



3B

SKALI

ÆFINGAHEFTI

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Skali 3B
Æfingahefti
ISBN 978-9979-0-2056-1

© Gyldendal Norsk Forlag AS 2015

Heiti á frummálinu: Maximum 10 Oppgavebok
Ritstjóri norsku útgáfunnar: Greta Sandrød Owesen
Kápuhönnun: 07 Media - 07.no/Kristine Steen
Mynd á kápu: Shutterstock.com/Daniel Harwardt
Teikningar: Børre Holth
Leturgerð í meginmáli: Neo Sans Std, Regular, 10,5 pt.

© 2015 Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Bjørnar Alseth
© 2017 íslensk þýðing og staðfærsla: Kristín Bjarnadóttir

© 2017 ljósmyndir:

Myndir frá Shutterstock.com

bls. 9 pio3; bls. 11 a.o. ThavornC; bls. 11 a.n. Philippe PATERNOLLI; bls. 13 Vanut Chaichana; bls. 16 Blanscape;
bls. 17 a.n. RnDmS; bls. 17 a.o. oneinchpunch; bls. 18 eranicle; bls. 19 Alexander_G; bls. 21 Afrika Studio;
bls. 23 wavebreakmedia; bls. 24 Sergey Novikov; bls. 26 a.n. RomanovRV; bls. 27 hxdbzxy; bls. 28 vectorfusionart;
bls. 29 Emmoth; bls. 31 DrPilulkin; bls. 33 a.o. Sorbis; bls. 33 a.n. ju_see's; bls. 34 a.o. Clari Massimiliano;
bls. 34 a.n. George3973; bls. 35 Pressmaster; bls. 36 a.o. Alan Bailey; bls. 36 f.m. Deenida; bls. 36 a.n. NightEyez;
bls. 37 Konstantin Faraktinov; bls. 38 Aaron Amat; bls. 39 a.o. Imageman; bls. 39 a.n. Africa studio; bls. 40 Gecko Studio;
bls. 42 HUAJJ; bls. 43 J.Robert Williams; bls. 44 a.o. Monkey Business Images; bls. 44 a.n. Jack Frog; bls. 45 a.o. Ohenze;
bls. 45 a.n. rosarioscalia; bls. 46 schankz; bls. 47 cunaplus; bls. 48 Henning Marquardt; bls. 49 a.o. OlegDoroshin;
bls. 49 a.n. carpe89; bls. 50 HalynaBahlynk; bls. 51 leungchopan; bls. 52 Petur Asgeirsson; bls. 53 ZeroThree;
bls. 55 a.o.Rvector; bls. 55 a.n. Bernashafo; bls. 56 a.o. Grete Normann; bls. 56 a.n. Marie Charouzova;
bls. 57 Maximum Exposure PR; bls. 58 Liliya Kulianionak; bls. 60 a.o. Leonard Zhukovsky; bls. 60 a.n. Jamie Depledge;
bls. 61 Nopparat Nakhamhom; bls. 62 a.o. Ocsi Balazs; bls. 62 a.n. Syda Productions; bls. 63 Lano Lan;
bls. 64 William Perugini; bls. 67 freestyle images; bls. 69 a.o. Annette C. Badendyck; bls. 69 a.n. Hortimages;
bls. 71 a.o. Amstockphoto; bls. 71 a.o. Sarashowalter; bls. 71 a.n. Olcha; bls. 73 Bochkarev Photography;
bls. 74 Swen Stroop; bls. 77 a.o. 3Dalia; bls. 77 a.n. Esin Deniz; bls. 78 Andrii Lutsyk; bls. 80 a.o. Bellena;
bls. 80 a.n.t.h. Freedom_Studio; bls. 80 a.n.t.v. Kropic1; bls. 81 Stefan Schurr; bls. 82 fotandy; bls. 84 bildfokus.se;
bls. 85 a.n. watcher fox; bls. 86 Alexandr Shevchenko; bls. 87 Iakov Filimonov; bls. 88 Eugenio Marongiu;
bls. 90 a.o. Ververidis Vasilis; bls. 90 a.n. Kaliva; bls. 91 Creative Family; bls. 95 Niyazz;

Aðrir

bls. 6 gettyimages.com, Flashpop; bls. 26 a.o. Daníel Hafþór Ómarsson;
bls. 79 Jean - Pierre Biard; bls. 85 a.o. Landmælingar Íslands; bls. 92 Wikipedia.org;
bls. 93 a.n.common.wikimedia.org; bls. 94 Wikipedia.org; bls. 95 Wikipedia.org;

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Auður Bára Ólafsdóttir

Öll réttindi áskilin

1. útgáfa 2017

Menntamálastofnun

Kópavogi

Umbrot: Menntamálastofnun

Prentvinnsla: XXX

Málfarslestur: Ingólfur Steinsson

Öllum þeim sem lásu verkið yfir og veittu góð ráð eru færðar bestu þakkir.

Hákon Ólafsson verkfræðingur vegna verkefnis 5.13. Jóhannes Benediktsson vegna verkefnis 5.60.

Valgerður Hjaltsted vegna verkefnis 5.91.



SKALI

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Formáli

Verið velkomin í *Skala 3B*.

Nú byrjar stærðfræðin að verða virkilega spennandi, krefjandi og gagnleg.

- Stærðfræði er nytsamleg í daglegu lífi, bæði í námi og í atvinnulífi.
- Í stærðfræði eru einnig gagnleg mynstur og kerfi, í henni eru röksamleg tengsl og hún hefur sitt eigið táknbundna tungumál.
- Stærðfræðinám getur útheimt mikla vinnu en það felur líka í sér gleði, undrun og sigra!
- Í stærðfræðitímum vinnur þú með öðrum, leysir dæmi og vandamál, vinnur hagnýt verkefni, spilar spil, rökræðir um lausnir og hugsanaferli og notar tölvu.

Hér sérðu hvernig nemendabók getur verið til hjálpar:

Markmið
kafans.

Lán og sparnaður

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út vexti af innlánum
- reikna út fjáða vaxtaga
- reikna með vaxtavöxtum
- gera útreikninga sem varða neyslu
- gera útreikninga sem varða notkun greiðslukorts
- skilja muninn á mismunandi tegundum lána
- gera útreikninga varðandi lán með jöfnum atborgunum

Bankar eru stofnanir sem byggja starfsemi sína meðal annars á að fólk leggi sparipeningana sína í banka og að lána fólk peninga. Til þess að bankinn hagnist á þessari starfsemi tekur hann hærrí vexti af peningunum sem hann lánar út en hann greiðir í vexti af peningunum sem fólk leggur inn.

Innlánsvextir eru vextirnir sem við fáum af peningum sem við leggjum inn í banka.

Útlánsvextir eru vextirnir sem við greiðum af peningum sem við fáum að láni í banka.

Útlánsvextir eru hærrí en innlánsvextir.

Seðlabanki Íslands tekur á móti innlánum og lána íslenskum bókum peninga. Seðlabankinn er þannig „banki bankanna“. Hann hefur einnig einkarétt á því að gefa út sebla og myntir.

Á Íslandi eru (árið 2016) einkum tvö konar bankar:

- Viðskiptabankar – þeir eru í eigu hlutafélaga en ríkið á meirihluta í flestum þeirra.
- Sparisjóðir eru fáir (árið 2016). Þeir eru flestir í eigu einkaaðila en ríkið á stóran hluta í einum þeirra.

1.35 Ert þú sammála þessu unga fólk?

Til að geta sparað þarf ég að hafa yfir miklum peningum að ráða.

A



Þar sem ég get aðeins lagt fyrir lítill upphætur borgar það sig ekki.

B



Hvað finnst þér um unga fólk og sparnað?

C



Ég hagnast mest á því að leggja fyrir í sjóðum.

D



Oruggast er að spara með því að leggja inn á sparireikning.

Verkefni til umræðu.

Skýringarmyndir sem hjálpa þér að skilja.

Talblöðrur með útskýringum og ábendingum.

Texti til útskýringar.

Sýnidæmi sem útskýra fyrir þér hvernig þú getur reiknað og skrifað.

Regla Pýþagórasar

Í verkefni á blaðiðunni á undan komu í ljós tengsl sem ein eru til stærðfræðingsins og heimspekingsins Pýþagórasar sem var lítil um það bil 550 f.Kr. Þessi rekt kallast Pýþagórasregla og hún er notað þegar lengdir tveggja hliða í rétthyrndum þríhyrningi eru þekktar og reikna áæt lengd þriðju hliðarinnar.



Regla Pýþagórasar

Í rétthyrndum þríhyrningi er summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhliðu:

$$\text{langhliðu}^2 = \text{skammhliðu}_1^2 + \text{skammhliðu}_2^2$$

Reglan gildir einnig í hina áttina. Ef summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur er jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhliðu er þríhyrningurinn rétthyrndur.

Texti til útskýringar.

Sýnidæmi 1

Í rétthyrndum þríhyrningi eru skammhliðarnar 2 cm og 5 cm á lengd. Finndu lengd langhliðarinnar.

Tillaga að lausn 1

Við teiknum þríhyrninginn og notum ferningaáferðina.

Við teiknum hjálparmynd og skráum málín sem eru þekkt, á hana. Síðan reiknum við flatarmál ferninganna sem eru út frá hliðunum sem þekktar eru.

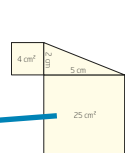
Flatarmál ferningsins út frá langhliðinni: $(4 + 25) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2$

Ef við þekkjum flatarmál ferningsins getum við fundið hliðarlengdina með því að finna ferningsrót af flatarmálinu:

$$\sqrt{29} \approx 5,4$$

Langhliðin er um það bil 5,4 cm á lengd.

Pýþagórasregla langhliðu = skammhliðu₁² + skammhliðu₂²



Tillaga að lausn 2

Við leysum dæmið langhliðu² = skammhliðu₁² + skammhliðu₂²

$$h^2 = 2^2 + 5^2$$

$$h^2 = 4 + 25$$

$$h^2 = 29$$

$$h = \sqrt{29}$$

$$h = 5,4$$

Venjulega eru ekki notaðar ræðisreiningar inn í jöfnum.

Langhliðin er um það bil 5,4 cm á lengd.

Samantekt á markmiðum sem vinnan fram undan byggist á.

Ýmis verkefni og spil.

Misþung verkefni.

Ýmis verkefni

Reiknivél til að reikna lánskostnað

Þetta verkefni er fyrir tvo nemendur að vinna saman.

Þið þurfið

- tölvu með töflureikni og aðgangi að netinu

Aðferð

1 Finnið tvo eða þrjú banka sem hafa á heimasíðu sinni reiknivél til að reikna út lánskostnað. Best er að slá inn leitaraðrið reiknivél á heimasíðum bankanna. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman tilboðin frá hinum mismunandi bankum.

2 Veljið lánsupphæðina 10 000 000 og lánstímann 10 ár.

3 Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman skilyrði mismunandi banka fyrir láðinu.

Heiti banka	Lánsupphæð (kr.)	Lánstími (ár)	Vextir (%)	Mánaðarleg greiðsla (kr.)
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		

4 Sumir bankar gefa upp nafnvexti en aðrir gefa einnig upp hlutfallstölu vaxta. Veljið þá tegund vaxta sem þið viljið bera saman.

5 Veljið hvort þið viljið vikka töfluna út þannig að hún sýni einnig lántökugjald og annan bjónustukostnað. Sumir bankar vilja fá vitneskju um efnahag lánsútsækjanda og greiðslugetu.

Veljið að þið ætlið að kaupa íbúð fyrir 30 000 000 og að þið elgið 10 000 000 kr. í elgið fé. Veljið launin 7 000 000 kr. á ári. Skráðið þessar tölur í reiknivél sem reiknar lánskostnað og reiknið hvað þið elgið eftir þegar lánið hefur verið greitt upp.

Nafnvextir eru þeir bankinn bjónustut.

Þjálfaðu hugann

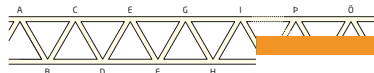
2.102 Lirfa nokkur étur sig í gegnum fimm binda alfræðirit sem stendur í bókahúli. Lirfan étur sig frá bts. 1 í 1. bindi og allt til síðustu blaðsíðunnar í 5. bindi. Hvert bindi er 4 cm á þykkt. Í gegnum hve marga sentimetra étur lirfan sig?



2.103 Hugsau þér að þú sért með sex prik sem hafa lengdirnar 1, 2, 3, 4, 5 og 6.

- a Hve marga mismunandi þríhyrningar getur þú búið til með því að nota þrjú prikanna sem hliðar?
- b Hve margir þríhyrninganna í a-lið eru réttir?

2.104 Maur byrjar í A og fetar sig milli tveggja bókstafa gegnum rörin sem sýnd eru á myndinni. Maurinn þarf alltaf að fara frá vinstri til hægri, hann má aldrei fara frá hægri til vinstri. Að öðru leyti getur hann valið leiðina að vild.



- a Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- b Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- c Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- d Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- e Settu fram tilgátu um hvernig möguleikuna því sem fjartaðgáin eykst. Prófaðu tilgátuna á hve marga mismunandi vegu maurinn kemur
- f Finndu, án þess að telja, á hve marga mism. maurinn kemst frá A til O.

Í stuttu máli

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reikna út lengdir óþekktra hliða í réttirndum þríhyrningum	a Hvað segir Pýtagórasreglan okkur? b Finndu lengd langhliðar í réttirndum þríhyrningi þar sem skammhliðarnar eru 5 m og 8 m. c Í réttirndum þríhyrningi er langhliðin 13 m og önnur skammhliðin 5 cm. Finndu lengd hinnar skammhliðarinnar.	a Í réttirndum þríhyrningi er ferningstala langhliðarinnar jöfnu summu ferningstala skammhliðanna. b $P^2 = s^2 + s_1^2$ $P^2 = 5^2 + 8^2$ $P^2 = 25 + 64$ $P^2 = 89$ $P = \sqrt{89}$ $P \approx 9,4$ Langhliðin er um það bil 9,4 m c $P^2 = s_1^2 + s_2^2$ $13^2 = 5^2 + s_2^2$ $s_2^2 = 169 - 25$ $s_2^2 = 144$ $s_2 = \sqrt{144}$ $s_2 = 12$ Hin skammhliðin er um það bil 12 cm
reikna út hliðarlengdir í nokkrum þríhyrningum	Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er lengri	Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er langhliðin tvöfalt lengri en



Ýmis spennandi og krefjandi verkefni.

Bættu þig!

Þríhyrningsútreikningar

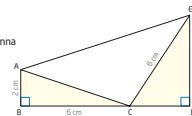
2.76 Í þríhyrningi eru tvö hornanna 63° og 48°. Hvað er þriðja hornið stórt?

2.77 Reiknaðu lengdir óþekktu hliðanna.



2.78 Snúðu sem er með tólf hnúta með jöfnu millibili er bundin saman þannig að hún myndar hring. Útskýrðu hvernig þú getur notað snúninginn til að búa til þríhyrning sem þú getur notað til ganga úr skugga um að eitt hornið sé rétt.

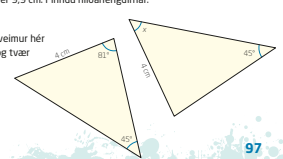
2.79 a Reiknaðu út lengdir strikana AC, CD og AE.
b Finndu flatarmál ΔACE.



2.80 Í réttirnda þríhyrningnum ABC er ∠A = 90°, AB = 5 cm og AC = 7 cm. Athugaðu hvort ∠B er jafnt og, stærra en eða minna en 60°.

2.81 Hornalína fernings er 9,9 cm. Finndu hliðarlengdirnar.

2.82 Í þríhyrningnum tveimur hér til hliðar eru tvær og tvær hliðar jafnar langar. Hve stór er ∠x?



Til hamingju með námsgreinina stærðfræði!

Með kveðju frá höfundum.

Til að æfa þig enn betur!

Efnisyfirlit

4 Föll 6

Annars stigs föll 6

Öfugt hlutfall 14

Verkefni af ýmsu tagi 22

5 Líkindareikningur 34

Frá reynslu til líkinda 34

Samsettar líkur, margir atburðir 40

Verkefni af ýmsu tagi 52

6 Æfingasíður 64

Verkefni án notkunar hjálpartækja . 64

Verkefni leyst með hjálpartækjum .. 78



Föll

Annars stigs föll

- 4.1** Teiknaðu línuna $y = 2x + 6$ í hnitakerfi.
- a** Útskýrðu hver hallatala línunnar er og hvað hún þýðir.
 - b** Útskýrðu hugtakið „skurðpunktur við y -ás“ og finndu hann fyrir línuna.
 - c** Útskýrðu hugtakið „skurðpunktur við x -ás“ og finndu hann fyrir línuna.
- 4.2** Finndu hallatöluna og skurðpunktinn við y -ásinn fyrir þessu línulegu föll.
- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a $y = 2x + 4$ | d $y = -2x + 7$ |
| b $y = 3x + 1$ | e $y = -2x - 5$ |
| c $y = 5x - 2$ | f $y = -1,5x + 2$ |



- 4.3** Finndu stæður línulegu fallanna þegar
- a** hallatalan er 3 og skurðpunkturinn við y -ásinn er 5
 - b** hallatalan er 2 og skurðpunkturinn við y -ásinn er 4
 - c** hallatalan er -1 og skurðpunkturinn við y -ásinn er 2
 - d** hallatalan er -1 og skurðpunkturinn við y -ásinn er -3

4.4 Þegar þú segir 4 svara ég 9. Þegar þú segir 2 svara ég 5. Þegar þú segir 7 svara ég 15.

- a** Hverju svara ég ef þú segir 5?
- b** Hvaða reglu nota ég til að túlka tölurnar?

4.5 Hvaða föll hér fyrir neðan eru annars stigs föll?

- a** $y = 4x + 2$
- b** $y + 2x = 5$
- c** $f(x) = x^2 + 4$
- d** $f(x) = 3x^2 + 3x$
- e** $f(x) = 2x^3 + 5$
- f** $f(x) = 4x^2 + 2x - 6$

4.6 Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu grafið $f(x) = x^2$ í hnitakerfi.

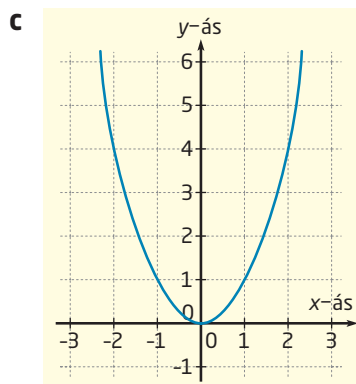
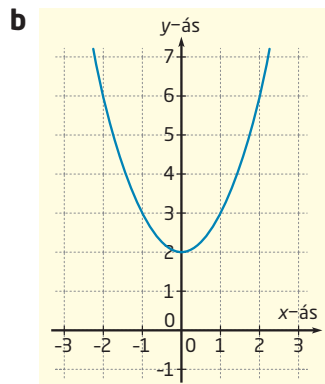
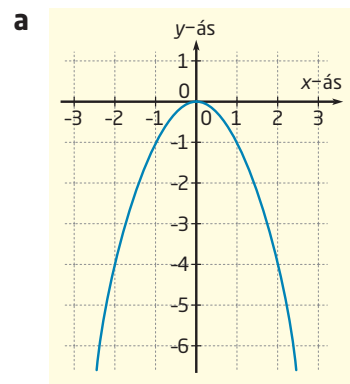
- a** Skoðaðu grafið. Hvað kallast svona graf?
- b** Finndu hvort grafið hefur topp- eða botnpunkt.
- c** Finndu hnit hágildispunkts (topppunkts) grafsins eða lágildispunkts (botnpunkts) þess.
- d** Hvaða lína er þannig að grafið er samhverft um þá línu?

4.7 Hvaða graf á við hvaða fall?

$f(x) = x^2 + 2$

$g(x) = -x^2$

$h(x) = x^2$



4.8 Gerðu nokkrar tilraunir í rúmfræðiforriti.

- a** Teiknaðu gróf fallanna fjögurra í sama hnitakerfi.

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2$$

$$h(x) = x^2 + 3$$

$$i(x) = x^2 - 3$$

- b** Útskýrðu mismuninn á grafi f og grafi g .

- c** Útskýrðu mismuninn á grafi h og grafi i .

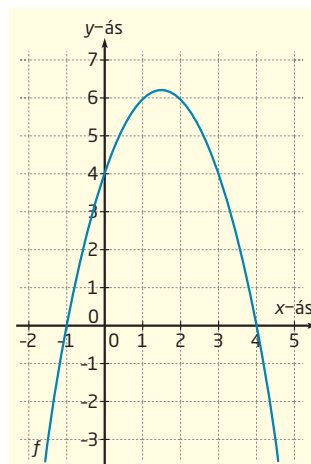
- d** Hvernig heldur þú að graf fallsins $j(x) = x^2 + 5$ muni líta út í hnitakerfi?

4.9 Skoðaðu grafið.

- a** Finndu hnit þriggja punkta fallsins.

- b** Finndu hnit topp- eða botnpunkts grafsins.

- c** Hvaða línu er grafið spegilsamhverft um?

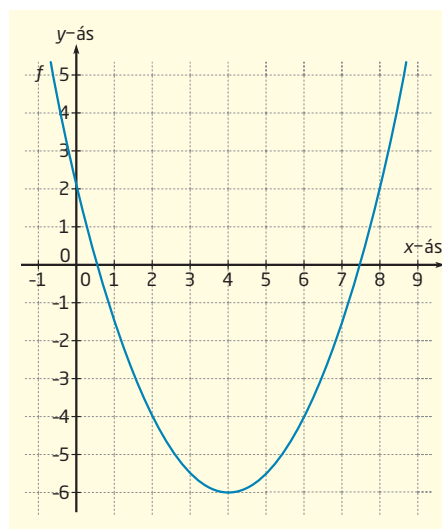


4.10 Skoðaðu grafið.

- a** Finndu hnit topp- eða botnpunkts grafsins.

- b** Finndu hnit punktanna þar sem grafið sker x -ásinn.

- c** Finndu hnit punktans þar sem grafið sker y -ásinn.



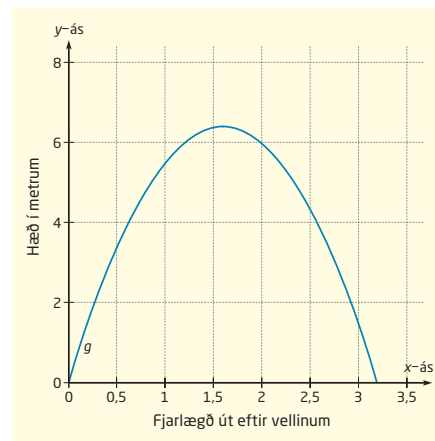


4.11 Teiknaðu graf $f(x) = x^2 + 2x$ með rúmfræðiforriti.

- a Notaðu grafið og finndu botnpunktinn.
- b Finndu skurðpunkta x -ássins og grafs f .
- c Finndu skurðpunkt y -ássins og grafs f .

4.12 Bolta er kastað af sléttum velli upp í loft. Braut hans má lýsa með grafinu g .

- a Finndu hæsta punkt brautar boltans.
- b Hve langt frá upphafsstöðu boltans lendir hann á velliinum?
- c Hve langt frá upphafsstöðu boltans, mælt út eftir velliinum, er boltinn þegar hann er 5 m yfir velliinum?



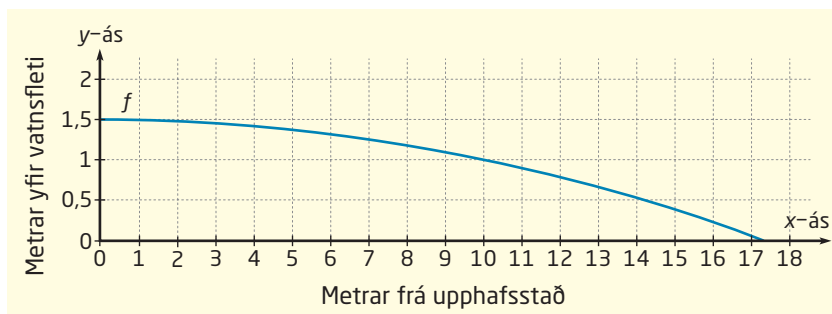
4.13 Bolta er kastað af þaki húss. Braut boltans má lýsa með fallinu $k(x) = -0,5x^2 + 8$ þar sem x er fjöldi metra frá húsveggnum.

- a Teiknaðu graf k .
- b Hvaða gildi getur x haft í þessum raunverulegu aðstæðum?
- c Hve langt frá húsveggnum lendir boltinn á jörðinni?
- d Hve hátt er húsið?



4.14 Fallið f sýnir braut spúnnsins í kasti frá veiðistöng. x -ásinn er vatnsflöturinn.

- a Hver er hæsti punktur spúnnsins?
- b Hve langt frá landi lendir spúnninn á vatnsfletinum?



- c Hve hátt yfir vatnsfletinum er spúnninn um það bil 10 m frá upphafsstaðnum?

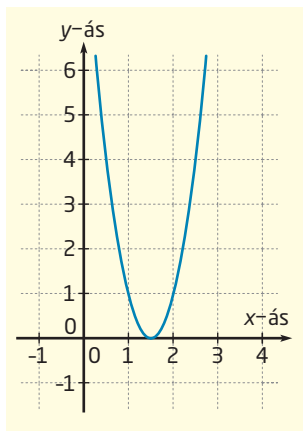
4.15 Hvaða graf á við hvaða fall?

$$f(x) = -2x^2 + 4$$

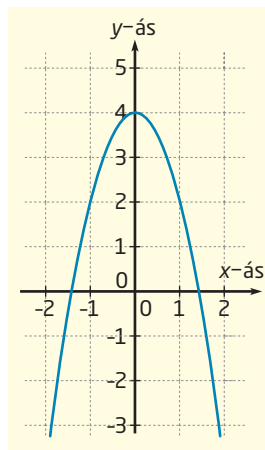
$$g(x) = (x + 2)^2$$

$$h(x) = (-2x + 3)^2$$

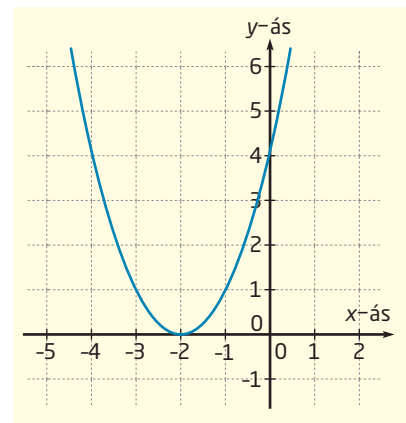
a



b



c



4.16 Skoðaðu fallstæðurnar. Hafa gröf fallanna nokkurn topp- eða botnpunkt?

a $f(x) = -2x^2 + 5$

d $f(x) = -4x^2 + 2$

b $g(x) = 2x^2 - 3$

e $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6$

c $h(x) = -2,5x^2 + 3$

f $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

4.17 Skoðaðu fallstæðurnar. Gröf hvaða falla skera x-ásinn?

a $f(x) = -3x^2 + 4$

d $f(x) = -3x^2 + 4,5$

b $g(x) = 3x^2 - 2$

e $g(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2$

c $h(x) = -5,5x^2 - 1$

f $h(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 4$

4.18 Jurt er í vexti. Hún var 2 cm há þegar henni var plantað. Fallstæðan er

$$f(x) = 0,22x^2 - 0,14x + 2$$

þar sem x er fjöldi daga eftir plöntun og $f(x)$ er hæðin eftir x daga.

a Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu grafið á bilinu $0 < x < 12$.

b Notaðu grafið til að finna hve há plantan var eftir átta daga.



4.19 Hitastigið dag nokkurn í mars er

$$t(x) = -0,09x^2 + 1,23x + 2, \quad 0 \leq x \leq 18$$

þar sem x er tíminn frá kl. 07.00 um morguninn (kl. 07.00 = 0).

- Teiknaðu graf t í formenginu $0 \leq x \leq 18$.
- Hvert er hitastigið um það bil kl. 11.00?
- Hvenær er hitinn hæstur þennan dag?
- Hver er núllstöð fallsins? Hvað verður um hitastigið einmitt þá?



4.20 Segjum að sjávarstöðunni á utanverðu Snæfellsnesi dag nokkurn megi lýsa með fallinu

$$v(x) = 0,04x^2 - 0,49x + 0,6, \quad 0 \leq x \leq 18$$

þar sem x er fjöldi klukkustunda eftir klukkan níu og $v(x)$ er sjávarstaðan mæld í metrum yfir eða undir meðalstöðu.

- Teiknaðu graf v fyrir $0 \leq x \leq 18$.
- Lýstu hve há sjávarstaðan er kl. 9.00, kl. 11.00 og kl. 14.00.
- Hve mikill munur er á lægstu og hæstu sjávarstöðu á þessu tímabili?



4.21 Hemlunarvegalegd bíls á þurru malbiki stendur í réttu hlutfalli við hraðann í öðru veldi. Látum $b(v)$ vera hemlunarvegalegdina í metrum og v vera hraðann í km/klst. Þá er

$$b(v) = 0,015 \cdot v^2$$

Formengi b er $0 < v < 100$.

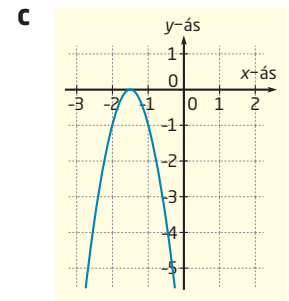
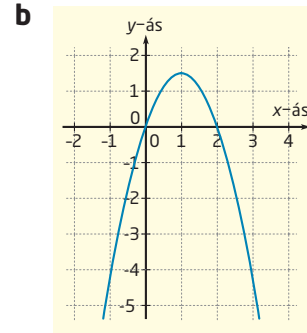
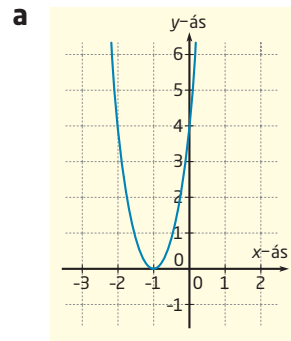
- Hver er hemlunarvegalegdin þegar hraðinn er 50 km/klst.?
- Hve mikið eykst hemlunarvegalegdin þegar hraðinn eykst frá 50 km/klst. til 80 km/klst.?
- Um hve mörg prósent eykst hemlunarvegalegdin þegar hraðinn eykst úr 50 km/klst. í 80 km/klst.?
- Teiknaðu graf b í hnitakerfi.
- Notaðu grafið til að finna mesta hraða sem bíllinn getur verið á þannig að hemlunarvegalegdin sé undir 100 m.

4.22 Skoðaðu gröfin og fallstæðurnar. Hvaða graf á við hvaða fall?

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

$$g(x) = (2x + 2)^2$$

$$h(x) = -(2x + 3)^2$$



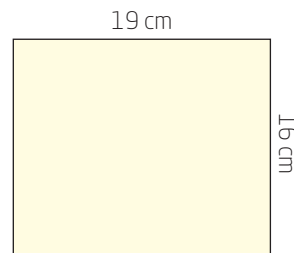
4.23 Fleygbogi hefur botnpunkt í $(-2, -4)$. Grafið gengur í gegnum upphafspunktinn $(0, 0)$.

- Ákvarðaðu fallstæðuna fyrir fleygbogann.
- Teiknaðu fleygbogann í hnitakerfi.

4.24 Lýstu mismuninum á gröfum fallanna

- $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ og $g(x) = (x - 2)^2 + 3$.
- Teiknaðu gröf f og g .

4.25 Réttthyrningur er 19 cm langur og 16 cm breiður. Við aukum bæði lengdina og breiddina um x cm.



- Finndu flatarmál þessa nýja réttthyrnings, $F(x)$, táknað með x .
- Teiknaðu graf F í hnitakerfi.
- Notaðu grafið í b til að finna lengd og breidd nýja réttthyrningsins þegar flatarmálið er 378 cm^2 .

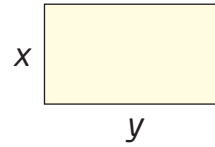


4.26 Breidd rétthyrnings er x , lengd hans er y , og ummálið er 40.

a Finndu stæðu fyrir flatarmál rétthyrningsins, $F(x)$.

b Settu fallið $F(x)$ fram á grafi.

c Hvaða hliðarlengd gefur stærsta flatarmálið?



4.27 Askja án loks hefur ferningslagaðan grunnflöt með hliðina x . Hæð öskjunnar er 2.

a Útskýrðu að yfirborð öskjunnar er

$$Y(x) = x^2 + 8x.$$

b Teiknaðu graf Y í hnitakerfi.

c Finndu hlið grunnflatar öskjunnar þegar yfirborðið er 48.

4.28 Í ísbúð hafa eigendurnir fundið út að tekjuafgangur af sölunni er

$$T(x) = -30x^2 + 6000x - 288\,000$$

þar sem $T(x)$ er tekjuafgangur í krónum og x segir til um hve margir ísar hafa verið seldir.

a Notaðu rúmfræðiforrit til að teikna graf T . Veldu x -gildi milli 0 og 150.

b Hve marga ísa þarf að selja til að fá hámarkstekjuafgang?

c Hver er mesti tekjuafgangur sem ísbúðin getur náð samkvæmt þessu líkani?

d Finndu núllstöðvar T . Hvernig má túlka núllstöðvarnar í raunveruleikanum?

e Hve marga ísa þarf ísbúðin að selja til að tapa ekki á sölunni?



Öfugt hlutfall

4.29 Standa gildi $f(x)$ í töflunum í réttu hlutfalli við x ?

a

x	3	5	11
$f(x)$	42	70	154

c

x	9	18	43
$f(x)$	63	125	301

b

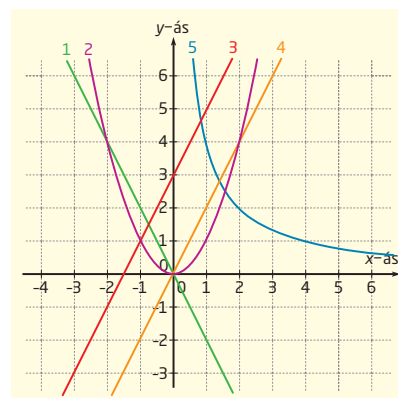
x	5	8	16
$f(x)$	65	104	208

d

x	55	71	86
$f(x)$	440	568	688

e Hver er hlutfallsfastinn þar sem þú finnur rétt hlutfall í liðum a–d?

4.30 Sýna nokkur þessara grafa rétt hlutfall?



4.31 Íþróttalið er að fara í æfingabúðir og leigir sér langferðabíl fyrir 85 000 kr. Það eru sæti fyrir 50 farþega í bílnum. Taflan sýnir sambengið milli verðs á þátttakanda og fjölda þátttakanda.

Fjöldi þátttakanda	Verð á þátttakanda (kr.)	Heildarverð (kr.)
5	17 000	85 000
10	8 500	
15	5 670	
20	4 250	
25		
30		
35		
40		
45		
50		

a Ljúktu við töfluna sem sýnir sambengið milli verðs og fjölda þátttakanda.

b Fall grafsins er

$$v(x) = \frac{85\,000}{x}$$

þar sem x er fjöldi þátttakanda og v er verð á þátttakanda. Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu graf v .

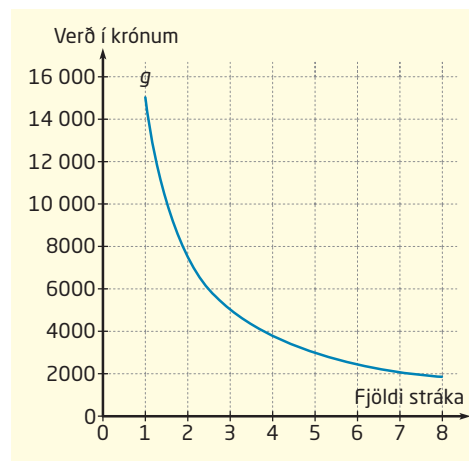
c Hve margir þátttakendur þurfa að vera til þess að ferðin kosti ekki meira en 2000 kr. á þátttakanda? Lestu af grafinu.

d Hver er kostnaðurinn á mann ef það verða 34 þátttakendur í æfingabúðunum? Lestu af grafinu.



4.32 Strákahópur ætlar í ferð. Grafið sýnir hvað það muni kosta á mann að leigja bústað.

- a Lestu af grafinu hvað það muni kosta á mann ef fimm strákar deila með sér kostnaðinum.
- b Finndu hvað bústaðurinn kostar samtals.
- c Hve margir þurfa að fara í ferðina ef hver strákur á að borga minna en 8000 kr.?
- d Sjö strákar voru með í ferðinni. Hve mikið borgaði hver þeirra?



4.33 Vinkvennahópur slær saman í gjöf. Gjöfin kostar 12 000 kr.

- a Hve mikið þurfa vinkonurnar að borga ef fjórar eru með í gjöfinni?
- b Finndu fallstæðuna sem lýsir þessu ef x er fjöldi vinkvenna sem eru með í gjöfinni og $g(x)$ er það sem hver þarf að borga.
- c Teiknaðu grafið í hnitakerfi þar sem fjöldi vinkvenna, sem eru með í gjöfinni, kemur fram. Reiknaðu með að fjöldinn geti verið frá tveimur til tíu.
- d Átta vinkonur slógu að lokum saman í gjöfina. Hve mikið borgaði hver?

4.34 Settu upp gildatöflur fallanna og teiknaðu gröf þeirra án þess að nota forrit.

a $y = \frac{12}{x}$

b $y = \frac{28}{x}$

c $y = \frac{50}{x}$

4.35 Vinahópur ætlar saman í bústað. Hver og einn borgar 5000 kr. fyrir mat. Að auki þarf að borga 40 000 kr. fyrir bústaðinn.

Fjöldi vina	2	4	6	8	10	12	14
Verð á mann (kr.)	25 000	15 000					

- a Teiknaðu gildatöfluna upp í bókina þína og fylltu hana út.
- b Hvaða gildi mundi grafið nálgast?



- 4.36** Tíminn sem það tekur að aka bíl ákveðna vegalengd er háður hraðanum. Vegalengdin er 120 km.
- Settu hraðann h fram sem fall af tímanum t .
 - Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu grafið af h fyrir tímann milli 1 og 6 klst.
 - Lestu af grafinu hve langan tíma þarf til að aka bíl þessa vegalengd ef meðalhraðinn er 70 km/klst.
 - Hver er meðalhraði bíls sem er ekið þessa vegalengd á 2,5 klst.?
- 4.37** Maður fær tilboð um að leggja þak fyrir 200 000 kr. Maðurinn metur tilboðið og reiknar hve langan tíma það muni taka hann að ljúka við verkið. Ef hann nær að ljúka verkinu á færri en 30 klst. eru launin viðunandi en ófyrirséðir atburðir eins og hvassviðri gera það að verkum að hann verður að gera ráð fyrir að verkið geti tekið allt að 50 klst.
- Sýndu laun á klst. sem fall af tímanum x sem hann notar til verksins.
 - Teiknaðu graf af fallinu með rúmfræðiforriti fyrir gildi milli 20 og 50 klst.
 - Hve hratt verður maðurinn að vinna verkið til að fá meira en 4400 kr. á klst.?
 - Hve hátt tímakaup fær maðurinn ef hann lýkur verkinu á 35 klst.?
- 4.38** Bekkur nokkur hefur fengið verkefni sem greiddar eru 60 000 kr. fyrir. Því fleiri sem skipta verkinu með sér þeim mun hraðar gengur að ljúka verkinu. Reikna má með að verkið taki 40 klst.
- Hvernig er sambengið milli fjölda nemenda sem skipta með sér verkinu og tímans sem þeir nota til verksins?
 - Settu fram fall $t(x)$ um tímann sem verkið tekur þar sem x er fjöldi nemenda og teiknaðu graf af fallinu t fyrir x -gildi milli 1 og 30.
 - Hvernig er sambengið milli fjölda nemenda sem skipta verkinu með sér og þess hve mikið hver nemandi fær í sinn hlut?
 - Settu fram fall $h(x)$ um hlut hvers nemanda þar sem x er fjöldi nemenda og teiknaðu graf fallsins fyrir x -gildi milli 1 og 30.

- 4.39** Mánaðarkort í líkamsræktarstöð kostar 10 980 kr.
- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir verðið fyrir hvert skipti sem æft er, sem fall af fjölda æfingátíma.
 - b** Teiknaðu graf fallsins í hnitakerfi.
 - c** Hvert verður verðið á æfingátíma ef æft er tvisvar í viku?
 - d** Stakur æfingátími kostar 1600 kr. Hve marga æfingátíma þarf að fara í á mánuði að minnsta kosti til þess að það borgi sig að kaupa mánaðarkort?

- 4.40** Hafdís hjólaði Tour de Ormurinn, umhverfis Löginn í Lagarfljóti, á 2 klst. og 48 mínútum. Hringurinn er 68 km langur.
- a** Finndu meðalhraða Hafdísar í km/klst.
 - b** Útskýrðu hvers vegna hraðinn og tíminn standa í öfugu hlutfalli hvor við annan.
 - c** Á næsta ári ætlar Hafdís sér að nota $\frac{5}{6}$ hluta tímans sem hún notaði í ár. Hvaða meðalhraða þarf hún þá að halda í samanburði við hraðann í ár? Gefðu svarið sem brot af hraðanum í ár.
 - d** Hve miklum meðalhraða mældum í km/klst. vill Hafdís ná á Lagarfljótshringnum á næsta ári?
 - e** Magni hjólaði með Hafdís í ár. Næsta ár ætlar hann að stytta tímann um 25%. Um hve mörg % verður hann að auka hraðann?
 - f** Hvaða meðalhraða og hvaða tíma ætlar Magni að ná á Lagarfljótshringnum á næsta ári?



- 4.41** Rannsakaðu með rúmfræðiforriti fallið $f(x) = \frac{a}{x}$ sem lýsir öfugu hlutfalli.
- Settu inn rennistiku a með gildum frá -10 til 10 .
 - Lýstu grafinu þegar a er neikvæð tala.
 - Lýstu grafinu þegar a er jákvæð tala.
 - Hvað verður um grafið þegar a stækkar?
 - Hvað gerist þegar $a = 0$?

- 4.42** Teiknaðu graf fallsins
- $y = \frac{10}{x}$ fyrir gildi á bilunum $-10 \leq x < 0$ og $0 < x \leq 10$.
 - $y = \frac{-15}{x}$ fyrir gildi á bilunum $-10 \leq x < 0$ og $0 < x \leq 10$.
 - Skoðaðu gröfin tvö í a og b. Hvers vegna eru gröfin svona ólík?

- 4.43** Tíundi bekkur AB ætlar að halda veislu fyrir allan skólann og leigir sal fyrir 20 000 kr. Að auki er reiknað með 1500 kr. kostnaði á hvern þátttakanda fyrir öðrum útgjöldum.

- Hver verða útgjöldin $U(x)$ samanlagt ef það koma
 - 1** 60 þátttakendur
 - 2** 100 þátttakendur
- Finndu fallstæðu fyrir $U(x)$.
- Láttu $D(x)$ vera gjaldið á þátttakanda í veislunni. Útskýrðu að

$$D(x) = \frac{20\,000 + 1500x}{x} = \frac{20\,000}{x} + 1500.$$
- Notaðu rúmfræðiforrit til að teikna graf D .
- Hve margir þátttakendur þurfa að koma í veisluna til að það kosti minna en 2000 kr. á mann?
- Hvert er markgildi fallsins þegar x vex? Hvað þýðir það í raunveruleikanum?

- 4.44** Teiknaðu gröf fallanna hér fyrir neðan með rúmfræðiforriti. Ákvarðaðu markgildið fyrir hvert fall þegar x stefnir á óendanlegt.

a $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ **b** $f(x) = 10 - \frac{5}{x}$ **c** $f(x) = \frac{3}{x}$



4.45

Lyftukort	Fullorðnir frá og með 17 ára	Unglingar 12-16 ára
Dagskort	3350 kr.	1400 kr.
2 dagar	6500 kr.	2550 kr.
3 dagar	9500 kr.	3700 kr.
Vetrarkort	28 000 kr.	14 200 kr.

Hart kort kostar 1000 kr. ef þú átt það ekki fyrir.

Halla kaupir vetrarkort á skíðasvæðið í Bláfjöllum fyrir sjálfa sig, dótturina Katrínu, 18 ára og soninn Símon, 14 ára. Þau eiga öll hart kort. Láttu $V(x)$ vera verðið fyrir alla fjölskylduna á dag sem þau fara á skíði þar sem x er fjöldi daga sem þau fara á skíði yfir veturinn.

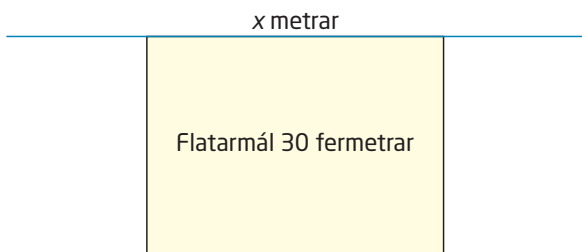
- Settu fram fallstæðuna $V(x)$.
- Reiknaðu hve marga daga þau þyrftu að fara á skíði til þess að það verði ódýrara með vetrarkortum en með dagskortum.

Halla áttar sig á að það væri réttara að bera vetrarkortið saman við tveggja eða þriggja daga kort sem raunar þarf ekki að nota á samliggjandi dögum. Þau fara yfirleitt bara á skíði um helgar.

- Settu fram nýtt fall $H(x)$ sem sýnir verðið þegar þau nota vetrarkort þar sem x er fjöldi helga í Bláfjöllum. Teiknaðu graf fallsins með rúmfræðiforriti.
- Hve mikið kostar það á helgi ef þau fara 5 helgar í Bláfjöll yfir veturinn? Spara þau þá á því að vera með vetrarkort eða er betra að kaupa tveggja daga kort?
- Hve margar helgar þyrftu þau að fara til að spara að minnsta kosti 25%?



- 4.46** Gauti ætlar að útbúa afgirtan hundagarð fyrir hundinn sinn, sjá myndina hér fyrir neðan. Hundagarðurinn á að vera 30 m^2 að stærð og rétthyrndur. Hluti hundagarðsins snýr út að vegi. Sú hlið garðsins hefur lengdina x . Verð girðingarinnar er 5000 kr. á metra fyrir þann hluta sem snýr út að veginum af því að þar er girðingin hærri en hinn hluti hennar. Hinn hlutinn kostar 3000 kr. á metra. Látum $V(x)$ vera verðið á allri girðingunni.



- Sýndu að $V(x) = 8000x + \frac{180\,000}{x}$
- Teiknaðu graf V með rúmfræðiforriti.
- Notaðu grafið til að ákvarða x þannig að girðingin verði eins ódýr og hægt er.

- 4.47** Athugaðu hvort x og y standi í öfugu hlutfalli hvort við annað. Skráðu fallstæðurnar í þeim tilvikum.

a

x	2	4	6	8
y	13	7	5	4

c

x	0,8	2	8	26
y	1,2	3	12	39

b

x	8	15	18	72
y	45	24	20	5

d

x	-10	-4	3	10
y	-0,05	-0,125	$\frac{1}{6}$	0,05

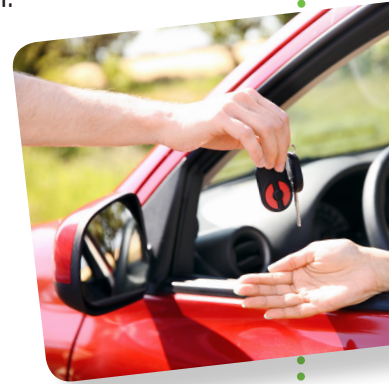
- 4.48** Tíundi bekkur Skarðsskóla ætlar að fara í ferð með rútu. Rútufyrirtækið reiknar 2800 kr. á nemanda fyrir 35 nemendur. Það er pláss fyrir 45 nemendur í bílnum. Hópurinn verður að borga fyrir 35 nemendur hvort sem það verða fleiri eða færri sem fara með bílnum. Nemendurnir verða sammála um að deila kostnaðinum jafnt niður á alla sem fara með í ferðina.

- Finndu fallstæðu sem sýnir verðið $V(x)$ á nemanda þegar x nemendur eru með í ferðinni.
- Teiknaðu graf V í hnitakerfi. Veldu viðeigandi formengi.
- Útskýrðu hvers vegna stærðirnar V og x standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra.
- Hvað er það mesta og hvað er það minnsta sem hver nemandi þarf að borga samkvæmt líkani þínu?

4.49 Anna og Jón eiga einn bíl og skiptast á um að nota hann. Þau byrja ekki að vinna á sama tíma þannig að annað þeirra þarf að fara í vinnuna í strætisvagni. Það þeirra sem hefur bílinn fer með barnið á leikskóla og sækir það.

Þau skipuleggja sig þannig að Jón hefur bílinn á mánudögum og miðvikudögum en Anna á þriðjudögum og föstudögum. Á fimmtudögum hafa þau bílinn til skiptis og sækja hitt um leið og barnið er sótt. Þá gera þau sameiginleg innkaup.

Þau vilja meta hvort þau eigi að kaupa farmiðaspjöld eða strætókort og þá hvers konar strætókort sé hagstæðast að kaupa. Kortin fást bæði sem einstaklingskort, bundin við þann aðila sem sækir um kortið og handhafakort. Glatist handhafakort er það ekki bætt en hægt er að fá ný persónukort fyrir 3500 kr.



a Teldu út hve margar strætóferðir hvort þeirra um sig, Jón og Anna, fara á mánuði.

b Rökstyddu að verð á einstaka ferð, ef x er fjöldi ferða á mánuði, sé

$$U(x) = \frac{11\,750}{x} \quad \text{ef valið er eins mánaðar kort}$$

$$V(x) = \frac{25\,700}{3x} \quad \text{ef valið er þriggja mánaða kort}$$

$$W(x) = \frac{61\,000}{9x} \quad \text{ef valið er 9 mánaða kort}$$

Tímabilskort	Verð	Verð á mánuði
1 mánuður	11 750 kr.	11 750 kr.
3 mánuðir	25 700 kr.	8567 kr.
9 mánuðir	61 000 kr.	6777 kr.
App áskrift (1, 2 og frír)	11 750 kr.	11 750 kr.
Farmiðaspjöld	Verð	Verð á miða
20 miðar	8300 kr.	415 kr.

Heimild: straeto.is

c Teiknaðu gröf fallanna U , V og W og lestu af þeim verð á ferð miðað við fjölda ferða sem þú taldir saman í a-lið.

d Færðu rök fyrir því hvers konar fargjöld Jón og Anna ættu að nýta sér.

e Jón og Anna eru gleymin og treysta sér ekki til að nota handhafakort heldur nota persónukort. Hve miklu dýrara er fyrir þau að nota persónukort en handhafakort?

f Breytir það myndinni ef Jón og Anna þurfa hvort um sig að nota strætó fimm sinnum fram og til baka á mánuði að meðaltali utan þess sem að framan er talið?

4.50 Teiknaðu gröf fallanna hér fyrir neðan með rúmfræðiforriti. Finndu markgildi fyrir hvert og eitt fall þegar x stefnir á óendanlegt.

a $f(x) = \frac{100}{2x} + 3$

b $f(x) = \frac{4x + 5}{x}$

c $f(x) = \frac{2x + 1000}{x}$

Verkefni af ýmsu tagi

4.51 Einn bekkur er valinn til þess að taka til í kjallara skólans.

- a** Útskýrðu að tíminn sem þau nota til verksins stendur í öfugu hlutfalli við það hve margir nemendur taka þátt í tiltektinni.
- b** Reikna má með því að það sé 60 klst. vinna að taka til í kjallaranum. Settu fram fall sem sýnir sambengið á milli þess hve margir nemendur taka þátt, x , og tímans sem þeir nota við tiltektina.
- c** Hve margir nemendur verða að vera með ef hver nemandi á að vinna í þrjár klst.?
- d** Hver nemandi vinnur í fjóra tíma. Hve margir nemendur tóku þátt?

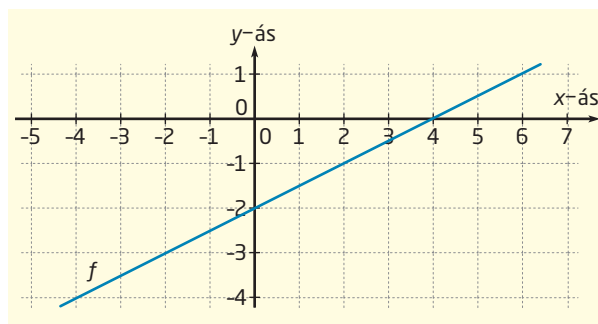
4.52 Útskýrðu hvaða hliðrun og/eða speglun grafsins af $f(x) = x^2$ hefur verið gerð til að fá föllin hér fyrir neðan. Finndu hnit topp- eða botnpunkta hvers falls. Teiknaðu því næst meginrætti fallanna.

- a** $f(x) = x^2 + 2$
- b** $g(x) = x^2 - 5$
- c** $h(x) = -x^2 + 1$
- d** $k(x) = (x - 3)^2$

4.53 Teiknaðu meginrætti fallanna hér fyrir neðan án þess að nota hjálpartæki. Gerðu gildatöflur þar sem það er nauðsynlegt.

- a** $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$
- b** $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
- c** $h(x) = \frac{200}{x}$

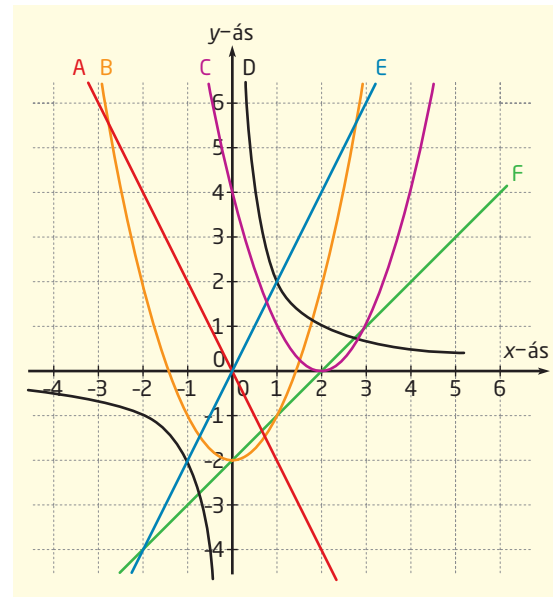
4.54



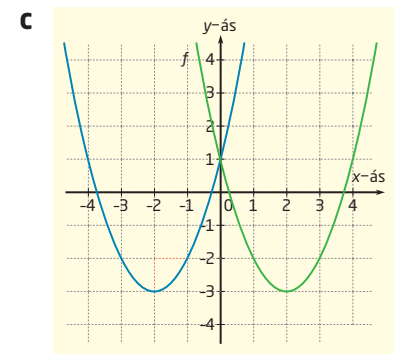
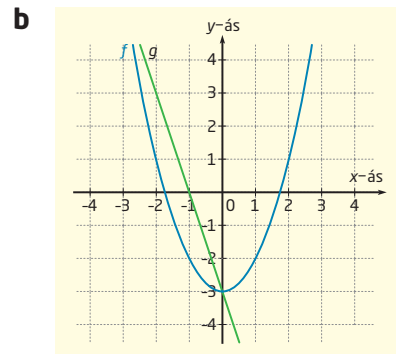
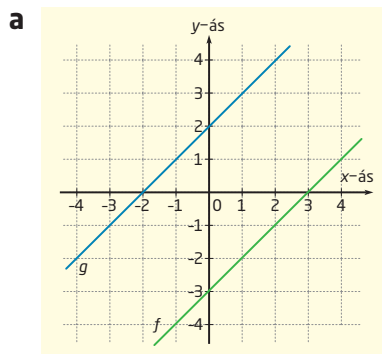
- a** Hver er fallstæða f ?
- b** Línulegt fall $g(x)$ er þannig að $g(0) = 3$ og $g(x) = f(x)$ þegar $x = 2$. Hver er fallstæða $g(x)$?
- c** Hve stórt er hornið milli $f(x)$ og $g(x)$? Rökstyddu svarið.

4.55 Hvaða jafna á við hvaða graf?

- $f(x) = \frac{2}{x}$
- $g(x) = 2x$
- $h(x) = -2x$
- $p(x) = (x - 2)^2$
- $q(x) = x^2 - 2$
- $r(x) = x - 2$



4.56 Hver mynd hér fyrir neðan sýnir tvö föll sem eru ólík en hafa samt eitthvað sameiginlegt. Finndu fallstæðuna fyrir hvert fall í hverjum lið og lýstu því hvað er sameiginlegt.



4.57 Kringlu er kastað. Kringlan hreyfist eftir braut sem má lýsa með fallinu $f(x) = -0,02x^2 + 0,5x + 1,73$. x er fjarlægðin út eftir sléttum velli og $f(x)$ er hæðin yfir vellinum.

- a** Notaðu rúmfræðiforrit til að teikna fallið.
- b** Fyrir hvaða gildi á x er kringlubrautin möguleg?
- c** Hve hátt yfir vellinum er kringlan þegar hún er hæst? Lestu af grafinu.
- d** Hve langt frá upphafspunkti lendir kringlan? Lestu af grafinu.



4.58 Notaðu rúmfræðiforrit og finndu hvort hvert par af föllum hefur einn, fleiri eða engan punkt sameiginlegan.

- a** $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x - 5$
- b** $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x - 3$
- c** $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x^2 + 3$
- d** $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = -2x^2 + 1$
- e** $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = -x^2 + 2$
- f** $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x^2 - 6$

4.59 Hverjar fallstæðanna, gildataflanna og grafanna sýna stærðir sem standa í réttu hlutfalli hvor við aðra?

a $y = \frac{2}{3}x^2$

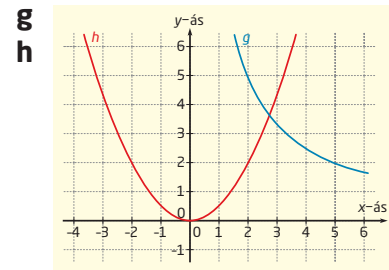
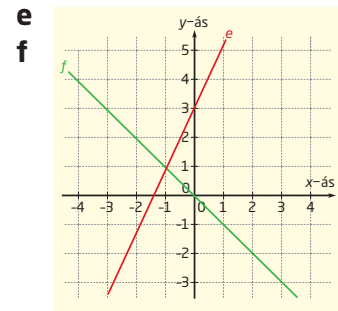
b $y = \frac{2}{5}x - 2$

c

x	5	7	11
y	15	21	33

d

x	12	60	84
y	8	40	56



4.60 Íþróttalið er á leiðinni á mót. Það kostar 25 000 kr. á sólarhring að leigja æskulýðsmiðstöð til að gista í. Hugmyndin er að leigja húsið í tvo sólarhringa. Þátttakendur eiga að skipta með sér útgjöldunum.

- a** Settu upp fallstæðu sem sýnir kostnaðinn á mann sem fall af fjölda manna þegar x menn eru á mótinu.
- b** Teiknaðu graf af fallinu í hnitakerfi.
- c** Lestu af grafinu hvað verðið á mann yrði ef þátttakendur væru 20.
- d** Íþróttaliðið vildi að kostnaður á mann yrði undir 2000 kr. Lestu af grafinu hve margir verða þá að taka þátt í mótinu.

4.61 Núllstöð falls er staðurinn þar sem grafið sker x -ásinn. Notaðu rúmfræðiforrit og finndu allar núllstöðvar fallanna.

a $f(x) = -x + 3$

c $h(x) = 2x + 2$

b $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

d $i(x) = x^2 + 2x$





4.62 Útgildispunktur er samheiti fyrir topppunkt og botnpunkt. Notaðu rúmfræðiforrit og finndu útgildispunkta grafanna.

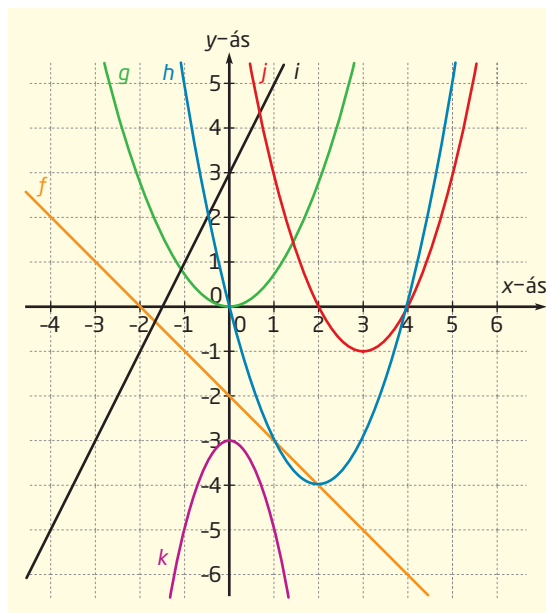
a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

c $h(x) = -x^2 + 3$

b $g(x) = x^2 + 4x$

d $i(x) = -x^2 - 2$

4.63 Skoðaðu gröfin sex. Hafa gröfin núllstöðvar og/eða útgildispunkta? Finndu núllstöðvar og útgildispunkta þeirra grafa sem hafa þessa punkta.



4.64 Strákahópur fær borgaðar 120 000 kr. fyrir verk.

a Settu tímakaupið K fram sem fall af t sem er fjöldi klst. sem þeir nota til verksins. Þeir halda að þeir muni nota milli 50 og 100 klst. samtals.

b Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu $K(t)$ fyrir t -gildi á bilinu $50 < t < 100$.

c Hve hátt verður tímakaupið ef þeir notuðu 85 klst. alls?

4.65 Hópur nemenda ætlar í ferð og hver nemandi borgar 1500 kr. fyrir mat. Að auki verða nemendurnir að borga 50 000 kr. fyrir rúttuna.

Fjöldi þátttakenda	2	4	5	8	10	15	20	25	30	40	50
Verð á mann (kr.)	26 500	14 000									

a Teiknaðu upp gildatöfluna og fylltu hana út.

b Hvaða fall getur lýst verðinu á ferðinni?

c Hvaða gildi nálgast fallið þegar fjöldi nemenda eykst?

4.66 Standa x og y í réttu eða öfugu hlutfalli hvort við annað?

a $y = x - 3$

c $y = \frac{1}{2}x$

b $y = \frac{3}{x}$

d $yx = 3$



- 4.67** Fiskispún er kastað út í vatn. Spúnninn fylgir braut sem lýsa má með fallinu

$$f(x) = -0,005x^2 + 1,5$$

þar sem x er fjarlægðin frá upphafspunkti út eftir vatnsfletinum og $f(x)$ er hæðin yfir vatnsfletinum.

- Teiknaðu graf f með rúmfræðiforriti.
- Hve hátt yfir vatnsfletinum er spúnninn í hæstu stöðu?
- Hve langt kemst spúnninn áður en hann lendir á vatnsfletinum?
- Hvaða gildi á x eru möguleg?
- Finndu bil fyrir x og teiknaðu graf $f(x)$ fyrir þau x -gildi sem eru möguleg.

- 4.68** Útskýrðu hvaða hliðrun og/eða speglun grafsins af $f(x) = x^2$ hefur orðið til að mynda föllin hér fyrir neðan. Finndu hnit topp- eða botnpunkta hvers falls. Teiknaðu því næst útlínur grafanna.

a $f(x) = 2(x + 3)^2$

b $h(x) = \frac{x^2}{4}$

c $g(x) = \frac{(x - 1)^2}{4}$

d $k(x) = -(x + 3)^2$

- 4.69** Dag nokkurn á miðju sumri fór að snjóa í óbyggðum. Snjódýptin er gefin með fallinu

$$s(x) = -0,0071x^3 - 0,000\ 05x^2 + 1,045x$$

þar sem x er fjöldi klst. eftir að fór að snjóa og $s(x)$ er snjódýptin mæld í sentimetrum.

- Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu graf s .
- Notaðu grafið til að ákvarða hve langan tíma það tók áður en snjódýptin varð 3 cm.
- Hve langur tími leið frá því að það byrjaði að snjóa þar til snjódýptin náði hámarki?
- Lestu núllstöðvar s . Hvað þýða núllstöðvar í þessu tilviki í raunveruleikanum?





4.70 Notaðu rúmfræðiforrit.

- a Búðu til rennistiku b með gildum milli -10 og 10 .
- b Teiknaðu gróf fallanna tveggja $f(x) = \frac{4}{x}$ og $g(x) = -x + b$.
- c Notaðu grafísku myndina og breyttu gildinu á b með rennistikunni. Fyrir hvaða gildi á b hefur jafnan

$$\frac{4}{x} = -x + b$$

- 1 tvær lausnir 2 eina lausn 3 enga lausn

4.71 Sebastían kastar körfubolta í körfu sem hangir $3,05$ m uppi á veggnum. Körfuboltinn hittir í körfuna eftir að hafa fylgt braut sem er gefin með fallinu $f(x) = -0,07x^2 + x + 1,6$.

- a Teiknaðu graf f .
- b Hve langt frá körfunni stendur Sebastían?
- c Hvaða gildi getur x tekið?

4.72 Skráðu hjá þér jöfnu og graf sem passa saman.

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

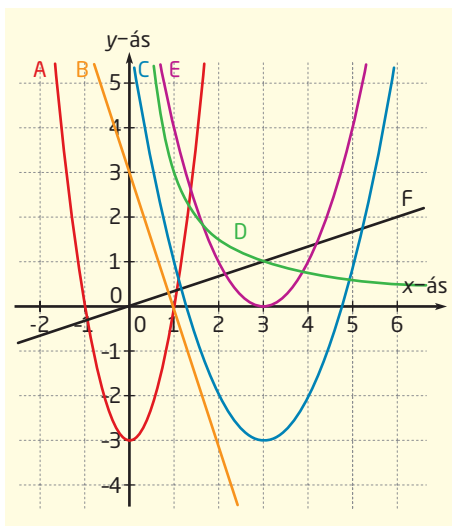
$$g(x) = \frac{x}{3}$$

$$h(x) = -3x + 3$$

$$p(x) = (x - 3)^2$$

$$q(x) = 3x^2 - 3$$

$$r(x) = (x - 3)^2 - 3$$



4.73 Finndu línurnar sem fleygbogarnir eru samhverfir um. Notaðu rúmfræðiforrit.

a $f(x) = x^2 + 2x - 4$

c $h(x) = x^2 + 5x + 7$

e $j(x) = -2x^2 + 2x$

b $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

d $i(x) = x^2 + 4x - 2$

f $k(x) = -3x^2 + 4$

4.74 a Finndu hnit útgildispunkta fallanna í verkefni 4.73.

b Skoðaðu hnit útgildispunktanna og berðu þau saman við samhverfuása fleygboganna. Hvaða samhengi sérð þú?



4.75 Fjölskylda kaupir bústað. Þau hafa tekið lán og borga 60 000 kr. af því á mánuði. Fjölskyldan vill vita hvað hver nótt sem þau gista þar kostar þau miðað við afborgunina.

- a** Settu upp fall sem sýnir kostnaðinn á hverja gistingu sem fall af fjölda gistinguátta yfir árið. Látum x vera fjölda gistinguátta á ári.
- b** Teiknaðu graf fallsins í hnitakerfi.

Fyrsta árið hafa þau gisti 28 sinnum í bústaðnum.

- c** Lestu af grafinu hvað verðið á hverri gistingu hefur verið.

Þau vilja halda áfram að eiga bústaðinn ef þau sjá að verðið fyrir sólarhringinn fellur niður fyrir 20 000 kr. að meðaltali á einu ári.

- d** Hve marga sólarhringa verða þau þá að vera í bústaðnum?

4.76 Notaðu rúmfræðiforrit.

- a** Teiknaðu gröf fallanna á bilinu $0 < x < 20$.

$$\text{I } f(x) = \frac{1}{8}x^2 \qquad \text{II } g(x) = \frac{8}{x}$$

- b** Notaðu niðurstöðuna í a til að leysa jöfnuna $\frac{1}{8}x^2 = \frac{8}{x}$ grafískt.

4.77 Kúluvarpari fær kúluna sína til að fylgja braut sem er gefin með fallinu

$$k(x) = -0,045x^2 + x + 1,78$$

- a** Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu graf k á bilinu $0 < x < 24$.
- b** Útskýrðu hvað fastaliðurinn 1,78 þýðir í þessu samhengi.
- c** Hve hátt fer kúlan og hve langt í lárétta stefnu frá upphafsstöðu er kúlan í þessum punkti?
- d** Hve langt var kúlunni varpað?





4.78 Notaðu rúmfræðiforritið og finndu allar núllstöðvar fallanna.

a $f(x) = x^2 - 4$

d $i(x) = x^2 + 2x - 3$

b $g(x) = 3x^2 - 3$

e $j(x) = -2,5x + 2,5$

c $h(x) = x^2 + 5x + 6$

f $k(x) = \frac{2}{3}x - 2$

4.79 Notaðu rúmfræðiforrit og finndu hugsanlega útpunkta fallanna í verkefni 4.78.

4.80 Tíminn sem hlaupari þarf til að komast tiltekna vegalengd er háður hraðanum. Vegalengd sem hlauparinn ætlar að fara er 5000 m.

- a** Settu hraðann fram sem fall f af tímanum t mældum í mínútum.
- b** Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu graf f fyrir tíma milli 20 og 60 mínútur.
- c** Lestu af grafinu hve langan tíma hlaupari með meðalhraðann 150 m/mín. notar.
- d** Hve mikinn meðalhraða hefur hlaupari sem notar 27 mínútur á vegalengdina?

4.81 Rafmagnsstaurar eru settir niður með jöfnu millibili. 10 metrar eru á milli hverra tveggja staura. Rafleiðslurnar milli stauranna hanga á milli þeirra í boga sem hægt er að lýsa með fallinu

$$f(x) = 0,03x^2 - 0,3x + 10$$

- a** Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu $f(x)$ fyrir x -gildi á bilinu $0 < x < 10$.
- b** Hve hátt hanga rafleiðslurnar þegar þær eru lægstar?

Á einum stað eru staurarnir bara 5 m háir. Leiðslurnar á milli þeirra hanga eins og á milli hærri stólpanna.

- c** Getur 4,3 m hár flutningabíll með farm ekið undir leiðslurnar?



- 4.82** a Teiknaðu graf fallsins $f(x) = -x^2 + 12x - 20$.
 b Leystu jöfnuna $-x^2 + 12x - 20 \geq 0$ grafísk.
 c Leystu jöfnuna $-x^2 + 12x - 20 \leq 7$ grafísk.

4.83 Fjölskylda ætlar að leigja bíl. Þau þurfa að borga fasta upphæð, 38 000 kr. og að auki 120 kr. fyrir hvern kílómetra sem þau keyra.

- a Hve mikið kostar að leigja bíl ef þau keyra 800 km?
 b Sýndu að meðalkostnaður $G(x)$ á kílómetra sé

$$G(x) = 120 + \frac{38\,000}{x}$$

þegar þau keyra x km.

- c Teiknaðu graf G þegar $0 < x < 1000$. Notaðu rúmfræðiforrit.
 d Hve langt þarf fjölskyldan að keyra til þess að verð á kílómetra verði lægra en 250 kr. að meðaltali?
 e Um hve mörg prósent lækkar meðalverðið þegar aksturslengdin eykst frá 500 km í 800 km?

4.84 Leystu ójöfnuna grafískt:

$$x^2 - 2 \geq -x$$

4.85 Teiknaðu gróf fallanna hér fyrir neðan með teikniforriti. Ákvarðaðu markgildin fyrir hvert fall fyrir sig þegar x stefnir á óendanlegt.

a $f(x) = \frac{3x + 2}{x}$

b $g(x) = 5 + \frac{3}{x + 1}$

c $h(x) = \frac{5x + 5}{x + 1}$

4.86 Útskýrðu hvaða hliðrun og/eða speglun grafsins af $f(x) = x^2$ hefur átt sér stað til að fá föllin hér fyrir neðan. Finndu hnit topp- eða botnpunkta hvers falls. Teiknaðu síðan meginrætti grafanna.

a $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

c $h(x) = 2\left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

b $g(x) = (x - 1)^2 - 5$

d $k(x) = -(x + 3)^2 - 2$



4.87 Dag nokkurn fylgdi hitastigið milli kl. 11 og 23 fallinu

$$h(x) = -0,2x^2 + 1,4x + 12$$

þar sem $h(x)$ er hitastigið mælt í gráðum á celsíus og x er fjöldi klukkustunda eftir kl. 11.00.

- a Teiknaðu graf h . Notaðu teikniforrit.
- b Klukkan hvað er hitastigið 13 °C?
- c Ákvarðaðu hámarks- og lágmarkshitastigið milli kl. 11.00 og 23.00 þennan dag.



4.88 Fall er gefið með $f(x) = (x - 3)^2 - 4$.

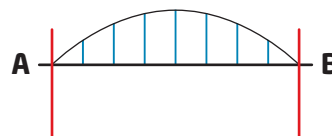
- a Fyrir hvaða gildi x liggur grafið ofan við x -ásinn?
- b Hefur f topppunkt eða botnpunkt?
- c Teiknaðu meginrætti grafsins án þess að nota forrit.

4.89 Myndin sýnir fleygbogalaga brú. Fjarlægðin $AB = 104$ m. Brúnni er skipt í átta jafnstóra hluta með sjö stólpum. Stólpinn í miðjunni er 30 m hár. Jöfnu fleygbogans er hægt að skrifa á forminu $y = ax^2 + b$ þegar við leggjum y -ásinn eftir miðstólpanum og x -ásinn eftir AB .

- a Sýndu að jöfnu fleygbogans má skrá

$$y = -0,011x^2 + 30$$

- b Reiknaðu hæðir hinna sex stólpanna.



4.90 Finndu fallstæðu fyrir fleygboga sem hefur

- a topppunkt í $(3, 3)$ og sker y -ásinn í $y = -2$
- b botnpunkt í $(3, -3)$ og sker y -ásinn í $y = 2$
- c topppunkt í $(-5, 8)$ og sker y -ásinn í upphafspunkti $(0,0)$

4.91 Skráðu hjá þér hvaða gröf eiga við hvaða fallstæðu.

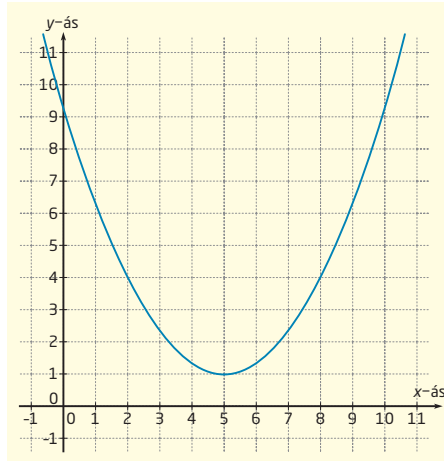
a $f(x) = \frac{(x - 5)^2}{3} + 1$

c $h(x) = -2(x + 2)^2 - 2$

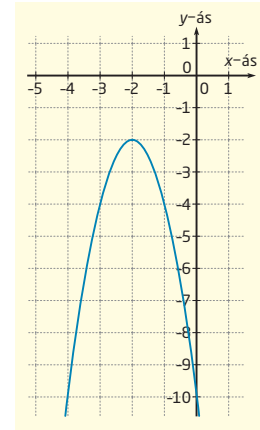
b $g(x) = \frac{x^2}{4} - 6$

d $k(x) = (2x - 5)^2 - 3$

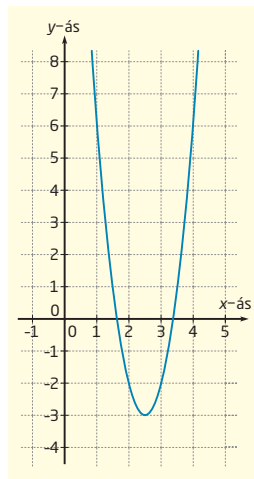
1



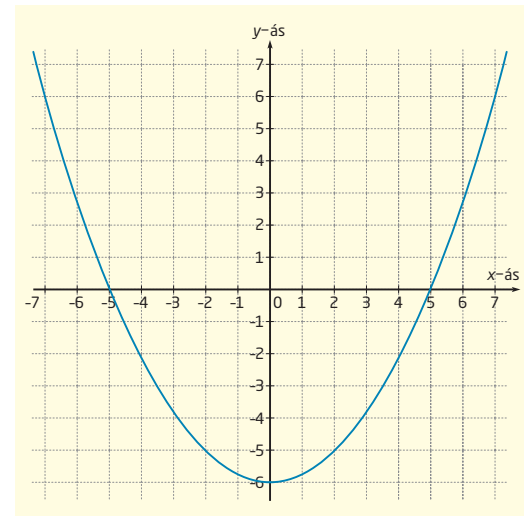
2



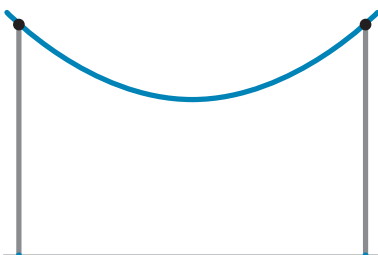
3



4



4.92 Kaðall hangir frjálst milli tveggja stólpa sem standa með 12 metra millibili. Botn kaðalsins er 2,52 m lægri en toppurinn á stólpunum. Kaðallinn nálgast það að mynda fullkominn fleygboga eins og myndin sýnir.



- a** Leggðu hnitakerfi með x -ás gegnum toppa stólpanna og y -ásinn gegnum lægsta punkt kaðalsins. Sýndu að fallið sem lýsir því hvar punktarnir á kaðlinum liggja sé gefið með

$$k(x) = 0,07x^2 - 2,52$$

- b** Stólparnir eru 8 m háir. Hve hátt yfir vellinum er kaðallinn 2 m frá botnpunktinum hvorum megin?

- 4.93** Eftirfarandi verð gildi á skíðasvæðinu í Hlíðarfjalli við Akureyri veturinn 2016–2017.

Vetrarkort í Hlíðarfjalli			
Börn	Skólakort	Fullorðnir	Eldri borgarar
13 000	18 200	47 250	13 000

Systkinin Pétur og Heiða búa á Akureyri. Þau ætla að kaupa vetrarkort á skíðasvæðið. Heiða er ekki komin í framhaldsskóla svo hún kaupir barnakort en Pétur er í framhaldsskóla og kaupir skólakort.

- Látum h og p vera verðið á dag fyrir þau Heiðu og Pétur og x vera fjölda daga. Útskýrðu hvers vegna x og h standa í öfugu hlutfalli hvort við annað og x og p standa líka í öfugu hlutfalli hvort við annað.
- Hve marga daga yfir veturinn þurfa systkinin að vera í brekkunni til að borga minna en 1500 kr. á dag hvort um sig?
- Er raunhæft að þau geti verið svo oft í brekkunni að verðið verði 500 kr. á dag?

- 4.94** Helga þrjónar vettlinga sem hún ætlar að selja. Hún notar garn fyrir 800 kr. í hvert vettlingapar. Það tekur hana 5 klst. að þrjóna hvert par.

- Á hvaða verði þarf hún að selja vettlingana til þess að hún fái 450 kr. á tímann?

Helga fer að reka fyrirtæki til að geta unnið sér inn meiri peninga. Þegar hún hefur tekið tillit til allra útgjalda sinna finnur hún út að tekjurnar sem hún getur reiknað með þegar hún selur x pör af vettlingum á viku eru gefnar með

$$T(x) = -30(x - 37)^2 + 10\,000$$

- Teiknaðu graf T með teikniforriti.
- Hve mörg pör af vettlingum verður Helga að selja á viku svo að hún hafi yfirleitt nokkrar tekjur?
- Hvað er það mesta sem Helga getur haft í tekjur á viku og hve marga vettlinga verður hún þá að selja?



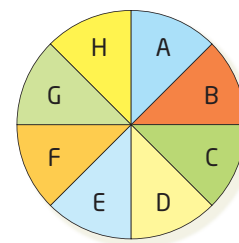
5

Líkindareikningur

Frá reynslu til líkinda

5.1 Notaðu lukkuhjól með átta reitum merktum A, B, C, D, E, F, G, H. Finndu fræðilegar líkur á

- a** að fá sérhljóða þegar þú snýrð hjólinu einu sinni
- b** að fá A, B eða C þegar þú snýrð hjólinu einu sinni
- c** að fá bókstaf aftan við B í stafrófinu þegar þú snýrð hjólinu einu sinni
- d** Teiknaðu sams konar lukkuhjól. Notaðu blýant og bréfastemmu og snúðu 20 sinnum. Skráðu hjá þér á hverju þú lendir. Reiknaðu út líkindin byggð á tilrauninni á atburðunum í a, b og c.



5.2 Kastaðu teiknibólu upp í loft þannig að hún lendi á borðinu fyrir framan þig.

- a** Settu upp töflu og skráðu hvernig teiknibólan lendir í 50 köstum.
- b** Hverjar eru líkurnar, byggðar á tilrauninni, á því að teiknibólan lendi á hlið með oddinn niður?





- 5.3** Finndu líkur á að nemandi skori úr víti í handbolta eða fótbolta.
- Framkvæmdu fyrst tíu og síðan tuttugu vítaköst eða vítaspyrnur.
 - Settu upp töflu og skráðu hve oft er skorað bæði í tíu og tuttugu tilraunum.
 - Hverjar eru líkurnar, byggðar á tilrauninni, á að skora úr einu vítakasti eða vítaspyrnu?

- 5.4** Finndu líkur byggðar á tilraun á að fólk sem þú hittir brosi til þín.

- Gakktu yfir skólalóðina, í gegnum gang eða annað svæði þar sem töluvert er af fólki. Brostu til tíu fyrstu manneskjanna sem þú hittir og skráðu hjá þér hvort þær brosi greinilega á móti eða ekki.
- Haltu áfram göngunni og skráðu hjá þér brosi eða ekki brosi á tíu öðrum manneskjum.
- Finndu líkur byggðar á tilraunum á því að manneskja sem þú mætir brosi á móti þér eða ekki.



- 5.5** Það eru u.þ.b. 75% líkur á að fræ muni spíra.

- Notaðu fjóra miða og útbúðu hermun sem getur prófað hvort fræ muni spíra eða ekki.
- Gerðu 100 hermanir. Skráðu niðurstöðurnar í töflu.
- Finndu líkur byggðar á tilrauninni á að fræið spíri ekki.

Niðurstaða	Tíðni
Fræið spírar	
Fræið spírar ekki	

- 5.6** Notaðu töflureikni til að herma val á einum nemanda úr bekknum þínum með slembivali. Gefðu öllum nemendunum í bekknum númer.

- Hve oft heldur þú að þú verðir fyrir valinu í hermuninni?
- Veldu 100 sinnum með slembivali.
- Athugaðu, hvort það sem þú hélst í lið a, var rétt.

- 5.7** Árið 2016 var um það bil eitt af hverjum 8 störfum tengt ferðapjónustu.

- Hugsaðu þér að þetta haldi þannig áfram. Finndu fræðilegar líkur á hve margir af 150 unglingum eigi eftir að fá starf tengt ferðapjónustu eftir nokkur ár.
- Lýstu hvernig hægt væri að setja upp hermun um þetta.
- Framkvæmdu hermunina. Hverjar eru líkurnar byggðar á tilrauninni á hve margir af 150 unglingum eigi eftir að fá starf tengt ferðapjónustu eftir nokkur ár?



5.8

Útbúið skotmark með því að teikna hring (1 m í þvermál) á gólfið á stað sem er 3 m frá byrjunarlínu. Vinnið saman tvö og tvö. Þið þurfið tíu gúmmíteygjur sem á að reyna að skjóta í hringinn.

- Annað ykkar skýtur einni teygju í einu, alls tíu sinnum. Hitt skráir hittina.
- Skjótið aftur tíu sinnum með teygju. Finnið líkur byggðar á tilrauninni á að hitta í skotmarkið.
- Skiptið um hlutverk og gerið tilraunina einu sinni enn.
- Hvað haldið þið að verði um líkurnar á að hitta ef fjöldi tilrauna hefði verið aukinn í 1000?



5.9

Hve miklar líkur eru á að þér takist að slá nagla niður í planka í einu höggi? Raðið ykkur í þriggja manna hópa og veljið hver á að gera tilraunina. Hinir telja og skrá.

- Finnið nokkra litla nagla, planku og hamar. Gerið tíu tilraunir og skráið hve mörg högg þarf til að slá nagla alveg niður.
- Gerið tíu tilraunir í viðbót.
- Finndu líkurnar á að þér takist að slá nagla niður í einu höggi, tveimur höggum, þremur höggum o.s.frv.
- Hve miklar líkur eru á því að ráða við þetta verkefni í öllum bekknum?

5.10

Þið þurfið sex eða tíu pappabolla og nokkrar þykkar gúmmíteygjur. Hvolfið pappabollunum og byggið píramíða úr þeim með einn bolla efst. Setjið píramíðann á borð og stillið ykkur upp um það bil 3 m frá píramíðanum. Vinnið saman tvö og tvö.

- Skjótið þykkum gúmmíteygjum tíu sinnum að píramíðanum. Skráið hve oft þið hittið þannig að einhver pappabolli detti niður.
- Finnið líkur, byggðar á tilrauninni, á að hitta píramíðann í tíu skotum.
- Skjótið teygjum tíu sinnum í viðbót. Finnið líkur byggðar á tilraununum á að hitta píramíðann í tuttugu skotum.
- Hve miklar líkur eru á að næsta skot hjá þér hitti píramíðann?
- Skiptið um hlutverk og endurtakið tilraunina einu sinni enn.





5.11 Í veðurspánni segir að á morgun séu 80% líkur á rigningu og 70% líkur á að vindstyrkurinn verði um það bil 10 m/s.

- a Notaðu miða og gerðu tvöfalda hermun sem getur prófað hvort það rigni á morgun eða ekki og hvort vindstyrkurinn verði um það bil 10 m/s.
- b Gerðu 50 hermanir. Skráðu niðurstöðurnar í töflu eins og þessa:

Niðurstaða	Tíðni
Rigning og vindstyrkur 10 m/s	
Rigning en ekki 10 m/s vindstyrkur	
Purrviðri og 10 m/s vindstyrkur	
Purrviðri en ekki 10 m/s vindstyrkur	

- c Finndu líkur, byggðar á tilrauninni, á að það verði ekki rigning á morgun og að vindstyrkurinn verði ekki um 10 m/s.

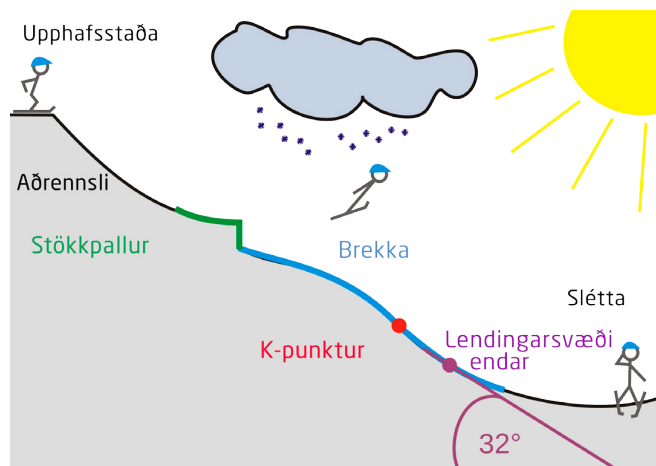
5.12 Notaðu töflureikni og settu upp 1000 kasta hermun með venjulegum sex hliða teningi. Notaðu og afritaðu fallið =RANDBETWEEN(botn;þak) þar sem botn er lægsta talan og þak er hæsta talan. Finndu líkur á að fá fimmu með því að nota fallið =COUNTIF(sviðsbyrjun:sviðslok;skilyrði) þar sem byrjun sviðs er efsta hólf til vinstri og lok þess er neðsta hólf til hægri. Skilyrðið hér er 5.



5.13 Á skíðastökkbraut eru 40% líkur á að hoppa yfir K-punktinn. Líkur á að lenda á bungunni eru 5%. Aðrir stökkvarar lenda á milli bungunnar og K-punktsins.

- a Notaðu töflureikni og skipuleggðu hvernig þú getir hermt eftir stökk lengdunum í þessari stökkbraut.
- b Hermdu eftir hvar 100 stökkvarar í skíðastökkbraut lenda: á bungunni, eftir bunguna, fyrir K-punktinn eða eftir K-punktinn.

K-punkturinn er kritíski punkturinn þar sem yfirfærslan frá brekkunni yfir í sléttuna byrjar.





5.14 Þú spilar spilið *Löngu vitleysu* við bekkjarfélag. Þið skiptið spilastokknum í tvennt. Svo snúið þið við einu spili hvort. Ef spilin hafa sama talnagildi verður *Stríð*.

Hve miklar líkur eru á því að það verði *Stríð* í fyrsta skipti sem hvort ykkar snýr við einu spili?

5.15 Notaðu töfluna yfir menntunarsstig.

- Hvaða líkur eru á að manneskja valin af handahófi, 16 ára eða eldri, hafi starfs- og framhaldsmenntun sem lokamenntun?
- Hvaða líkur eru á að kona valin af handahófi, 16 ára eða eldri, hafi starfs- og framhaldsmenntun sem lokamenntun?
- Þú hittir einhvern með háskólamenntun. Hvaða líkur eru á að það sé karlmaður?

Menntunarsstig fólks 16 ára og eldra á Íslandi 2015	
Bæði kyn	
Öll stig	231 800
Grunnmenntun	78 600
Starfs- og framhaldsmenntun	82 900
Háskólamenntun	70 300
Karlar	
Öll stig	116 700
Grunnmenntun	39 100
Starfs- og framhaldsmenntun	48 500
Háskólamenntun	29 100
Konur	
Öll stig	115 100
Grunnmenntun	39 500
Starfs- og framhaldsmenntun	34 400
Háskólamenntun	41 200

Heimild: www.hagstofa.is

5.16 Notaðu töflureikni.

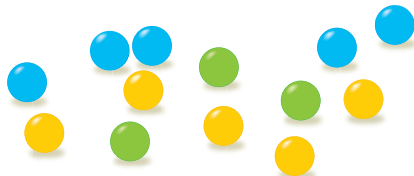
- Útbúðu hermun um 200 köst með 3 teningum.
- Teldu fjölda kasta með summu frá 3 upp í 18. Settu upp súlurit sem sýnir tíðni hvernar summu.
- Endurtaktu hermunina með því að nota F9-takkann. Leggðu mat á hvort 200 köst séu nógu mörg til að sýna fram á hvaða summa er líklegust. Rökstyddu svarið.

Samsettar líkur, margir atburðir

- 5.20** Tveimur sex hliða teningum er kastað einu sinni.
- a** Settu upp krosstöflu sem sýnir allar mögulegar samsetningar á því sem upp kemur í teningaköstunum tveimur.
 - b** Hve miklar líkur eru á að gildið á öðrum teningnum sé tvöfalt gildið á hinum teningnum?
- 5.21** Líkurnar á því að manneskja sé örvhent eru 0,1.
- a** Hve miklar líkur eru á að tvær vinkonur séu báðar örvhentar?
 - b** Hve miklar líkur eru á að þrjár vinkonur séu örvhentar?
- 5.22** Þú kastar upp peningi þrisvar sinnum í röð.
- a** Hve miklar líkur eru á að þú fái fisk í öll skiptin?
 - b** Hve miklar líkur eru á að fá tvisvar fisk og einu sinni krónuhliðina?
- 5.23** Teódóra útbýr spilunarlista yfir þau fimm lög sem hún heldur mest upp á. Hún spilar þau í handahófskenndri röð.
- a** Hve miklar líkur eru á að hún spili lengsta lagið fyrst?
 - b** Hve miklar líkur eru á að lögin fimm verði spiluð í stafrófsröð?
- 5.24** Þú ert með fjögur spil úr spilastokk, tvö rauð og tvö svört. Stokkaðu spilin og dragðu án þess að sjá.
- a** Hve miklar líkur eru á að draga tvö svört spil í röð þegar þú skilar aftur fyrra spilinu sem þú dróst?
 - b** Hve miklar líkur eru á að draga tvö svört spil í röð þegar þú skilar ekki fyrra spilinu sem þú dróst?

5.25 Hér fyrir neðan sérðu litaðar kúlur. Þú dregur nokkrar kúlur af handahófi og skilar kúlunum ekki aftur.

- a Hve miklar líkur eru á að draga þrjár bláar kúlur í röð?
- b Hve miklar líkur eru á að draga þrjár grænar kúlur í röð?



5.26 Kennari þarf að velja tvo nemendur með slembivali úr hópi þriggja stráka og tveggja stelpna.

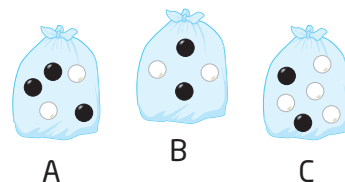
- a Hve miklar líkur eru á að kennarinn velji stelpurnar tvær?
- b Útskýrðu hvort er líklegra að kennarinn velji tvo stráka eða velji stelpu og strák?

5.27 Þú ert með fimm stílabækur í skólatöskunni undir námsgreinar: íslensku, ensku, samfélagsfræði, náttúrufræði og dönsku.

- a Þú tekur eina stílabók úr töskunni af handahófi. Hve miklar líkur eru á að það sé náttúrufræðibókin?
- b Þú tekur tvær stílabækur úr töskunni af handahófi. Finndu líkurnar á að það séu náttúrufræðibókin og enskubókin.

5.28 Myndin sýnir þrjá poka með hvítum og svörtum kúlum. Þú átt að draga eina kúlu úr hverjum poka án þess að sjá.

- a Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr A?
- b Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr B?
- c Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr C?
- d Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr bæði A og B?
- e Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr bæði A og C?
- f Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu úr bæði A, B og C?



5.29 Ákvarðaðu hvort atburðirnir tveir séu andstæðir atburðir.

- a** Atburður 1: Hapdrættismiðinn er vinningsmiði.
Atburður 2: Hapdrættismiðinn er ekki vinningsmiði.
- b** Atburður 1: Talan er framtala.
Atburður 2: Talan er slétt tala.
- c** Atburður 1: Bókstafurinn er sérhljóði.
Atburður 2: Bókstafurinn er samhljóði.
- d** Atburður 1: Nanna spilar fótbolta.
Atburður 2: Nanna spilar körfubolta.

5.30 Líkurnar á að vera litblindur eru u.þ.b. 8% hjá drengjum og u.þ.b. 0,3% hjá stúlkum. Hve miklar líkur eru á

- a** að það sé enginn litblindur í hópi fimm drengja?
- b** að það sé engin litblind í hópi fimm stúlkna?
- c** að það sé enginn litblindur í hópi fimm drengja og fimm stúlkna?
- d** að það sé að minnsta kosti einn litblindur drengur í þínum bekk?

5.31 Eiríkur borðar morgunverð. Hann er vanur að drekka mjólk eða ávaxtasafa með morgunmatnum, að borða annaðhvort brauðsneið eða skál af morgunkorni og að lokum borðar hann annaðhvort epli eða banana.

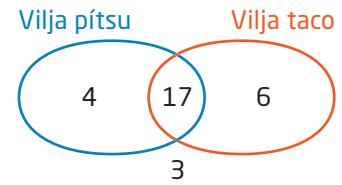
- a** Settu upp talningartré sem sýnir alla möguleika á vali morgunverðar.
- b** Ef allt val Eiríks er jafn líklegt, hve miklar líkur eru þá á að hann drekki ávaxtasafa, borði brauðsneið og epli?
- c** Líkurnar á vali Eiríks eru ekki allar jafnar. Líkur á að velja ávaxtasafa eru 0,7, líkur á að velja morgunkorn eru 0,7 og líkur á að velja banana eru 0,7. Hve miklar líkur eru á að hann drekki mjólk, borði morgunkorn og borði epli?

5.32 Hve miklar líkur eru á

- a** að hitta ekki skotmarkið í skíðaskotfimi þegar líkur á að hitta eru 86%?
- b** að sigra ekki í hlaupi þegar líkur á að sigra eru 15%?
- c** að vindhviður nái ekki stormstyrk þegar líkur á vindhviðum í stormstyrk eru 92%?

5.33 Bekkurinn tók til skoðunar hvort nemendurnir vildu pítsu og taco. Niðurstöðurnar voru settar upp í Vennmynd.

- a Útskýrðu Vennmyndina.
- b Við veljum nemanda úr bekknum með slembivali. Hve miklar líkur eru á að sá nemandi vilji hvorki pítsu né taco?
- c Við veljum nemanda úr bekknum með slembivali. Hve miklar líkur eru á að sá nemandi vilji bæði pítsu og taco?



5.34 Prettán nemendur í tíunda bekk A æfa oftast en þrisvar í viku. Sex nemendur æfa fótbolta og tveir þeirra æfa oftast en þrisvar í viku. Alls eru 27 nemendur í bekknum.

- a Teiknaðu Vennmynd sem sýnir stöðuna.
- b Hve miklar líkur eru á að velja af handahófi nemanda sem æfir oftast en þrisvar í viku en æfir ekki fótbolta?



5.35 Tveir nemendur vinna þetta verkefni saman. Hvor býr til sitt leikspjald fyrir leikinn *Fjórir í röð*. Reitina 16 á spjaldinu á að fylla með tölum sem þeir velja sjálfir. Það má setja sömu töluna á fleiri en einn stað. Þeir varpa tveimur teningum og þá má „krossa“ á spjaldinu yfir summu talnanna sem koma upp. Hafi þeir skrifað sömu töluna á fleiri staði verða þeir að velja yfir hvaða tölu þeir vilja krossa. Keppt er um að verða fyrri til að fá fjórar tölur í röð annaðhvort lárétt, lóðrétt eða á ská.

- a Búið til leikspjald og spilið leikinn einu sinni.
- b Búið til ný leikspjöld og spilið leikinn mörgum sinnum. Gætið þess þá að velja tölurnar af meiri yfirvegum en þið gerðuð ef til vill í fyrsta skipti.

5.36 Hugsið um spilið í verkefni 5.35.

- a Hvaða tölur reyndist ykkur gagnlegt að velja?
- b Hvaða tölur eru mestar líkur á að fá upp sem summu tveggja teningskasta?



5.37 Sunneva og Dóra ætla að fara á skíði í dag ef það verður sólskin og ef mamma Dóru getur ekið þeim. Líkurnar á sól eru 0,7 og líkurnar á að mamma Dóru geti ekið þeim eru 0,9.

Hve miklar líkur eru á að Sunneva og Dóra geti farið á skíði?

5.38 Það eru 85% líkur á að viðskiptavinur í verslun borgi með korti. Það eru 60% líkur á að viðskiptavinurinn sé kona. Það eru 35% líkur á að viðskiptavinurinn sé yngri en 20 ára.

- a** Hve miklar líkur eru á að viðskiptavinurinn sé kona yngri en 20 ára sem borgar með korti?
- b** Hve miklar líkur eru á að viðskiptavinurinn sé karlmaður 20 ára eða eldri sem borgar með peningum?
- c** Hve miklar líkur eru á að tveir viðskiptavinir í röð séu konur 20 ára eða eldri sem borga með peningum?

5.39 Málfríður varpar tveimur sex hliða teningum.

- a** Hve miklar líkur eru á að fá sömu tölu á báðum teningum?
- b** Hve miklar líkur eru á að upp komi á báðum teningunum tala sem er hærri en 4?

5.40 12 stelpur og 18 strákar eru í sama bekk. Helmingur stelpnanna og einn þriðji hluti af strákunum eru dökkhærð. Við veljum einn nemanda úr hópnum með slembivali. Hve miklar líkur eru á að velja

- a** dökkhærða stelpu?
- b** strák sem er ekki dökkhærður?





- 5.41** Líkurnar á að manneskja sé örvhent eru 0,1. Hve miklar líkur eru á að í þriggja nemenda hópi séu
- a** þrjú börn réttthent?
 - b** tvö börn réttthent og eitt örvhent?
- 5.42** Í poka eru fjórir rauðir og sex gulir molar. Þú tekur upp og borðar mola af handahófi. Hve miklar líkur eru á að þú borðir
- a** fyrst rauðan mola og síðan gulan mola?
 - b** tvo rauða mola í röð?
- 5.43** Þú ert með spjöld með tölunum 1–15.
- a** Hve miklar líkur eru á að draga tvær oddatölur í röð ef þú skilar spjöldunum í bunkann og stokkar hann á milli dráttanna?
 - b** Hve miklar líkur eru á að draga tvær sléttar tölur í röð ef þú skilar spjöldunum ekki á milli drátta?
- 5.44** Moníka er með fjögur spil: tígul, hjarta, spaða og lauf. Hún stokkar spilin vel og dregur án þess að sjá nokkurt spilanna. Hún skilar spilinu í stokkinn, stokkar og dregur að nýju.
- Hve miklar líkur eru á að hún fái að minnsta kosti einn spaða?
- 5.45** Í skál með ávaxtahlaupkörlum eru fjórir rauðir, sex grænir, þrír gulir og fimm rauðgulir karlar. Í annarri skál með karamellum eru sex með sítrónubragði, fjórar með lakkrísbragði og sjö venjulegar karamellur.
- Fyrsta staða: Þú dregur af handahófi eitt stykki úr hvorri skál.
- a** Hve miklar líkur eru á að þú fáiir rauðan hlaupkarl og karamellu með lakkrísbragði?
 - b** Hve miklar líkur eru á að þú fáiir grænan hlaupkarl og venjulega karamellu?
- Önnur staða: Þú dregur tvær karamellur af handahófi.
- c** Hve miklar líkur eru á að þú fáiir tvær karamellur með sítrónubragði?
- Þriðja staða: Þú dregur tvo hlaupkarla og eina karamellu.
- d** Hve miklar líkur eru á að þú fáiir rauðan og grænan hlaupkarl og lakkrískaramellu?



- 5.46** Líkur á að fá tiltekinn sjúkdóm á einu ári eru 0,2%.
- a** Hve miklar líkur eru á að fá ekki sjúkdóminn á einu ári?
- Signý og Marta eru tvær manneskjur valdar af handahófi sem eru ekki skyldar og þekkjast ekki.
- b** Notaðu líkindatré til að setja fram öll möguleg tilvik um Signýju og Mörtu varðandi sjúkdóminn.
 - c** Hve miklar líkur eru á að hvorki Signý né Marta fái sjúkdóminn?
 - d** Hve miklar líkur eru á að bæði Signý og Marta fái sjúkdóminn?
 - e** Hve miklar líkur eru á að önnur hvor, Signý eða Marta, fái sjúkdóminn?

- 5.47** Þú varpar þremur teningum einu sinni.
- a** Hve miklar líkur eru á að fá þrjá þrista?
 - b** Hve miklar líkur eru á að fá þrjá eins?
 - c** Hve miklar líkur eru á að allar tölurnar verði mismunandi?
 - d** Hve miklar líkur eru á að tvær tölur verði eins?

- 5.48** Fimm manna hópur er valinn með slembivali.
- a** Hve miklar líkur eru á að allir í hópnum eigi afmæli á sama vikudegi?
 - b** Hve miklar líkur eru á að enginn í hópnum eigi afmælisdag á sama vikudegi?
 - c** Hve miklar líkur eru á að tveir í hópnum að minnsta kosti eigi afmæli á sama vikudegi?

- 5.49** Í vetrarfríinu fóru 28 nemendur í 10. bekk á svigskíði. 17 nemendur fóru á gönguskíði og 10 þeirra fóru líka á svigskíði. Alls eru 48 nemendur í 10. bekk.

- a** Teiknaðu Vennmynd sem sýnir þetta.
- b** Hve miklar líkur eru á að velja af handahófi nemanda í 10. bekk sem fór hvorki á svigskíði né gönguskíði í vetrarfríinu?
- c** Það á að velja tvo nemendur úr bekknum af handahófi. Hve miklar líkur eru á að báðir nemendurnir sem valdir voru hafi verið á svigskíðum?



5.50 Í skóla nokkrum eru 320 nemendur. 102 nemendur æfa fótbolta, 35 nemendur hafa tekið þátt í skólamótum í fótbolta áður og 30 af þeim 35 æfa fótbolta.

Finndu líkurnar á að velja af handahófi nemanda sem hvorki æfir fótbolta né hefur tekið þátt áður í skólamóti í fótbolta.

5.51 Í hverfi einu búa 20 unglingar. 12 þeirra ganga í hverfisskólann, 16 eru í íþróttafélagi hverfisins og 10 unglingar ganga bæði í hverfisskólann og eru í íþróttafélaginu.

- a Setjið upplýsingarnar inn í Vennmynd.
- b Hve miklar líkur eru á að unglingur, valinn af handahófi, gangi ekki í hverfisskólann en sé í íþróttafélaginu?
- c Þú hittir einhverja tvo unglinga úr hverfinu. Hve miklar líkur eru á að báðir gangi í hverfisskólann og séu í íþróttafélaginu?



5.52 Tveir nemendur vinna þetta verkefni saman. Hvor býr til sitt leikspjald fyrir *Fimm í röð*. Fylla á reitina 25 á leikspjaldinu með tölum sem þeir velja sjálfir. Það má setja sömu töluna á fleiri en einn stað. Þeir varpa tveimur teningum og bæði summu og margfeldi talnanna sem upp koma á að „krossa út“ á leikspjaldinu. Hafi þeir skrifað sömu töluna á tvo eða fleiri staði verða þeir að velja hvaða tölu á að „krossa út“. Keppt er um hvor nemandi fær fyrst fimm í röð - annaðhvort lárétt, lóðrétt eða á ská.

- a Útbúið leikspjöld og spilið leikinn einu sinni.
- b Útbúið ný leikspjöld og spilið leikinn nokkrum sinnum. Gætið þess þá að velja tölurnar af meiri yfirvegun en þið gerðuð ef til vill í fyrsta skipti.

5.53 Farið yfir leikinn í verkefni 5.52.

- a Hvaða tölur reyndist ykkur gagnlegt að velja?
- b Hvaða tölu er líklegast að fá sem margfeldi af því sem kemur upp á tveimur teningum?
- c Hvaða tölu er líklegast að fá sem margfeldi af því sem upp kemur á tveimur tíu-verplum?

Notið tvo tíu-verpla í staðinn fyrir tvo sex hliða teninga.

5.54 Í tíunda bekk A eru 11 strákar og 15 stelpur. Í tíunda bekk B eru 10 strákar og 17 stelpur. Það á að velja einn fulltrúa úr hvorum bekk til að undirbúa skólahátíð.

- a** Hve miklar líkur eru á að báðir fulltrúar verði strákar ef valið er framkvæmt með því að draga?
- b** Hverjar eru samsvarandi líkur á að báðir fulltrúarnir verði stelpur?
- c** Hve miklar líkur eru á að fulltrúarnir tveir verði strákur og stelpa?

5.55 Líkurnar á að vera örvhentur eru 0,1. Hverjar eru líkurnar á að í hópi fimm nemenda séu

- a** þrjú örvhent börn og tvö réttthent?
- b** eitt réttthent barn og fjögur örvhent?

5.56 Í fjölvalsspurningum á prófi eru tvær spurningar. Fyrri spurningin hefur fimm svarmöguleika en hin seinni hefur þrjá svarmöguleika. Ef nemandi giskar á svarið við báðum spurningunum, hve miklar eru þá líkurnar á

- a** réttu svari við báðum spurningum?
- b** réttu svari við fyrri spurningunni og röngu svari við hinn spurningunni?
- c** að minnsta kosti öðru svarinu réttu?

5.57 Þú kastar upp krónupeningi fimm sinnum.

- a** Settu mögulega útkomu fram í talningartré.
- b** Hve miklar líkur eru á að fá krónuhliðina upp nákvæmlega tvisvar sinnum?



5.58 Þú átt að draga kúlur upp úr poka með fimm grænum og sex rauðum kúlum. Þú dregur tvær kúlur án þess að skila þeim aftur.

- a** Finndu líkur á að draga að minnsta kosti eina græna kúlu.
- b** Finndu líkur á að fyrri kúlan verði rauð þegar þú veist að ein græn kúla að minnsta kosti verður dregin út.



5.63 Við höfum þrjú mengi.

Mengi 1: Fimm karlmenn og þrjár konur.

Mengi 2: Þrír bakpokar og fjórar ferðatöskur.

Mengi 3: Tveir strætisvagnar og þrír leigubílar.

Manneskja, valin af handhófi, velur sér farangur af handahófi og einnig farartæki af handahófi.

- a** Hve margar samsetningar af manneskju, farangri og farartæki er hér um að ræða?
- b** Þú átt að velja konu, bakpoka og strætisvagn. Hve margar slíkar samsetningar eru til?
- c** Þú rekst á samsetningu úr mengjunum, valda af handahófi. Hve miklar líkur eru á að það sé kona með bakpoka sem tekur strætisvagn?
- d** Hve miklar líkur eru á að þú hittir karlmann með ferðatösku sem tekur leigubíl?

5.64 Birna og Gunnar vinna á sama vinnustað með fimm daga vinnuviku, mánudag til föstudags. Birna er á skrifstofunni 85% vinnutímans. Óháð því er Gunnar á skrifstofunni 60% vinnutímans.

- a** Hve miklar líkur eru á að hvorugt þeirra sé við á tíma völdum með slembivali?
- b** Þú færð að vita að Birna sé í 100% starfi en Gunnar sé í 80% starfi og sé í fríi á föstudögum. Hve miklar líkur eru á að hvorugt þeirra sé við ef þú reynir að ná í þau á miðvikudegi?

5.65 Líkurnar á að Patrekur hjóli í skólann eru 40%. Líkurnar á að Lúther hjóli í skólann eru 70%.

- a** Hve miklar líkur eru á að hvorugur þeirra hjóli í skólann einhvern daginn?
- b** Hve miklar líkur eru á að Patrekur hjóli en Lúther gangi í skólann einhvern daginn?





5.66 Í bekk nokkrum eru 22 nemendur. 14 þeirra hafa valið spænsku sem þriðja erlenda tungumál, átta nemendur hafa valið þemaverkefni. Þrír nemendur hafa valið bæði spænsku og þemaverkefni.

- a** Teiknaðu Vennmynd sem lýsir þessari flokkun.
- b** Settu upp krosstöflu sem lýsir flokkuninni. Notaðu mengi og fyllimengi þessara tveggja greina sem nemendur hafa valið.
- c** Finndu hve miklar líkur eru á að nemendur hafi valið eitt af þessu þrennu: spænsku, þemavinnu, eða bæði spænsku og þemavinnu.

5.67 Í bekk nokkrum eru 20% nemenda með höfuðverk, 30% nemenda eru með kvef og 10% eru bæði með kvef og höfuðverk. Sýndu þetta í Vennmynd og finndu líkurnar á að nemandi, valinn með slembivali, sé hvorki með höfuðverk né kvef.

5.68 Í bæ nokkrum eru 3520 íbúar. 15% íbúanna eru eldri borgarar og 704 íbúar eru yngri en 18 ára. Finndu líkurnar á að einhver íbúi, valinn af handahófi, sé hvorki yngri en 18 ára né eldri borgari.

5.69 Í skóla nokkrum hafa 30% nemenda valið þýsku, 20% taka valgreinina hreyfing og heilsa og 5% hafa valið bæði þýsku og hreyfingu og heilsu.

- a** Teiknaðu Vennmynd til að sýna þetta.
- b** Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn með slembivali, sé í þýsku, hreyfingu og heilsu, eða hvoru tveggja?

5.70 Lukkuhjóli er skipt í fimm geira: 15° , 60° , 75° , 90° og 120° .

- a** Teiknaðu lukkuhjólíð.
- Pú færð 30 stig fyrir að lenda í 120° geiranum.
- b** Hve mörg stig þurfa að fást fyrir hina geirana til þess að stigafjöldinn standi í réttu hlutfalli við stærð geirans?



Verkefni af ýmsu tagi

5.71 Þú mátt velja álegg ofan á brauð: skinku, brauðost eða lifrarkæfu.

- a** Hver er andstæði atburðurinn við að velja brauðost?
- b** Hver er andstæði atburðurinn við að velja annaðhvort skinku eða brauðost?

5.72 Notaðu venjulegan spilastokk. Veldu eins fá spil úr bunkanum og hægt er svo að

- a** líkurnar á að draga spaða verði $\frac{1}{10}$
- b** líkurnar á að draga gosa verði $\frac{2}{5}$
- c** líkurnar á að draga svart spil verði 80%
- d** líkurnar á að draga laufakóng verði 20%
- e** líkurnar á að draga hjarta verði 75%

5.73 Útbúðu hermun.

- a** Lýstu hvernig hægt er að framkvæma hermun með kubbum í tveimur litum þar sem athugaðar eru líkur á að eignast dreng eða stúlku. Framkvæmdu tíu hermanir og skráðu niðurstöðurnar.
- b** Útbúðu hermun þar sem kanna skal líkur á samsetningu tveggja barna fjölskyldu: tveir drengir, tvær stelpur eða eitt barn af hvoru kyni. Framkvæmdu tuttugu hermanir og skráðu niðurstöðurnar í töflu.

5.74 Þú hittir tvær manneskjur úti á götu.

Hve miklar líkur eru á að báðar eigi afmæli á sunnudegi í ár?

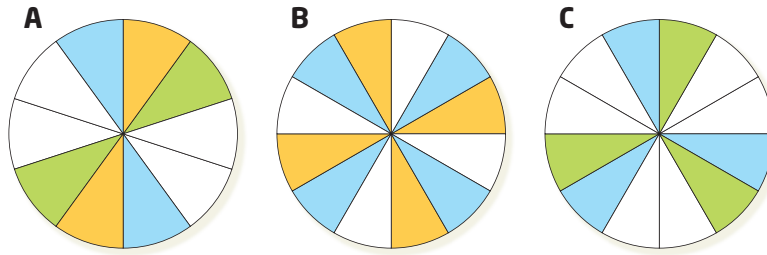
5.75 Tölfræðin sýnir að handboltalið vinnur 70% heimaleikja sinna.

Hve miklar líkur eru á að liðið vinni tvo næstu heimaleiki sína?





5.76 Skoðaðu lukkuhjólin.



- Hve miklar líkur er á að lenda á bláu svæði á hverju lukkuhjóli?
- Hve miklar líkur eru á að lenda á hvítu svæði á hverju lukkuhjóli?
- Jónas spilaði upp á blátt á A og hvítt á B. Hve miklar líkur eru á að Jónas vinni á báðum lukkuhjólunum?
- Malín spilar upp á hvítt og blátt á B og C. Hve miklar líkur eru á að Malín vinni á öllum þremur lukkuhjólunum?

5.77 Dag nokkurn gerði skólastjórinn könnun á því hvernig nemendur í 10. bekk kæmu sér í skólann. Taflan sýnir niðurstöðurnar:

Gengu í skólann	78
Komu á reiðhjóli, rafskutlu eða fjórhjóli	12
Tóku skólabílinn/strætó	96
Var ekið í bíl	29

- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, hafi gengið í skólann?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, hafi ekki tekið skólabílinn/strætó?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, hafi hvorki gengið í skólann né verið ekið í bíl?
- Gerðu sams konar könnun í þínum bekk og finndu líkurnar á að nemandi valinn af handahófi hafi gengið í skólann í dag.

5.78 Í eggjabakka eru 18 egg. Tvö eggjanna eru skemmd. Mummi ætlar að búa til eggjaköku úr fimm eggjum og velur egg úr eggjabakkanum af handahófi.

Hve miklar líkur eru á að hann velji ekkert skemmt egg?





Afmælis dagar í 10A	
janúar	2
febrúar	3
mars	5
apríl	2
maí	4
júní	2
júlí	3
ágúst	3
september	1
október	2
nóvember	0
desember	3

5.79 Líkurnar á að fá tiltekinn sjúkdóm á einu ári eru 0,3%. Jens og Fríða eru valin af handahófi og þekkjast ekki. Hve miklar líkur eru á að Jens fái sjúkdóminn en ekki Fríða?

5.80 Gerðu könnun í bekknum á því hve margir eiga afmæli í hverjum mánuði eða notaðu skiptinguna í töflunni hér til hliðar.

- a** Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn með slembivali, sé fæddur í mars?
- b** Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn með slembivali, sé fæddur í sumarmánuði (júní, júlí eða ágúst)?
- c** Hve miklar líkur eru á að tveir nemendur, valdir með slembivali, séu fæddir í maí?
- d** Hve miklar líkur eru á að þrír nemendur, valdir með slembivali, séu allir fæddir á fyrri helmingi ársins?

5.81 Strætisvagn er með 50 sæti. Á tilteknum tíma sitja 18 fullorðnir og 12 börn í strætisvagninum.

- a** Hve miklar líkur eru á að sæti, valið með slembivali, sé autt?
- b** Hve miklar líkur eru á að farþegi, valinn með slembivali, sé fullorðinn?
- c** Hve miklar líkur eru á að barn sitji í sæti, sem valið er með slembivali?

5.82 Æskulýðsklúbbur með 120 félögum hefur gert neytendarannsókn.

a Teiknaðu Vennmynd fyrir eftirfarandi sviðsmyndir:

Sviðsmynd 1: 56 félagar eru orðnir 15 ára og 64 félagar eru ekki orðnir 15 ára.

Sviðsmynd 2: 74 félagar eru ánægðir með diskókvöldin, 67 félagar eru ánægðir með spilakvöldin og 12 félagar eru hvorki ánægðir með diskókvöldin né spilakvöldin.

- b** Útskýrðu muninn á Vennmyndunum tveimur með eigin orðum.
- c** Hvert er fyllimengi þess að vera „Orðnir 15 ára“?
- d** Hvert er fyllimengi „Ánægðir með diskókvöldin“? Hve margir eru í því mengi?
- e** Af þeim sem eru ánægðir með diskókvöldin eru 32 sem eru orðnir 15 ára. Teiknaðu nýja Vennmynd sem sýnir samhengið milli aldurs og ánægju með diskókvöldin.
- f** Hvert er fyllimengi þess að vera yngri en 15 ára og vera ekki ánægður með diskókvöldin? Hve margir eru í því mengi?

5.83 Spilastokkur er með fjórar sortir spila: spaða, lauf, hjarta og tígul. Spaði og lauf eru svört á litinn og hjarta og tígull eru rauð. Það eru 13 spil í hverri sort. Þú dregur þrjú spil úr spilastokk.

- a Hve miklar líkur eru á að draga þrjú spaða?
- b Hve miklar líkur eru á að draga þrjú spil af sömu sort?
- c Hve miklar líkur eru á að draga þrjú kónga?



5.84 Niðurstöður úr spurningakönnun eru settar upp í krosstöflu og sýna hvort nemendur eiga bróður eða systur:

	Eiga a.m.k. einn bróður	Eiga ekki bróður
Eiga a.m.k. eina systur	8	6
Eiga ekki systur	9	5

- a Sýndu sömu niðurstöður með Vennmynd.
- b Finndu líkur á að þú veljir af handhófi einn í bekknum sem á hvorki bróður né systur.
- c Finndu líkur á að þú veljir af handhófi einn í bekknum sem á að minnsta kosti eina systur.
- d Finndu líkur á að þú veljir af handhófi einn í bekknum sem á bróður, systur eða hvort tveggja.

5.85 a Þú varpar teningi. Hver er andstæði atburðurinn við að fá stærri tölu en 4?

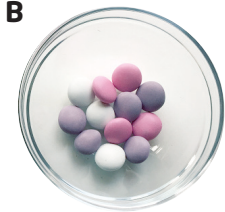
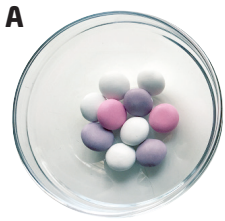
b Þú dregur spil úr spilastokk. Hver er andstæði atburðurinn við að fá svart spil?

c Þú átt val á milli þess að fara að læra, spila tölvuleik eða fara á æfingu. Hver er andstæði atburðurinn við að fara að læra?

5.86 Símon hefur fundið upp á einföldu teningaspili sem hann ætlar að spila við litla bróður sinn. Á milli þeirra er skál með mislitu sælgæti sem þeir geta sótt vinningana í. Litli bróðir á að varpa þremur teningum. Ef hann fær að minnsta kosti tvo eins (á teningunum þremur) má hann taka fimm stykki úr skálinni. Ef allar tölurnar eru mismunandi fær Símon að taka fimm stykki.

Þú átt að meta hvort spilið er réttlátt. Ef ekki, hvernig ætti skiptingin á sælgætinu þá að vera svo að spilið verði réttlátt?

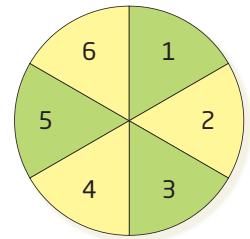




5.87 Á myndinni sérðu tvær skálar með sælgæti í. Þú tekur einn mola í einu án þess að sjá.

- a** Hve miklar líkur eru á að þú fáir tvo bleika mola þegar þú tekur einn úr hvorri skál?
- b** Hve miklar líkur eru á að þú fáir tvo bleika mola ef þú tekur þá báða úr skál A?
- c** Hve miklar líkur eru á að þú fáir tvo bleika mola ef þú tekur þá báða úr skál B?
- d** Hvernig myndir þú tína upp úr skálunum til þess að hafa sem mestar líkur á að fá þrjá bleika mola?

5.88 Hve mörgum sinnum verður þú að snúa lukkuhjólínu til þess að líkurnar á að fá að minnsta kosti einu sinni 6 verði meiri en 30%?



5.89 Þú ert með M, mengi allra heilla talna frá 1 til 20. Hver eru fyllimengi eftirtalinna mengja með tilliti til M?

- a** Frumtalna?
- b** Talna sem eru deilanlegar með 3?
- c** Talna sem eru bæði deilanlegar með 2 og 3?

5.90 Af 25 kennurum eru níu sem aka um á silfurgráum bíl og 14 sem fara til útlanda í sumarfríinu. Sjö kennarar eru í hvorugum hópnum.

- a** Settu upplýsingarnar fram í Vennmynd.
- b** Hve miklar líkur eru á að Björn náttúrufræðikennari aki bæði um á silfurgráum bíl og fari til útlanda í sumarfríinu?
- c** Tveir kennarar eru valdir af handahófi í samstarfsnefnd skólans. Hve miklar líkur eru á að báðir aki um á silfurgráum bíl?
- d** Hve miklar líkur eru á að báðir kennararnir í samstarfsnefndinni aki um á silfurgráum bíl og fari til útlanda í sumarfríinu?

5.91 Tíu hestar eru í hesthúsi. Fimm þeirra eru hryssur, þrjár eru geldingar og tveir eru stóðhestar. Jenna, Petra og Tómas eiga að hirða tvo hesta hvert. Þau draga um hvert þeirra eigi að hirða hvaða hest. Hesthúseigandinn hirðir hina hestana.

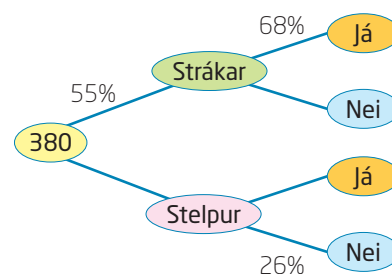
- a** Hve miklar líkur eru á að Jenna eigi að hirða báða stóðhestana?
- b** Hve miklar líkur eru á að báðir stóðhestarnir verði í hirðingu hesthúseigandans?





5.92 Nemendaráð í skóla nokkrum gerir könnun á hve margir hafi með sér nesti daglega. Talningartréð sýnir niðurstöðurnar.

- a Teiknaðu talningartréð og bættu inn prósentutölunum sem vantar.
- b Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, sé stelpa sem er með nesti?



5.93 Hér er yfirlit yfir hvað nemendurnir 30 í 10. bekk A hafa valið sér af tungumálum og öðrum valgreinum:

	Tækni og hönnun	Salur og svið	Samtals
Spænska	8	7	
Pýska	5	6	
Viðbótarenska	1	3	
Samtals			

- a Skrifaðu upp krosstöfluna og fylltu hana út.
Velja á nemanda úr bekknum af handahófi.
- b Hve miklar líkur eru á að þessi nemandi hafi valið
 - 1 tækni og hönnun og spænsku?
 - 2 sal og svið og þýsku?
 - 3 viðbótarensku og sal og svið?
 - 4 spænsku?
 - 5 tækni og hönnun?

5.94 Nemendur hafa skráð sig í skíðaferð. Þeir geta valið um að fara á gönguskíði eða svigskíði. Það eru 460 nemendur í skólanum og eru 215 þeirra stelpur. 143 stelpur völdu að fara á svigskíði hinar vildu fara á gönguskíði. 70 strákar vildu fara á gönguskíði, hinir völdu svigskíði.

- a Settu upp krosstöflu sem sýnir hve margar stelpur og hve margir strákar völdu svigskíði og hve margir gönguskíði.
- b Hve miklar líkur eru á að nemendi, valinn af handahófi, sé stelpa sem vill fara á gönguskíði.
- c Finndu líkur á að nemendur, valdir af handahófi, vilji fara á gönguskíði.
- d Finndu líkur á að stelpa, valin af handahófi, vilji fara á svigskíði.



- 5.95** Viðar vinnur í mötuneytinu og skráir hve margar dósir af jógúrt eru seldar á hverjum degi í þrjár vikur.

	mánudagur	þriðjudagur	miðvikudagur	fimmtudagur	föstudagur
1. vika	8	5	12	4	10
2. vika	11	6	2	8	3
3. vika	5	9	2	7	10

Hve miklar líkur eru á að einhvern daginn, valinn af handahófi, séu seldar

- a** frá einni til og með 5 dósnum af jógúrt?
 - b** frá sex til og með 10 dósnum af jógúrt?
 - c** fleiri en tíu dósir af jógúrt?
- 5.96** Í bekk með 24 nemendum eiga sjö af þeim hund og tíu þeirra kött. Tveir eiga bæði hund og kött.
- a** Lýstu hvernig þú getur útbúið hermun þar sem þú dregur út nemanda í bekknum af handahófi til að finna út hvort hann á hund, kött, bæði hund og kött eða hvorugt.
 - b** Dragðu 50 sinnum og finndu líkur byggðar á tilrauninni á að draga út nemanda sem á hvorki hund né kött.
 - c** Hverjar eru fræðilegar líkur á að draga út nemanda sem á hvorki hund né kött? Berðu fræðilegu líkurnar saman við svarið í b.



- 5.97** Lukkuhjóli er skipt í fjóra geira: 45° , 60° , 120° og 135° .
- a** Teiknaðu lukkuhjólíð.
- 24 stigum á að skipta á milli svæðanna þannig að spilið verði réttlátt.
- b** Hversu mörg stig er hægt að fá á hverju svæði?



5.98 Markús og Sandra ætla að finna líkur á að brauðsneið lendi með áleggið niður ef þau missa sneiðina á gólfið. Þau búa til nokkrar tilraunasneiðar sem þau „missa“ 100 sinnum. Þau skrá sneiðar með áleggið niður með N og sneiðar með áleggið upp með U.

N	N	U	N	U	N	U	N	N	N
N	N	N	N	N	N	U	N	N	U
U	U	N	U	U	N	N	N	N	N
N	U	U	U	N	U	N	N	N	N
N	U	N	N	U	U	N	N	U	U
N	N	N	N	U	N	U	U	U	N
U	N	N	N	N	N	U	N	N	N
U	N	N	N	U	N	N	N	N	U
N	U	N	N	U	U	U	U	U	U
N	N	N	U	N	U	U	U	N	N

- a Hve miklar líkur eru á að sneiðin detti með áleggið niður?
- b Gerðu tillögu um aðferð til að herma eftir 10 000 brauðsneiðum sem detta á gólfið. Lýstu því hvernig hermuni gengur fyrir sig. Notaðu gjarnan töflureikni.

5.99 Þrjár kúlur eru í krukku, ein rauð, ein blá og ein gul. Þú átt að draga tvær kúlur. Hve miklar líkur eru á að draga fyrst rauða og síðan bláa kúlu þegar þú

- a skilar aftur fyrstu kúlunni sem þú dróst?
- b skilar ekki aftur fyrstu kúlunni sem þú dróst?
- c Sýndu aðstæður í a og b á líkindatrjám.

5.100 Þrjú jakkar og fimm mismunandi hattar eru í dimmu fataherbergi. Þú ferð inn í fataherbergið og klæðir þig í jakka og setur upp hatt. Það er bara einn jakki og einn hattur sem eru bleikir.

Hve miklar líkur eru á að þú komir út í einhverju bleiku?

5.101 Björg skráir hjá sér á hverjum degi hvort strætisvagninn kemur fyrir tímann (F), á tíma (T) eða of seint (S). Hún skráir þetta í fjórar vikur. Niðurstöðunum úr könnuninni er safnað í töflu:

	mánudagur	þriðjudagur	miðvikudagur	fimmtudagur	föstudagur
1. vika	F	S	T	T	S
2. vika	S	F	T	T	T
3. vika	T	T	S	T	F
4. vika	S	T	T	F	S

Út frá þessum niðurstöðum ætlar hún að gera hermun um hvort strætisvagninn er fyrir tímann, á tíma eða of seinn í næstu viku.

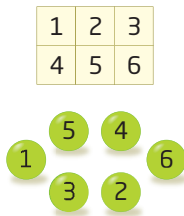
- a Notaðu spil eða tíu-verpil og gerðu áætlun um hvernig hægt er að framkvæma hermunina.
- b Hve miklar líkur eru á að strætisvagninn komi á réttum tíma á mánudag í fimmtu viku?



5.102 Lögreglan fylgist með 200 bílstjórum. Alls náðust 25 bílstjórar sem óku of hratt og 19 sem notuðu ekki bílbelti. Þrír höfðu framið bæði brotin. Lögreglan lítur svo á að gögnin séu einkennandi fyrir staðinn þar sem eftirlitið fór fram.

- Settu gögnin fram í Vennmynd.
- Hve miklar líkur eru á því að næsti bílstjóri aki of hratt?
- Hve miklar líkur eru á að næsti bílstjóri haldi sig innan hraðatakmarkana en noti ekki bílbelti?
- Hve miklar líkur eru á að næsti bílstjóri haldi sig innan hraðatakmarkana og noti bílbelti?
- Hve miklar líkur eru á að hvorugur tveggja næstu bílstjóra noti bílbelti?
- Hve miklar líkur eru á því að annar af tveimur næstu bílstjórum aki of hratt?

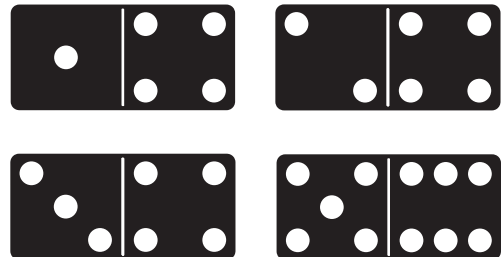
5.103 Marteinn er búinn að búa til mínílottó fyrir afmælisveislu. Hver þátttakandi fær spjald og krossar yfir tvær tölur. Síðan eru dregnar út tvær tölur með hjálp kúlna í poka. Ef þú hefur krossað yfir báðar tölurnar tvær vinnur þú fyrsta rétt til að velja hvað eigi að gera. Hafir þú fengið eina tölu rétta færðu aukaverðlaun.



- Sýndu aðstæðurnar með líkindatré.
 - Hve miklar líkur eru á að þú hafir krossað yfir báðar tölurnar?
 - Hve miklar líkur eru á að þú hafir hvoruga töluna?
 - Hve miklar líkur eru á því að hafa eina tölu rétta?
- Fimm manns taka þátt í mínílottóinu.
- Hve líklegt er að enginn fái tvær réttar tölur?
 - Hve líklegt er að fleiri en einn hafi tvær réttar tölur?

5.104 Tvo dómínókubba má tengja saman ef þeir hafa hvor sinn reit með sama gildi. Þú átt að draga tvo kubba af þeim sem eru á myndinni.

Hve miklar líkur eru á að þú dragir tvo kubba sem má tengja saman?





5.105 Í skóla með 140 nemendum var gerð spurningakönnun í 10. bekk. Niðurstöðurnar eru sýndar í töflunni hér fyrir neðan:

	já	nei
Gengur þú oftast í skólann?	112	28
Ert þú í skipulögðum íþróttum?	95	45

Hugsaðu þér að þessi svör séu einkennandi fyrir allt landið.

- a Útbúðu hermun til að rannsaka þetta.
- b Notaðu töflureikni og hermdu eftir hvernig allir 4200 tíundubekkingar í öllu landinu mundu hafa svarað þessum spurningum.

5.106 Magga og Malla hafa pantað flugmiða innanlands óháð hvor annarri en með sömu flugvél. Flugvélin er með 52 sætum, tveimur og tveimur saman í sætaröðum 1-13 og sætum merktum A-D. Sætisnúmerum er úthlutað af handahófi við innritun.

- a Hve miklar líkur eru á að Malla fái sætisnúmerið 10A?
- b Hve miklar líkur eru á að Magga og Malla verði í sömu sætaröð?
- c Hve miklar líkur eru á að Magga og Malla fá tvö sæti hlið við hlið og sömu megin við ganginn?

Notaðu spilastokk og útbúðu hermun af fyrirkomulaginu.

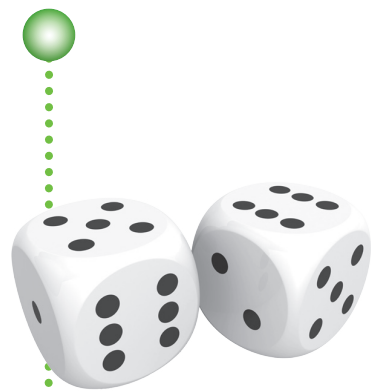
- d Hve margar hermanir þarftu að gera til að líkurnar á að Magga og Malla verði í sömu röð, að minnsta kosti einu sinni, verði meiri en að það gerist ekki?
- e Gerðu hermunina eins oft og þú reiknaðir út í d og athugaðu hvort útkoman verði eins og búist var við.



5.107 Þrír bakarar vinna í bakaríi. Bakari A lagar 50% af brauðunum, bakari B 30% og bakari C sér um afganginn. Könnun sýnir að allir vigta svolítið vitlaust annað slagið. Hjá bakara A er 1% brauðanna of létt, hjá bakara B eru 2% brauðanna of létt og hjá bakara C eru 3% brauðanna of létt.

- a Settu upplýsingarnar fram í talningartré.
- b Hve miklar líkur eru á að brauð, valið af handahófi, sé of létt?

5.108 Þú ert að spila jatsí. Hve miklar líkur eru á að þú fái jatsí (fimm eins) í einu kasti?



5.109 Finndu annan nemanda sem þú getur spilað við. Þið eigið að leika teningaleik og þurfið að hafa tvo teninga.

Fyrsti leikmaður varpar teningnum. Ef hann sýnir 5 eða 6 hefur hann unnið. Ef ekki á hinn leikmaðurinn leik. Ef teningurinn sýnir 1, 2, 3 eða 4 hefur hann eða hún unnið. Annars er komið aftur að fyrsta leikmanni. Fyrsti leikmaður vinnur sem sagt ef hann eða hún fær 5 eða 6 og annar spilamaður vinnur ef hann eða hún fær 1, 2, 3 eða 4. Leikið leikinn tuttugu sinnum og skráið í hvert skipti hvort fyrsti eða annar leikmaður vinnur.

- Reiknaðu líkur byggðar á tilrauninni á að fyrsti leikmaður vinni út frá leikjunum tuttugu sem þið hafið leikið.
- Safnið gögnum frá öllum bekknum. Finnið líkur byggðar á tilrauninni á að fyrsti leikmaður vinni út frá öllum leikjunum sem leiknir hafa verið í bekknum.
- Voru svörin ólík í a og b? Ræðið það.
- Settu upp talningartré sem sýnir gang leiksins. Útskýrðu hvers vegna það er erfitt að reikna út fræðilegar líkur á að fyrsti leikmaður vinni.

5.110 Í bókasafni 10. B bekkjarins eru bækur í mismunandi bókmenntagreinum, sjá yfirlitið í töflunni. Við reiknum með að útlánatíðni sé sú sama fyrir allar bækurnar.

Dag nokkurn voru fimm bækur í útláni.

Bókmenntagrein	Fjöldi titla
Ævintýrabækur	5
Glæpasögur	7
Sögulegar skáldsögur	3
Ævisögur	4
Ástarsögur	7
Spennusögur	6

- Hve miklar líkur eru á að engin ævintýrabók hafi verið í útláni?
- Hve miklar líkur eru á að allar ævisögurnar hafi verið í útláni?
- Oddný vill fá ástarsögu að láni. Hve miklar líkur eru á að hún geti valið um fleiri en tvær?





- 5.111** Þú ert með poka með fimm rauða, sjö gula og þrjá græna mola. Þú tekur upp og borðar mola af handahófi. Hve miklar líkur eru á að borða
- a** tvo gula mola í röð?
 - b** þrjá græna mola í röð?
 - c** minnst einn rauðan mola af fjórum molum alls?
- 5.112** María kaupir fjóra skafmiða. Líkurnar á að vinna á skafmiða eru 8%. Hve miklar líkur eru á að hún vinni að minnsta kosti á einn skafmiða?
- 5.113** Götueldhús selur pítsu. Þú getur valið á milli tveggja stærða: stór (60%) og lítil (40%), og milli þriggja áleggsgerða: italiano (50%), americano (30%) og grænmetis (20%). Prósentutölur sýna vinsældirnar.
- a** Notaðu töflureikni og settu upp krosstöflu sem sýnir stöðuna við næstu sölu.
 - b** Hve miklar líkur eru á að tvær næstu pítsur sem verða seldar séu af gerðinni lítil italiano?
 - c** Hve miklar líkur eru á því að tveir viðskiptavinir í röð kaupi sams konar pítsu?
- 5.114** Gerðu réttlátt lukkuhjól með þremur svæðum og tölunum 1, 2 og 3.
- a** Snúðu vísinum þrisvar sinnum. Skráðu hjá þér hvort síðasta talan er stærri en báðar hinar fyrri. Endurtaktu þetta 25 sinnum.
 - b** Finndu líkur byggðar á þessari tilraun á að síðasta talan sé stærri en báðar hinar fyrri þegar þú snýrð vísinum á hjólinu þrisvar.
 - c** Finndu fræðilegu líkurnar á því að síðasta talan sé stærri en báðar hinar tvær fyrri þegar þú snýrð vísi lukkuhjólsins þrisvar.
 - d** Berðu saman svörin í b og c og ræddu um mögulegan mismun.
- 5.115** Í skúffu eru 12 rafhlöður. Fjórar þeirra eru afhlaðnar. Moníka setur þrjár af rafhlöðunum í vasaljós.
- Hve miklar líkur eru á að allar rafhlöðurnar virki?





6

Æfingasíður

Verkefni án notkunar hjálpartækja

Notaðu eingöngu hringfara, reglustiku og ritföng í verkefnum á blaðsíðum 164–177. Settu dæmin upp og sýndu útreikninga.

6.1 Reiknaðu.

a $398 + 567$

c $134 \cdot 0,9$

e $1081 : 23$

b $1323 - 947$

d $276 \cdot 648$

f $5,4 : 0,12$

6.2 Breyttu einingum.

a $1230 \text{ m} = \text{ ___ km}$

d $340\,000 \text{ m}^2 = \text{ ___ ha}$ (hektarar)

b $1,2 \text{ l} = \text{ ___ cm}^3$

e $120 \text{ hg} = \text{ ___ mg}$

c $2 \text{ klst. } 35 \text{ mín.} = \text{ ___ mín.}$

f $2,3 \text{ m}^2 = \text{ ___ dm}^2$

6.3 Reiknaðu og stytstu eins og hægt er.

a $15 \cdot \frac{7}{12}$

c $10 \cdot \frac{4}{5}$

e $\frac{5}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

b $\frac{4}{5} : 10$

d $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

f $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{10}$

6.4 Reiknaðu.

a $1 - 3(5 - 7)^2 + 5$

d $(7 - 9)^3 - 2 \cdot (-1)^2$

b $2 - \sqrt{16} + 3^0$

e $6 - (3 - 5)^3 - \sqrt{9}$

c $-3 \cdot 2(3 - 4)^5 - \frac{3^3}{9}$

f $(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})$

6.5 Leystu jöfnurnar og prófaðu hvort svörin séu rétt.

a $x - 7 = 3x - 18$

d $\frac{7x}{6} - 1 = \frac{x-1}{2} - \frac{2-x}{9}$

b $2x + 5 = -5x + 19$

e $\frac{x+8}{8} - \frac{x+3}{6} = \frac{-x-1}{4} + 2$

c $5x - 1 = 3(7 + x)$

f $x^2 - 4 = 0$

6.6 Leystu ójöfnurnar.

a $3x - 8 > 14 + x$

c $2x - 7 < 5x + 11$

b $3 - 6x \leq 2x + 19$

d $22 - x \geq 5x + 4$

6.7 Einfaldaðu eins og hægt er.

a $3(4a - b) - (2b + a)$

d $\frac{2a^6b^2}{6a^5b^4}$

b $(1,2 \cdot 10^{11}) : (3,0 \cdot 10^7)$

e $\frac{a^2 - 16}{2a + 8}$

c $(x - 4)(x + 4) - (2x + 1)^2$

f $\frac{4x^2y - xy^2}{2xy}$

6.8 Í þríhyrningi ABC er $\angle A = 90^\circ$, $BC = 8$ cm og $AC = 6$ cm. Teiknaðu megindrætti þríhyrningsins og skráðu málin á teikninguna. Útskýrðu hvers vegna flatarmál þríhyrningsins er meira en 15 cm².

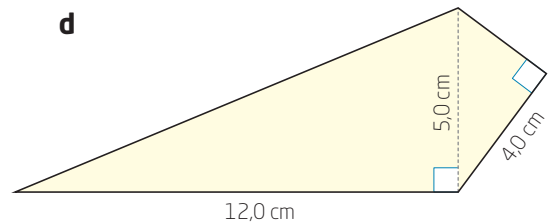
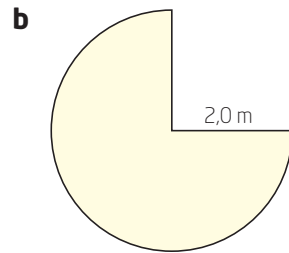
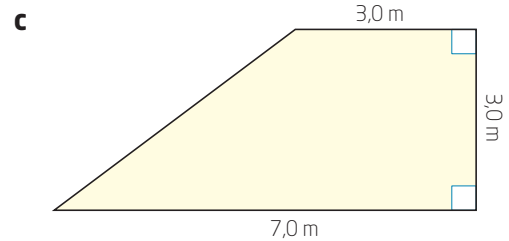
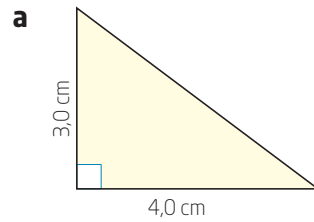
6.9 Formúlan fyrir yfirborð sívalnings er $Y = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ þar sem Y er yfirborðið, r er geislinn og h er hæðin.

Skrifaðu formúlu fyrir h , táknað með Y og r .

6.10 Bygging er 10 m há. Sama bygging er 25 mm há á mynd. Hver er mælikvarði myndarinnar?

- A** 400 : 1 **B** 40 : 1 **C** 1 : 400 **D** 1 : 40

6.11 Reiknaðu ummál og flatarmál myndanna.



6.12 Sex nemendur skrá hve margar klst. þeir nota við heimanám í eina viku. Niðurstaðan er:

- 8 klst. 10 klst. 6 klst. 3 klst. 8 klst. 1 klst.

Teiknaðu upp töfluna. Reiknaðu út neðantalin gildi og merktu inn í töfluna þína:

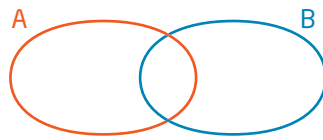
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meðaltalið er									
Tíðasta gildi er									
Miðgildi er									

6.13 Fjórir nemendur hlaupa í boðhlaupi. Öll hlaupin eru jafn löng. Fyrstu þrjú hlaupa hver um sig á 2:20 mín., 1:52 mín. og 2:06 mín.

Hve langan tíma má síðasti nemandinn nota til þess að meðaltíminn á hlaupinu verði nákvæmlega 2:00 mín.?

- 6.14** Notaðu tölurnar í reitnum. Raðaðu tölunum þannig að mengi A innihaldi oddatölur og mengi B innihaldi ferningstölur.

7	16	42
13		36
25	18	
	49	47



- 6.15**
- Hve miklar líkur eru á að fá upp gildi hærra en 4 þegar þú kastar venjulegum teningi?
 - Hve miklar líkur eru á því að fá upp gildi hærri en 4 á báða teningana þegar þú kastar tveimur teningum?
 - Hve miklar líkur eru á að nákvæmlega annar teningurinn fái gildi hærra en 4 þegar þú kastar tveimur teningum?
 - Útskýrðu stöðuna í c með hjálp líkindatrés.



- 6.16** Sjónvarpsdagskrárliður hefst kl. 13.45 og stendur í 2 klst. 25 mín. Hvenær lýkur dagskrárliðnum?

- 6.17** Réttstrendingur hefur rúmmálið 105 dm^3 . Hver gætu verið málín á lengd, breidd og hæð hans?

- 6.18** Finndu gildi eftirfarandi stæða þegar $a = 3$, $b = -5$ og $c = -2$.

a $2a + b - c$ **b** $\sqrt{b^2 - 4ac}$

- 6.19** Meðalhraði bíls er 60 km/klst.

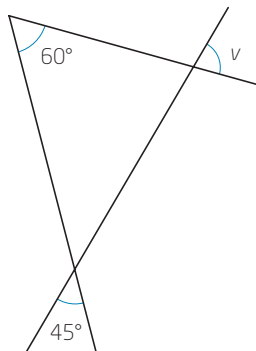
- Hve langt kemst bíllinn á 2,5 klst?
- Hve langan tíma þarf bíllinn til að komast 100 km?

- 6.20** Tölurnar sýna skóstærð allra í fimm manna fjölskyldu.

35 41 45 39 45

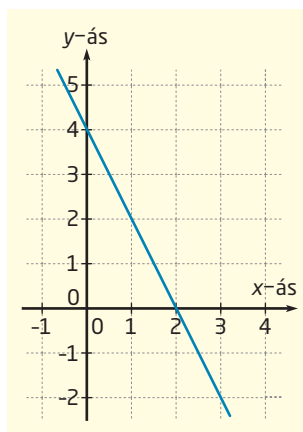
Finndu meðaltal, miðgildi, tíðasta gildi og spönn skóstærða fjölskyldunnar.

6.21 Hve stórt er hornið v ?



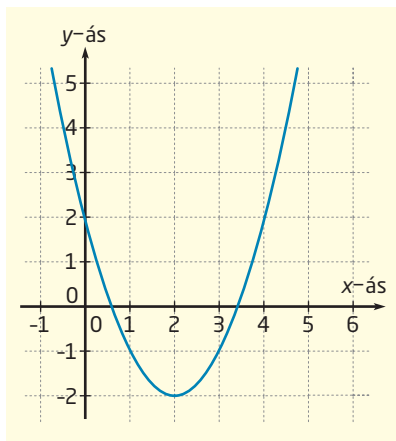
6.22 Hvaða fallstæða á við grafið í hnitakerfinu?

a



- A $y = 2x + 4$
- B $y = -2x - 4$
- C $y = 2x - 4$
- D $y = -2x + 4$

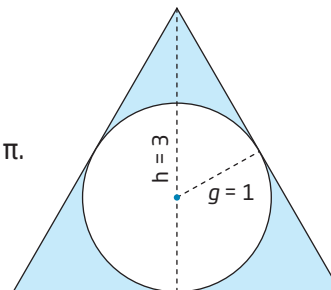
b



- A $f(x) = x^2 + 4x + 2$
- B $f(x) = x^2 - 4x + 2$
- C $f(x) = x^2 - 2x + 2$
- D $f(x) = x^2 + 2x - 2$

6.23 Hringur með geisla 1 er innritaður í jafnhliða þríhyrning með hæðina 3.

Sýndu að flatarmál bláa svæðisins er $F = 3\sqrt{3} - \pi$.



- 6.24** Þú átt að draga tvö spil af þessari spilahendi án þess að sjá og án þess að skila fyrra spilin.
- a** Hve miklar líkur eru á að þú dragir tvær tíur?
 - b** Hve miklar líkur eru á að þú dragir tvö spil með sama gildi?



- 6.25** Reiðhjól kostaði 58 000 kr. Verðið er lækkað um 30%.
Hvert er nýja verðið á hjólinu?

- 6.26** Elsa kaupir veski á 9600 kr. Hún hefur þá fengið 20% afslátt.
Hvað kostaði veskið áður en verðið var lækkað?

- 6.27** Jósef ætlar að blanda saft í hlutfallinu 1 : 5.
Hve mikið af saft og hve mikið vatn þarf hann til að fá 3 l af saftblöndu?

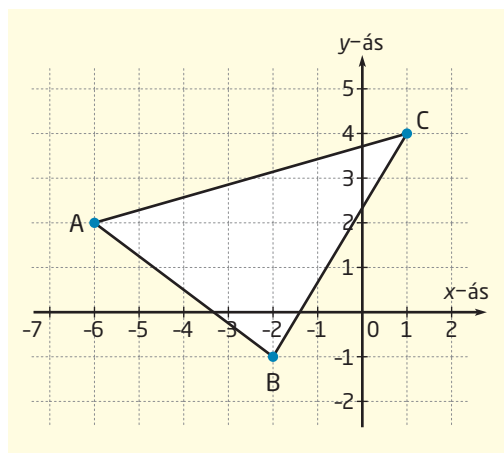


- 6.28** Æskulýðsfélag telur 120 félagar. 60% félaganna eru yngri en 16 ára. 25% þeirra sem eru yngri en 16 ára urðu félagar nú í ár. Átta félagar sem eru orðnir 16 ára urðu líka félagar nú í ár.
- a** Raðaðu þessum gögnum í Vennmynd eða krosstöflu.
 - b** Hve miklar líkur eru á að félagi, valinn með slembivali, sé yngri en 16 ára en hafi ekki orðið félagi nú í ár?
 - c** Félagi sem er orðinn 16 ára er dreginn út með slembivali.
Hve miklar líkur eru á að viðkomandi hafi ekki orðið félagi nú í ár?

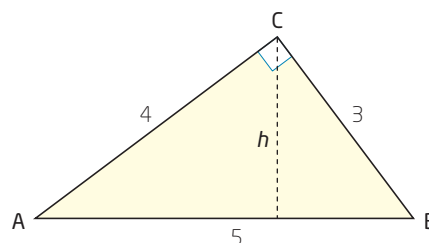
- 6.29** Sex sætum er raðað umhverfis kringlótt borð. Þriggja manna hópur ætlar að setjast við borðið. Á hve marga vegu er hægt að raða hópnum?

- 6.30** Á matseðli veitingastaðar eru fjórir forréttir, fimm aðalréttir og þrjár eftirréttir. Þú setur saman matseðil með forrétti, aðalrétti og eftirrétti.
- a** Hve margar samsetningar eru mögulegar?
Júlía og María velja þriggja rétta máltíð óháð hvor annarri.
 - b** Hve miklar líkur eru á að þær velji að minnsta kosti einn rétt eins?

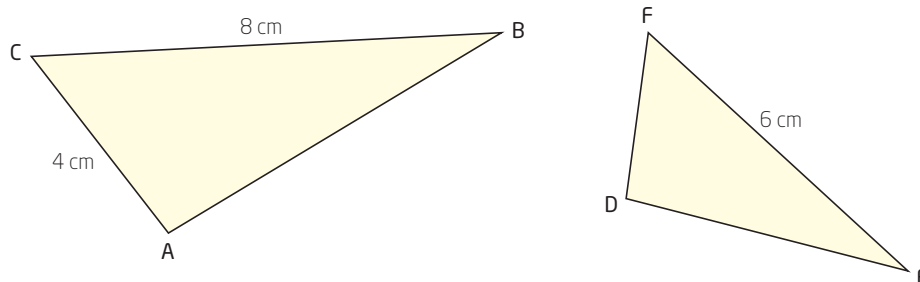
- 6.31** a Lestu hnit punktanna þriggja, A , B og C .
 b Teiknaðu upp myndina og notaðu hnitakerfið til að spegla $\triangle ABC$ um y -ásinn.



- 6.32** a Finndu flatarmál $\triangle ABC$.
 b Finndu hæðina h frá C á AB .



- 6.33** Reiknaðu lengd striksins DF .
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



- 6.34** Teiknaðu hjálparmynd, dragðu svo upp mynd með hringfara og reglustiku og skrifaðu teiknilýsingu.
 a Í $\triangle ABD$ er $AB = 8$ cm, $\angle A = 60^\circ$ og $\angle B = 45^\circ$. Teiknaðu þríhyrninginn.
 b $\triangle ABD$ er hluti ferhyrningsins $ABCD$. C liggur jafn langt frá B og frá D og $\angle BDC = 75^\circ$. Ljúktu við að teikna ferhyrninginn $ABCD$.

- 6.35** Teiknaðu hjálparmynd, dragðu svo upp mynd með hringfara og reglustiku og skrifaðu teiknilýsingu.
 a Í $\triangle ABC$ er $AC = 10$ cm, $\angle B = 60^\circ$ og $BC = 7$ cm. Dragðu upp þríhyrninginn.
 b $\triangle ABC$ er hluti ferhyrningsins $ABCD$. $\angle D = 90^\circ$ og $BD = 11$ cm. Ljúktu við að teikna ferhyrninginn $ABCD$.

- 6.36** Þrjú pinnaísar og tvær fernur af safa kosta 780 kr. Einn pinnaís og þrjár fernur af safa kosta 540 kr.

Hvað kostar einn pinnaís og hvað kostar ein fernur af safa?



- 6.37** Jóhannes kaupir 4 kg af eplum, 2 kg af appelsínunum, 1,5 kg af vínberjum, 0,6 kg af jarðarberjum og 1,2 kg af perum.

Áætlaðu hvað allir ávextirnir munu kosta.

Verð á kg af ávöxtum

epli	189 kr.
appelsínur	265 kr.
perur	329 kr.
vínber	129 kr.
jarðarber	589 kr.



- 6.38** Hreingerningarpökvi er seldur í tveimur mismunandi stærðum af flöskum. 2 l kosta 1400 kr. og 500 ml kosta 400 kr.

Stendur verðið í réttu hlutfalli við flöskustærðina? Rökstyddu svarið.

- 6.39** Sívalningur A er 12 dm^3 að rúmmáli. Þvermál sívalnings B er tvöfalt þvermál sívalnings A og hæð B er helmingur af hæð A .

Hvert er rúmmál sívalnings B ?

- A** 6 dm^3
- B** 12 dm^3
- C** 24 dm^3
- D** 48 dm^3

6.40 Hve margir hvarfpunktar eru á myndinni?

A enginn

B einn

C tveir

D þrír



6.41 Ferð í leigubíl kostar 180 kr. á kílómetra. Að auki er 600 kr. startgjald.

a Settu upp stæðu sem lýsir heildarkostnaðinum, y , sem falli af eignum kílómetrum, x .

b Hve mikið kostar 5 km löng ferð?

c Farþegi borgar 2040 kr. Hve löng var ökuferðin?

6.42 a Þú færð þessar upplýsingar um fyrsta stigs fall f :

1 Núllstöð fallsins er $(5, 0)$.

2 Graf fallsins sker y -ásinn í $(0, 10)$.

Teiknaðu meginrætti grafsins og finndu fallstæðu $f(x)$.

b Þú færð þessar upplýsingar um annars stigs fall g :

1 Núllstöðvar fallsins eru $(-1, 0)$ og $(3, 0)$.

2 Toppunktur fallsins er í $(1, 4)$.

Teiknaðu meginrætti grafsins og finndu fallstæðu $g(x)$.

6.43 Þrístrendingur úr gleri er með grunnflöt sem er í laginu eins og jafnhliða þríhyrningur þar sem lengd hliðarbrúnar er 4,0 cm. Lengd glerþrístrendingsins er 10,0 cm.

- a Sýndu að flatarmál grunnflatarins er $4\sqrt{3}$ cm².
- b Reiknaðu nálgunargildi rúmmálsins þegar $\sqrt{3} \approx 1,7$.
- c Reiknaðu nálgunargildi fyrir yfirborð þrístrendingsins.

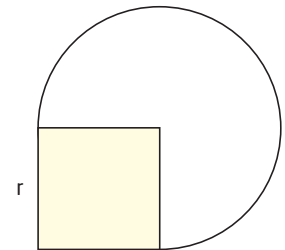
Hér gæti verið gott að teikna skýringarmynd.

6.44 Þvermál borðtenniskúlu er 40 mm. Verksmiðja ætlar að framleiða sívalningslaga plasthólka til að pakka borðtenniskúlunum í. Hver hólkur á að vera eins lítill og mögulegt er en rúma sex borðtenniskúlur.

- a Hvert verður rúmmál plasthólksins?
Plasthólkunum er pakkað í öskjur og hver askja á að rúma 48 hólka.
- b Hve margar borðtenniskúlur eru í hverri öskju?
- c Teiknaðu mynd og gerðu tillögur um lengd, breidd og hæð öskjunnar. Gefðu málin upp í sentimetrum.

6.45 Kassi er í laginu eins og myndin sýnir, séður ofan frá. Hæð kassans er hálfur geisli hringsins r .

- a Settu fram formúlu fyrir rúmmál kassans.
- b Settu fram formúlu fyrir yfirborð kassans.
- c Finndu rúmmál og yfirborð kassans þegar $r = 10$ cm.



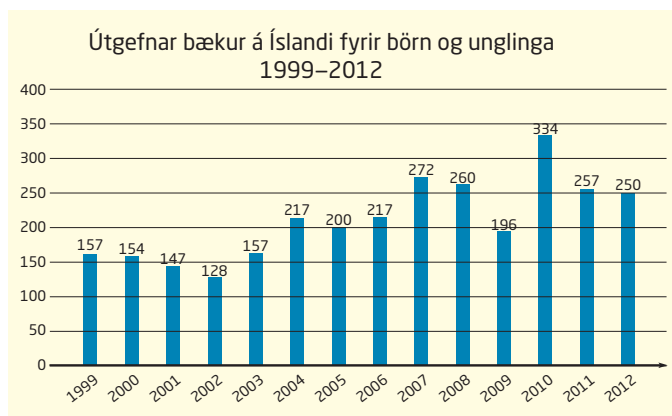
6.46 Skráðu tölurnar á staðalformi.

- a 340 000
- b 12 900 000 000 000
- c 0,000 000 000 000 34

6.47 3,5 kg af eplum kosta 840 kr. Reiknaðu út verðið á kílógramminu.



- 6.48** Súluritið sýnir hve margar bækur voru gefnar út fyrir börn og unglunga á Íslandi á árunum 1999–2012.



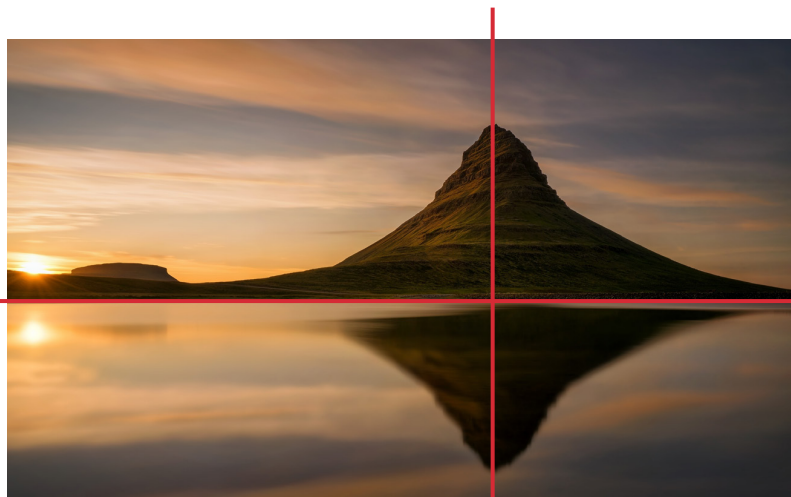
Heimild: hagstofa.is

- Hve mörgum fleiri bækur voru gefnar út árið 2012 en tíu árum áður?
- Milli hvaða tveggja ára varð hlutfallslega mesta aukning í útgáfu barna- og unglungabóka, mælt í prósentum?
- Hve margar barna- og unglungabækur voru gefnar út alls á tímabilinu 1999–2012?

- 6.49** Eðlismassi stáls er $7,8 \text{ g/cm}^3$. Stálkúla vegur 19,5 g.

Hvert er rúmmál kúlunnar?

- 6.50** Línurnar sýna hvar ljósmyndarinn hefur sett þyngdarpunktinn í myndina. Mældu og gerðu nauðsynlega útreikninga. Taktu afstöðu til hvort þyngdarpunkturinn er staðsettur í gullinsniði lárétt og/eða lóðrétt.



- 6.51** a Vara A kostar 250 kr. án virðisaukaskatts. Hvað mun varan kosta þegar 24% vsk. hefur verið bætt við?
 b Vara B kostar 1200 kr. þegar 24% vsk. hefur verið lagður á hana. Hvert er verð vörunnar án virðisaukaskatts?

- 6.52** Aldur manns er fimmfaldur aldur hundsins hans. Fyrir fjórum árum var aldur mannsins nífaldir aldur sama hunds.
 Hve gamall er hundurinn og hve gamall er maðurinn?

- 6.53** Skartgripur vegur 30 g og er merktur 830S.
 Hve mörg grömm af hreinu silfri eru í skartgripnum?

- 6.54** Fjarlægðin milli tveggja bæja er 75 km. Samsvarandi fjarlægð á korti er 1,5 cm.
 Hver er mælikvarði kortsins?

- 6.55** Tíu-verpill hefur tíu fleti sem merktir eru með tölustöfunum 0 til 9.
 a Lýstu útkomurúminu fyrir kast með tíu-verpli.

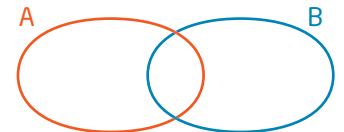
Atburður A er að fá tölu stærri en 5.

Atburður B er að fá oddatölu.

- b Teiknaðu upp Vennmyndina og flokkaðu útkomurnar í hana.

- c Finndu líkur á að fá tölu sem á bæði við A og B .

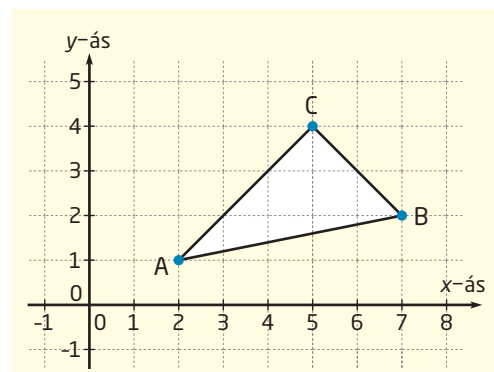
- d Finndu líkur á að fá tölu sem á annaðhvort við A eða B en ekki bæði.



- 6.56** a Ferningur hefur flatarmálið 16 cm^2 .
 Hve löng er hlið hans?

- b Nýr ferningur er stærri en hinn fyrri. Kallaðu viðbót við hliðarlengd hans x og finndu stæðu fyrir flatarmál nýja ferningsins.

- 6.57** Teiknaðu upp hnitakerfið og snúðu $\triangle ABC$ 90° um upphafspunkt.



6.58 Leystu jöfnuhneppin með samlagningaraðferðinni eða með innsetningaraðferðinni.

a I $3x + 2y = 6$

b I $x + 1 = 5y$

II $4x - y = 19$

II $6y + x + 3 = 0$

6.59 Hvaða samhengi hér að neðan lýsa hlutfalli?

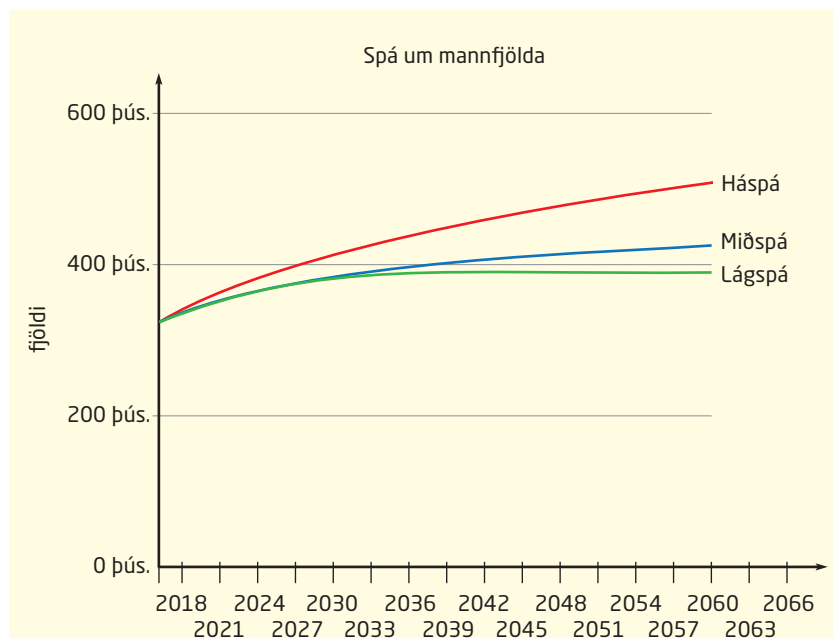
A samhengið milli hliðarlengdar og flatarmáls í ferningi.

B samhengið milli geisla og ummáls hrings.

C samhengið milli meðalhraða og tíma þegar vegalengdin er föst stærð.

D samhengið milli fæðingarlengdar barns og hæðar þegar það verður fullorðið.

6.60 Hagstofan setur fram þrjú mismunandi líkön af fólksfjöldaþróun, lágspá, miðspá og háspá:



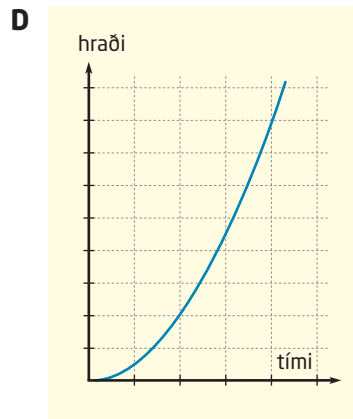
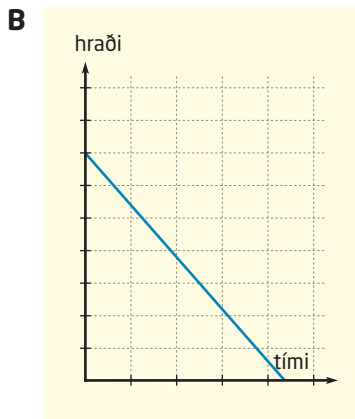
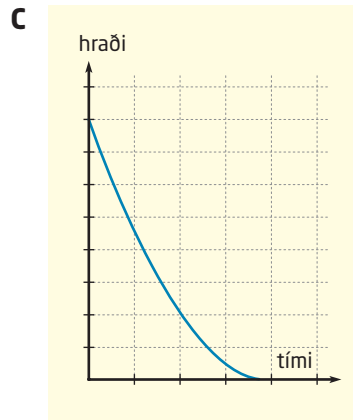
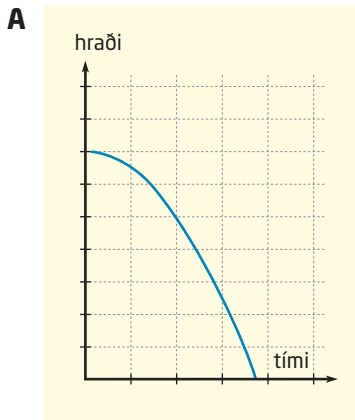
Heimild: hagstofa.is

a Um það bil hver var fólksfjöldinn á Íslandi árið 2017?

b Gert er ráð fyrir að miðspá Hagstofunnar sé raunhæfust. Um það bil hvenær má búast við að mannfjöldi á Íslandi verði 400 þúsund samkvæmt miðspánni?

c Um það bil hve mikill munur er á háspánni og lágspánni fyrir árið 2060?

6.61 Hemlalaus kassabíll stendur efst í brekku. Allt í einu fer hann að rúlla niður. Hvaða graf lýsir best hraða bílsins sem falli af tíma?

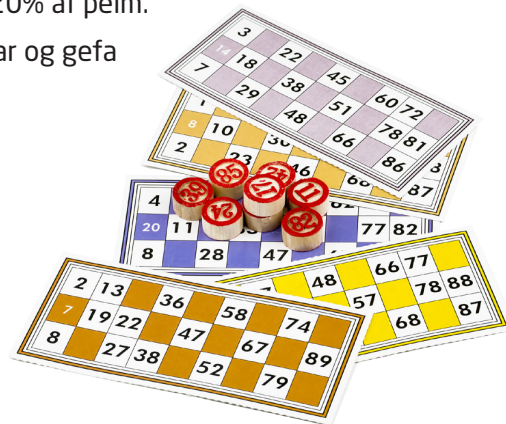


6.62 María bakar 40 smákökur. Hún borðar fyrst 20% af þeim. Svo ætlar hún að frysta $\frac{3}{4}$ af því sem eftir var og gefa ömmu afganginn.

Hve margar kökur fær amma?

6.63 Hapdrætti auglýsir að það sé vinningur á tíunda hvern hapdrættismiða.

Hve marga miða þarft þú að kaupa til þess að líkurnar á að vinna á að minnsta kosti einn þeirra verði meiri en 25%?



Verkefni leyst með hjálpartækjum

Í verkefnum á blaðsíðum 78-95 getur þú notað vasareikni, töflureikni eða teikniforrit á tölvu, reglur, glósur og kennslubók. Ef annað er ekki tekið fram getur þú valið hvaða aðferð þú notar.

Þema 1: Sumarleyfisferð

6.64 Fjölskylda Jóhanns og Birnu ætlar að ferðast frá Akureyri til Barcelona. Auk Jóhanns og Birnu eru börnin Andrés 15 ára, Elín 11 ára og Tómas 9 ára. Þau fara akandi frá Akureyri til Reykjavíkur. Flugmiðinn frá Keflavík til Barcelona kostar 56 000 kr. fyrir fullorðna en fyrir börn, 2-11 ára er 25% afsláttur af uppgefnu verði fyrir fullorðna.

- Hve mikið kosta flugmiðarnir fyrir alla fjölskylduna?
- Til að komast frá Reykjavík til Keflavíkurflugvallar tekur fjölskyldan flugrútuna. Hve mikið þurfa þau að borga ef þau kaupa miða sem gildir fram og til baka?

Gjaldskrá flugrútunnar:

Verð	Aðra leið	Fram og til baka
Fullorðnir	2600 kr.	4000 kr.
Ungmenni**	1250 kr.	2000 kr.
Börn***	Frítt	Frítt

** Gildir fyrir unglunga 12-15 ára.

*** Gildi fyrir börn í fylgd með forráðamanni.



6.65 Fjölskyldan velti fyrir sér hve langt þau muni ferðast. Þau fundu kort yfir Evrópu. Tímamunur á Spáni og Íslandi er 2 klst. á sumrin frá mars til október.



Mælikvarði 1 : 29 400 000

- a** Um það bil hve langt er frá Akureyri til Barcelona í loftlínu?
- b** Um það bil hve langan tíma tók flugferðin hvora leið?
- c** Notaðu kortið, mælikvarðann og flugtímana. Hver er meðalhraði flugvélarinnar á leiðinni frá Keflavík til Barcelona?

Flugtími Brottför-lending	Leið
10:30-16:50	Keflavík - Barcelona
17:40-20:00	Barcelona - Keflavík

6.66 Andrés pakkaði niður einum buxum og tveimur bolum. Hann ætlar að versla í Barcelona.

Hve margar buxur og boli þarf hann að kaupa til að hafa 15 mismunandi samsetningar af buxum og bolum með sér heim? Finndu tvo möguleika.

6.67 Andrés finnur föt á tilboði. Tilboðið hljóðar upp á að hann geti keypt þrjá boli fyrir verð tveggja.

a Hve mörg prósent fær hann í afslátt ef hann tekur þessu tilboði?

Andrés kaupir þess í stað peysu á 39 evrur. Hann veit að samskonar peysa kostar 9700 kr. heima á Íslandi.

b Hve mikið sparar hann á að kaupa peysuna í Barcelona þegar gengið á evrunni er 120 kr.?

6.68 Fjölskyldan ætlar að leigja sér bíl í Barcelona og ber saman verðið hjá tveimur mismunandi fyrirtækjum. Bílaleigan Auto býður verð sem er 48 € á sólarhring og frjálsan akstur. Bílaleigan Voiture býður 37 € á sólarhring + 0,20 € á ekinn kílómetra.

a Hve mikið kostar að leigja bíl í þrjá daga hjá þessum tveimur bílaleigum ef fjölskyldan ekur 250 km?

b Sýndu svarið í a sem graf í teikniforriti.

c Þau leigja bíl í fjóra daga. Hve marga kílómetra þurfa þau að aka til þess að það borgi sig að velja bílaleiguna Auto?

6.69 Emilía borgar dag nokkurn 10,90 € fyrir þrjár flöskur af gosi og tvær pylsur í brauði. Tómas borgar 15,10 € fyrir fjórar flöskur af gosi og þrjár pylsur í brauði.

Hve mikið kostar flaska af gosi og hve mikið kostar ein pylsa í brauði?



Evra er gjaldmiðill í mörgum aðildaríkjum Evrópusambandsins. Ein evra skiptist í 100 sent. € er tákn fyrir evru.





Þema 2: Íþróttadagur

Íþróttadagur er skipulagður í unglingadeild grunnskóla milli 12 bekkjardeilda þar sem fjórir bekkir eru í hverjum árgangi. Deginum er skipt í tvennt. Fyrir hádegi eru einstaklingsíþróttir en eftir hádegi eru hópíþróttir. Yfirlit yfir íþróttagreinarnar er sýnt í töflunni til hægri.

6.70 Fyrir íþróttadaginn þurfa nemendur að velja þrjár einstaklingsgreinar og tvær hópíþróttir.

Hve margar samsetningar íþróttagreina eru mögulegar?

6.71 Einungis 10 nemendur skrá sig í 1000 m sund. Taflan sýnir árangurinn.

- a Finndu spönn, meðaltíma og miðtíma.
- b Hvort finnst þér miðtíminn eða meðaltíminn betri mælikvarði á árangurinn? Færðu rök fyrir svarinu.

6.72 Óskar á reiðhjól þar sem þvermál hjólanna er 26". Ein tomma samsvarar 2,54 cm.

- a Hve marga hringi hefur hjólið snúist þegar Óskar hefur hjólað 15 km?

Tími Óskars í hjólréiðakeppninni er 32:08 mínútur.

- b Hver er meðalhraði Óskars?

Íþróttagreinar	
Einstaklingsgreinar	Hópíþróttir
60 m spretthlaup	Fótboltamót
3000 m hlaup	Blakmót
15 km hjólréiðar	Sveifludans
1000 m sund	Borðtennismót
Boltakast, lítill bolti	
Langstökk með atrennu	
Hástökk	

Þátttakandi nr.	Tími
1	27:12
2	25:37
3	20:15
4	21:56
5	19:43
6	26:29
7	28:19
8	24:32
9	39:24
10	20:53

6.73 Mínerva á að skipuleggja fótboltamótið. Fyrst veit hún ekki hve mörg lið munu skrá sig. Hins vegar veit hún að öll lið eiga að spila einn leik við öll hin liðin.

Mínerva kallar fjölda liða n . Hún veit að $n = 2$ þýðir einn leikur. Ef $n = 3$ verða leikirnir þrír.

- a** Haltu áfram með talnarunu Mínervu fyrir fjögur, fimm og sex lið.
- b** Settu fram rakningarformúlu sem lýsir hve margir leikir verða leknir milli n liða þegar þú veist fjölda leikja milli $n - 1$ liða.
- c** Settu fram beina formúlu sem segir til um hve margir leikir verða milli n liða.
- d** Hve margir leikir verða í keppninni ef átta lið hafa skráð sig til leiks?

6.74 21 drengur í 10. bekk tók þátt í langstökki með atrennu. Árangur drengjanna, mældur í sentimetrum, var

440, 315, 395, 335, 357, 322, 410, 398, 452, 462,
431, 389, 396, 307, 415, 387, 433, 389, 342, 430, 389

- a** Skiptu gögnunum í flokka með breiddinni 25 cm. Notaðu töflureikni og sýndu árangurinn á stuðlariti þar sem stuðlarnir snertast.

Taflan sýnir kröfur til frjálsíþróttarárangurs drengja í unglingadeild skólans.

Íþróttagrein	Gull	Silfur	Brons
Langstökk m. atrennu	4,30 m	3,80 m	3,30 m

- b** Hve stór hluti keppendanna náði gullmerkiskröfum?



- 6.75** Telma kastar litlum bolta. Boltinn fór eftir braut sem má lýsa með fallstæðunni

$$k(x) = -0,0009x^2 + 1,5$$

þar sem $k(x)$ er hæðin yfir vellinum, mæld í metrum, og x er lárétt fjarlægð frá upphafsstöðu, mæld í metrum.

- a** Notaðu teikniforrit og teiknaðu graf þar sem formengið eru möguleg gildi x .
- b** Sýndu á grafinu að kastið var um það bil 40,8 m langt.

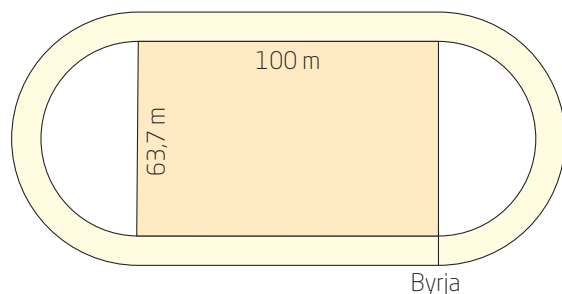
Íþróttagrein	Gull	Silfur	Brons
Boltakast, lítill bolti	45 m	35 m	25 m

Taflan sýnir kröfur til frjálsíþróttarárangurs stúlkna í unglingadeild skólans.

- c** Hve mörgum prósentum lengra þyrfti Telma að kasta til að ná gullmerkisárangri?

- 6.76** 3000 m hlaupið var haldið á íþróttavellinum.

- a** Notaðu málin á myndinni og sýndu að brautarlengdin er 400 m.



Aníta hleypur 3000 m. Hún lítur á klukkuna á leiðinni í hlaupinu og hefur þá notað 10 mínútur á $\frac{2}{3}$ hluta hlaupsins. Til þess að ná kröfunni um tímann 14 mín. og 30 s verður hún að auka hraðann í síðasta hluta hlaupsins.

- b** Finndu meðalhraðann sem hún þarf að halda til að standast kröfuna mældan í m/s og km/klst.

- 6.77** Anton hefur undirbúið keppni í sveifludönsum með því að hlaða inn 12 lögum með sveiflutónlist inn á spilara. Tónlistin verður svo spiluð í handahófskenndri röð. Alls á að spila fimm lög í hverjum hópi danspara.

- a** Hve miklar líkur eru á að hraðasta lagið verði spilað fyrst?
- b** Hve miklar líkur eru á að ekkert laganna fimm, sem hver hópur fær, verði eins þegar lögín eru leikin af handahófi?

Pönnukökur (fyrir fjóra)

3 dl hveiti
1/2 tsk. salt
5 dl mjólk
3 msk. smjör
4 egg



Þema 3: Útivist

6.78 Nemendur sem hafa valgreinina *náttúra*, *umhverfi* og *útlíf* ætla í ferð. Þau ætla að laga pönnukökur úti og finna uppskrift fyrir fjóra.

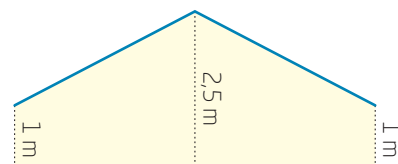
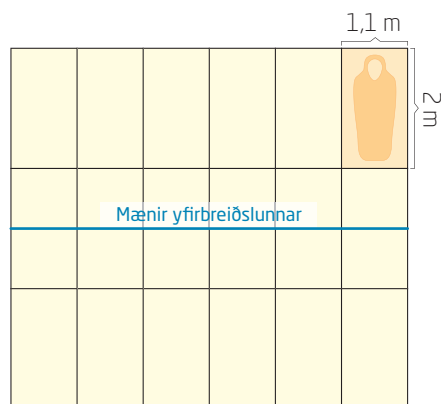
Breyttu uppskriftinni þannig að hún henti fyrir 18 manns.

6.79 Fjórir nemendur hafa tínt bláber til að gera sultu með pönnukökunum. Emil tíndi helmingi minna en Hinrik og Nanna tíndi 4 dl minna en Anna en 1 dl meira en Hinrik. Þau tíndu samtals 3,4 l af bláberjum.

Hve mikið tíndi hvert þessara fjögurra nemenda?

6.80 Nemendurnir eiga að gista undir beru lofti. Þeir hengja yfirbreiðslu yfir svefnstæðið ef það skyldi verða úrkoma og þjappa sér saman. Yfirbreiðslan er í laginu eins og þak. Hæsti punktur yfirbreiðslunnar er 2,5 m yfir jörðu en hæðin er 1 m á jöðrunum.

Hve breið þarf yfirbreiðslan að vera ef allir nemendurnir eiga að komast fyrir undir þakinu?



Fjöldi fiska	Fjöldi nemenda
0	5
1	6
2	4
3	2
4	1

6.81 Nemendurnir halda fiskveiðikeppni og sýnir taflan afraksturinn af veiðunum.

a Notaðu töflureikni og teiknaðu súlurit yfir veiðina.

b Finndu tíðasta gildi, miðgildi, meðaltal og spönn aflans.

Kennarinn velur með slembivali tvo nemendur sem eiga að sjá um að kveikja bálið.

c Hve miklar líkur eru á að það verði tveir þeirra sem fengu engan fisk?

6.82 Nokkrir nemendur útbúa sér svefnskýli úr prikum og grenigreinum milli tveggja trúa. Hæðin á opnu hliðinni er 1,9 m, dýptin inn eftir jörðinni er 2,8 m og fjarlægðin milli trjána er 4,3 m.

Hve stór er flöturinn sem er þakinn greni?

Hér væri gott að teikna mynd af skýlinu.

6.83 Nemendurnir reru á kanó og kajak frá suðurenda Vestmannsvatns að vegi við norðvesturhlíð vatnsins, sjá mynd. Notaðu mælikvarðann á myndinni.

a Hve löng er leiðin sem nemendur róa?

Kajakarnir voru um það bil 25 mínútur á leiðinni en kanóarnir voru um 30 mínútur.

b Finndu meðalhraða kajakanna og kanóanna.

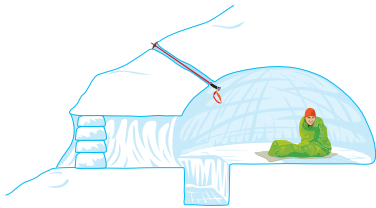


- 6.84** Meðal nemendanna 18 eru tíu strákar og átta stelpur. Helmingur nemendanna er í 9. bekk en hinn helmingurinn er í 10. bekk. Það eru tvær stelpur úr 9. bekk í hópnum.



- Raðaðu gögnunum í krosstöflu eða Vennmynd.
- Kennarinn velur af handahófi nemanda til að slökkva bálið. Hve miklar líkur eru á að það sé strákur í 10. bekk?
- Tveir nemendur eru valdir af handahófi til að skipuleggja göngustíg fyrir hina. Hve miklar líkur eru á því að það verði strákur og stelpa?
- Stelpurnar átta sitja í hálfhring í kringum bálið. Á hve marga vegu geta stelpurnar ráðað sér?

- 6.85** Nokkrir nemendur ætla að gista í snjóhúsi. Þeir ætla að gera sér hálfkúlulagað snjóhús með geisla 1,5 m. Kuldagryfjan er 0,5 m breið, 0,5 m djúp og 2 m löng. Göngin inn í snjóhúsið eru sívalningslaga með geisla 40 cm og lengd 1,8 m.



Sýndu að þau þurfa að fjarlægja um það bil $8,4 \text{ m}^3$ af snjó ef þau ætla að fylgja byggingaráætluninni.

- 6.86** Öllum nemendunum í tíunda bekk er boðið að taka þátt í snjóhúsaferðinni. Til að komast upp í óbyggðir leigja þau fjallabíl fyrir 60 000 kr. Ef eitthvað á að verða úr ferðinni verða a.m.k. tíu nemendur að vera með. Fjallabíllinn tekur 50 manns.

- Settu fram fall V sem sýnir sambandið milli verðs á mann og fjölda nemenda sem taka þátt í ferðinni.
- Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu graf V í hnitakerfi.
- Lestu af og merktu inn á grafið hvað það kostar ef 25, 35 eða 45 nemendur taka þátt í ferðinni.

Nemendurnir sem taka þátt fá tilboð um að vinna í mötuneytinu til að safna peningum fyrir ferðina. Tímakaupið er 550 kr.

- Hve margar klst. þurfa þau að vinna ef það verða 28 nemendur með í ferðinni?

Þema 4: Sumarvinna

Pavel og Pauline hafa fengið sumarstarf hvort í sinni verslun. Pavel vinnur í sportvöruverslun en Pauline vinnur hjá gullsmið.

- 6.87** Hjá Pavel er verið að undirbúa útsölu á sumarvörum. Pavel hefur fengið lista yfir hve mikinn afslátt mismunandi vörur eiga að fá og hvað þær kostuðu áður.

Vörur með 20% afslætti	Vörur með 30% afslætti	Fyrri verð
Blautbúningur		35 980
Sundgleraugu		2980
Reiðhjól með safnrafhlöðu		169 980
Ferðastóll		5980
	Kanó	21 980
	Fjallatjald	69 980
	Svefnpoki	11 380

- a** Notaðu töflureikni og finndu nýja verðið á vörunum. Rúnnaðu af að næsta tug.

Viðskiptavinur sem verslar fyrir meira en 60 000 kr. fær 10 000 kr. gjafakort.

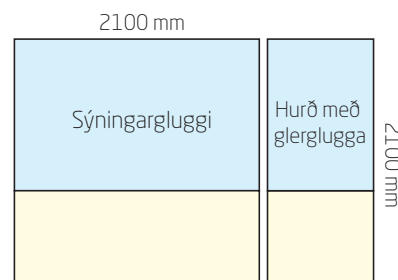
- b** Viðskiptavinur kaupir blautbúning, fjóra ferðastóla og sundgleraugu.
- 1 Fær þessi viðskiptavinur gjafakort ef hann verslar áður en verðið er lækkað?
 - 2 Fær viðskiptavinurinn gjafakort eftir að verðið er lækkað?
- c** Kannaðu hvort kostur 1 eða 2 hér að ofan veitir viðskiptavininum betri kjör. Færðu rök fyrir svarinu.

- 6.88** Pavel ekur á milli heimilisins og vinnustaðarins á skellinöðru. Hann reiknar með því að geta haldið meðalhraðanum 38 km/klst. Hve margar mínútur notar Pavel til að aka í vinnuna ef fjarlægðin er 21 km?



6.89 Myndin sýnir hluta af framhlið reiðhjólaverslunarinnar.

- Sýningargluggi er í laginu eins og gullinn rétthyrningur. Hve hár er glugginn?
- Glerglugginn í hurðinni er rétthyrningur með A-sniði. Hve breið er hurðin?



6.90 Þú þarft að nota grafískt teikniforrit í þessu verkefni.

Pavel og Pauline hafa hvor sitt launafyrirkomulag. Pavel fær 1770 kr. á tímann en Pauline fær 7500 kr. á viku og að auki 1305 kr. á tímann.

- Lýstu hvoru launafyrirkomulagi fyrir sig með falli þar sem x er fjöldi vinnustunda á viku og fallgildið er laun fyrir vikuna. Teiknaðu föllin tvö þegar $0 < x < 30$.
- Hve mörgum vinnustundum þurfa unglingarnir að skila til þess að laun þeirra verði jöfn?
- Eina vikuna vann Pavel í 22 klst. Hvað hafði hann miklar tekjur þá vikuna?
- Hve margar klst. tekur það Pauline að vinna sér inn meira en 30 000 kr. á einni viku?



6.91 Pavel er að safna fyrir tölvu sem kostar 87 000 kr. Hann á 18 000 kr. sem hann hefur safnað en verður að spara fyrir afganginum með tekjum af sumarvinnunni. Hann reiknar með að geta sparað um það bil 40% af því sem hann vinnur sér inn. Hann hefur sumarvinnu í fjórar vikur og hefur skilað inn skattkorti.

Notaðu töflureikni og/eða grafískt teikniforrit til að sýna hve margar klst. Pavel þarf að vinna að meðaltali á viku til að hafa ráð á tölvu eftir þessar fjórar vikur.

Vika nr.	Klst.
28	28
29	22
30	25
31	18

6.92 Pauline hefur unnið á nokkrum stöðum og geymir skattkortið hjá öðrum vinnuveitanda.

Vinnuveitandinn dregur af launum hennar 4% í lífeyrissjóð og 36,94% í opinber gjöld. Pauline er ekki félagi í neinu stéttarfélagi. Taflan sýnir hve margar klukkustundir hún vann vikurnar fjórar sem hún var í þessari vinnu.

Hve mikið fær Pauline útborgað eftir fjórar vikur?

6.93 Leystu verkefnið með því að nota töflureikni.

Vinnuveitandi Pavels skráir sölutölur í versluninni á hverjum degi. Taflan sýnir skráninguna.

- a Á hvaða vikudegi var stærsta spönnin í sölnni?
- b Settu upp súlurit sem sýnir meðalsölu hvers vikudags.

Sölutölur vikur 28–31						
Vika	M	P	M	F	F	L
28	2 085 640	1 658 920	1 345 670	1 468 900	876 890	567 400
29	1 877 120	1 569 130	1 851 310	2 123 450	1 013 450	768 100
30	1 936 900	1 098 740	1 789 120	1 675 600	976 900	643 270
31	1 768 790	1 452 110	1 097 160	1 356 740	745 740	715 120

Vörurnar í búðinni eru flokkaðar í fimm flokka. Dag nokkurn var salan eins og sýnt er í töflunni til hægri.

- c Settu sölutölurnar þennan dag upp í skífurit.
- d Taflan yfir sölutölur, í vikum 28-31, sýnir hve mikið hefur verið greitt fyrir vörurnar þessa daga. Allar vörurnar bera 24% virðisaukaskatt. Hve mikinn vsk. þarf verslunareigandinn að greiða til ríkisins eftir þessar fjórar vikur?

Vöruflokkur	Sala dagsins
Vetrarsportvörur	25 800 kr.
Reiðhjól	986 700 kr.
Veiðivörur	757 000 kr.
Íþróttaföt og skór	316 400 kr.
Vörur fyrir hunda og hesta	106 800 kr.

6.94 Hjá Pauline er sýningargluggi sem sýnir fjögur hálsmen, þrjú armbönd, átta hringa og sex pör af eyrnaskrauti.

- a Hringunum átta er raðað upp í röð. Á hve marga mismunandi vegu er hægt að raða hringunum?
- b Viðskiptavinur er að hugsa um að kaupa hálsmen, armband og eitt par af eyrnaskrauti. Hve margar mismunandi samsetningar eru af því sem er í gluggaútstillingunni?
- c Pauline sækir af handhófi hring og armband úr glugganum. Hve miklar líkur eru á að hún velji dýrasta gripinn af hvoru tveggja?
- d Pauline teygir sig í tvo hringa, valda af handahófi. Hve miklar líkur eru á að hún sæki tvo ódýrustu hringina?

6.95 Viðskiptavinur kemur með hálsmen í búðina sem hann borgaði 35 € fyrir. Gengið á evrunni þennan dag er 120 kr. Að auki er verðlag á Íslandi um 12% hærra en í landinu þar sem skartgripurinn var keyptur.

Hve margar íslenskar krónur (ISK) kostar samsvarandi skartgripur í búðinni hjá Pauline?

Þema 5: Hellas fyrr og nú

6.96 Hæsta fjallið í Hellas, sem er annað heiti Grikklands, heitir Ólympusfjall og er 2919 m hátt. Í fornöld var þetta fjall talið heimili guðanna.

Safn nokkurt ætlar að láta gera líkan af fjallinu og menn telja að 60 cm væri hæfileg hæð. Í hvaða mælikvarða ætti þá líkanið að vera?



6.97 Ein fyrsta keppnisgreinin á Ólympíuleikum fornaldar var kapphlaup. Hlaupið var um 190 m langt. Heimsmet Usain Bolt í 200 m hlaupi frá 2009 er 19,19 s.

Reiknaðu hve langan tíma kapphlaupið tæki Usain Bolt ef hann hlypi með sama meðalhraða og hann hljóp 200 m þegar hann setti heimsmetið.

6.98 Ólympíufáninn er hvítur með fimm jafn stórum hringjum í litunum rauður, svartur, grænn, gulur og blár.

a Á hve marga vegu er hægt að raða slíkum hringjum?

b Aðeins ein uppröðun í a er rétt. Pétur teiknar ólympíufánann en man bara hvar rauði og svartí fáninn eiga að vera. Hina hringina teiknar hann af handahófi. Hve miklar líkur eru á að hann teikni fánann rétt?

6.99 Mynstrið í gríska fánanum er samsett úr níu láréttum röndum, fjórum hvítum og fimm bláum. Í efra vinstra horni er kross. Hvítu rendurnar í krossinum eru jafn breiðar og láréttu rendurnar og hlutfallið milli breiddar og lengdar fánans er 2 : 3.

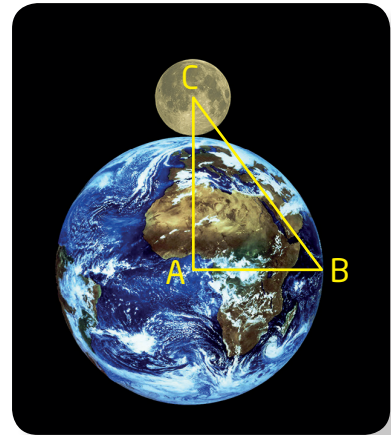
Skoðaðu fánann og finndu hlutfallið milli stærða bláa flatarins og hvíta flatarins.



6.100 Tveir þekktir heimspekingar fornaldarinnar voru Pýþagóras og kona hans Teano. Nafn Pýþagórasar er meðal annars tengt reglunni um hliðar í rétthyrndum þríhyrningi og nafn Teano tengist hlutfallstölu gullinsíðs:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Seinna kom í ljós að það er spennandi samhengi milli þessara hluta í tengslum jarðar og tungls. Það má hugsa sér jörðina og tunglið sem tvær kúlur sem staflað er saman og teikna svo þríhyrninginn ABC , þar sem A er miðja jarðar, B er punktur á miðbaug jarðar og C er miðja tunglsins.



Teiknaðu upp töflu eins og þessa hér fyrir neðan.

Notaðu hlutfallsreikning til að finna hvað á að standa í auðu reitunum í töflunni. Útskýrðu hvaða samhengi má sjá.

	Eiginlegt mál	Hlutfallslegar stærðir (Jarðgeislinn er 1)
Geisli jarðhnattarins	6378,10 km	1
Geisli tunglsins	1735,97 km	
Geisli jarðar + geisli tungls		
Fjarlægðin BC		

6.101 Áður notuðu Grikkir mynteininguna drökmú. Grikkir tóku upp evru 1. janúar 2002. Þá var 1 evra jafngild 340,75 drökmum. Sama dag var gengið á evru á Íslandi 91,60.

Hvert var þá gengið á drökmú í ISK þennan dag?



Þema 6: Sögulegar uppgötvanir

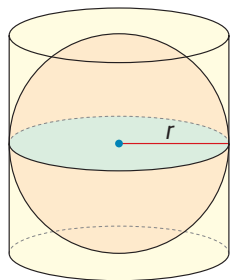
Arkimedes (287–212 f.Kr.) er kunnur sem mesti stærðfræðingur og uppfinningamaður fornaldar. Hans er meðal annars minnst fyrir uppfinninguna á vatnsskrúfunni og lýsingu á samhenginu á milli massa, rúmmáls og eðlismassa. Arkimedes setti fram formúlur fyrir margar rúmfræðireglur. Rómverskur hermaður drap hann þegar hann var svo djúpt sokkinn í þælingar sínar að hann mundi ekki hvað hann hét. Eina svarið sem hermaðurinn fékk var: Snertu ekki hringina mína.



6.102 Silja erfði gamlan skartgrip og veltir fyrir sér hvort hann sé úr hreinu gulli. Hún veit að eðlismassi gulls er $19,3 \text{ g/cm}^3$. Skartgripurinn vegur 54 g. Hún dýfir skartgripnum í mæliglas með vatni og sér að rúmmálið eykst úr 5,0 ml í 7,8 ml.

Sýnir mælingin að skartgripurinn sé úr hreinu gulli?

6.103 Myndin sýnir það sem höggið var á legstein Arkimedesar samkvæmt ósk hans sjálfs. Við sjáum kúlu innritaða í sívalning með sama þvermál og sömu hæð. Arkimedes sýndi fram á að hlutfallið milli rúmmáls sívalningsins og rúmmáls kúlunnar og yfirborðs sívalningsins og yfirborðs kúlunnar eru hvort tveggja 3 : 2.



Rúmmál kúlu er $\frac{4\pi r^3}{3}$, og yfirborð kúlu $4\pi r^2$.

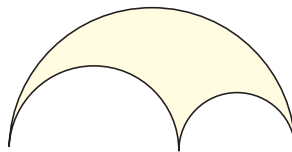
Notaðu formúlureikning til að sýna að hlutfallið sem Arkimedes fann er rétt, bæði fyrir rúmmál og yfirborð.

Pappos frá Alexandríu (290–350 e.Kr) er talinn vera síðastur grísku meistaranna í rúmfræði. Hann safnaði og skráði efni úr eldri heimildum auk eigin uppgötvana.

6.104 Notaðu grafískt teikniforrit til að enduruppgötva eina af rúmfræðiuppgötvunum Papposar.

- Markaðu punkt O og teiknaðu geisla út frá O þannig að geislarnir myndi hvasst horn.
- Markaðu þrjá punkta, A , B og C , á annan arm hornsins og A' , B' og C' á hinn arminn.
- Teiknaðu strikin AB' og $A'B$ og kallaðu skurðpunktinn P . Teiknaðu strikin AC' og $A'C$ og kallaðu skurðpunktinn Q . Teiknaðu BC' og $B'C$ og kallaðu skurðpunktinn R .
- Útskýrðu hvernig punktarnir P , Q og R eru staðsettir hver gagnvart öðrum.

6.105 Eitt þeirra viðfangsefna sem Pappos var upptekinn af fjallar um flatarmál og ummál skósmíðahnífs.



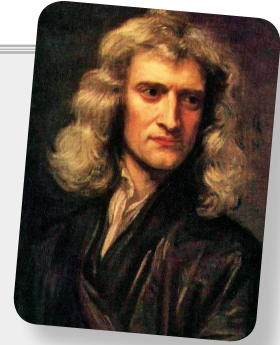
- Teiknaðu hálfhring H með þvermáli sem þú velur. Merktu tvo eða þrjá punkta á miðstrenginn þannig að hann skiptist í nokkur strik með mismunandi lengd. Láttu hvert strik vera miðstreng í nýjum hálfhring sem er skorinn út úr H .
- Reiknaðu lengdina á hálfhringsboga H . Reiknaðu svo út summu lengda allra litlu hálfhringsboganna út frá miðstreng H . Hvað kemur í ljós?

Sir Isaac Newton (1642–1727) var enskur stærðfræðingur og eðlisfræðingur sem vann brautryðjendastarf á sviði stærðfræði, eðlisfræði og stjörnufræði. Meðal annars er hann þekktur fyrir rannsóknir sínar á hlutum á hreyfingu og lögmál sín þrjú um hreyfingu.

Annað lögmál Newtons: Summa krafta sem verka á hlut er jöfn margfeldinu af massa hlutarins og hröðun hans:

$$F = m \cdot a$$

þar sem F er summa kraftanna, m er massinn og a er hröðunin. Þetta er bakgrunnur þess að einingin fyrir kraft er njúton (N).



6.106 Notaðu annað lögmál Newtons.

- a** Kraftur verkar á vagn með massann 4,0 kg og gefur vagninum hröðunina 1,5 m/s². Hve mikill er krafturinn?

Á jörðinni er hröðun hlutar í frjálsum falli án loftmótstöðu 9,81 m/s². Þyngd hlutar er krafturinn sem dregur hlutinn niður til jarðar. Þyngd lóðs er 168,7 N.

- b** Hver er massi lóðsins?
- c** Útskýrðu hvers vegna við getum sagt að þyngd hlutar standi í réttu hlutfalli við massa hlutarins.

6.107 Newton þróaði m.a. „tvíliðuformúluna“, stæðu um veldi af tveggja liða stæðu þar sem veldisvísirinn (n) er heil jákvæð tala.

Það þýðir að hann skoðaði stæðuna $(a + b)^n$ fyrir öll gildi á n . Við takmörkum okkur hér við tvö gildi á n , $n = 2$ og $n = 3$.

- a** Sýndu á tvo vegu, með rúmfræði og reikningi, hvernig þetta samhengi lítur út fyrir $n = 2$.
- b** Notaðu samhengið í a til að þátta stæðuna $(4x^2 + 12x + 9)$.
- c** Settu fram samsvarandi almenna lausn fyrir $n = 3$ og notaðu það til að reikna út $(x + 2)^3$.

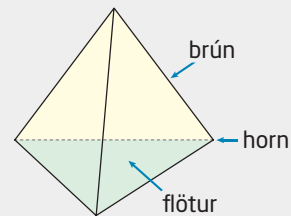
Leonard Euler (1707–1783) fæddist í Sviss en starfsvettvangur hans sem prófessor í stærðfræði var við vísindaakademíuna í St. Pétersborg. Euler er ef til vill afkastamestur allra stærðfræðinga og fyllir heildarútgáfa verka hans meira en 100 bindi. Eitt margra starfssviða var rannsókn á margflötungum. Margflötungar eru þrívíðir hlutir sem afmarkast af marghyrningum.



Margflötungsregla Eulers:

$$\text{Fjöldi horna} + \text{fjöldi flata} = \text{fjöldi brúna} + 2$$

Einfaldasti margflötungurinn er fjórflötungur, þríhliða píramídi samsettur úr fjórum jafnhliða þríhyrningum.



6.108 Euler var fyrstur til að nota ritháttinn $f(x)$ til að skilgreina stæður sem fall af breytilegu gildi, x . Hann þróaði mikið af nýrri stærðfræði tengdri föllum og athugunum á þeim, verk sem hann þurfti að vinna án hjálpartækja.

- a** Notaðu grafískt teikniforrit og teiknaðu gröf fallanna f og g á bilinu $-5 < x < 5$ þegar

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \text{ og } g(x) = 3x - 2$$

- b** Notaðu myndina með gröfunum til að leysa jöfnuna $f(x) = g(x)$.

6.109 Notaðu margflötungsreglu Eulers.

- a** Teldu horn, brúnir og fleti í fjórflötungnum hér að ofan og sýndu að margflötungsregla Eulers gildir fyrir þennan hlut.
- b** Fótbolti er samsettur úr 20 sexhyrningum og 12 fimmhyrningum. Útskýrðu út frá myndinni hvers vegna við getum verið viss um að fótboltinn hafi 60 horn án þess að telja þau.
- c** Notaðu margflötungsreglu Eulers til að reikna út fjölda brúna á fótboltanum.



Orðskýringar

A	
A-snið	flokkur staðlaðra pappírsstærða þar sem hlutfallið milli lengri og styttri hliðar pappírins er ferningsrótin af 2
aðfella	bein lína sem graf falls nálgast; fjarlægðin milli línunnar og grafsins nálgast 0
afborgun	þegar lán er greitt til baka er lásupphæðinni skipt í minni hluta sem kallast afborganir
algebrísk lausn	samheiti yfir að leysa jöfnur með reikningi, til dæmis með innsetningar- eða samlagningaraðferðinni
andstæðir atburðir (fylliatburðir, fyllimengi atburða)	tiltekinn atburður og andstæður atburður (fylliatburður) hans eru til samans allir mögulegir atburðir. Atburður og andstæður atburður hans geta ekki gerst samtímis. Summa líkinda fyrir atburðinn og andstæðan atburð hans er 1.
annars stigs fall	fall á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$, þar sem a , b og c eru fastar (tölur) og x er breytja; a er ekki 0
annars stigs jafna	jafna á forminu $ax^2 + bx + c = 0$, þar sem a , b og c eru fastar, b og c geta verið 0 en a getur ekki verið 0
B	
botnpunktur	punktur á grafi falls sem hefur lægra fallgildi en allir punktar í nágrenninu, sama og lágildispunktur
bókhald	skráning allra tekna og gjalda á ákveðnu tímabili eftir að tekna hefur verið aflað eða gjöldin greidd; einnig skráning eigna og skulda
breiðbogi	ferill breiðboga greinist í tvo aðskilda óendanlega hlutfæra sem eru spegilmyndir hvor annars; graf öfugs hlutfalls er dæmi um breiðboga
breytipáttur	stærð sem notuð er til að reikna út hve mikið eitthvað hækkar eða lækkar t.d. á ári; breytipátturinn 1,12 merkir 12% aukningu
brotabrot	almennt brot þar sem teljarinn eða nefnarinn eða bæði teljari og nefnari innihalda almenn brot
brúttóflatarmál	flatarmálið í heild áður en einhver hluti af því fer í annað, til dæmis innréttingar
brúttólaun	laun áður en skattur og annar frádráttur er dreginn af
D	
draga með skilum	í líkindareikningi: ef skilað er aftur í poka, kassa eða annað því sem dregið var svo að aðstæðurnar verða eins og þær voru áður en dregið var; þetta kallast að draga með skilum
dráttur	í líkindareikningi: að draga eitthvað af handahófi, t.d. kúlu, spilapening, kubb eða annað úr safni slíkra hluta

E	
eftirmynd	fyrir hvern punkt á eftirmyndinni er samsvarandi punktur á frummyndinni
eins punkts fjarvídd	hefur sjónlínu og einn hvarfpunkt
einslaga	tvær þríhyrningslaga myndir eru einslaga ef þær hafa tvö og tvö horn jafn stór
empírísk gögn	gögn sem eru fengin í tilraunum, úr reynslu af eða athugunum á raunveruleikanum
F	
fallgildi	gildi sem fall fær þegar breyta er sett inn í fallstæðuna; fallgildi er skráð á y -ás þegar graf falls er teiknað
fallstæða	algebrustæða sem lýsir falli
fjarvíddarteikning	aðferð til að sýna þrívíðan hlut á tvívíðum fleti þannig að fram komi dýptaráhrif í myndina
fleygbogi	graf annars stigs falls
formengi	mengi allra x -gilda sem fall gildir fyrir
formúlureikningur	að nota formúlu sem jöfnu og leysa hana út frá stærðinni sem finna skal
fyrsta ferningsreglan	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
G	
grafísk lausn á annars stigs jöfnu	aðferð til að leysa jöfnu með því að teikna graf annars stigs falls og finna skurðpunkt grafsins og x -ássins
grafísk lausn á línulegu jöfnuhneppi	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að teikna gröf línulegu jafnanna og finna skurðpunkt þeirra
gullinsnið	þegar skipting striks er þannig að lengri hluti þess stendur í sama hlutfalli við styttri hlutann og strikið í heild stendur við lengri hlutann, hlutfallið er $\approx 1,618$
H	
háðir atburðir	þegar útkoma úr atburði er háð því sem gerist í öðrum atburði
hágildispunktur	punktur sem hefur hærra y -gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
heildargreiðsla af láni	summan af afborgunum, vöxtum og gjöldum sem borga þarf vegna láns við hverja afborgun
herma	í líkindareikningi: að búa til líkan af atburði
hlutfall	sjá: rétt hlutfall; öfugt hlutfall;
hlutfallstala kostnaðar	segir t.d. til um greiðslur sem standa í réttu hlutfalli við lánsupphæð
hlutfallstíðni	fjöldi athugana á tilteknum atburði deilt með heildarfjölda athugana

hlutfallstölur	x og y eru hlutfallstölur ef þær standa í réttu hlutfalli hvor við aðra; þá er $\frac{y}{x}$ fasti
hvarfpunktur	punkturinn þar sem tvær eða fleiri samsíða línur virðast koma saman í einum og sama punktinum óendanlega langt frá þeim sem horfir
höfuðstóll	fjárhæð sem vextir eru reiknaðir af
I	
inneign	upphæðin sem tilgreind er á bankareikningi
innlánsvextir	vextir af peningum sem liggja á bankareikningi, innlánsvextir eru lægri en útlánsvextir
innsetningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi; þá er fundin stæða fyrir eina breytu í einni jöfnunni og stæðan síðan sett inn fyrir þá breytu í annarri jöfnu
J	
jafnar líkur	í líkindareikningi: þar sem jafnar líkur eru á öllum útkomum
jafngreiðslulán	lán sem er greitt niður með jafn háum greiðslum á hverjum gjalddaga; í byrjun er hluti afborgananna lágur og hluti vaxtanna hár en síðan breytist þetta eftir því sem líður á lánstímann
jöfnuhneppi	tvær eða fleiri jöfnur með tveimur eða fleiri breytum
K	
krosstafla	tafla með línum og dálkum, notuð til að hafa yfirlit yfir tvo óháða atburði eða tilraunir
L	
langhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast lengsta hliðin langhlið, langhliðin er mótlæg rétta horninu
lágildispunktur	punktur sem hefur lægra y -gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
lán með jöfnum afborgunum	lán þar sem greiðslur á afborgunardögum eru breytilegar; afborgunin sjálf er óbreytt en vaxtahlutinn lækkar eftir því sem á lánstímann líður
líður	tala eða algebrustæða sem á að leggja við eða draga frá annarri stæðu; líðir eru aðgreindir með plús- eða mínustákni
líkindatré	í líkindareikningi: myndrit þar sem hver útkoma er einn punktur og strik tákna hvernig útkomur verða hver á eftir annarri með ákveðnum líkum
líkur út frá tilraunum	samsvara hlutfallslegri tíðni í tilraun; P er tíðni hagstæðra útkoma deilt með heildarfjölda mögulegra útkoma
línulegt fall	fall á forminu $f(x) = ax + b$ þar sem a og b eru fastar; graf línulegs falls er bein lína

M	
margföldunarreglan í líkindareikningi	líkurnar á að tveir óháðir atburðir verði samtímis eru fundnar með því að margfalda saman líkurnar á hvorum atburði fyrir sig: $P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$
markgildi falls	gildi sem fallgildið nálgast þegar óháða breytan nálgast ákveðið gildi eða stefnir í óendanlegt eða mínus óendanlegt
minnkun	hlutfall; minni tala : stærri tala
minnsta sameiginlega margfeldi	minnsta talan sem allar tölurnar, sem um ræðir hverju sinni, ganga upp í; samnefni
mælikvarði	hlutfallið milli lengdar á eftirmynd og samsvarandi lengdar á frummynd
N	
nafnvextir	vextir inn- og útlána sem gefnir eru upp hverju sinni án tillits til verðlagsbreytinga
nettólaun	laun eftir að skattar og fleiri frádráttarliðir hafa verið dregnir frá, útborguð laun
núllreglan	ef margfeldi talna eða algebrustæða er 0 hlýtur að minnsta kosti annar – eða einn – þátturinn að vera 0
núllstöð falls	skurðpunktur grafs falls við x-ásinn; x-gildið er fundið með því að leysa jöfnuna $y = 0$ eða $f(x) = 0$; fallgildið er 0
O	
orlofslaun	greiðslur frá atvinnurekanda sem fólk fær í sumarleyfinu í stað launa; orlofslaunin eru nú (2017) að lágmarki 10,17% af öllum greiddum launum
Ó	
ójafna	inniheldur tvær tölur eða algebrustæður þar sem önnur hefur hærra gildi en hin; þær eru aðskildar með ójöfnumerkjunum $>$, \geq , $<$ eða \leq
P	
Pýþagórasarregla	Sjá „regla Pýþagórasar“
Pýþagórasarþrennd	þrjár náttúrlegar tölur sem passa inn í reglu Pýþagórasar
R	
regla Pýþagórasar	langhlið ² = skammhlið ₁ ² + skammhlið ₂ ² ; í rétthyrndum þríhyrningi er summa lengda skammhliðanna í öðru veldi jöfn lengd langhliðarinnar í öðru veldi
rétt hlutfall	stærðirnar x og y standa í réttu hlutfalli hvor við aðra þegar $\frac{y}{x}$ er fasti, $x \neq 0$

S	
samlagningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að leggja saman tvær línulegar jöfnur þannig að önnur óþekkta breytan hverfi
samokareglan	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
skammhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast styttri hliðarnar tvær skammhliðar, þessar tvær hliðar eru armar rétta hornsins
skattstofn	grunnurinn sem opinber gjöld eru reiknuð af eftir að iðgjald í lífeyrissjóð hefur verið dregið af tekjunum
skattur	er innheimtur af launatekjum, hagnaði af atvinnurekstri, vaxtatekjum o.fl. til að fjármagna opinber útgjöld
stækkun	hlutfall; stærri tala : minni tala
T	
talningartré	sams konar og líkindatré; framsetning til að sýna mismunandi samsetningarmöguleika tveggja eða fleiri útkoma
tekjuskattur	skattur af launatekjum; hluti launa sem launþegi þarf að borga til ríkis og sveitarfélaga (útsvar)
topppunktur	punktur á grafi falls sem hefur hærra gildi en allir aðrir punktar í nágrenninu; hágildispunktur
tveggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum, eitt hornið snýr að áhorfandanum
Ú	
útlánsvextir	vextir á peninga sem fengnir eru að láni hjá bankanum; útlánsvextir eru hærri en innlánsvextir
útpunktur	samheiti yfir punkta með há- og lággildi í hnitakerfinu
V	
vaxtavextir	vextir af vöxtum fyrri lánstímabíla eða ára
Vennmynd	skýringarmynd þar sem mengi eru teiknuð sem svæði afmörkuð af lokuðum ferlum, notuð til að lýsa innbyrðis afstöðu mengja og aðgerða sem verka á þau
vextir	kostnaður við að taka peninga að láni eða það sem maður fær borgað fyrir að leggja peninga inn í banka
virðisaukaskattur (vsk)	skattur sem er lagður á flestar vörur og þjónustu, kallast oft í daglegu tali vaskur

P	
þáttun	að skrifa tölu eða algebrustæðu sem margfeldi tveggja eða fleiri þátta
þáttur	tala eða algebrustæða sem er margfölduð með öðrum þætti, þættir eru oft aðskildir með margföldunarmerkinu
þriggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum og þriðja hvarfpunktinn fyrir ofan eða undir sjónlínunni
þrívíddarpunktablað	á þrívíddarpunktablaði er punktunum raðað eins og hornpunktum í jafnhliða þríhyrningum
þrívíður	hlutur sem hægt er að mæla eftir þremur ásum sem standa hornréttir hver á annan
Ö	
öfugt hlutfall	tvær stærðir, x og y , standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra ef margfeldi þeirra er $x \cdot y = k$ þar sem k er fasti; þessi tengsl má einnig skrá með $y = \frac{k}{x}$, þar sem x er ekki 0
önnur ferningsreglan	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

SKALI 3B

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Skali býður upp á innihaldsríka og lifandi stærðfræðikennslu.

Nemendur öðlast bæði skilning og færni með því að vera virkir og leitandi þegar þeir vinna við stærðfræði. Nemendur og kennarar nota *Skala* til að lesa stærðfræði, *vinna* verkefni, *rökræða* lausnaleyðir og fást við stærðfræðilegar áskoranir á rannsakandi og skapandi hátt. *Skali* vekur áhuga nemenda með því að tengja stærðfræði við daglegt líf og bjóða upp á fjölbreytilega kennslu.

Í *Skala* er lögð áhersla á

- hið faglega innihald, rökrétta uppbyggingu námsefnisins og framvindu námsins
- skýr og nákvæm markmið
- hagnýt dæmi og verkefni
- aðlögun námsefnisins að þörfum allra nemenda í sameiginlegu námssamfélagi þeirra
- nákvæmar leiðbeiningar og stuðning við kennara sem nýtist áður en kennsla hefst, meðan á henni stendur og eftir að henni lýkur

Skali 3 samanstendur af tveimur nemendabókum, tveimur æfingaheftum og kennarabókum. Kennarabækurnar eru gefnar út á heimasíðu Menntamálastofnunar og þar er auk þess að finna verkefnahefti, lausnir og annað fylgiefni með flokknum.

Höfundar:

Björnar Alseth

Grete Normann Tofteberg

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Janneke Tangen