allir nemendur hafa gaman af því að skoða smásjársýni af þekjufrumum t.d. húðfrumum og jurtafrumum. Þegar þekjufrumur eru skoðaðar sést greinilega hvernig þær mynda munstur og þekja flöt. Í náttúrunni finnum við einnig tví- og þrívíddarmyndir sem undirstrika rúmfræðihugtök eins og marghyrning, tígul og margflötung. Til dæmis getur samsetning efra yfirborðs venjulegs laufblaðs verið dæmi um þökun með marghyrningum (Harrell, Marvin E & Fosnaugh, Linda S 1997:380). Þökun finnst víðar. Hreistur á fiski er dæmi um þökun. Þegar áferð þess er skoðuð sést hvernig hreistrið raðast saman á snilldarlegan hátt og þekja húð fisksins. Sama á við um slönguskinn, skjaldbökuskel, krókudílahúð o.s.frv. Þökun finnst þannig bæði í dýra- og jurtaríkinu.

Þótt að við getum fundið dæmi um þökun með þríhyrningum og ferhyrningum er algengast að finna líffræðileg dæmi þar sem sexhyrningar eiga í hlut (Harrell, Marvin E & Fosnaugh, Linda S 1997:381). Hunangsflugnabú eða geitungabú eru t.d. sett saman úr sexhyrningum.

Margbreytilegt birtingarform talna í náttúrunni

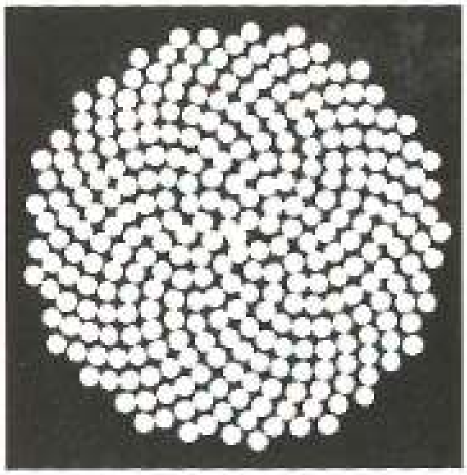
Fimm er mjög algeng tala í blómum, algengasti fjöldi krónublaða er fimm. Talan fimm birtist líka í umbúnaði fræja. Auðveldasta leiðin til að finna töluna fimm er að skera epli í tvennt (öfugt við það sem gert er venjulega). Við sjáum fimm fræbelgi. Það sama á við um perur (Eastway og Wyndham 1998 [1. bls]). Þegar betur er að gáð, kemur í ljós að oddatölur eru algengari í plöntum og sléttar tölur algengari hjá dýrum.

Það er ekki tilviljun að sumar tölur birtast oftar en aðrar. Í raun eru tengsl milli talnanna sem standa fyrir fjölda krónublaða, laufa og hringja í áferð ananasbarkarins (Eastway og Wyndham 1998 [2. bls]).

Ítali að nafni Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) gaf nafn sitt einfaldri talnakeðju sem um leið er eitt stórfenglegasta dæmið um stærðfræði í náttúrunni, Fibonacci tölurnar. Fibonacci tölurnar mynda mynstur sem er: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,…

Fibonacci hefur bent á að þetta talnamunstur er víða að finna í náttúrunni. Hann hefur t.d. bent á dæmi um kanínupar sem fjölgar sér. Segjum að ungar kanínur, kven- og karldýr séu settar út á akur. Kanínur geta tímgast eins mánaða gamlar svo að við lok annars mánaðar getur kvendýrið eignast annað par af kanínum. Segjum svo að kanínurnar deyi ekki og kvendýrin eignist alltaf nýtt par (karl- og kvendýr) einu sinni í mánuði frá öðrum mánuði að telja. Þrautin sem Fibonacci leysti með talnamynstri sínu var hversu mörg pör verða til eftir eitt ár. (http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html síða 2)

Fibonacci bendir á fleiri tilfelli þar sem talnamynstrið birtist í náttúrunni. Á mörgum plöntum er fjöldi krónublaða Fibonacci tala. Liljur og írisar hafa 3 krónublöð, sóleyjar og sumar rósir hafa 5 krónublöð, „delphinium" hafa 8 krónublöð, morgunfrú hefur 13 krónublöð, sumir asterar hafa 21 krónublað og hægt er að finna fagurfíflategundir með 34, 55 eða jafnvel 89 krónublöð. (http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html síða 7)



Fibonacci tölur finnast líka í því hvernig fræ raðast í botni blóma. Hér er mynd af uppsetningu fræja í blómbotni. Miðjan er merkt með dökkum punkti, fræ númer eitt. Fræin sýnast mynda gorm sem snýst bæði til vinstri og hægri. Ef þessir hringir eða gormar til hægri eru taldir eru þeir 34. Hversu margir ætli hringirnir séu í hina áttina? Í mörgum plöntum birtast Fibonacci tölur einnig þegar skoðað er hvernig laufblöðin raðast á stilkinn. (http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html síða 7)

Ef skoðað er hlutfall milli talna Fibonaccis þá kemur í ljós að hlutfallið milli tveggja samliggjandi talna er alltaf svipað eða eins þegar komið er upp fyrir töluna 3. Hlutfallið milli 5 og 3 er þannig 1,6666..., hlutfallið milli 8 og 5 er 1,6, hlutfallið milli 13 og 8 er 1,.625, hlutfallið milli 21 og 13 er 1,61538, hlutfallið milli 34 og 21 er 1,61804 og þegar tölurnar eru skoðaðar upp eftir talnamunstrinu kemur í ljós að hlutfallið er alltaf svipað og það hlutfall hefur verið kallað **gullna hlutfallið** (the gold ratio) eða **gullinsnið**. Þessi tala sem nákvæmlega er talin vera (• 5+1)/2 (kvaðratrót af 5 + 1 deilt með 2) er táknuð með ϕ sem er tákn fyrir gullna hlutfallið. Gullna hlutfallið birtist svo á ótrúlega marga vegu í náttúrunni, bæði í tengslum við jurtir og dýr.

Speglunarás í náttúrunni

Eitt af því sem fegurst er í náttúrunni er hvernig speglunarásar eða samhverfuásar birtast. Speglunarás er líklega það stærðfræðilega fyrirbæri sem birtist hvað víðast og á hvað fjölbreytilegastan hátt í náttúrunni. Hvað er fallegra en að sjá fjöllin speglast í lygnum sjónum á heitum og friðsælum sumardegi? Oft er speglunin svo skýr að hægt er að draga samhverfuásinn í huganum eftir fjöruborðinu. Slík sjón er ekki óalgeng í þröngum fjörðum landsins, sérstaklega fyrir norðan þar sem skjólið er hvað mest af fjöllunum.

Samhverfa í laufblöðunum er mjög áberandi einkenni þeirra þar sem speglunarásinn er mjög skýr. Sniðugt er að nota lítinn spegil þegar nemendur rannsaka laufblöð og átta sig á samhverfu þeirra. Ef mynd af laufblaðinu er þrykkt á blað verður samhverfuásinn enn skýrari (Guðbjörg Pálsdóttir og Sólrún Harðardóttir 1993:8). Mjög merkilegt er að skoða fiðrildi og flugur og sjá hversu nákvæmlega búkurinn virðist vera eins báðum megin speglunaráss. Því miður eigum við því ekki að fagna að eiga stór og litskrúðug fiðrildi hér á Fróni en allir hafa séð myndir af slíkum lífverum og ungir nemendur eru oft óþreytandi að teikna myndir af fögrum og litríkum fiðrildum svo að sum hver eru hrein listaverk.

Speglunarásar eru víða. Hver hefur ekki skorið í sundur ávöxt? Þar er að finna speglunarás. Í flestum dýrum er að finna speglunarás. Ef dregið er strik eftir endilöngum mannslíkamanum fáum við speglunarás. Í það minnsta er ekki mikill sjáanlegur munur á líkamshlutunum tveim ef frá er talinn hugsanlegur munur á húð. Sama er að segja um önnur dýr. Allir nemendur hafa gaman af að skoða og finna speglunarása í náttúrunni.

Stórar tölur í náttúrunni

Mjög mikilvægt er að venja nemendur, strax frá upphafi skólagöngu, við að fást við stórar tölur. Rannsóknir hafa leitt í ljós að margt fullorðið fólk þjáist af tölulegu ólæsi, þ.e.a.s. fólk getur ekki gert sér grein fyrir stærð talna og hefur ekki fengið þjálfun í umfjöllun og vinnu með háar tölur. Jafnvel margt vel menntað fólk hefur litla tilfinningu fyrir hugtökum eins og milljón, milljarður (e. billion) og billjón (e. trillion) og sumir vita kannski ekki einu sinni að milljarður er 1000 milljónir og billjón 1000 milljarðar (Paulos, John Allen 1998:3). Kennarar og aðrir sem koma að menntun barna þurfa að vera vakandi fyrir því að þeir fái tækifæri til að umgangast stórar tölur sem eðlilegan þátt í stærðfræðinni. Þar getur náttúran komið inn. Stórar tölur getum við fundið nánast alls staðar í náttúrunni þar sem okkur dettur í hug að leita þeirra. Benda má á fjölda hára á höfði mannsins eða í feldi dýra, fjölda dropa vatns í polli, fjölda lítra eða jafnvel tonna vatns í stöðuvötnum og úthöfum. Fjöldi stjarna á himninum, vegalengd til sólar og annarra pláneta, fjöldi stráa á grasflötinni, fjöldi barrnála á stóru barrtré og lengi má telja. Fjöldi sandkorna í sandkassa, fjöldi snjókorna sem falla, fjöldi baktería, fjöldi fiska í sjónum o.s.frv.

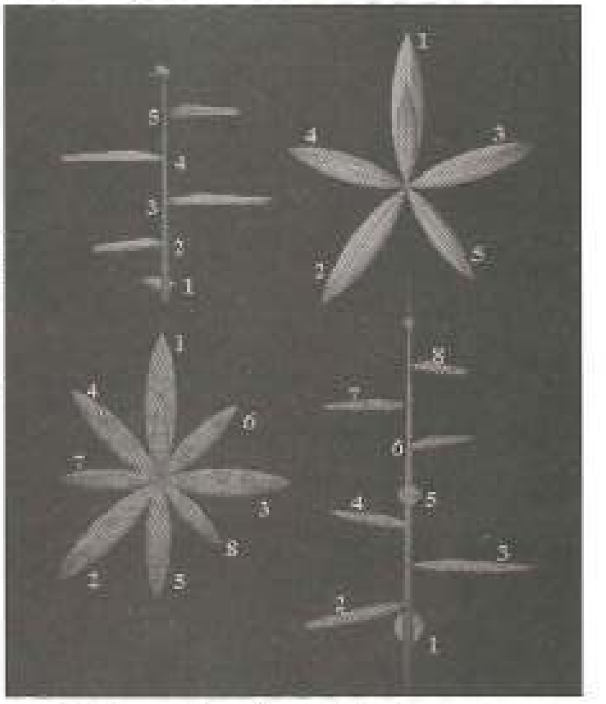
Eins og áður er sagt er of lítið gert af því að vinna með háar og lágar tölur með nemendum. Náttúran býður svo sannalega upp á vinnu af þessu tagi. Hægt er að útfæra viðfangsefnin á margan hátt.

Mælingar í náttúrunni

Eitt vinsælasta viðfangsefni þegar farið er með nemendur út í náttúruna er sennilega mælingar. Mælingar er hægt að vinna hvar sem er bæði í manngerðu umhverfi og náttúrulegu. Hægt er að fara með mælitæki og láta nemendur mæla náttúruleg fyrirbæri eins og hæð trjáa, runna og steina, breidd lækjar, tjarnar, blómabreiðu o.s.frv. Ekki er síður áhugavert að skilja mælitækin eftir heima og nota óformlegar mælieiningar eins og skref, spönn, hænuskref, spýtur eða eitthvað sem nemendur finna í náttúrunni og hægt er að nota sem viðmiðun í mælingum. Þetta er hægt að tengja við samfélagsfræðina og láta nemendur velta fyrir sér hvernig menn mældu í gamla daga. Hvaða mælieiningar notuðu menn þá? Hvernig mældu þeir t.d. fyrir bæjarstæði? Spurningar eins og hvers vegna óformlegar mælingar eins og skref, spönn, faðmar og þess háttar eru ekki hentugar, eru nauðsynlegar til að fá nemendur til að velta fyrir sér tilgangi og nákvæmni í mælingum. Þá er mjög gott að búið sé að undirbúa slík viðfangsefni með því að láta nemendur áætla hvað þeir geti mælt úti í náttúrunni, með hverju og hvernig. Þá er einnig kjörið viðfangsefni fyrir eldri nemendur að finna fjarlægðir milli staða með því að beita áður lærðum aðferðum s.s. pýþagórusarreglu (Hugo Rasmus 1997:12).

Börn og unglingar hafa ætíð haft gaman af skuggaleikjum. Þau fara í eltingarleik við skuggann sinn og láta hann breytast á marga vegu. Hvernig væri að virkja þennan áhuga nemenda og láta þá mæla skuggann sinn? Nemendur hjálpast að, annar stendur kyrr á meðan hinn mælir skuggann. Þeir gætu svo velt fyrir sér af hverju skugginn er breytilegur m.a. með afstöðu til sólarinnar. Þá er einnig hægt að mæla t.d. hæð trés með því að finna hlutfall milli hlutar (t.d. stiku) og skugga hans miðað við ákveðna afstöðu sólarinnar. (http://www.pbs.org/teachersource/mathline/concepts/neighborhoodmath/activity2.shtm)

En það er hægt að mæla á fleiri vegu en með lengdarmælieiningum. Ein af þeim mælingueiningum sem notaðar eru í náttúrunni eru gráður. Gráður birtast í náttúrunni t.d. í halla á náttúrufyrirbrigðum s.s. hólum og fjöllum. Þá eru gráður notaðar til að staðsetja staði á hnettinum ásamt lengdar- og breiddargráðum.



Eitt af merkilegastu fyrirbrigðum þar sem gráður finnast er þó líklega hvernig laufblöðin raðast á stilk plantna. Venjulega raðast laufblöðin á stilkinn út frá mismunandi horni og þegar litið er upp stilkinn mynda þau gorm – raðast umhverfis stilkinn eftir ákveðinni formúlu. Þessi formúla tengist einmitt gráðum. Nýtt blað myndar horn við síðasta blað og það horn er á bilinu 137° - 139°. Þegar horft er ofanfrá niður eftir stilki með 5 blöðum á mynda blöðin stjörnu. Ef hornið á milli blaðanna er mælt (ofan frá) þá kemur í ljós að hornið milli allra blaðanna (ekki tekið tillit til röð þeirra) er 52°. Ef hins vegar 6. blaðið kemur á stilkinn þá ruglast kerfið og hornið milli þess og blaðsins við hliðina verður aðeins 32°. Skyldi þarna verið komin ástæða fyrir því að blöðin eru oft 5 á blómstilk plantna? (Eastway og Wyndham 1998 [4-5. bls])

Fleira er hægt að minnast á í tengslum við mælingar í náttúrunni. Stærðfræði kemur t.d. heldur betur við sögu í mælingum á veðri. Sem dæmi má nefna að úrkoma, vindur og loftþrýstingur eru mæld með ákveðnum mælieiningum sem er eitt birtingarform stærðfærðinnar í viðbót.

Tölfræði í náttúrunni

Í nútímaþjóðfélagi er mjög mikilvægt að nemendur séu vel læsir á tölfræðilegar framsetningar ýmiss konar. Náttúruna er vel hægt að nota til að láta nemendur vinna tölfræðiverkefni. Nemendur geta farið í rannsóknarleiðangur út í náttúruna og safnað upplýsingum, t.d. um fjölda ýmissa trjátegunda á einhverjum tilteknum stað, fjölda fugla af hverri tegund sem þeir sjá í ferðinni o.s.frv. Í leiðinni þjálfast nemendur í greiningu trjáa og fugla. Tölurnar úr rannsókninni er hægt að setja upp í myndrit s.s. súlurit eða skífurit. Hér opnast líka möguleiki til að samþætta þetta vinnu með töflureikni.

Hnitakerfi í náttúrunni

Hnitakerfi er eitt af þeim stærðfræðihugtökum sem eru nemendum svo mikilvæg. Í því felst mikil rökhugsun og færni í hnitakerfisreikningi er svo sannarlega gott veganesti út í lífið að námi loknu. Nægir að hugsa um hnöttinn okkar, Jörðina, til að skilja hvers vegna skilningur á hnitakerfi er öllum svo mikilvægur. Hnitakerfi er beinlínis undirstaða fyrir staðsetningu á hnettinum. Lengdar- og breiddarbaugar eru fyrirbæri sem notuð eru til að staðsetja staði á jarðarkringlunni. Lengdar- og breiddarbaugar eru þannig á sama hátt settir upp og hnitakerfi þar sem breiddarbaugar eru láréttu hnitin og lengdarbaugarnir eru lóðréttu hnitin. Þá getur kunnátta í hnitakerfi einnig komið sér vel við leit í landabréfabókum.

Að lokum

Náttúran er sett saman úr tölum og formum. Hvernig er hægt að virkja nemendur til að sjá hana með stærðfræðiaugunum sínum, heyra hana með stærðfræðieyrunum sínum og snerta hana með stærðfræðiskyninu sínu? Mikilvægt er að allir kennarar séu vakandi fyrir tækifærum til að nýta náttúruna í kennslu og ekki síður í stærðfræði en öðrum greinum.

Stærðfræðin er einnig notuð til að skilja betur náttúruna og hvernig hún hagar sér t.d. í náttúruhamförum s.s. jarðskjálftum, snjóflóðum og eldgosum. Ekki gefst kostur á að fara nánar út í þá sálma hér, enda er það eitt og sér efni í aðra grein. Mikilvægt er þó að gera nemendum grein fyrir þeim þætti stærðfræðinnar og hvernig hún er nauðsynleg vísindamönnum í glímunni við „dyntí og dylgjur" náttúrunnar.

Heimildaskrá.

Aðalnámskrá grunnskóla almennur hluti. 1999a. Reykjavík, Menntamálaráðuneytið

Aðalnámskrá grunnskóla stærðfræði. 1999. Reykjavík, Menntamálaráðuneytið

Eastway og Wyndham. 1998. Why Can´t I find a four-leafed clover?. *Why Do Buses Come in Threes. The hidden mathematics of everyday life.* London, [útgefanda vantar].

Guðbjörg Pálsdóttir og Sólrún Harðardóttir. 1993. Hrímkalt haust. *Flatarmál* 1,2:8-9.

Harrell, Marvin E & Fosnaugh, Linda S. 1997 Allium to Zircon: Mathematics. *Mathematics teaching in the middle school 2,(6):380-389.*

(http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html)

Hugo Rasmus. 1997. Flatarmálsfræði á forsendum nemenda. *Flatarmál* 5,1:12

Paulos, John Allen. 1998. *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and Its Consequences.* England, Penguin Books.

Ríkey kennir við Grunnskólann á Siglufirði. Hún er í fjarnámi við KHÍ og er efni greinarinnar hluti af ritgerð sem hún skrifaði í náminu.

RÖGNVALDUR MÖLLER

Að rekja sig í þrepum

Í nýrri námsskrá fyrir grunnskóla er æsku landsins gert að leysa þrautir með því að nota *rakningu* og *þrepun*. Hvað er átt við með *rakningu* og *þrepun*? Hvernig þekkir maður þraut sem má leysa með *rakningu* eða *þrepun*? Hvað hafa þau sem erfa landið að gera við *rakningu* og *þrepun*? Ekki er ætlunin að svara þessum spurningum, heldur að sýna dæmi um þessi hugtök í notkun – dæmin gefa hugmynd um hvernig mætti svara spurningunum.

Rakning er þýðing á enska orðinu *recursion*. Í Ensk-íslenskri orðabók Arnar og Örlygs er orðið *recursion* útskýrt sem „ákvörðun runu þannig að hvert stak er reiknað út frá þeim sem á undan eru komin í endanlega mörgum þrepum". *Þrepun* er orð fyrir það sem á ensku er kallað (*mathematical*) *induction*. Lögmálið um stærðfræðilega þrepun er einn af grundvallareiginleikum mengis náttúrlegra talna. (Í þessari grein er litið svo á að mengi náttúrlegra talna innihaldi tölurnar 1, 2, 3 .... Oft er talan 0 talin með, en það er hreint smekksatriði hvort svo er gert.) Látum $P(n)$ vera einhverja fullyrðingu um tölu n. Gerum ráð fyrir að fullyrðing $P(1)$ sé sönn. Gerum enn fremur ráð fyrir að sama hvaða náttúrleg tala n er, þá gildi alltaf að ef fullyrðingin $P(n)$ er sönn þá er fullyrðingin $P(n+1)$ líka sönn. Lögmálið um stærðfræðilega þrepun segir að þá sé fullyrðingin $P(n)$ sönn fyrir sérhverja náttúrlega tölu n.

Að sjálfsögðu er ekki ætlast til að hugtökin séu kynnt í hátimbruðu fræðilegu samhengi í grunnskólum, heldur er ætlunin að nemendur kynnist þessum hugtökum í gegnum dæmi. Þegar fjallað er um áþreifanleg dæmi þá er ekkert dularfullt á ferðinni – hugtökin *rakning* og *þrepun* verða eðlilegt framhald af því að telja á puttunum og heilbrigðri hundalógík.

Dæmin í fyrsta hluta sýna rakningu í verki og er kynnt runa Fibonacci, sem er væntanlega þekktasta dæmið um skilgreiningu með rakningu. Í næsta hluta er fjallað um þekkta þraut sem gengur undir nafninu *Turninn í Hanoi*. Í þrautinni kemur fyrir turn úr 64 gullskífum. Lausnin á þrautinni byggir á því að leysa sömu þraut fyrir turn með 63 skífum, sem aftur má leysa með því að nota lausn á þrautinni fyrir turn með 62 skífum og svo framvegis. Svona má rekja sig niður í það að leysa þrautina ef við hefðum bara eina skífu. Í þriðja hluta kemur upp erfitt vandamál í hjónabandsráðgjöf. Flækjurnar stafa af því að 365 hjón eiga hlut að máli en aftur á móti væri einfalt að leysa vandann ef bara ein, tvenn eða þrenn hjón ættu hlut að máli. Út frá því má sjá hver lausnin er fyrir hjónin 365. Síðasta dæmið er af öðrum toga og snýst um að finna nálgun á tölunni π. Við byrjum með grófa nálgun og notum hana síðan til að reikna út betri nálgun. Þannig má rekja sig áfram og fá hversu góða nálgun sem við viljum. Dæmið sem við skoðum kemur frá Arkímedesi sem var uppi á þriðju öld fyrir Kristsburð.

1. Kaupmaðurinn í Pisa og kanínubú Fibonacci

Kaupmaður frá Pisa fór til Lucca í viðskiptaerindum. Þar tvöfaldaði hann fé sitt og eyddi síðan 12 dínörum. Þar á eftir hélt hann til Flórens þar sem hann tvöfaldaði enn fé sitt og eyddi síðan 12 dínörum. Við heimkomuna til Pisa hélt hann áfram viðskiptum, tvöfaldaði fé sitt og eyddi 12 dínörum eftir það. Þá átti hann ekkert eftir. Hvað hafði maðurinn mikið fé milli handa í upphafi ferðar?

Hér höfum við upplýsingar um lokastöðuna (kaupmaðurinn staur) og hvernig hann hefur hagað fjármálum sínum (eytt um efni fram). Rekjum okkur til baka til að finna hver upphafsstaðan var.

Þegar maðurinn var búinn að stunda sín viðskipti í Pisa átti hann augljóslega 12 dínara sem er tvöfalt það sem hann átti við komuna til Pisa svo að þá átti hann 6 dínara. Það segir okkur að við lok viðskipta í Flórens átti hann 18 dínara þannig að við komuna til Flórens átti hann 9 dínara. Því átti hann 21 dínara þegar hann var búinn að tvöfalda fé sitt í Lucca og við getum ályktað að í upphafi hafi hann átt $10\frac{1}{2}$ dínara.

Látum d_n tákna dínaraeign mannsins þegar hann kemur til n-tu borgarinnar á ferðalagi sínu. Það sem gerist í hverri borg er að hann byrjar á að tvöfalda fé sitt og eyða síðan 12 dínörum og þá er komin sú fjárhæð sem hann á þegar hann kemur til næstu borgar. Því er $d_{n+1} = 2d_n - 12$ eða $d_n = d_{n+1}/2 + 6$. Ef við vitum hvað maðurinn var með í vasanum á einhverjum tímapunkti þá getum við notað þessar formúlur til að rekja okkur aftur á bak eða áfram í tíma og reiknað út fjárhagsstöðu mannsins á einhverjum gefnum tímapunkti.

Þessi litla þraut kemur úr bókinni *Liber abbaci* sem var skrifuð 1202. Höfundur er þekktastur undir nafninu Fibonacci (sonur Bonacci) en hét Leonardo og var oft kenndur við heimaborg sína Pisa. Hann mun hafa fæðst í kringum 1175 og látist í kringum 1250.

Nafn Fibonacci er órjúfanlega tengt talnarununni 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., sem kölluð er Fibonacci-runan eða Fibonacci-tölurnar. Í riti Fibonacci kemur þessi runa upp í sambandi við eftirfarandi þraut:

Maður nokkur setur nýgotið kanínupar í garð sem er umlukinn vegg. Hve mörg pör verða í garðinum að ári liðnu ef hvert par getur af sér eitt nýtt par í hverjum mánuði og pörin byrja að geta af sér ný pör tveimur mánuðum eftir fæðingu?

Til að geta svarað spurningunni þurfum við að gera ráð fyrir að engin af kanínunum deyi. Kanínuparið sem sett var í garðinn unir sælt við sitt þangað til að tveimur mánuðum liðnum fæðist nýtt par. Eftir tvo mánuði eru því tvö pör í garðinum. Þegar þriðja mánuðinum er lokið getur upphaflega parið af sér eitt nýtt par en hitt parið er ekki enn komið á ungaeignaraldur. Eftir þrjá mánuði eru komin þrjú pör. Eftir fjórða mánuðinn geta svo upphaflega parið og það sem fæddist fyrst hvort um sig af sér eitt nýtt par og eru þá komin fimm pör í garðinn. Nú fer að verða erfitt að halda utan um reikningana í orðum og vænlegra að nota táknmál algebrunnar. Til að geta metið afrek Fibonacci að verðleikum verður að hafa í huga að hann kunni enga algebru. Ástæðan er að fyrir 800 árum þegar hann var telja kanínur var ekki til neitt sem hét algebra.

Látum F_n tákna kanínufjölda í n-ta mánuði. Þannig að $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ og $F_5 = 5$. Þegar við reynum að átta okkur á gildi F_n fyrir $n \geq 2$ tökum við eftir að þau kanínupör sem komin eru á ungaeignaraldur eru nákvæmlega þau pör sem voru garðinum fyrir tveimur mánuðum, þ.e.a. s. þau eru F_{n-2} að tölu. Í mánuði númer n fæðast F_{n-2} ný pör sem bætast við þau pör sem voru í garðinum í síðasta mánuði, en þau eru F_{n-1}. Fáum jöfnuna $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, fyrir $n \geq 3$.

Með þessa jöfnu að vopni getum við rakið okkur áfram eftir Fibonacci-rununni og reiknað F_n fyrir hversu stóra tölu n sem við viljum, næsta tala í rununni er alltaf summa síðustu tveggja talna. Sérstaklega er þægilegt að láta töflureikni, t.d. Excel, sjá um streðið fyrir sig. Við setjum töluna „1" í hólf A1 og A2 og setjum síðan formúluna „=A1+A2" í hólf A3. Ef þið afritið formúluna úr hólfi A3 í fyrsta dálk töflunnar frá og með hólfi A4 þá kemur Fibonacci-runan í ljós.

Það veldur áhyggjum að kanínustofninn í garðinum úrkynjast mjög skjótt. Þessu má bjarga með því að við fylgjumst bara með fjölda kvenkyns kanína í garðinum og hugsum okkur að af og til komi kanínuherrar í heimsókn en annars sé karlkyninu úthýst. Við byrjum með eina nýfædda kanínutelpu í garðinum. Í hverjum mánuði eignast hver kvenkyns kanína sem orðin er að minnsta kosti tveggja mánaða eina kanínutelpu sem síðan fer sjálf að eignast afkvæmi frá og með tveggja mánaða aldri. Fjöldi kanína í garðinum í n-ta mánuði er F_n, sem er n-ta Fibonacci-talan.

Fibonacci-tölurnar koma upp sem lausnir á fleiri verkefnum og þrautum. Til dæmis var eftirfarandi dæmi í Úrslitakeppni Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema fyrir árið 2001 (tekið upp orðrétt).

Rögnvaldur ætlar upp stiga með 10 þrepum. Hann fer annaðhvort upp um eitt þrep eða upp um tvö þrep í hverju skrefi. Á hve marga mismunandi vegu getur hann farið upp stigann?

Látum a_n tákna fjölda ólíkra möguleika á ferð Rögnvaldar upp stiga með n þrepum. Hugsum okkur að Rögnvaldur sé kominn upp stigann með 10 þrepum. Í síðasta skrefinu tók hann annað hvort eitt þrep, og var þá áður í 9. þrepi, eða hann tók tvö þrep og var þá í 8. þrepi síðast. Til að komast upp í 9. þrep hefur hann a_9 ólíkar leiðir og til að komast í 8. þrep eru a_8 ólíkar leiðir. Því er $a_{10} = a_9 + a_8$. Með sömu rökum sést að þegar $n \geq 3$ þá er $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Þetta er sama jafna og gildir um Fibonacci-tölurnar. Rögnvaldur getur bara farið upp stiga með einu þrepi á einn veg svo $a_1 = 1$ og stiga með tveimur þrepum getur hann farið upp á tvo ólíka vegur svo $a_2 = 2$. Síðan fæst að $a_3 = a_2 + a_1 = 3$ og svo framvegis. Almennt gildir að a_n er jöfn Fibonacci-tölu númer $n + 1$ og $a_{10} = F_{11} = 89$.

Hægt er að búa til margar útgáfur af slíkum þrautum, til dæmis:

Á hve marga vegu má leggja gangstétt sem er 1 metri á breidd og n metrar að lengd ef við höfum gangstéttarhellur sem eru hálfur metri að breidd og 1 metri að lengd?

Í náttúrunni birtast Fibonacci-tölurnar líka. Krónublöðum í blómum fjölgar eftir því sem lengra dregur frá miðjunni. Í mörgum blómum koma hlutar úr Fibonacci-rununni í ljós þegar krónublöðin í hverjum hring frá miðju eru talin.

Líka er áhugavert að skoða tölurnar $a_n = F_{n+1}/F_n$ (tilvalið að nota töflureikni). Þegar n stækkar þá nálgast tölurnar a_n töluna

$$\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = 1{,}6180339887\mathrm{K}$$

Þessi tala er þekkt sem *gullinsnið* og er hlutfall hliðarlengda í gullin-sniðs rétthyrningi. Sá rétthyrningur hefur þann eiginleika að ef af honum er skorinn ferningur þá verður eftir rétthyrningur með hliðar í sömu hlutföllum og í upphaflega rétthyrningnum. Fagurfræðin segir að rétthyrningar í þessum hlutföllum sé fallegastir allra rétthyrninga.

Fibonacci-runan er dæmi um *endurkvæma skilgreiningu*, þ.e.a.s. runan er skilgreind út frá sjálfri sér. Aðferðin sem við höfum beitt til að reikna út Fibonacci-tölurnar er þannig að ef við vildum finna gildið á þúsundustu Fibonacci-tölunni F_{1000} þá þyrftum við að reikna allar 999 tölurnar sem koma á undan henni í rununni. En það er einnig hægt að finna beina formúlu þannig að hægt er að reikna F_n án þess að reikna allar tölurnar sem koma á undan F_n í rununni. Formúlan segir að

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Formúlan er ekki þægileg til að reikna með beint gildi á Fibonacci tölum. Gildi hennar fellst fyrst og fremst í því að með henni er einfalt að meta stærð F_n þegar n er stór tala.

Heimildir. Stutta kynningu á Fibonacci og Fibonacci-tölunum má finna í *Talnaspegli*. Háskólinn í St. Andrews starfrækir umfangsmikið og vandað vefsetur um sögu stærðfræðinnar, slóðin er `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/`. Þar má meðal annars finna æviágrip vel yfir þúsund stærðfræðinga.
Æviágrip Fibonacci er á slóðinni `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html}`.
Ítarlegri umfjöllun um Fibonacci og störf hans er á `http://cedar.evansville.edu/~ck6/bstud/fibo.html`.
Margvíslegan fróðleik um Fibonacci-tölurnar og efni tengt þeim má finna á vefsíðunni `http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html`.
Einnig má benda á tímaritið *Fibonacci Quarterly* sem birtir nýjar rannsóknir sem tengjast Fibonacci og Fibonacci-tölunum á einhvern hátt.
Fróðleiksfúsir geta skoðað vefsíðunna `http://www.sdstate.edu/~wcsc/http/fibhome.html`.

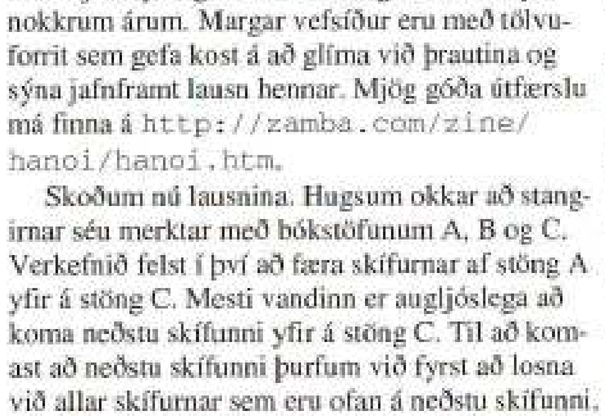
2. Turninn í Hanoi

Sagan segir að í hofi einu í hinni helgu borg Benares (nú nefnd Varnasi) við Ganges-fljót séu þrjár demantsnálar. Utan um eina þeirra var við sköpun heimsins hlaðið turni úr gullskífum sem allar hafa gat í miðju sem demantsnálin fer í gegnum. Alls munu þetta vera 64 skífur, sú stærsta neðst og síðan minnka skífurnar stöðugt er ofar dregur í turninum. Prestarnir í hofinu hafa þann starfa að flytja skífurnar af upphaflegu demantsnálinni yfir á aðra nál en þeim hafa verið settar þær skorður að að aldrei má flytja nema *eina skífu í einu (allar skífurnar nema mest ein verða að vera á einni nálanna) og aldrei má leggja skífu ofan á minni skífu. Fornir spádómar segja að áður en prestarnir ljúki verki sínu muni hofið verða að dufti og heimurinn líða undir lok með miklum hvelli.*

Þeir sem vilja geta reynt að glíma sjálfir við að leysa samsvarandi verkefni með færri skífum. Ef menn þekkja til ungbarns þá eiga mörg slík leikfang sem er stöng ásamt nokkrum misstórum plasthringjum. Með því að fá slíkt leikfang lánað og verða sér úti um tvær stangir í viðbót eru menn komnir með allt sem þarf til að kanna verkefnið. Sumir lesendur kunna líka að hafa rekist á þrautina í Fjölskyldugarðinum í Laugardalnum fyrir nokkrum árum. Margar vefsíður eru með tölvuforrit sem gefa kost á að glíma við þrautina og sýna jafnframt lausn hennar. Mjög góða útfærslu má finna á `http://zamba.com/zine/hanoi/hanoi.htm`.

Skoðum nú lausnina. Hugsum okkar að stangirnar séu merktar með bókstöfunum A, B og C. Verkefnið felst í því að færa skífurnar af stöng A yfir á stöng C. Mesti vandinn er augljóslega að koma neðstu skífunni yfir á stöng C. Til að komast að neðstu skífunni þurfum við fyrst að losna við allar skífurnar sem eru ofan á neðstu skífunni. Það eina sem hægt er að gera við þær er að setja þær á stöng B. Það verkefni að flytja allar skífurnar yfir á stöng C má því hluta niður í eftirfarandi þætti:

1. Flytja allar skífurnar nema þá neðstu yfir á stöng B.
2. Flytja neðstu skífuna yfir á stöng C.
3. Flytja skífurnar sem eru á stöng B yfir á stöng C.



Mynd 1. *Lausn á verkefninu þegar skífurnar eru bara þrjár*

Verkefnið að flytja turn með 64 skífum er því leyst með því að flytja fyrst turn með 63 skífum, svo að flytja eina staka skífu og flytja svo aftur turn með 63 skífum. Við höfum því fengið lausnaraðferð sem byggir á því að leysa sams konar verkefni sem er minna viðfangs. Til að flytja turn með 63 skífum notum við sömu aðferð! Flytjum fyrst turn með 62 skífum, svo eina skífu og svo aftur turn með 62 skífum. Til að flytja turn með 62 skífum þarf fyrst að flytja turn með 61 skífu og svo framvegis. Svona höldum við áfram þangað til við erum komin niður í það að flytja turn með einni skífu. Einfalt!

Hvað tekur svo langan tíma fyrir blessaða prestana að flytja allar skífurnar 64? Þurfum við að hafa áhyggjur af spádóminum um heimsendi?

Látum t_n tákna fjölda tilfærslna á skífum sem þarf til að flytja turn með n skífum af stöng A yfir á stöng C. Hér að ofan höfum við lýst því hvernig turn með n skífum er færður, fyrst er turn með $n-1$ skífu færður yfir á stöng B, svo er neðsta skífan tekin af stöng A og sett á stöng C og síðan færum við turninn með $n-1$ skífu frá stöng B yfir á stöng C. Fjöldi aðgerða sem þarf að framkvæma við að flytja turn með n skífum er því tvöfaldur fjöldi aðgerða við að flytja turn með $n-1$ skífu og síðan ein aðgerð til viðbótar, það er að segja ef $n \geq 2$ þá er $t_n = 2t_{n-1} + 1$. Augljóst er að til að flytja „turn" með einni skífu þarf bara eina aðgerð svo $t_1 = 1$. Nú má nota formúluna hér að ofan til að rekja sig áfram og reikna út gildið að t_n fyrir hvaða tölu n sem vera skal. Töflureiknir gefur $t_2 = 3$, $t_3 = 7$, $t_4 = 15$, $t_5 = 31$,.... Þegar horft er á þessa talnarunu þá sjáum við ákveðið mnstur og okkur gæti dottið í hug að $t_n = 2^n - 1$. Þessi formúla passar við tölurnar hér að ofan. Ef við vitum að $t_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ (þ.e.a.s. formúlan gildir fyrir fjölda aðgerða við að færa turn með skífu) þá er

$$t_n = 2t_{n-1} + 1 = 2\left(2^{n-1} - 1\right) + 1$$
$$= 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1.$$

Forsendan um að aðgerðafjöldi við að færa turn með $n-1$ skífu sé $t_{n-1}=2^{n-1}-1$ leiðir til þess að fjöldi aðgerða við að færa turn með n skífum er $t_n=2^n-1$. Af þessu er hægt að álykta að fyrir allar tölur $n \geq 1$ gildi að $t_n=2^n-1$. (Hér erum við að nota lögmálið um stærðfræðilega þrepun sem minnst var á í inngangi.)

Víkjum aftur að prestunum á bökkum Ganges-fljóts. Þeir leggja dag við nótt í að flytja turninn mikla og ná nú að flytja á hverri sekúndu eina skífu á milli stanga. Með þessum hraða tekur það prestahópinn $2^{64}-1=18446744073709551615$ sekúndur að flytja allan turninn, umreiknað í ár gerir það hartnær 600 milljarða ára. Við Vesturlandabúar erum ekki vanir að sjá hlutina fyrir okkur á svo löngum tímaskala en til samanburðar má geta að vísindamenn telja að alheimurinn sé um 14 milljarða ára gamall, sólin sé um 4,6 milljarða ára gömul og um 4,8 milljarðar ára séu þangað til slokknar endanlega á henni.

Önnur ástæða til að hafa litlar áhyggjur af þessum heimsendaspádómi er sú að sagan er uppspuni frá rótum. Þrautin mun fundin upp af franska stærðfræðingnum Eduard Lucas (1842 - 1891). Árið 1883 setti hann á markaðinn leikfang sem er þrjár stangir ásamt tíu misstórum tréskífum. Leikfanginu fylgdu leikreglur og sagan um prestana. Síðan var bætt við að leikfangið hafi borist til Vesturlanda með kínverska mandarínanum Fer-Fer-Tam-Tam, ættuðum frá Tonkin, og þrautinni gefið nafnið *Turninn í Hanoi*. Í þann tíma voru staðir eins og Hanoi og Tonkin mikið í fréttum og ætlunin var að auka sölu leikfangsins. Einnig er þeim sem getur leyst þrautina fyrir 64 skífur handvirkt heitið háum peningaverðlaunum.

Lucas þessi tengist Fibonacci-tölunum. Hann var fyrstur til að uppgötva formúluna hér að ofan fyrir n-tu Fibonacci-tölunni. Við hann eru líka kenndar Lucas-tölurnar sem eru 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ... Líkt og í Fibonacci-tölunum er næsta tala fengin með því að leggja saman síðustu tvær tölurnar.

Þrautin um *Turninn í Hanoi* er mjög þekkt. Finna má lýsingu á henni í mörgum kennslubókum í forritun þar sem hún er notuð sem dæmi um verkefni sem einfaldast er að leysa með forriti sem kallar á sjálft sig. Stærðfræðingar glíma enn við almenna útgáfur af þrautinni þar sem stangirnar sem má nota eru fleiri en þrjár.

Heimildir. St. Andrews menn fjalla um Lucas á síðunni `http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lucas.html`. Á síðunni `http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html` er að finna meiri fróðleik um sögu þessarar þrautar, t.d. myndir af leiðbeiningum sem fylgdu leikfanginu sem Lucas markaðssetti.

3. Krappur súludans í Gjálífisvík

Gjálífisvík er lítill afskekktur bær þar sem búa nákvæmlega 365 hjón. Þrátt fyrir smæð sína er mannlíf og menning með miklum blóma, meðal annars er rekinn þar súlustaður. Konur þar í bæ eru ekki par hrifnar af starfseminni og hafa giftar konur þá ófrávíkjanlegu reglu að ef þær komast að því að eiginmaðurinn hafi heimsótt þetta lastabæli þá sparka þær honum út á götu samdægurs. Konurnar eru líka mjög vel upplýstar, þannig að ef einhver kvæntur karl kemur á súlustaðinn þá frétta allar konurnar, ***nema*** *eiginkonan, það samstundis, en eiginkonan fær ekkert að vita. Einnig eru konurnar ákaflega skynsamar og rökvísar, og treysta rökvísi hverrar annarar fullkomlega.*

Síðasta nýársdag kom fram í áramótaboðskap bæjarstýrunnar að kvæntur karl þar í bæ hefði vanið komur sínar á súlustaðinn. Fullyrðing bæjarstýrunnar var mjög varfærnisleg – hún nafngreindi ekki manninn og lét þess ógetið að reyndar hefðu allir kvæntir karlar bæjarins litið við á súlustaðnum.

Hvaða áhrif hefur fullyrðing bæjarstýrunnar?

Við fyrstu sýn virðist að fullyrðing bæjarstýrunnar hafi engin áhrif, því að konurnar vissu allar að eiginmenn hinna kvennanna í Gjálífisvík hefðu kíkt á súlustaðinn. Skoðum samt hvað myndi gerast ef færri karlmenn hefðu fallið í freistni.

Hugsum okkur að bara einn kvæntur karl, herra X, hefði komið á súlustaðinn. Allar konurnar, nema frú X, vissu af framferði herra X. Yfirlýsing bæjarstýrunnar kemur mjög flatt upp á frú X. Hún getur verið viss um að enginn eiginmanna hinna kvennanna fór á súlustaðinn og því hlýtur bæjarstýran að vera að tala um hennar heittelskaða herra X. Frú X sparkar herra X út þennan sama nýársdag.

Hugsum okkur nú að syndaselirnir séu tveir, herra X og herra Y. Frú X veit af framferði herra Y og ályktar að bæjarstýran hafi átt við herra Y í yfirlýsingu sinni. Ef herra Y væri sá eini sem hefði kíkt á súlustaðinn þá yrði atburðarásin eins og hér að ofan. Frú X áttar sig á þessu og býst við að heyra fréttir af því að frú Y hafi sparkað herra Y út. Nýársdagur líður nú tíðindalaust því frú Y heldur að bæjarstýran hafi átt við herra X. Að morgni 2. janúar þá verða frú X og frú Y að horfast í augu við að fleiri en einn karl hefur heimsótt súlustaðinn. Báðar vita þær af eiginmanni hinnar og verða að álykta að eini mögulegi lagsbróðir hans sé þeirra eigin eiginmaður. Því lenda þeir báðir, herra X og herra Y, á götunni 2. janúar.

Hvað ef karlarnir sem heimsóttu súlustaðinn voru þrír? Segjum að það hafi verið herra X, herra Y og herra Z sem heilluðust af súlumeyjunum. Eiginkonur þeirra vita hver um sig af tveimur kvæntum körlum sem hafa sótt súlustaðinn. Því búast þær allar við að atburðarásin verði eins og lýst var hér að ofan og fréttir berist hinn 2. janúar af tveimur aumkunarverðum körlum sem reiki heimilislausir um göturnar. Ekkert slíkt gerist. Þá er ljóst að fleiri en tveir karlar hafa fallið í freistni og þá sjá frú X, frú Y og frú Z að þeirra menn eru einnig brotlegir. Hinn 3. janúar lenda herra X, herra Y og herra Z allir á götunni.

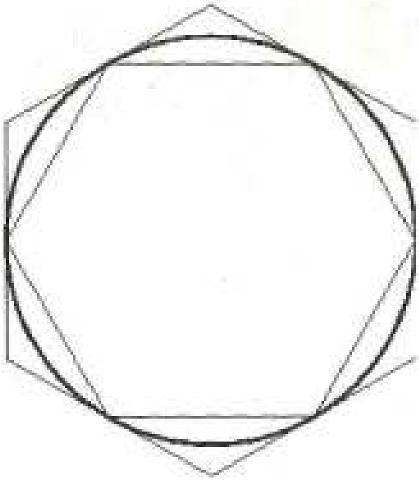
Svona getum við rakið okkur áfram. Sjáum að ef allir karlarnir í þorpinu eru brotlegir þá veit hver eiginkona af 364 körlum sem hafa kíkt á súlustaðinn. Ef bara 364 karlar væru brotlegir þá myndu líða 364 dagar og þá yrði þeim öllum hent út. Þegar 30. desember líður án tíðinda þá munu konurnar allar sem ein álykta að fleiri en 364 karlar séu brotlegir og þá beinist fingurinn að eiginmanninum. Hinn 31. desember er grunurinn orðinn að vissu og allir eiginmennirnir í bænum eru reknir út.

Heimildir. Þessi þraut kemur úr bókinni *Problems for mathematicians, young and old* eftir Paul R. Halmos.

4. Arkímedes og hringur

Síðasta dæmið er annars eðlis heldur en hin þrjú. Talan π er skilgreind sem hlutfallið á milli ummáls og þvermáls hrings. Verkefnið er að meta π. Nú til dags er ekkert mál að finna rétt gildi á π með nokk svo mörgum aukastöfum sem við munum nokkum tíma hafa þörf fyrir. Reiknivél gefur $\pi \approx 3{,}14159265358979$ og ef þið þurfið nákvæmara gildi á π má fara á vefsíðuna `http://www.hepl.phys.nagoya-u.ac.jp/~mitsuru/pi-e.html` þar sem hægt er að ná í gildi á π með 400 milljón réttum aukastöfum. Það er mögulegt að gera enn betur því mönnum hefur tekist að reikna π með 206,158,430,000 réttum aukastöfum. Fyrir daga tölvutækni var mun erfiðara að fá gott mat á π. Biblían (Konungabók I, 7.23) segir að π sé jafnt 3 og í Egyptalandi og Mesópótamíu notuðu menn tölur eins og $25/8 = 3{,}125$ og $\sqrt{10} = 3{,}162$ sem nálgun við π. Fremsti stærðfræðingur fornaldar var Arkímedes frá Sýrakúsu (287 – 212 fyrir Kristsburð). Hans niðurstaða var að $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Ef tekin er talan sem er mitt á milli neðra og efra mats Arkímedesar fæst tala $\pi = 3{,}1418$ og skeikar aðeins um 0,0002 frá reiknivélargildinu. Því hefur verið haldið fram að í riti sem nú er týnt hafi Arkímedes fundið enn betra mat á π. En það er ekki niðurstaða Arkímedesar sem vekur áhuga heldur aðferðin sem hann notaði.

Byrjum með hring sem hefur þvermál 2, geisli (radíus) hringsins er þá 1. Ummál hringsins er 2π. Teiknum innan í hringinn reglulegan n-hyrning og utan um hringinn teiknum við annan reglulegan n-hyrning, líkt og sýnt er á mynd 2.



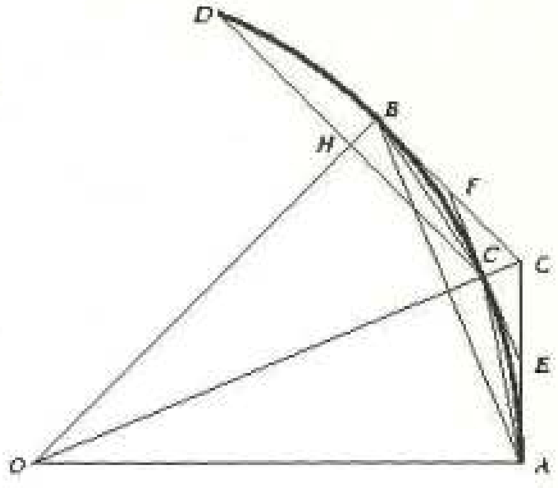
Mynd 2.

Látum I_n tákna ummál n-hyrningsins sem er innritaður í hringinn og U_n ummál þess umritaða. Það er augljóst að ummál innritaða marghyrningsins er minna en ummál hringsins og ummál umritaða marghyrningsins er stærra en ummál hringsins. Hér skiptir ekki máli hve mörg horn eru á marghyrningunum og við fáum að fyrir allar heilar tölur $n \geq 1$ gildir að $I_n <$ (ummál hrings) $= 2\pi < U_n$. Einnig er augljóst að eftir því sem n er stærra (fleiri horn á marghyrningunum) þá falla marghyrningarnir betur að hringnum og munurinn á ummáli marghyrninganna og hringsins minnkar. Þessu öllu tók Arkímedes eftir og sá að með því að finna tölurnar I_n og U_n fékk hann mat á π og matið var því betra sem talan n var stærri. Við höfum ýmis hjálpartæki til að aðstoða okkur við reikninga og í aldanna rás hefur þróast þjált og hagkvæmt táknmál sem auðveldar okkur mjög að framkvæma útreikninga. Arkímedes hafði aftur á móti ekkert nema kollinn á sér.

Lausn Arkímedesar á vandanum er í senn óvænt og snilldarleg. Það sem hann gerði var að gera ráð fyrir að hann þekkti I_n og U_n og fann út hvernig þá væri hægt að reikna I_{2n} og U_{2n} út. Formúlurnar sem Arkímedes fann eru

$$U_{2n} = \frac{2U_n I_n}{U_n + I_n} \quad \text{og} \quad I_{2n} = \sqrt{U_{2n} I_n}.$$

Fyrri formúluna má nota til að reikna U_{2n} út frá I_n og U_n og þá seinni má nota til að reikna I_{2n} út frá I_n og U_{2n}.



Mynd 3.

Á mynd 3 hér að ofan er O miðja hringsins, AB er hlið í innrituðum n-hyrningi, og AC og CB eru hliðar í innrituðum $2n$-hyrningi. Síðan er AG helmingur hliðar í umrituðum n-hyrningi og EF er hlið í umrituðum $2n$-hyrningi. Strengurinn DC er svo valinn þannig að hann sé jafn AB. Skilgreinum $i_n = |\mathrm{AB}|$ (lengd hliðar í innrituðum n-hyrningi), $i_{2n} = |AC|$ (lengd hliðar í innrituðum $2n$-hyrningi), $u_n = 2|AG|$ (lengd hliðar í umrituðum n-hyrningi) og $u_{2n} = |EF|$ (lengd hliðar í umrituðum $2n$-hyrningi). Þríhyrningar EGC og OGA, sem og þríhyrningarnir OHC og OAG eru allir einslaga. Því er

$$\frac{|EC|}{|EG|} = \frac{|OA|}{|OG|} = \frac{|OC|}{|OG|} = \frac{|HC|}{|AG|}.$$

(Fyrsta jafnaðarmerkið hér að ofan byggist á því að við tökum hlutfall samsvarandi hliða í þríhyrningnum EGC annars vegar og þríhyrningnum OGA hins vegar, jafnaðarmerkið í miðjunni byggist á því að OA og OC eru hvor tveggja geislar í hringnum og það síðasta byggir á því að skoða hlutföll samsvarandi hliða í þríhyrningunum OHC og OAG). Þegar við tökum fyrsta og síðasta brotið hér að ofan fæst að

$$\frac{u_{2n}/2}{u_n/2 - u_{2n}/2} = \frac{i_n/2}{u_n/2}.$$

Með því að einangra u_{2n} fæst

$$u_{2n} = \frac{u_n i_n}{u_n + i_n}.$$

Svo er $U_n = nu_n$, $U_{2n} = 2nu_{2n}$, $I_n = ni_n$ og $I_{2n} = 2ni_{2n}$, og við fáum að

$$U_{2n} = 2nu_{2n} = 2n\frac{u_n i_n}{u_n + i_n} = \frac{2\cdot nu_n \cdot ni_n}{nu_n + ni_n} = \frac{2U_n I_n}{U_n + I_n}.$$

Seinni rakningarformúluna fáum við með að skoða þríhyrningana AEC og ACB sem eru einslaga.

Þá er $$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

og því er $$\frac{u_{2n}/2}{i_{2n}} = \frac{i_{2n}}{i_n}$$

sem segir að $$i_{2n}^2 = \frac{1}{2}u_{2n}i_n$$

og því er $i_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2}u_{2n}i_n}$.

Upp úr þessu fáum við formúluna fyrir I_{2n} sem er

$$I_{2n} = 2n\cdot i_{2n} = 2n\sqrt{\tfrac{1}{2}u_{2n}i_n} = \sqrt{4n^2\cdot\tfrac{1}{2}u_{2n}i_n}$$
$$= \sqrt{(2nu_{2n})\cdot(ni_n)} = \sqrt{U_{2n}I_n}.$$

Til þæginda skulum við nú segja að geisli hringsins sé 1. Þvermál hringsins er þá 2 og ummálið er 2π. Ummál innritaðs sexhyrnings er greinilega $I_6 = 6$ (hægt er að skipta sexhyrningnum upp í sex jafnhliða þríhyrninga. Sömu skiptingu má nota til að finna ummál umritaðs sexhyrnings, honum er skipt upp í sex jafnhliða þríhyrninga og hæðin í hverjum þeirra er 1 og því er hliðarlengdin $2/\sqrt{3}$ þannig að ummálið er $U_6 = 4\sqrt{3}$. Við notum síðan formúlurnar hér að ofan til að reikna U_{12} og I_{12} þá er

$$U_{12} = \frac{2U_6 I_6}{U_6 + I_6} = 24\left(2-\sqrt{3}\right)$$

og $$I_{12} = \sqrt{U_{12}I_6} = \sqrt{48\sqrt{3}-72}.$$

Svona gætum við haldið áfram. Reikningarnir verða fljótt flóknir, en í „den tid" náði Arkímedes að halda utan um þetta allt saman og er það ekki minnsta afrekið. Nú reiknum við í töflureikni og getum á svipstundu töfrað fram töflu eins og hér á eftir. Þetta er gert í Excel á PC-vél. Í töflunni er tölvan beðin um að skila öllum gildum með sex aukastöfum. Þegar notaðir eru 6 aukastafir gefur vélin π =3,141593 en það er sama nálgunargildi og fæst þegar hringurinn er nálgaður með 6144-hyrningi. Þar sem þvermál hringsins er 2 þá er ummálið $u = 2\pi$ og við vitum að $I_n \le u \le U_n$ eða $U_n/2 \le \pi \le I_n/2$.

	I_n	U_n	$I_n/2$	$U_n/2$
n=6	6.000000	6.928203	3.000000	3.464102
n=12	6.211657	6.430781	3.105829	3.215390
n=24	6.265257	6.319320	3.132629	3.159660
n=48	6.278700	6.292172	3.139350	3.146086
n=96	6.282064	6.285429	3.141032	3.142715
n=192	6.282905	6.283746	3.141452	3.141873
n=384	6.283115	6.283325	3.141558	3.141663
n=768	6.283168	6.283220	3.141584	3.141610
n=1536	6.283181	6.283194	3.141590	3.141597
n=3072	6.283184	6.283187	3.141592	3.141594
n=6144	6.283185	6.283186	3.141593	3.141593

Þegar Arkímedes reiknaði U_{96} og I_{96} þá beitti hann nálgunum þannig að gildin sem vélin gefur eru nákvæmari en gildi Arkímedesar og gefa betri nálgun á π (allt reiknað með sex aukastöfum):

$$3\tfrac{10}{71} = 3{,}140845 < 3{,}141032 = \frac{I_{96}}{2} < \pi = 3{,}141592...$$
$$< \frac{U_{96}}{2} = 3{,}142715 < 3{,}142857 = 3\tfrac{1}{7}$$

Heimildir. St. Andrews vefsetrið er með ítarlega umfjöllun um Arkímedes á http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes\~.html, einnig fjalla þeir um π á síðunni http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics. Útlistunin hér að ofan á aðferð Arkímedesar er byggð á umfjöllun í bókinni *What to solve?* eftir Judita Cofman. Fróðleik um π má finna á mörgum netsíðum, t.d. á http://www.go2net.com/useless/useless/pi.html sem inniheldur ýmsan gagnslausan fróðleik um π.

Rögnvaldur er lektor við HÍ.

Ragnheiður Gunnarsdóttir

Dagur stærðfræðinnar

27. september

27. september n.k. hyggst Flötur standa fyrir *Degi stærðfræðinnar* í annað sinn. Þemað er stærðfræðin í umhverfinu með áherslu á þátt foreldra í heimanámi barnanna. Flötur stóð fyrir teiknisamkeppni nemenda í 1. til 4. bekk nú í vor og verða myndir úr keppninni notaðar á veggspjald til þess að auglýsa stærðfræðidaginn.

Af þessu tilefni er í undirbúningi útgáfa rits um heimanám í stærðfræði. Í því eru hugmyndir um heimavinnu sem nemendur geta leyst með aðstoð foreldra. Verkefnin eru fyrir nemendur í 1. – 10. bekk og byggja mörg á því að nemendur geri athuganir á umhverfi sínu og leysi síðan verkefni. Jónína Vala Kristinsdóttir er aðalhöfundur ritsins en Guðrún Angantýsdóttir og Kolbrún Hjaltadóttir hafa samið nokkur verkefnanna fyrir miðstigið og elsta stigið. Allar eru þær reyndir stærðfræðikennarar og eru þetta verkefni sem þær hafa notað í kennslu.

Það er von okkar að sem flestir taki þátt í Degi stærðfræðinnar og að hann verði til þess að nemendur átti sig betur á stærðfræðinni í umhverfinu. Ritið um heimavinnu í stærðfræði er vel til þess fallið að auka fjölbreytni í vinnubrögðum og efla áhuga foreldra á stærðfræðinámi barna sinna.

Að þessu sinni verður ritið selt í skólana en í fyrra voru það skólaskrifstofurnar sem styrktu útgáfuna og skólarnir fengu ritið endurgjaldslaust. Vonandi verður ritið keypt í alla skóla landsins þannig að hægt sé að senda nemendur heim með skapandi verkefni á Degi stærðfræðinnar eftir skemmtilegan dag í skólanum þar sem stærðfræðin var í fyrirrúmi.

Ragnheiður Gunnarsdóttir
formaður Flatar

Heimaverkefni í stærðfræði

Hugmyndir að heimaverkefnum fyrir nemendur í 1.– 10. bekk.

Heftið kostar 1200 kr.

Ef keypt eru 10 eintök eða fleiri kostar hvert hefti 800 kr.

Hægt er að panta heftið hjá:

Ragnheiði Gunnarsdóttur
rgunn@ismennt.is
eða
Guðrúnu Angantýsdóttur
gan@ismennt.is

FLATAR mál

2. tbl. 9. árg.