



# SKALI

3A

NEMENDABÓK

**STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG**

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen  
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

### Skali 3A

Nemendabók

ISBN 978-9979-0-2053-0

© Gyldendal Norsk Forlag AS 2015

Heiti á frummálinu: Maximum 10 Grunnbok

Kápuhönnun: 07 Gruppen AS / Kristine Steen

Mynd á kápu: Dita Nemcova/Shutterstock

Teikningar: Børre Holth

Ritstjóri norsku útgáfunnar: Greta Sandrød Owesen

© 2015 Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Bjørnar Alseth

© 2016 íslensk þýðing og staðfærsla: Hanna Kristín Stefánsdóttir

© 2016 ljósmyndir:

Myndir frá shutterstock.com

Myndir af nemendum: Konstantin Yolshin; Antonio Guillem; Shooting Star Studio; vita khorzhevskaja; Rawpixel.com; Víctor Torres; Geipi JM; g-stockstudio; alexandre zveiger; Nolte Lourens; Samuel Borges Photography; Max Topchii; Photomaxx; pathdoc; East; violetblue; Billion Photos; vita khorzhevskaja; alexandre zveiger; Aðrar myndir bls. 6 Rodrigo Garrido; bls. 10 og 11 Miroslaw Dziadkowiec; bls. 12 SozeSoze; bls. 13 KUMOimages; bls. 15 nelea33; bls. 17 iprachenko; bls. 17 Malosee Dolo; bls. 17 bikeriderlondon; bls. 17 Elena Itsenko; bls. 17 Viktor1; bls. 17 monticello; bls. 17 Studio KIWI; bls. 19 NatalyaK; bls. 22; Luis Molinero; bls. 23 SmileStudio; bls. 25 Nednapa; bls. 26 ppart; bls. 27 itsmejust; bls. 29 Air Images; bls. 30 Jag\_cz; bls. 31 kurhan; bls. 32 Africa studio; bls. 34 goodluz; bls. 42 Tyler Olson; bls. 43 Leungchopan; bls. 44 cobalt88; bls. 45 Madlen; bls. 46 Lucky Business; bls. 47 italianvideophotoagency; bls.48/49 RodionY; bls. 53 vasileios Karafillidis; bls. 54 kritskaya; bls. 60 Sergey\_Bogomyako; bls. 64 Ivan Smuk; bls. 67 Markus Gann; bls. 67 pikselstock; bls. 68 Protasov AN; bls. 68 royaltystockphoto.com; bls. 70 JetKat; bls. 72 wavebreakmedia; bls. 74 WilleeCole Photography; bls. 75 romakoma; bls. 76 GTS Productions; bls. 78 a.o. My Good Images; bls. 78 a.n InnervisionArt; bls. 82 t.h. davesimon; bls. 82 miðja Andrew Lam; bls. 82 t.v.Felix Lipov; bls. 83 a.o.t.v ermess; bls. 83 a.n.t.v Macrovector; bls. 83 a.o.t.h Nanisimova; bls. 83 a.o.t.v Elena Elisseeva; bls. 84 Hellen Sergeyeva; bls. 85 FootToo; bls. 86 Kashin; bls. 87 nnattalli; bls. 87 richsouthwales; bls. 87 tratong; bls. 87 maxhorn; bls. 88 A7880S; bls. 88 Nik Merkulov; bls. 88 manaemedia; bls. 89 PavleMarjanovic; bls. 91 Roman Sigaev; bls. 92 Grey Carnation; bls. 92 Davydenko Yuliia; bls. 95 ian woolcock; bls. 95 t.v. venimo; bls. 98 a.o. Petratlu; bls. 98 a.n. Nickolay Vinokurov; bls. 99 a.o.t.v. Alex Staroseltsev; bls. 99 f.m. Nobeastsofierce; bls. 101 Victoria Lipv; bls. 101 science photo; bls. 101 Delpixel; bls. 101 Iriana Shiyana; bls. 101 Syda Productions; bls. 101 Tom Wang; bls. 101 Rido; bls. 101 Kaesler Media; bls. 101 Aaron Amat; bls. 101 Andres; bls. 101 pikselstock; bls. 101 East; bls. 102 MSSA; bls. 103 a.o. dabjola; bls. 103 a.n. Manfred Ruckszion; bls. 104-105 Danshutter; bls.106 Photology1971; bls. 107 goir; bls. 109 HAKKI ARSLAN; bls. 110 a.o. Rob Marmion; bls. 110 a.n. Syda Productions; bls. 112 Designstock; bls. 115 glamour; bls. 116 dolomite-summits; bls. 117 Africa Studio; bls. 124 Mmaxer; bls. 124 Blackregis; bls. 125 Npeter; bls. 127 Africa Studio; bls. 129 pongsakorn chaina; bls. 135 kavram; bls. 140 De Visu; bls. 141 vetre; bls. 143 Dita Nemcova; bls. 144 pikselstock; bls. 149 a.o. LuckyImages; bls. 149 a.n. Irina Bg; bls. 153 Karen Grigoryan; bls. 154 George Dolgikh

Aðrir

bls. 69 Landmælingar Íslands

bls. 77 t.v Skákborð/Chessboard ©Sandro del Prete

bls. 77 t.h Foss/Waterfall ©M.C. Escher

bls. 80 commons.wikimedia.org

bls. 91 commons.wikimedia.org

bls. 99 Kona með strokk ©Listasafn Reykjavíkur

bls. 66 Lína langsokkur ©Astrid Lindgren. Íslensk þýðing: Sigrún Árnadóttir.

Leturgerð í meginmáli: Neo Sans Std, 10,5/14 pt.

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Auður Bára Ólafsdóttir

Öll réttindi áskilin

1. útgáfa 2016

Menntamálastofnun

Kópavogi

Umbrot: Menntamálastofnun

Prentvinnsla: Ísafoldarprentsmiðja ehf. - Umhverfissvottuð prentsmiðja

Eftirtaldir lásu yfir handrit að hluta eða í heild og veittu góð ráð við gerð bókarinnar: Kristín Bjarnadóttir, Ingólfur Steinsson, Þórdís Guðjónsdóttir, Freyja Hreinsdóttir, Bylgja Borgþórsdóttir og Vilborg Helga Júlíusdóttir. Þeim og öðrum sem að verkinu komu eru færðar bestu þakkir.





# SKALI

**NEMENDABÓK**

**STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG**

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen  
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

# Formáli

Verið velkomin í *Skala 3A*.

Nú byrjar stærðfræðin að verða virkilega spennandi, krefjandi og gagnleg.

- Stærðfræði er nytsamleg í daglegu lífi, bæði í námi og í atvinnulífi.
- Í stærðfræði eru einnig gagnleg mynstur og kerfi, í henni eru röksamleg tengsl og hún hefur sitt eigið táknræna tungumál.
- Stærðfræðinám getur útheimt mikla vinnu en það felur líka í sér gleði, undrun og sigra!
- Í stærðfræðitímum vinnur þú með öðrum, leysir dæmi og vandamál, vinnur hagnýt verkefni, spilar spil, rökræðir um lausnir og hugsanaferli og notar tölvu.

Hér sérðu hvernig nemendabók getur verið til hjálpar:

Markmið kafans.

## Lán og sparnaður

Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út vexti af innlánum
- reikna út fjölda vaxtadaga
- reikna með vaxtavótum
- gera útreikninga sem varða neyslu
- gera útreikninga sem varða notkun greiðslukorts
- skilja muninn á mismunandi tegundum lána
- gera útreikninga varðandi lán með jöfnum afborgunum

Bankar eru stofnanir sem byggja starfsemi sína meðal annars á að fólk leggi sparipeningana sína í banka og að lána fólk peninga. Til þess að bankinn hagnist á þessari starfsemi tekur hann hæri vexti af peningunum sem hann lánar út en hann greiðir í vexti af peningunum sem fólk leggur inn.

Innlánsvextir eru vextirnir sem við fáum af peningum sem við leggjum inn í banka.

Útlánsvextir eru vextirnir sem við greiðum af peningum sem við lánum að láni í banka.

Útlánsvextir eru hæri en innlánsvextir.

Seðlabanki Íslands tekur á móti innlánum og lánum íslenskum bönkum peninga. Seðlabankinn er þannig „banki bankanna“. Hann hefur einnig einkarétt á því að gefa út seðla og myntir.

Á Íslandi eru (árið 2016) einkum tvöns konar bankar:

- **Víðskiptabankar** – þeir eru í eigu hlutfélaga en ríkið á meirihluta í flestum þeirra.
- **Sparisjóðir** eru fáir (árið 2016). Þeir eru flestir í eigu einkaöðla en ríkið á stóran hluta í einum þeirra.

1.35 Ert þú sammála þessu unga fólk?

Til að geta sparað þarf ég að hafa yfir miklum peningum að ríða.



Þar sem ég get aðeins lagt fyrir lítur sparisjóðir borgar það sig ekki.



Hvað finnst þér um unga fólk og sparnað?

Ég hagnast mest á því að leggja fyrir í sjóðum.



Oruggast er að spara með því að leggja inn á sparireikning.



Rammar með skilgreiningum og reglum.

Texti til útskýringar.

Sýnidæmi sem útskýra fyrir þér hvernig reiknað og skrifað.

## Regla Pýþagórasar

Í verkefni á blaðiðunni á undan komu í ljós tengsl sem minn eru til stærðfræðingsins og heimspekingins Pýþagórasar sem var lítil um það bil 550 f.kr. Þessi tengsl kallast *Pýþagórasregla* og hún er notað þegar lengdir tveggja hliða í rétthyrndum þríhyrningi eru þekktar og reikna áæt lengd þriðju hliðarinnar.



### Regla Pýþagórasar

Í rétthyrndum þríhyrningi eru summa flatarmála ferninganna út frá skammhlöðunum tveimur í ein flatarmáli ferningsins út frá langhlíð:

$$\text{langhlíð}^2 = \text{skammhlíð}_1^2 + \text{skammhlíð}_2^2$$

Reglan gildir einnig í hina áttina. Ef summa flatarmála ferninganna út frá skammhlöðunum tveimur er jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhlíðinni, er þríhyrningurinn rétthyrndur.

Texti til útskýringar.

Verkefni til umræðu.

Skýringarmyndir sem hjálpa þér að skilja.

Talblöðrur með útskýringum og ábendingum.

### Sýnidæmi 1

Í rétthyrndum þríhyrningi eru skammhlíðarnar 2 cm og 5 cm á lengd. Finndu lengd langhlíðarinnar.

#### Tillaga að lausn 1

Við teiknum þríhyrninginn og notum ferningaöferðina.

$$\text{Flatarmál ferningsins út frá langhlíðinni: } (4 + 25) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2$$

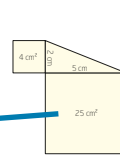
Við teiknum hjálparmynd og skráum málín sem eru þekkt, á hana. Síðan reiknum við flatarmál ferninganna sem eru út frá hliðunum sem þekktar eru.

Ef við þekkjum flatarmál ferningsins getum við fundið hliðarlengdina með því að finna ferningsrót af flatarmálinu:

$$\sqrt{29} = 5,4$$

Langhlíðin er um það bil 5,4 cm á lengd.

Pýþagórasregla langhlíð<sup>2</sup> = skammhlíð<sup>2</sup> + skammhlíð<sup>2</sup>



#### Tillaga að lausn 2

Við leysum dæmið langhlíð<sup>2</sup> = skammhlíð<sup>2</sup> + skammhlíð<sup>2</sup>:

$$h^2 = 2^2 + 5^2$$

$$h^2 = 4 + 25$$

$$h^2 = 29$$

$$h = \sqrt{29}$$

$$h = 5,4$$

Venjulega eru ekki notabár mælingarinnar inn í jöfnum.

Samantekt á markmiðum sem vinnan fram undan byggist á.

Ýmis verkefni og spil.

Mispung verkefni.

Ýmis verkefni

Reiknivél til að reikna lánskostað

Þetta verkefni er fyrir tvo nemendur að vinna saman.

Þú þurft

- tölvu með töflureikni og aðgangi að netinu

Aðferð

1. Finnðu tvo eða þrjú banka sem hafa á heimasíðu sinni reiknivél til að reikna út lánskostað. Best er að slá inn leitaraðrið reiknivél á heimasíðu bankanna. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman tilboðin frá hinum mismunandi bankum.
2. Veljið lánsupphæðina 10 000 000 og lánstímann 10 ár.
3. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman skilyrði mismunandi banka fyrir lánið.

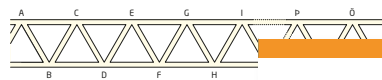
Heiti banka	Lánsupphæð (kr.)	Lánstími (ár)	Vextir (%)	Mánaðarleg greiðsla (kr.)
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		

4. Sumir bankar gefa upp nafnvexti en aðrir gefa einnig upp hlutfallstöðu vaxta. Veljið þá tegund vaxta sem þið viljið bera saman.
  5. Veljið hvort þið viljið vikka töfluna út þannig að hún sýni einnig lántökugjald og annan þjónustukostað. Sumir bankar vilja fá vexteskju um efnahag lánsúmsækjanda og greiðslugetu.
- Veljið að þið ætlið að kaupa bíð fyrir 30 000 000 og að þið eigið 10 000 000 kr. í eigið fé. Veljið launin 7 000 000 kr. á ári. Skráið þessar tölur í reiknivél sem reiknar lánskostað og reiknið hvað þið eigið eftir þegar lánið hefur verið greitt upp.

Nafnvexti eru þeir bankinn þjónustar

Þjálfaðu hugann

- 2.102 Lirfa nokkur étur sig í gegnum fimm binda alfræðirit sem stendur í bókahlilla. Lirfan étur sig frá bls. 1 í 1. bindi og allt til síðustu blaðsíðunnar í 5. bindi. Hvert bindi er 4 cm á þykkt. Í gegnum hve marga sentimetra étur lirfan sig?
- 2.103 Hugsðu þér að þú sért með sex prik sem hafa lengdirnar 1, 2, 3, 4, 5 og 6.
  - a. Hve marga mismunandi þríhyrninga getur þú búið til með því að nota þrjú prikana sem hlíðar?
  - b. Hve margir þríhyrninganna í a-lið eru réttirndir?
- 2.104 Maur byrjar í A og fetar sig milli tveggja bókstafa gegnum rörin sem sýnd eru á myndinni. Maurinn þarf alltaf að fara frá vinstri til hægri, hann má aldrei fara frá hægri til vinstri. Á öðru leyti getur hann valið leiðina að vild.

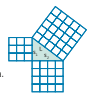


- a. Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- b. Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- c. Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- d. Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- e. Settu fram tilgátu um hvernig möguleikuna því sem fjartægin eykst. Þrjúafa tilgátuna á hve marga mismunandi vegu maurinn kemur
- f. Finndu, án þess að telja, á hve marga mism. maurinn kemst frá A til O.



Í stuttu máli

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reiknað út lengdir óþekktra hlíða í réttirndum þríhyrningum	<p>a. Hvað segir Pýtagórasreglan okkur?</p> <p>b. Finndu lengd langhlíðar í réttirndum þríhyrningi þar sem skammhlíðarnar eru 5 m og 8 m.</p> <p>c. Í réttirndum þríhyrningi er langhlíðin 13 m og önnur skammhlíðin 5 cm. Finndu lengd hinnar skammhlíðarinnar.</p>	<p>a. Í réttirndum þríhyrningi er ferningstala langhlíðarinnar jöfn summu ferningstalna skammhlíðanna.</p> <p>b. <math>F = s_1^2 + s_2^2</math>  <math>F = 5^2 + 8^2</math>  <math>F = 25 + 64</math>  <math>F = 89</math>  <math>f = \sqrt{89}</math>  <math>f \approx 9,4</math>                      Langhlíðin er um það bil 9,4 m</p> <p>c. <math>F = s_1^2 + s_2^2</math>  <math>13^2 = 5^2 + s_2^2</math>  <math>s_2^2 = 169 - 25</math>  <math>s_2^2 = 144</math>  <math>s_2 = \sqrt{144}</math>  <math>s_2 = 12</math>                      Hin skammhlíðin er um það bil 12 cm</p>
reiknað út hlíðarlengdir í nokkrum þríhyrningum	Þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er lengri	Þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er langhlíðin tvöfalt lengri en

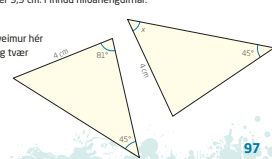


Ýmis spennandi og krefjandi verkefni.

Bættu þig!

Þríhyrningsútreikningar

- 2.76 Í þríhyrningi eru tvö hornanna 63° og 48°. Hvað er þriðja hornið stórt?
- 2.77 Reiknaðu lengdir óþekktu hlíðanna.
  - a.
  - b.
- 2.78 Snúðu sem er með tölfrá hnitna með jöfnu millibili er bundin saman þannig að hún myndar hring. Útskýru hvernig þú getur notað snúruhringinn til að búa til þríhyrning sem þú getur notað til ganga úr skugga um að eitt hornið sé rétt.
- 2.79 a. Reiknaðu út lengdir strikana AC, CD og AE.  
 b. Finndu flatarmál ΔACE.
- 2.80 Í réttirndum þríhyrningnum ABC er ∠A = 90°, AB = 5 cm og AC = 7 cm. Athugaðu hvort ∠B er jafnt og staerra en eða minna en 60°.
- 2.81 Hornalína fernings er 9,9 cm. Finndu hlíðarlengdirnar.
- 2.82 Í þríhyrningunum tveimur hér til hlíðar eru tvær og tvær hlíðar jafn langar. Hve stór er ∠x?



Til hamingju með námsgreinina stærðfræði!

Með kveðju frá höfundum.

Til að æfa þig enn betur!



# Efnisyfirlit

<b>1 Persónuleg fjármál</b> . . . . . 6	<b>2 Rúmfræði og hönnun</b> . . . 48
<b>Laun, fjárhagsáætlun og bókhald</b> . . . . . 8	<b>Þríhyrningsútreikningar</b> . . . . . 50
Laun og tekjuskattur . . . . . 9	<b>Ýmis verkefni: Könnun á</b>
Fjárhagsáætlun . . . . . 14	<b>rétthyrndum þríhyrningi 1</b> . . . . . 51
Bókhald . . . . . 16	<b>Ýmis verkefni: Könnun á</b>
<b>Ýmis verkefni: Að skipuleggja</b>	<b>rétthyrndum þríhyrningi 2</b> . . . . . 52
<b>morgunverð</b> . . . . . 17	Regla Pýþagórasar . . . . . 53
Virðisaukaskattur . . . . . 18	Pýþagórasreglan og sérstakir
<b>Lán og sparnaður</b> . . . . . 20	þríhyrningar . . . . . 56
Sparnaður . . . . . 21	<b>Ýmis verkefni: Sönnun fyrir</b>
Vaxtavextir . . . . . 26	<b>Pýþagórasarreglunni</b> . . . . . 58
Debetkort og kreditkort . . . . . 28	Að sýna einlögun . . . . . 59
<b>Ýmis verkefni: Persónuleg fjármál</b> . . . . . 31	Að reikna lengdir út frá einlögun . . . . . 62
Lán . . . . . 32	<b>Kort og mælikvarði</b> . . . . . 66
<b>Ýmis verkefni: Reiknivél til að</b>	Finna og nota mælikvarða . . . . . 67
<b>reikna lánskostnað</b> . . . . . 35	<b>Ýmis verkefni: Hve langt?</b> . . . . . 70
<b>Virðisbreyting</b> . . . . . 36	Vinnuteikningar . . . . . 72
<b>Í stuttu máli</b> . . . . . 38	<b>Fjarviddarteikning</b> . . . . . 76
<b>Bættu þig!</b> . . . . . 42	<b>Ýmis verkefni: Eiginleikar</b>
Laun, fjárhagsáætlun og bókhald . . . . . 42	<b>og einkenni fjarviddar</b> . . . . . 78
Lán og sparnaður . . . . . 44	Fleiri en einn hvarfpunktur . . . . . 82
Virðisbreyting . . . . . 46	<b>Tækni, list og arkitektúr</b> . . . . . 84
<b>Þjálfaðu hugann</b> . . . . . 47	<b>Ýmis verkefni: Þríhyrningur eða</b>
	<b>ferhyrningur</b> . . . . . 86
	<b>Ýmis verkefni: A-stærðirnar</b> . . . . . 88
	Gullinsnið . . . . . 89
	<b>Ýmis verkefni: Fibonacci og spiralar</b> . . . . . 92
	<b>Í stuttu máli</b> . . . . . 93
	<b>Bættu þig!</b> . . . . . 97
	Þríhyrningsútreikningar . . . . . 97
	Kort og mælikvarði . . . . . 99
	Fjarviddarteikningar . . . . . 101
	Tækni, list og arkitektúr . . . . . 102
	<b>Þjálfaðu hugann</b> . . . . . 103

<b>3 Algebra og jöfnur</b> . . . . .	104
Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuheppni . . . . .	106
Jöfnur með fleiri en einni óþekkttri stærð . . . . .	108
Formúlureikningur . . . . .	114
<b>Ýmis verkefni: Skóstærð og fót lengd?</b> . . . . .	117
<b>Bókstafareikningur</b> . . . . .	118
<b>Ýmis verkefni: Brotaminni</b> . . . . .	119
Bókstafareikningur með almennum brotum . . . . .	120
<b>Ýmis verkefni: Teningakast</b> . . . . .	124
Þáttun og stytting stæðna með almennum brotum . . . . .	126
<b>Ýmis verkefni: Hvaða spjöld     mynda slag?</b> . . . . .	131
Margföldun sviga . . . . .	132
<b>Að leysa jöfnu með þáttun –   Ferningsreglurnar og ójöfnur</b> . . . . .	134
Að leysa annars stigs jöfnur með teikningu . . . . .	145
Ójöfnur . . . . .	146
<b>Í stuttu máli</b> . . . . .	150
<b>Bættu þig!</b> . . . . .	153
Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuheppni . . . . .	153
Bókstafareikningur . . . . .	155
Jöfnur leystar með þáttun – Ferningsreglurnar . . . . .	156
<b>Þjálfaðu hugann</b> . . . . .	157



1

# Persónuleg fjármál

Til að geta stjórnað persónulegum fjármálum er nauðsynlegt að jafnvægi sé á milli tekna og gjalda. Til að vita hvort þú hefur ráð á að kaupa nýjan jakka eða fara í ferðalag þarft þú að hafa yfirlit yfir fjármál þín. Hið sama gildir þegar þú ætlar að leggja fyrir eða taka lán og þarft að velja banka.





## Stærðfræðiorð

skattur  
brúttólaun  
nettólaun  
skattstofn  
staðgreiðsla skatta  
persónuafsláttur  
orlofslaun  
fjárhagsáætlun  
bókhald  
vextir  
virðisaukaskattur  
frádráttur  
vaxtavextir  
afborganir  
lán með jöfnum  
afborgunum  
jafngreiðslulán  
breytiþáttur

?

Á fjórum árum lækkar  
verð á tölvu úr 100 000 kr.  
í 60 000 kr.

Verð á vélhjóli lækkar úr  
400 000 kr. í 300 000 kr.  
á sama tímabili.

Hvort er það tölvan eða  
vélhjolið sem hefur fallið  
meira í verði?

Í þessum kafla átt þú að læra um  
laun, skatt, fjárhagsáætlun, bókhald,  
lán og sparnað þannig að þú getir  
tekið skynsamlegar ákvarðanir  
þegar þú notar þína eigin peninga.

# Laun, fjárhagsáætlun og bókhald

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út laun og skatt
- gera skýra fjárhagsáætlun í töflureikni
- færa bókhald í töflureikni
- útskýra útreikninga og kynna fjárhagsáætlun og bókhald
- reikna með virðisauka

Í dag sjáum við æ sjaldnar eiginlega peninga. Notkun svokallaðra posa fyrir greiðslukort er algengasta aðferðin við að borga. Ef greiðslukort er ekki tiltækt er hægt að borga með smáskilaboðum úr farsíma. Þegar við borgum húsaleigu eða kaupum hluti eins og vespu, bát og íbúð flytjum við peninga af einum bankareikningi til annars. Peningarnir okkar eru bara tölur í tölvum. Bankarnir eru einnig farnir að nota peningalaus viðskipti og nú er rætt um hvort við þurfum ef til vill ekki á reiðufé að halda.

## 1.1 Hver hefur rétt fyrir sér?

**Neysla eða eyðsla?  
Ræðið saman um mismuninn  
á þessu tvennu.**

Ein, hálf lítra  
gosflaska á dag  
kostar örugglega  
meira en  
60 000 kr. á ári.

A

Ef maður notar  
aðeins 1000 kr. á viku  
til að kaupa óþarfa,  
nemur það um  
50 000 kr. á ári.

B

Ef þú kaupir eitt  
súkkulaðistykki á  
dag nemur það um  
það bil 50 000 kr.  
á ári.

C



## Laun og tekjuskattur

Margir launþegar hafa föst mánaðarlaun en aðrir fá greitt tíma-kaup og fá þá greitt fyrir hverja klukkustund sem unnin er. Frá launum er dregið iðgjald í lífeyrissjóð og staðgreiðsla skatta. Skatthlutfallið er misjafnt eftir því hve há launin eru. Þetta hlutfall er ákveðið af Alþingi og sett með lögum. Einnig ákveður Alþingi hver persónuafslátturinn er hverju sinni en hann er dreginn frá skattinum.

Börn yngri en 16 ára þurfa að greiða 6% skatt af launum umfram 180 000 á ári. Þessi hópur fær ekki persónuafslátt. Þegar unglingur hefur náð 16 ára aldri borgar hann skatt eins og fullorðnir.

**1.2** Vikar er 15 ára og hefur fengið vinnu þar sem hann fær 980 kr. á tímann. Hann á að vinna milli 25 og 28 klukkustundir á mánuði allt árið.

Parf Vikar að greiða skatt? Rökstyddu svarið.

**1.3** Helena, sem er 14 ára, passar barn á hverjum laugardegi allt árið í 6 klst. í senn. Hún vinnur sér inn nákvæmlega svo mikið að hún þarf ekki að greiða skatt.

Hversu há geta tímalaun hennar verið?

Þegar finna skal út hve mikinn skatt fullorðinn einstaklingur á að borga þarf fyrst að reikna *skattstofninn*. Hann finnst með því að draga iðgjaldið í lífeyrissjóð frá brúttólaunum. Sumir launþegar fá hlunnindi (t.d. afnot af síma eða bíl) sem þeir þurfa að borga skatt af. Þeim hlunnindum er þá bætt við brúttólaunin og þá liggur skattstofninn fyrir. Skatturinn er þá reiknaður út frá skattstofninum og persónuafsláttur dreginn frá skattinum. Það sem eftir er af skattinum er síðan dregið frá skattstofninum. Stéttarfélagsgjald er loks dregið frá og þá eru nettólaunin eftir, það er að segja það sem launþeginn fær útborgað.

Brúttólaun

– iðgjald í lífeyrissjóð (reiknast af brúttólaunum)

+ hlunnindi

= Skattstofn

Skattstofn

– skattur að frádregnum persónuafslætti

– stéttarfélagsgjald

= Nettólaun



**Brúttólaun** fela í sér bæði laun og hlunnindi ef einhver eru.

**Nettólaun** eru útborguð laun, til ráðstöfunar þegar frádráttarliðirnir hafa verið dregnir frá.

**Staðgreiðsla** skatta felur í sér tekjuskatt til ríkisins og útsvar til sveitarfélagsins.

**Skattar** eru m.a. lagðir á laun, á hagnað af atvinnustarfsemi og vexti af bankainnistæðum.

**Stéttarfélagsgjald** Algengt er að þetta gjald sé í kringum 1% af launum.

**Skattleysismörk** segja til um hve miklar launatekjur má hafa án þess að þurfa að greiða skatt.

**Skattstofn** er sá grunnur sem skattur er reiknaður af eftir að iðgjald í lífeyrissjóð hefur verið dregið frá.

**Persónuafsláttur** er dreginn frá útreiknuðum skatti.





Áður en laun eru greidd út er dregið af þeim iðgjald í lífeyrissjóð sem er 4% af brúttólaunum árið 2016 og skattur. Í lok hvers árs tilkynnir ríkisskattstjóri um skattþrep og skattleysismörk næsta árs.

Skattur er reiknaður út frá skattþrepunum og persónuafslátturinn síðan dreginn frá skattinum en hann er 51 920 kr. á mánuði árið 2016.

Þessi upphæð er endurskoðuð ár hvert.

Áður en laun eru síðan greidd út er stéttarfélagsgjald, 1% af launum, dregið frá.

Skattþrep	Viðmiðunartekjur á mánuði	Staðgreiðsluprósentu
1. þrep	0 - 336 035 krónur	37,13%
2. þrep	336 036 - 836 990 krónur	38,35%
3. þrep	Yfir 836 990 krónum	46,25%

Heimild, 2016 www.rsk.is

## Sýnidæmi 1

Brúttólaun Karólínu eru 480 000 kr. á mánuði. Hvað fær Karólína útborgað á mánuði?

### Tillaga að lausn

Brúttólaun:	480 000 kr.
- iðgjald í lífeyrissjóð: (4% af brúttólaunum)	- 19 200 kr.
<u>= Skattstofn:</u>	<u>460 800 kr.</u>
Skattstofn:	460 800 kr.
- Skattur 336 035 kr. · 0,3713	- 124 770 kr.
- Skattur 124 765 kr. · 0,3835	- 47 847 kr.
<u>Laun að frádregnum skatti</u>	<u>= 288 183 kr.</u>
+ persónuafsláttur 51 920 kr.	+ 51 920 kr.
- Stéttarfélagsgjald (1% af brúttólaunum)	- 4 800 kr.
<u>= Nettólaun:</u>	<u>335 303 kr.</u>
<u>Karólína fær útborgað 335 303 kr. á mánuði.</u>	

$$2\% = \frac{2}{100} = 0,02$$

**Persónuafsláttur** er dreginn frá útreiknuðum skatti eða bætt við launaupphæðina.

Mundu að draga persónuafsláttinn, 51 920 kr. frá útreiknuðum skatti!

- 1.4**
- Skattstofn Bjarts er 300 000 kr. Hvað borgar Bjartur í skatt að frádregnum persónuafslætti?
  - Skattstofn Rögnu er 500 000 kr. Hvað borgar hún í skatt að frádregnum persónuafslætti?
  - Skattstofn Júlíu er 850 000 kr. Hvað borgar hún í skatt að frádregnum persónuafslætti?

- 1.5**
- a Hvað borgar Páll í lífeyrissjóð ef hann er með 300 000 kr. í brúttólaun á mánuði?
  - b Hver er skattstofninn sem skattur Páls er reiknaður af?
  - c Hvað borgar Páll í skatt, að frádregnum persónuafslætti?

**Skattleysismörk**  
kallast sú upphæð sem fólk má hafa í laun án þess að borga skatt. Árið 2016 eru þessi mörk kr. 145 659 á mánuði.

- 1.6** Nanna fær 145 659 kr. í brúttólaun.
- a Hver er skattstofninn?
  - b Hvað borgar Nanna í skatt, að frádregnum persónuafslætti?

Í mars ár hvert eiga allir launþegar að gera skattframtal fyrir árið á undan. Skattframtalið sýnir yfirlit yfir tekjur, frádrátt, eignir og skuldir fólks. Ríkisskattstjóri notar framtalið til að reikna nákvæmlega út skatta fólks. Eftir að skattframtali er skilað kemur stundum í ljós að fólk hefur borgað of mikið í skatt og fær þá endurgreitt. Einnig kemur fyrir að fólk hefur ekki borgað nóg í skatt og þá þarf það að greiða það sem upp á vantar.

Allir sem eru á aldrinum 16-69 ára og hafa laun yfir skattleysismörkum greiða útvarpsgjald sem nemur 16 400 kr. árið 2016 og gjald í framkvæmdasjóð aldraðra sem er 10 464 kr. árið 2016. Ríkisskattstjóri bætir þessum gjöldum við skatt hvers og eins.

- 1.7** Á skattframtali Hönnu kom í ljós að hún hafði unnið sér inn 3 135 600 kr. árið 2015.

Skatturinn, sem hún átti að greiða, var 1 117 678 kr. Hversu mörg prósent af launum sínum þurfti hún að greiða í skatt fyrir árið 2015?

Laun / tekjur af rekstri

- frádráttur
- + vaxtatekjur
- + tekjur af hlutabréfum

+/- söluhagnaður/tap af hlutabréfum

= Tekjur alls

**Vextir** eru kostnaður af því að fá lánaða peninga eða það sem maður fær fyrir að geyma peningana sína í banka.



Notaðu sýnidæmi 1 þér til hjálpar.

**1.8** Daníel fær í brúttólaun 350 000 kr. Hver eru nettólaun hans?

**1.9** Ísak vinnur 125 tíma einn mánuðinn við útkeyrslu á pitsum. Hann fær 2192 kr. á tímann.

**a** Hver eru brúttólaun hans þennan mánuð?

**b** Hver er skattstofn launa hans?

**c** Hver eru nettólaun hans þennan mánuð?

Mundu hér eftir skattþrepunum!

**1.10** Í nóvember vinnur Karl sér inn 440 800 kr. Hvað fær hann útborgað fyrir nóvember?

**1.11** Brúttólaun Evu eru 600 000 kr.

**a** Hver er skattstofninn?

**b** Hversu mikið af launum hennar fellur í skattþrep 1 og í skattþrep 2?

**c** Hver eru nettólaun hennar?

#### Skattþrep

37,13% af 336 035 kr.

38,35% af næstu

500 955 kr.

46,25% umfram

836 990 kr.

Mundu eftir iðgjaldi í lífeyrissjóð og stéttarfélagsgjaldi!

**1.12** Brúttólaun Önnu voru einn mánuðinn 330 000 kr. Hún borgar 37,13% af skattstofni í skatt. Hver voru nettólaunin hennar þennan mánuð?

**1.13** Notaðu töflureikni og finndu nettólaun Jens og Mús.

	Jens	Mús
Brúttólaun	335 000 kr.	440 000 kr.
Iðgjald í lífeyrissjóð	4%	4%
Skattur	37,13%	37,13%
		38,35%

**1.14** Brúttólaun Ástu voru eitt árið 6 650 000 kr. Auk þess fékk hún 1 200 000 kr. í tekjur af hlutabréfum og vaxtatekjur voru 48 000 kr. en af hvorum tveggja skal greiða 20% í skatt.

Hvað þurfti Ásta að borga í skatt þetta ár?





Allir starfsmenn í föstu starfi eiga rétt á sumarfríi eða orlofi eins og það er kallað í lögum og kjarasamningum. Orlofslaun eru greidd sem venjuleg laun meðan á sumarfríinu stendur. Fyrir þá sem ekki eru í föstu starfi heldur vinna tímavinnu eða helgarvinnu eins og til dæmis í verslunum, eru orlofsgreiðslur lagðar inn á orlofsreikning í banka og greiddar út í maí ár hvert. Orlofsgreiðslur eru að lágmarki 10,17% af öllum tekjum.

Orlofsárið er frá 1. maí til 30. apríl árið eftir.

**Orlofslaun**  
reiknast við hverja launagreiðslu af heildarlaunum. 10,17% er lágmarks-orlofsprósenta.

- 1.15** Sara starfar með skólanum í matvöruverslun og vinnur sér inn 48 000 kr. á mánuði. Hún fær greitt 10,17% orlof sem lagt er inn á bankareikning. Hversu mikið fær hún greitt í orlof á mánuði?
- 1.16** Í maí getur Sara í dæminu hér á undan, leyst út úr bankanum uppsafnaðar orlofsgreiðslur sínar. Hún hefur starfað í versluninni í átta mánuði. Hversu mikið á hún inni á orlofsreikningnum?
- 1.17** Magnús vinnur við ræstingar og fær greiddar 1500 kr. á klst. Á orlofsárinu vann hann 225 klst. Hann fær lágmarksorlof 10,17%. Hvað fær hann í orlofsgreiðslu í ár?
- 1.18** Maxim vinnur um helgar í líkamsræktarstöð. Hann fær greiddar 1140 kr. á klst. í afgreiðslunni og 1950 kr. á klst. í tækjasalnum. Eitt árið vann hann 260 klst. í afgreiðslunni og 55 klst. í tækjasalnum. Hann fékk 10,17% í orlof. Hve mikið fékk hann í orlofsgreiðslu árið eftir?
- 1.19** Þegar launþegi hefur unnið 10 ár hjá fyrirtæki nokkru hækkar orlofsgreiðsla hans upp í 13,04%. Lísá vann sér eitt árið inn 2 250 000 kr. Næsta ár fékk hún 293 400 kr. í orlofsgreiðslu. Hafði Lísá unnið í 10 ár hjá fyrirtækinu?
- 1.20** Albert, sem er 20 ára, vinnur sem aðstoðarmaður í gróðurhúsi og fær 950 kr. á tímann á virkum dögum. Á laugardögum fær hann 1235 kr. á tímann og á sunnudögum 1900 kr. á tímann. Eitt árið vann hann 240 klst. á virkum dögum, 192 klst. á laugardögum og 160 klst. á sunnudögum. Albert fær 10,64% orlof.
- Notaðu töflureikni og finndu hve mikið hann fékk í orlofsgreiðslu næsta ár.



## Fjárhagsáætlun

Algengt er að fólk geri áætlun um eigin fjárhag. Í fjárhagsáætlun eru skráðar allar hugsanlegar tekjur og öll hugsanleg gjöld. Fjárhagsáætlun verður að vera í jafnvægi. Það merkir að summa tekna og summa gjalda þarf að vera jafn há.

### Sýnidæmi 2

**Fjárhagsáætlun** er yfirlit yfir áætlaðar tekjur og gjöld á ákveðnu tímabili.

Óðinn og Hera taka þátt í skátastarfi. Þau koma með tillögu um að skátarnir komi sér upp skátabúðum. Stjórnin vill að þau geri fjárhagsáætlun sem sýni hvernig þau hafa hugsað sér að fjármagna verkefnið. Hjálpaðu Óðni og Heru að gera fjárhagsáætlun.

Tekjur alls  
Leggjum saman  
B4 til B7

### Tillaga að lausn

	A	B
1	Fjárhagsáætlun fyrir verkefnið Skátabúðir	
2		
3	Texti	Tekjur
4	Framlag frá sveitarfélaginu	400 000 kr.
5	Framlag frá sjóðum	160 000 kr.
6	Sjoppusala 17. júní	120 000 kr.
7	Framlag meðlima	166 000 kr.
8	Tekjur alls	846 000 kr.
9		
10	Texti	Gjöld
11	Efni í tjöld	460 000 kr.
12	Grillaðstaða	36 000 kr.
13	Efni í kolla	260 000 kr.
14	Sjoppuvörur 17. júní	50 000 kr.
15	Leiðbeiningar smíðs	40 000 kr.
16	Gjöld alls	846.000 kr.

### Sýnidæmi 3

Emilía ætlar að flytja í leigu-húsnæði. Hún fær 125 000 kr. á mánuði í námslán og vinnur sér inn 95 000 kr. á mánuði í helgarvinnu. Húsaleigan er 84 000 kr. á mánuði (rafmagn innifalið). Hún ætlar að gera fjárhagsáætlun sem felur í sér eftirfarandi gjöld:

- húsnæðiskostnað
- mat og heimilisvörur
- síma/netið/sjónvarp
- ferðir
- líkamsrækt og frítíma
- fatnað/skó/snyrtivörur
- sparnað

### Tillaga að lausn

	A	B
1	Fjárhagsáætlun fyrir hvern mánuð	
2		
3	Texti	Til ráðstöfunar
4	Námslán	125 000 kr.
5	Laun	95 000 kr.
6	Til ráðstöfunar samtals	220 000 kr.
7		
8	Texti	Gjöld
9	Húsnæðiskostnaður	84 000 kr.
10	Matur/heimilisvörur	51 000 kr.
11	Sími, netið, sjónvarp	10 000 kr.
12	Ferðir	5 000 kr.
13	Líkamsrækt og frítími	24 000 kr.
14	Föt/skór/snyrtivörur	44 000 kr.
15	Sparnaður	2 000 kr.
16	Gjöld samtals	220 000 kr.

Hjálpaðu Emilíu að gera fjárhagsáætlun.



#### Tillaga að innkaupalista

- 4 stórar pitsur
- 3 gosflöskur, 2 lítra
- servíettur
- salat
- tómatar
- agúrka
- fetaostur
- 2 snakkpokar
- 1 ídúfa

- 1.21** Pú ætlar að skipuleggja afmælið þitt. Pú hefur boðið tíu vinum og fengið 20 000 kr. frá foreldrum þínum. Gestirnir eiga að fá mat og drykki. Auk þess þarf að kaupa servíettur, kerti og borðskraut.
- Pú skalt vinna með bekkjarfélagi þínum og finna út hvaða veitingar eiga að vera í boði. Gerið raunhæfa fjárhagsáætlun sem er í jafnvægi.
- 1.22** Gerðu yfirlit yfir og áætlun um fjárhag fjögurra manna fjölskyldu (móðir 40 ára, faðir 40 ára, dóttir 10 ára, sonur 15 ára) í einn mánuð. Notaðu töflureikni. Meðalútgjöld vegna heimilishalds má finna á netsíðu velferðarráðuneytis, [www.velferdarraduneyti.is/neysluvidmid](http://www.velferdarraduneyti.is/neysluvidmid).
- 1.23** Saga og átta vinir hennar ætla að slá saman í pitsuveislu. Foreldrarnir láta Sögu fá 4000 kr. Því sem upp á vantar skipta krakkarnir níu á sig. Hún skrifar lista yfir það sem þarf að kaupa og hversu mikið hún heldur að það muni kosta.
- Gerðu skýra og greinargóða fjárhagsáætlun sem sýnir hvernig fjármagna skal pitsuveisluna.
- 1.24** Elías og Georg skipuleggja sumarbústaðarferð. Þeir hafa hvor um sig unnið sér inn 17 000 kr. með því að moka innkeyrslur nágrennanna. Þar að auki hefur hvor þeirra sparað 28 000 kr. til að komast í sumar-bústaðinn. Þeir ræða saman um hvað þeir þurfi fyrir ferðina og hvað það muni kosta. Þeir komast að raun um að þeir þurfi að nota alls 10 000 kr. í bensín, 2000 kr. í Hvalfjarðargöngin, 16 000 kr. í mat og drykki, 20 000 kr. í hestaleigu og 36 000 kr. í leigu á bústaðnum.
- a** Búðu til greinargott yfirlit sem sýnir hvernig fjármagna má sumar-bústaðarferðina.
- b** Bættu við fleiri útgjöldum og gerðu fjárhagsáætlun sem er í jafnvægi.
- 1.25** Bekkjardeild með 25 nemendum ætlar í þriggja daga ferð í skólabúðir og gista í tvær nætur. Nemendurnir eiga að taka rútu báðar leiðir. Rútuferðin hvora leið kostar 600 kr. fyrir hvern nemanda. Reiknað er með að kostnaður vegna morgun- og hádegisverðar nemi um það bil 600 kr. á nemanda en kvöldverður mun kosta 1200 kr. á nemanda. Tekin eru á leigu þrjú hús þannig að þau rúma alla nemendurna og hvor nótt kostar 21 900 kr. Ferðin hefst á föstudegi kl. 10:00 og heimkoma verður á sunnudegi kl. 15:00.
- a** Notaðu töflureikni og settu fram útgjaldahlið fjárhagsáætlunarinnar.
- b** Hve hárrar fjárhæðar þarf bekkjardeildin að afla til að geta farið í ferðina?
- c** Hvað kostar ferðin fyrir hvern nemanda?
- d** Kynntu fjárhagsáætlun sem er í jafnvægi, fyrir bekkjarfélagi þínum.



## Bókhald

Það mikilvæga í bókhaldi einstaklinga er að geta stjórnað tekjum og gjöldum. Í vel skipulögðu bókhaldi eru skráðar dagsetningar og skýringatextar við tekjur og gjöld. Töflureiknir er notadrjúgt hjálpartæki þegar þú færir bókhald um þinn eigin fjárhag.

Töflureiknirinn hér á eftir sýnir bókhald Elínar fyrir janúar 2016.

**Bókhald** sýnir allar tekjur og gjöld á ákveðnu tímabili. Bókhald er fært eftir að peningarnir hafa verið notaðir eða þeirra aflað.

	A	B	C	D
1	Dagsetning	Texti	Gjöld	Tekjur
2	1. jan.	Inneign 01.01		27 360 kr.
3	7. jan.	Bíó og pítsa	3 250 kr.	
4	10. jan.	Laun, helgarvinna		37 300 kr.
5	12. jan.	Farið á kaffihús	1 120 kr.	
6	18. jan.	Keypt bók	2 980 kr.	
7	19. jan.	Gjöf frá afa		3 000 kr.
8	23. jan.	Keypt föt	12 390 kr.	
9	28. jan.	Keyptur hárblásari	3 790 kr.	
10		Samtals í janúar	23 530 kr.	67 660 kr.
11		Inneign 01.02		44 130 kr.

Við sjáum að inneignin á bankareikningi Elínar er hærri í byrjun febrúar en hún var í janúarbyrjun. Það þýðir að hún fékk ágóða í janúar. Ef inneignin er neikvæð hefur meiri peningum verið eytt en aflað.

### Gjöld

- gos 250 kr.
- bíó 1100 kr.
- blöð 390 kr.
- blýantar 350 kr.
- hamborgari 690 kr.
- sólgleraugu 1290 kr.

### Tekjur

- vasapeningar 2500 kr.
- fara út með hund nágrannans 700 kr.
- skúra gólf 800 kr.
- moka innkeyrslu nágrannans 500 kr.

**1.26** Adam skráði hjá sér öll útgjöld og tekjur í síðustu viku eins og lesa má hér til hliðar. Færðu bókhald sem sýnir gjöld og tekjur Adams þessa viku.

**1.27** Þóra skrifaði niður allan kostnað sinn og tekjur í júlí. Færðu bókhald sem sýnir gjöld og tekjur og hve mikla peninga hún átti 1. ágúst.

### Tekjur og gjöld Þóru

Á bankareikningi: 3600 kr. (1.7.)  
Vasapeningar: 2000 kr. (2.7., 9.7., 16.7., 23.7.)  
Bíó: 1200 kr. (3.7.)  
Nammi: 350 kr. (3.7.)  
Bolur: 1290 kr. (5.7.)  
Gos: 200 kr. (7.7.)  
Barnagæsla: 1500 kr. (7.7.)  
Hreinsa garð nágrannanna: 2500 kr. (8.7.)  
Passa kött nágrannans: 1500 kr. (10.7.)  
Slá grasið hjá nágranna: 1000 kr. (12.7.)

Skór: 3490 kr. (12.7.)  
Jakki: 4490 kr. (15.7.)  
Ávextir: 600 kr. (15.7.)  
Naglalakk: 550 kr. (15.7.)  
Tónleikar: 1500 kr. (18.7.)  
Stílabækur: 2000 kr. (21.7.)  
Í sund: 300 kr. (23.7.)  
Snarl í hádeginu: 500 kr. (27.7.)  
Litir: 420 kr. (30.7.)



## Virðisaukaskattur

**Virðisaukaskattur** er oft kallaður *vaskur*, skammstafað *vsk*. Hann er opinbert gjald sem lagt er á vörur og þjónustu.

*Virðisaukaskattur* (*vsk.*) er gjald/skattur sem lagt er á söluverð við sölu á vöru og þjónustu. Virðisaukaskattsþrepin eru tvö, 11% og 24%. Sum sala á vöru og þjónustu er undanþegin virðisaukaskatti og ber því í raun 0% *vsk*. Verslanir sem selja skattskylda vöru og þjónustu eiga að bæta 24% *vsk* ofan á verðið. Lægri virðisaukaskattur, 11%, er t.d. lagður á matvæli, útleigu hótél- og gistihbergja, bækur, blöð, geisladiska, smokka, margnota bleiur o.fl.

### Sýnidæmi 4

Ákvæði um *vsk*.  
Hærra þrep *vsk.*: 24%  
Lægra þrep *vsk.*: 11%

Hátalari kostar 9 200 kr. án *vsk*. Hvað kostar hátalarinn með *vsk*?

#### Tillaga að lausn 1

Þar eð *vsk.* er 24% verður verðið með *vsk.* 124% af upphaflega verðinu. Til að finna 124% getum við margfaldað með 1,24:

$$9200 \text{ kr.} \cdot 1,24 = \underline{11\,408 \text{ kr.}}$$

Hátalarinn kostar 11 408 kr. með *vsk.*

#### Tillaga að lausn 2

$$9200 \text{ kr.} + \frac{9200 \text{ kr.} \cdot 24}{100} = 9200 \text{ kr.} + 2208 \text{ kr.} = \underline{11\,408 \text{ kr.}}$$

Hátalarinn kostar 11 408 kr. með *vsk.*

**Afreikningur *vsk.***  
af heildarverði  
19,35% vegna  
24% *vsk.*  
9,91% vegna 11% *vsk.*

### Sýnidæmi 5

Þú kaupir buxur á 10 800 kr. Hvað er *vaskurinn* hér?

#### Tillaga að lausn 1

Þegar finna á verðið með *vsk.* er 24% bætt við. Þegar við vitum verðið með *vsk.* og eigum að finna *vsk.* samsvarar það því að finna 19,35% af vöruverðinu.

$$10800 \cdot 0,1935 = \underline{2090 \text{ kr.}}$$

Vsk. af buxnaverðinu er 2090 kr.

#### Tillaga að lausn 2

Setja má upp jöfnu þar sem  $x$  er verðið án *vsk.*

$$x + \frac{x \cdot 24}{100} = 10\,800$$

$$1,24x = 10\,800$$

$$x = \frac{10\,800}{1,24}$$

$$x = \underline{8710}$$

$$10\,800 \text{ kr.} - 8710 \text{ kr.} = \underline{2090 \text{ kr.}}$$

Vsk. af buxnaverðinu er 2090 kr.



- 1.29** a Virðisauki á rafvörur er 24%. Tölva kostar á útsölu 42 000 kr. án vsk. Hvað kostar tölvan með vsk.?  
 b Sími kostar 103 800 kr. Hvað kostar hann með vsk.?

Að finna 11% vsk. af vöruverði samsvarar því að finna 9,91% af vöruverðinu.

- 1.30** Bækur bera 11% vsk. Fjórar bækur sem Nonni keypti kostuðu 25 600 kr. Hver var vsk. af bókunum fjórum í krónum?

- 1.31** Sunna fór á Grillhornið með bróður sínum. Þau keyptu mat til að taka með sér heim handa fjölskyldunni. Afgreiðslumaðurinn gaf þeim upp verðið 9000 kr. og þá var 24% vsk. innifalinn í stað 11% vsk. Afgreiðslumaðurinn uppgötvaði villuna og endurgreiddi þeim það sem þau höfðu ofgreitt. Hve mikið fengu þau endurgreitt?

- 1.32** Á kvittun stóð þetta: Verð 2400 kr., þar af vsk. 238 kr. Hver var vsk. í prósentum?

Menningin er undanþegin virðisaukaskatti.

- 1.33** Dag nokkurn notaði Gunna 2600 kr. í heyrnartól, keypti mat fyrir 4500 kr., borðaði á veitingastað fyrir 5000 kr. og fór á tónleika þar sem miðinn kostaði 3000 kr. Hvað greiddi Gunna samtals í virðisaukaskatt?

- 1.34** Óskar vinnur við lagerútsölu. Viðskiptavinur kaupir kajaka, smábáta og gúmmibáta fyrir 1 322 000 kr. án vsk.
- a Skoðaðu töfluna hér fyrir neðan. Hvað kaupir viðskiptavinurinn marga kajaka, smábáta og gúmmibáta?
- b Notaðu töflureikni og gerðu skilmerkilegan reikning til viðskiptavinarins sem sýnir hve mikið hann á að borga alls með vsk.

Vörur	Verð án vsk.
Kajakar	172 000 kr.
Smábátar	196 000 kr.
Gúmmibátar	130 000 kr.



# Lán og sparnaður

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út vexti af innlánnum
- reikna út fjölda vaxtadaga
- reikna með vaxtavöxtum
- gera útreikninga sem varða neyslu
- gera útreikninga sem varða notkun greiðslukorts
- skilja muninn á mismunandi tegundum lána
- gera útreikninga varðandi lán með jöfnum afborgunum

Bankar eru stofnanir sem annast umsýslu peninga. Bankinn geymir sparnað þeirra sem vilja leggja til hliðar hluta af tekjum sínum og lánar fé til þeirra sem vilja taka lán. Til þess að bankinn hagnist á þessari starfsemi tekur hann hærri vexti af peningunum sem hann lánar út en sem hann greiðir í vexti af peningunum sem fólk leggur inn.

**Innlánsvextir** eru vextirnir sem við fáum af peningum sem við leggjum inn í banka.

**Útlánsvextir** eru vextirnir sem við greiðum af peningum sem við fáum að láni í banka.

Útlánsvextir eru hærri en innlánsvextir.

Seðlabanki Íslands tekur á móti innlánnum og lánar íslenskum börkum peninga. Seðlabankinn er þannig „banki bankanna“. Hann hefur einnig einkarétt á því að gefa út seðla og myntir.

Á Íslandi eru (árið 2016) einkum tvenns konar bankar:

- *Viðskiptabankar* - þeir eru í eigu hlutafélaga en ríkið á meirihluta í flestum þeirra.
- *Sparisjóðir* eru fáir (árið 2016). Þeir eru flestir í eigu einkaaðila en ríkið á stóran hluta í einum þeirra.

Til að geta sparað þarf ég að hafa yfir miklum peningum að ráða.

A

Þar sem ég get aðeins lagt fyrir litlar upphæðir borgar það sig ekki.

Hvað finnst þér um unga fólkið og sparnað?

B

Ég hagnast meira á því að leggja fyrir í sjóðum.

C

Öruggast er að spara með því að leggja inn á sparireikning.

D



## Sparnaður

Þegar þú sparar með því að leggja peninga í banka má segja að þú lánir bankanum peningana þína. Greiðslan, sem þú færð frá bankanum, kallast innlánsvextir. Vextirnir reiknast í prósentum af upphæðinni sem þú leggur inn. Ef innlánsvextir eru 3% færð þú 3% af innborguninni á ári, þ.e. 3% ársvexti.

### Sýnidæmi 6

Friðrik leggur 45 000 kr. inn í bankann sinn og fær 3% ársvexti. Hve háa upphæð fær hann í vexti eftir eitt ár?

#### Tillaga að lausn 1

$$\frac{45\,000 \text{ kr.} \cdot 3}{100} = 1350 \text{ kr.}$$

Friðrik fær 1350 kr. í vexti eftir eitt ár.

#### Tillaga að lausn 2

$$45\,000 \text{ kr.} \cdot 0,03 = 1350 \text{ kr.}$$

Friðrik fær 1350 kr. í vexti eftir eitt ár.

0,03 er  $\frac{3}{100}$

### Sýnidæmi 7

Emma leggur 25 000 kr. inn í bankann sinn og fær 2,6% vexti. Hve háa upphæð getur Emma tekið út úr bankanum eftir eitt ár?

#### Tillaga að lausn 1

$$25\,000 \text{ kr.} + \frac{25\,000 \text{ kr.} \cdot 2,6}{100} = 25\,000 \text{ kr.} + 650 \text{ kr.} = 25\,650 \text{ kr.}$$

Emma getur tekið út 25 650 kr. eftir eitt ár.

Vextirnir eru 650 kr.

#### Tillaga að lausn 2

Heildarupphæðin 25 000 kr. er 100%.  
Ef vextirnir eru 2,6% verður upphæðin alls 102,6%.

$$\frac{25\,000 \text{ kr.} \cdot 102,6}{100} = 25\,650 \text{ kr.}$$

Emma getur tekið út 25 650 kr. eftir eitt ár.

**Breytiþáttur** er notaður til að reikna út hve mikið upphæð hækkar eða lækkar. Breytiþátturinn 1,12 þýðir að upphæðin hækkar um 12% á ári.

#### Tillaga að lausn 3

Þegar vextir eru 2,6% getum við margfaldað með *breytiþættinum* 1,026:

$$25\,000 \text{ kr.} \cdot 1,026 = 25\,650 \text{ kr.}$$

Emma getur tekið út 25 650 kr. eftir eitt ár.



Ef eitthvað hækkar um  $p$  prósent verður breytipátturinn  $1 + \frac{p}{100}$

Ef eitthvað lækkar um  $p$  prósent verður breytipátturinn  $1 - \frac{p}{100}$

**1.36** Magnea á 84 000 kr. í bankanum. Hve mikið fær hún í vexti eftir eitt ár ef ársvextir eru 3,5%?

**1.37** Þór á 122 000 kr. í banka. Hve mikið á hann í bankanum eftir eitt ár ef ársvextir eru 4%?

**1.38** Árni setti peninga í banka og fékk 3% ársvexti. Eftir eitt ár fékk hann 2 550 kr. í vaxtatekjur.

Hve háa upphæð setti Árni í bankann í upphafi?

**1.39** Marteinn fær 250 000 kr. í fermingargjöf og lagði peningana inn á bankareikning sem bar 4% vexti.

Hve háa fjárhæð getur Marteinn tekið út eftir eitt ár?

**1.40** Elsa lagði 122 000 kr. inn í banka. Eftir eitt ár gat hún tekið út 126 270 kr.

Hvaða vextir voru á þessum sparnaðarreikningi Elsu?

**1.41** Kristján vann sér inn 190 000 kr. í sumarfríinu. Hann skoðaði tilboð frá tveimur bönkum. Annar bankinn bauð 3,2% vexti en hinn 3,5% vexti.

**a** Hve mikið hefði Kristján átt eftir eitt ár í hvorum bankanum fyrir sig?

**b** Hve mikið græðir Kristján á því að velja bankann sem bauð hærri vexti?

**1.42** Notaðu netið.

**a** Athugaðu hvaða vextir eru í boði í tveimur bönkum ef maður leggur inn 100 000 kr.

**b** Hve mikið myndir þú eiga eftir eitt ár ef þú legðir 100 000 kr. inn á bankareikning í hvorum bankanum fyrir sig.



## Sýnidæmi 8

Póra leggur peninga í banka 23. janúar og tekur þá út 3. júlí.  
Hve marga vaxtadaga liggja peningarnir á vöxtum í bankanum?

### Tillaga að lausn

Póra fær hvorki vexti fyrir daginn sem hún leggur peningana inn né fyrir daginn sem hún tekur peningana út. Venja er að reikna með 30 vaxtadögum í hverjum mánuði og 360 dögum á ári.

Mánuður	Fjöldi vaxtadaga
janúar	$(30-23) = 7$
febrúar	30
mars	30
apríl	30
maí	30
júní	30
júlí	2
Samtals	<u>159</u>

**1.43** Finndu fjölda vaxtadaga frá

- a 12. apríl til 15. ágúst sama ár.
- b 13. júní til 28. desember árið eftir.

**1.44** Finndu fjölda vaxtadaga:

- a Frá síðasta afmælisdegi þínum til dagsins í dag.
- b Frá aðfangadegi í fyrra til dagsins í dag.
- c Frá 10 ára afmælisdegi þínum til dagsins í dag.
- d Frá deginum, þegar þú fæddist, til dagsins í dag.
- e Frá 12.12.2008 til dagsins í dag.
- f Frá 20.04.2002 til dagsins í dag.



Þegar þú átt höfuðstólinn  $H$  með ársvöxtunum  $p$  í bankanum getur þú fundið vextina  $v$  eftir  $d$  daga eða  $m$  mánuði með þessum formúlum:

$$v = \frac{H \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$$

$$v = \frac{H \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

### Höfuðstóll

er fjárhæð sem vextir eru reiknaðir af.

### Sýnidæmi 9

Áróra átti 35 500 kr. í bankanum í 140 daga. Ársvextir voru 3,5%. Hvað fékk Áróra greitt í vexti?

#### Tillaga að lausn 1

Formúlan fyrir vexti gefur:	
$\frac{35\,500 \text{ kr.} \cdot 3,5 \cdot 140}{100 \cdot 360} =$	<u>483 kr.</u>
<u>Áróra fékk 483 kr. í vexti.</u>	

#### Tillaga að lausn 2

Margfaldað er með prósentunum, skráðum sem tugabrot: 0,035	
$35\,500 \text{ kr.} \cdot 0,035 \cdot \frac{140}{360} =$	<u>483 kr.</u>
<u>Áróra fékk 483 kr. í vexti.</u>	

### Sýnidæmi 10

Jakob átti 104 550 kr. í bankanum í sjö mánuði. Ársvextir voru 3,75%. Hvað fékk Jakob greitt í vexti?

#### Tillaga að lausn 1

Formúlan fyrir vexti gefur:	
$\frac{104\,550 \text{ kr.} \cdot 3,75 \cdot 7}{100 \cdot 12} =$	<u>2287 kr.</u>
<u>Jakob fær 2287 kr. í vexti.</u>	

#### Tillaga að lausn 2

Margfaldað er með prósentunum skráðum sem tugabrot: 0,0375	
$104\,550 \text{ kr.} \cdot 0,0375 \cdot \frac{7}{12} =$	<u>2287 kr.</u>
<u>Jakob fær 2287 kr. í vexti.</u>	

### Sýnidæmi 11

María á afmæli 10. október. Hún fékk 24 500 kr. í afmælisgjöf og setti peningana í bankann sama dag. Vextir á sparnaðarreikningnum voru 4,5%. Hún tók peningana út 25. apríl árið eftir. Hve mikið gat hún tekið út úr bankanum?

4,5% = 0,045



## Tillaga að lausn

María fær vexti af inngreiðslunni sinni um áramót. Þá þarf að reikna vexti fyrir dagana fyrir áramót og dagana eftir áramót hvora fyrir sig.

Frá 10. október til 31. desember eru 79 vaxtadagar  
(19 + 30 + 30 = 79)

Inngreiðsla + vextir = nýr höfuðstóll

$$24\,500 \text{ kr.} + \frac{24\,500 \text{ kr.} \cdot 0,045 \cdot 79}{360} = \underline{24\,742 \text{ kr.}}$$

Frá 1. janúar til 25. apríl næsta ár eru 114 vaxtadagar  
(30 + 30 + 30 + 24 = 114).

Inngreiðsla + vextir = nýr höfuðstóll

$$24\,742 \text{ kr.} + \frac{24\,742 \text{ kr.} \cdot 0,045 \cdot 114}{360} = \underline{25\,095 \text{ kr.}}$$

María getur tekið út 25 095 kr. úr bankanum.

Mundu að reiknað er með 30 dögum í mánuði og 360 dögum á ári.

- 1.45** Ómar leggur 390 000 kr. í banka í janúar. Hve mikið getur hann tekið út eftir 200 daga þegar vextirnir eru 3,1%?
- 1.46** Freyja átti 154 000 kr. á bankareikningi í níu mánuði frá febrúar til nóvember. Vextir voru 3,1%. Hve mikið gat hún tekið út úr bankanum?
- 1.47** Nói setti peningana sína í banka og fékk 3,2% vexti. Hann tók 106 960 kr. út eftir sjö mánuði. Hve mikla peninga lagði Nói inn í bankann í upphafi?
- 1.48** Árið 2015 átti Tinna 78 000 kr. í bankanum. Hún tók út 78 910 kr. eftir 150 daga. Hvað fékk Tinna háa vexti í prósentum?
- 1.49** Magnús átti 67 000 kr. á bankareikningi í ársbyrjun. Þann 23. mars lagði hann inn 8000 kr. Þann 30. júlí lagði hann inn 20 000 kr. og þann 4. september lagði hann inn 31 000 kr. Vextir voru 3%. Hve mikið átti hann inni á reikningnum í árslok?
- 1.50** Linda opnaði bankareikning á afmælisdaginn sinn sem er 20. mars. Hún lagði þá inn 5000 kr. Síðan lagði hún 5000 kr. inn 20. hvers mánaðar fram að næsta afmælisdegi. Finndu út hve mikið hún gat tekið út af reikningnum sínum 20. mars næsta ár þegar vextirnir voru allan tímann 2,10%. Hér getur verið gott að nota töflureikni.



## Vaxtavextir

Ef þú hefur peninga í banka í mörg ár vex inneignin þín jafnóðum. Höfuðstóllinn hækkar á hverju ári vegna þess að þú færð vexti af honum. Annað árið færðu vexti af vöxtunum sem þú fékkst fyrra árið. Þetta kallast *vaxtavextir*.

### Sýnidæmi 12

**Vaxtavextir** eru vextir af vöxtum fyrra árs.



Pétur á 50 000 kr. í banka og fær 3% vexti. Hve háa fjárhæð á Pétur í bankanum eftir fjögur ár?

#### Tillaga að lausn 1

Þar eð vextir eru 3% er breytipátturinn 1,03.

Heildarupphæðin (höfuðstóllinn) eftir 1 ár er:	$50\,000 \text{ kr.} \cdot 1,03 = 51\,500 \text{ kr.}$
Heildarupphæðin eftir 2 ár er:	$51\,500 \text{ kr.} \cdot 1,03 = 53\,045 \text{ kr.}$
Heildarupphæðin eftir 3 ár er:	$53\,045 \text{ kr.} \cdot 1,03 = 54\,636 \text{ kr.}$
Heildarupphæðin eftir 4 ár er:	$54\,636 \text{ kr.} \cdot 1,03 = \underline{56\,275 \text{ kr.}}$
<u>Pétur á 56 275 kr. í banka eftir fjögur ár.</u>	

#### Tillaga að lausn 2

Við sjáum að við margföldum höfuðstóllinn með breytipáttinum 1,03 fjórum sinnum.

$50\,000 \text{ kr.} \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 50\,000 \text{ kr.} \cdot (1,034)^4 = \underline{56\,275 \text{ kr.}}$
<u>Pétur á 56 275 kr. í banka eftir fjögur ár.</u>

**Höfuðstóll** og **vextir**.

Þegar þú átt höfuðstól sem hækkar um  $p$  prósent í  $n$  ár getur þú fundið höfuðstóllinn eftir  $n$  ár með þessari formúlu:

$$H_n = H_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$H_0$  = höfuðstóllinn í upphafi,  $H_n$  = höfuðstóllinn eftir  $n$  ár,  $p$  = vextir í prósentum

- 1.51** Jónas leggur 250 000 kr. inn í bankann á 2,8% ársvöxtum. Hver verður höfuðstóllinn eftir fimm ár?



- 1.52** Amma setti 100 000 kr. á bankareikning þegar Ása fæddist. Peningarnir lágu á vöxtum þar til Ása varð 18 ára. Ársvextir voru 3,1% allan tímann.
- Hve hár var höfuðstóllinn á bankareikningnum þegar Ása varð 18 ára?
- 1.53** Kristján fékk 40 000 kr. alls í afmælisgjafir á 15 ára afmælisdaginn sinn. Hann ákvað að leggja peningana inn í banka. Hann skoðaði ýmis tilboð frá bönkunum. Einn bankinn bauð 4,6% vexti á sparnaðarreikning en annar banki bauð 4,3%. Hann ætlar að láta peningana liggja á bankabók þar til hann verður 18 ára.
- Hve mikið hagnaðist hann á að velja bankann sem bauð hærri vexti?
- 1.54** Notaðu töflureikni. Eftir hve mörg ár tvöfaldast 10 000 króna inngreiðsla ef vextirnir eru
- a** 5%    **b** 4%    **c** 3%
- 1.55** Íða opnaði sparnaðarreikning í banka nokkrum. Þann 1. janúar ár hvert leggur hún 100 000 kr. inn á reikninginn. Þetta gerir hún í 5 ár.
- Hve mikið á hún inni á sparnaðarreikningnum eftir 5 ár ef vextirnir eru allan tímann 4,65%?
- 1.56** Anna lagði 50 000 kr. í banka og fékk 3,5% vexti.
- Hve mikið hafði höfuðstóllinn hækkað eftir fjögur ár?
- 1.57** Þú leggur 10 000 kr. í banka 1. janúar á hverju ári og færð 3,6% ársvexti.
- Notaðu töflureikni og finndu hve langur tími líður áður en þú átt meira en 100 000 kr., 200 000 kr. og 500 000 kr. á bankareikningnum.
- 1.58** Jónas lagði 20 000 kr. í banka. Peningarnir lágu á sömu vöxtum í mörg ár. Eftir um það bil 18 ár átti Jónas um það bil 40 520 kr. á bankareikningnum.
- a** Notaðu töflureikni og finndu hvaða vexti Jónas fékk á inngreiðsluna sína.
- b** Gerðu ráð fyrir að vextirnir hafi verið 7%. Um það bil hve lengi þurfti Jónas þá að hafa peningana á bankareikningnum til að geta tekið út jafn mikið og í a-lið?

## Debetkort og kreditkort

**Með kreditkorti** getur þú keypt vörur en greitt þær síðar.

Debetkort eru notuð til að borga vörur og þjónustu með peningum sem maður á í banka. Einnig er hægt að taka peninga út úr hraðbanka með debetkorti svo lengi sem peningar eru inni á bankareikningnum.

Með kreditkorti er hægt að versla fyrir hærri upphæð en maður á í bankanum. Þegar kreditkortið er notað færðu peninga lánaða hjá bankanum til að borga fyrir vörur og þjónustu. Kortið gerir það mögulegt að bíða með að borga. Það borgar sig að nota kreditkort ef skuldin er greidd áður en fresturinn rennur út. Oftast er hægt að fresta því að greiða skuldina á kreditkortinu í 30 eða 45 daga vaxtalaust. Kreditkortið gerir það einnig mögulegt að borga einu sinni í mánuði þar til skuldin hefur verið greidd. Þess vegna getur maður með kreditkortinu keypt vöru eða þjónustu með afborgunum. Það merkir að endurgreiðslunni er dreift á ákveðið tímabil. Það eru tiltölulega háir vextir á þessum skuldum ef ekki er greitt innan greiðslufrestsins. Ungt fólk undir 18 ára aldri getur yfirleitt ekki stofnað til skulda eða verslað út á kreditkort nema í undantekningartilvikum. Þess vegna eru oftast 18 ára aldursmörk til að geta fengið almennt kreditkort.

Ungt fólk frá 16 ára aldri getur fengið debetkort og einnig kreditkort ef foreldrar ábyrgjast greiðslurnar. Þú getur kynnt þér þessi mál á heimasíðum bankanna.

### Sýnidæmi 13

Kasper hafði notað kreditkortið sitt og skuldaði 100 000 kr. Hann greiddi skuldina ekki í tæka tíð. Þess vegna þurfti hann að greiða vexti fyrir dagana eftir að greiðslufrestur rann út. Vextirnir voru 1,6% á mánuði.

- Hvað þurfti Kasper að borga ef hann beið í átta mánuði með að greiða skuldina?
- Hvað urðu vextirnir háir á ári?

#### Tillaga að lausn

$$\mathbf{a} \quad 100\,000 \text{ kr.} \cdot 1,016^8 = \underline{113\,540 \text{ kr.}}$$

Kasper þurfti að borga 113 540 kr.

$$\mathbf{b} \quad \text{Á einu ári, það er að segja á 12 mánuðum, urðu vextirnir}$$
$$100\,000 \text{ kr.} \cdot 1,016^{12} = 120\,980 \text{ kr.}$$

$$120\,980 \text{ kr.} - 100\,000 \text{ kr.} = \underline{20\,980 \text{ kr.}}$$

$$\frac{20\,980 \text{ kr.}}{100\,000 \text{ kr.}} = 0,2098 \approx 21\%$$

Vextirnir urðu um það bil 21% á ári.



Tengslin milli mánaðarlegra vaxta og ársvaxta má skrá þannig:

$$\text{Árlegir vextir} = (\text{mánaðarlegir vextir})^{12}$$

- 1.59** Leó átti 25 670 kr. á bankareikningi. Hann keypti sundfit á 2980 kr. og blautbúning á 6990 kr. Sama dag fékk Leó 2500 kr. í vasapeninga inn á reikninginn sinn.

Notaðu töflureikni og finndu hvað Leó átti á bankareikningnum sínum eftir þetta.

- 1.60** Amalía átti 16 440 kr. á bankareikningnum sínum. Móðir hennar lagði inn á reikning hennar 5000 kr. Vinkona Amalíu greiddi inn á reikninginn 2500 kr. sem hún skuldaði henni. Amalía þurfti að kaupa ýmsan útbúnað fyrir fyrirhugaða ferð og notaði debetkortið sitt. Hún þurfti bakpoka, svefnpoka og undirlag. Bakpokinn kostaði 13 990 kr., notaður svefnpoki kostaði 5990 kr. og undirlagið 3990 kr.

- Reiknaðu með slumpreikningi. Átti Amalía nóga peninga á bankareikningnum til að borga allan útbúnaðinn fyrir ferðina?
- Reiknaðu af nákvæmni og athugaðu hve mikið hún átti afgang á bankareikningnum eða hversu mikið hún þurfti að borga í reiðufé til að geta keypt allan útbúnaðinn.

- 1.61** Pétur skuldaði 50 000 kr. á kreditkortinu sínu. Hann borgaði 1,4% í vexti á mánuði.

- Hve mikið skuldaði Pétur eftir 9 mánuði?
- Hverjir voru ársvextirnir?
- Hve mikið skuldaði Pétur eftir 2 ár ef hann greiddi ekkert á tímabilinu?

- 1.62** Maður nokkur skuldar 80 000 kr. á kreditkortinu sínu sem ber 25,4% ársvexti. Hve mikið þarf hann að greiða eftir 185 daga?

- 1.63** Hrönn kaupir golfsett á 100 000 kr. með kreditkorti en fær greiðsludreifingu í 9 mánuði. Lántökugjald er 3500 kr. sem bætist við lánsupphæðina, mánaðarlegir vextir eru 1,3% og mánaðarlegt færslugjald er 405 kr.

Hve mikið hefur Hrönn greitt fyrir golfsettið eftir 9 mánuði?

**Reiðufé**  
eru peningar  
sem eru  
handbærir.



Það er hentugt að nota kreditkort ef þú borgar skuldina áður en greiðslufresturinn rennur út.

A



## Debetkort eða kreditkort?

Debetkort er betra. Þá notar þú aðeins þá peninga sem þú átt í raun og veru.

B



Kreditkort er betra. Þá getur þú frestað því að greiða skuldina.

C



Með kreditkortu getur þú keypt það sem þú vilt þótt þú eigir enga peninga á bankareikningi.

D



**1.64** Ræðið saman um kosti og galla þess að nota debetkort og kreditkort.

**1.65** Marteinn skuldaði 70 000 kr. á kreditkortinu sínu. Hann samdi við bankann um 30 daga vaxtalausan greiðslufrest. Eftir frestinn borgaði hann 1,3% í vexti á mánuði.

- Hvað þurfti Marteinn að borga ef hann beið í fjóra mánuði eftir að 30 daga fresturinn var útrunninn?
- Finndu hvað ársvextirnir voru háir.
- Marteinn gat ekki greitt skuld sína fyrr en eftir þrjú ár. Hversu mikið skuldaði hann þá?

**1.66** Hans keypti nýtt vélhjól. Hann borgaði með kreditkortu. Eftir kaupin skuldaði hann 120 000 kr. Hann borgaði 1,2% vexti á mánuði. Í hverjum mánuði lagði hann 10 000 kr. inn á kreditkortu.

- Hve mikið skuldaði Hans eftir sex mánuði?
- Hve háir voru ársvextirnir?

**1.67** Notaðu töflureikni. Sýndu hvernig kreditkortaskuld, sem í upphafi var 50 000 kr., hækkaði frá einum mánuði til annars ef vextir á mánuði voru 2,05% og skuldin er látin hækka í þrjú ár. Settu niðurstöðurnar fram í línuriti. Lýstu með eigin orðum hvernig ferillinn fer hækkandi.



## Persónuleg fjármál

Þetta verkefni er fyrir allan bekkinn.

### Þið þurfið

- tölvu með töflureikni og aðgangi að netinu
- gott ímyndunarafli og innlifun

### Aðferð

Tilgangurinn með þessu verkefni er að þið gerið raunhæfa fjárhagsáætlun miðað við þær aðstæður sem þið verðið í eftir tíu ár. Alls þurfið þið að fara í gegnum fjögur þrep og á hverju þrepi fáði þið ákveðnar upplýsingar sem geta valdið því að þið verðið að að taka nýja ákvörðun eða breyta fyrri áætlunum.

### Prep 1 – einstaklingsvinna

Pú byrjar á því að gera þér í hugarlund hver staða þín verður eftir tíu ár. Þá hefurðu að líkindum lokið námi og fjölskyldulíf og lífið á vinnumarkaðnum er á næsta leiti. Svartaðu spurningum af heiðarleika og raunsæi.

- 1 Hvers konar atvinnu hefur þú?
- 2 Hvaða menntun þurftir þú til að fá þessa vinnu?
- 3 Hvað kostaði þessi menntun þig? Þú getur t.d. notað reiknivél á heimasíðu Lánasjóðs íslenskra námsmanna, lin.is.
- 4 Hvað gerir þú ráð fyrir að hafa í árstekjur í þessari vinnu?
- 5 Hver er sparnaður þinn á bankareikningum, í sjóðum o.fl.?
- 6 Afhentu kennara þínum niðurstöður þínar. Kennarinn lætur þig fá verkefni á þrepi 2.



# Lán

## Lág neytendalán – Yfirdráttarlán

Sumir bankar lána peninga án þess að hafa veð í fasteign eða einhverju öðru. Ein tegund þessara lána er svokallað *yfirdráttarlán*. Þeir sem orðnir eru 18 ára og hafa debetkort geta fengið slíkt lán. Hins vegar þurfa lántakendur að geta sýnt fram á reglulega innborgun á bankareikning sinn. Þegar slíkt lán er tekið þarf lántakandi að leggja fram ósk um lánstíma. Lánstími getur verið allt að eitt ár. Þeir sem eru með kreditkort geta í sumum tilvikum óskað eftir greiðslufresti á skuldinni sem hvílir á kortinu.



### Sýnidæmi 14

Fyrir mörgum árum tók Hanna yfirdráttarlán til að kaupa tónlistargræjur. Hún fékk 100 000 króna lán og samdi um að greiða lánið eftir eitt ár.

Vextir af láninu voru 1,1% á mánuði. Þar að auki þurfti hún að borga 1950 kr. í lántökugjald þegar hún fékk lánið og 500 kr. þjónustukostnað í hverjum mánuði.

Hve há er hlutfallstala vaxta af þessu láni?

### Tillaga að lausn

	A	B	C	D	E
1	Lán	100 000 kr.			
2	Vextir á mánuði	1,10%			
3	Lántökugjald	1950 kr.			
4	Þjónustukostn. á mán.	500 kr.			
5			=B9*\$B\$2		
6					
7	Mánuður nr.	Lán	Vextir	Gjöld	Samtals lánsfjárhæð
8	0	100 000 kr.		1950 kr.	101 950 kr.
9	1	101 950 kr.	1121 kr.	500 kr.	103 571 kr.
10	2	103 570 kr.	1139 kr.	500 kr.	105 211 kr.
11	3	105 210 kr.	1157 kr.	500 kr.	106 868 kr.
12	4	106 860 kr.	1176 kr.	500 kr.	108 544 kr.
13	5	108 540 kr.	1194 kr.	500 kr.	110 238 kr.
14	6	110 230 kr.	1213 kr.	500 kr.	111 950 kr.
15	7	111 950 kr.	1231 kr.	500 kr.	113 682 kr.
16	8	113 680 kr.	1250 kr.	500 kr.	115 432 kr.
17	9	115 430 kr.	1270 kr.	500 kr.	117 202 kr.
18	10	117 200 kr.	1289 kr.	500 kr.	118 991 kr.
19	11	118 990 kr.	1309 kr.	500 kr.	120 800 kr.
20	12	120 800 kr.	1329 kr.	500 kr.	122 629 kr.
21					
22	Hlutfallstala vaxta á ári	22,63%	=E20-B1)/B1		

Hlutfallstala vaxta fyrsta árið var 22,63%.



**1.68** Lítið neytendalán, að fjárhæð 50 000 kr., bar 1,6% vexti á mánuði. Lántökugjaldið var 3000 kr. og mánaðarlegt þjónustugjald var 250 kr. Greiðslufrestur var til eins árs.

- Notaðu töflureikni og finndu hver hlutfallstala vaxta var á ári.
- Hvernig heldurðu að vextirnir í a-lið hefðu breyst ef lánsupphæðin hefði verið hækkuð í 100 000 kr.?
- Hver hefði hlutfallstala vaxta orðið í b-lið?

**1.69** Neytendalán, að fjárhæð 500 000 kr., bar 0,9% vexti á mánuði. Lántökugjaldið var 4990 kr. og mánaðargjald 400 kr. Greiðslufrestur var til eins árs.

- Notaðu töflureikni og finndu hlutfallslegu vextina á ári.
- Breyttu vöxtunum í a-lið í 1,4% og finndu hlutfallslegu vextina á ári.

### Hlutfallstala

kostnaðar segir til um hvað maður borgar hlutfallslega fyrir lán, þ.e. vexti og öll gjöld sem fylgja.

### Afborgun

Þegar lán er greitt til baka er lánsupphæðinni skipt í minni hluta sem kallast afborganir.

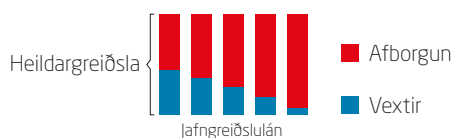
### Jafngreiðslulán

Af slíku láni er greitt með jöfnum greiðslum á hverjum gjalddaga. Í byrjun er afborgunarhlutinn lágur og vaxtahlutinn hár. Þetta breytist með tímanum.

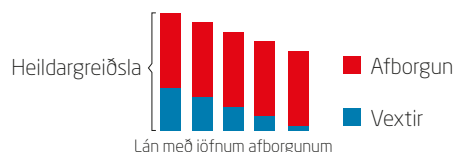
## Jafngreiðslulán og lán með jöfnum afborgunum

Þegar greitt er af lánum borgum við bæði afborgun af láninu og vexti.

*Jafngreiðslulán* er greitt niður með jafn háum greiðslum á hverjum gjalddaga. Í byrjun er kostnaður vegna vaxta af láninu hár en afborganirnar lágur. Hluti afborgananna af upphæðinni fer hækkanði og vaxtahlutinn minnkar eftir því sem tíminn líður.



*Jafngreiðslulán*



*Lán með jöfnum afborgunum*

Af láni með *jöfnum afborgunum* eru greiðsluupphæðirnar misháar. Afborganirnar af þessum lánum eru jafn háar en kostnaður vegna vaxta breytilegur. Vextir eru háir í byrjun þegar lánið er hátt en þeir lækka með tímanum þegar lánið lækkar.

Heildarupphæðin, sem borguð er fyrir lán með jöfnum afborgunum, er lægri en fyrir jafn hátt jafngreiðslulán. Skuldin er hærri allan tímann ef um jafngreiðslulán er að ræða og þess vegna verða vextirnir hærri og heildarkostnaðurinn meiri.

Í upphafi afborgana af láni með jöfnum afborgunum eru greiðslur háar.

### Lán með jöfnum afborgunum

Af slíku láni er greitt með misháum greiðslum. Afborganirnar eru föst upphæð en vaxtahlutinn lækkar með tímanum.

**Heildargreiðsla** á gjalddaga er summan af afborgun, vöxtum og þjónustugjöldum sem greiða þarf hverju sinni.

## Sýnidæmi 15

Emil og Inga tóku lán með jöfnum afborgunum að fjárhæð 800 000 kr. sem greiða átti niður á fimm árum. Vextir voru 4% á ári og afborganir einu sinni á ári. Notaðu töflureikni og finndu hve mikið þau þurftu að borga í heild.



### Tillaga að lausn

	A	B	C	D	E
1	Lánsupphæð	800 000			
2	Vextir	4%			
3	Fjöldi ára	5			
4	Afborgun	160 000			
5					
6	Ár	Eftirstöðvar	Vextir	Árleg afborgun	Greiðsluupphæð
7	1	800 000 kr.	32 000 kr.	160 000 kr.	192 000 kr.
8	2	640 000 kr.	25 600 kr.	160 000 kr.	185 600 kr.
9	3	480 000 kr.	19 200 kr.	160 000 kr.	179 200 kr.
10	4	320 000 kr.	12 800 kr.	160 000 kr.	172 800 kr.
11	5	160 000 kr.	6 400 kr.	160 000 kr.	166 400 kr.
12	Samtals		96 000 kr.	800 000 kr.	896 000 kr.

	A	B	C	D	E
1	Lánsupphæð	800 000			
2	Vextir	0,04			
3	Fjöldi ára	5			
4	Afborgun	=B1/B3			
5					
6	Ár	Eftirstöðvar	Vextir	Árleg afborgun	Greiðsluupphæð
7	1	=B1	=B7*\$B\$2	=B\$4	=C7+D7
8	2	=B1-B\$4	=B8*\$B\$2	=B\$4	=C8+D8
9	3	=B8-B\$4	=B9*\$B\$2	=B\$4	=C9+D9
10	4	=B9-B\$4	=B10*\$B\$2	=B\$4	=C10+D10
11	5	=B10-B\$4	=B11*\$B\$2	=B\$4	=C11+D11
12	Samtals		=SUM(C7:C11)	=SUM(D7:D11)	=SUM(E7:E11)

Í heild þurftu Emil og Inga að greiða 896 000 kr.

- 1.70** Hanna tók lán með jöfnum afborgunum að fjárhæð 1 000 000 kr. Hún átti að endurgreiða lánið á tíu árum með árlegum afborgunum. Ársvextir voru 7%.
- Notaðu töflureikni og gerðu greiðslufirlit eins og í sýnidæmi 15.
  - Finndu heildarsummuna sem Hanna þurfti að greiða vegna lánsins.
- 1.71** Óli og Kata tóku lán með jöfnum afborgunum að fjárhæð 20 000 000 kr. Þau áttu að endurgreiða lánið á 20 árum með árlegum afborgunum. Ársvextir voru 3,5%.
- Hve mikið spöruðu þau sér á því að fá lánið í öðrum banka þar sem ársvextir voru 3,3%.

## Reiknivél til að reikna lánskostnað

Þetta verkefni er fyrir tvo nemendur að vinna saman.

### Þið þurfið

- tölvu með töflureikni og aðgangi að netinu

### Aðferð

- Finnið tvo eða þrjá banka sem hafa á heimasíðu sinni reiknivél til að reikna út lánskostnað. Best er að slá inn leitarorðið reiknivél á heimasíðum bankanna. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman tilboðin frá hinum mismunandi bönkum.
- Veljið lánsupphæðina 10 000 000 og lánstímann 10 ár.
- Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman skilyrði mismunandi banka fyrir láninu.

Heiti banka	Lánsupphæð (kr.)	Lánstími (ár)	Vextir (%)	Mánaðarleg greiðsla (kr.)
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		

- Sumir bankar gefa upp nafnvexti en aðrir gefa einnig upp hlutfallstölu vaxta. Veljið þá tegund vaxta sem þið viljið bera saman.
- Veljið hvort þið viljið víkka töfluna út þannig að hún sýni einnig lántökugjald og annan þjónustukostnað. Sumir bankar vilja fá vitneskju um efnahag lánsúmsækjanda og greiðslugetu.

Veljið að þið ætlið að kaupa íbúð fyrir 30 000 000 og að þið eigið 10 000 000 kr. í eigið fé. Veljið launin 7 000 000 kr. á ári. Skráið þessar tölur í reiknivél sem reiknar lánskostnað og reiknið hvað þið eigið eftir þegar lánið hefur verið greitt upp.

### Nafnvextir

eru vextir inn- og útlána sem gefnir eru upp hverju sinni án tillits til verðlagsbreytinga.

# Virðisbreyting

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út endurtekna hækkun í prósentum og endurtekna lækkun í prósentum

Stundum endurtekur prósentuhækkun sig aftur og aftur. Verðgildi, verð eða laun geta hækkað eða lækkað nokkrum sinnum. Í hvert sinn breytist viðmiðunartalan. Þá breytum við einnig gildinu sem er 100%.

## Sýnidæmi 16

María keypti notaðan bíl á 2 500 000 kr. Fyrstu tvö árin lækkaði verðgildi bílsins um 20% á ári og næstu þrjú árin um 4% á ári. Hvert var verðgildi bílsins eftir fimm ár?

### Tillaga að lausn 1

Tvö fyrstu árin er verðgildi bílsins  $(100-20)\% = 80\%$  af verðgildi hans árið á undan.

$$80\% = 0,80$$

$$2\,500\,000 \text{ kr.} \cdot 0,80 \cdot 0,80 = \underline{1\,600\,000 \text{ kr.}}$$

Næstu þrjú árin er verðgildi bílsins  $(100 - 4)\% = 96\%$  af verðgildi bílsins árið á undan.

$$96\% = 0,96$$

$$1\,600\,000 \text{ kr.} \cdot 0,96 \cdot 0,96 \cdot 0,96 \approx \underline{1\,420\,000 \text{ kr.}}$$

Verðgildi bílsins eftir fimm ár er um það bil 1 420 000 kr.

### Tillaga að lausn 2

$$2\,500\,000 \text{ kr.} \cdot 0,80^2 \cdot 0,96^3 \approx \underline{1\,420\,000 \text{ kr.}}$$

Verðgildi bílsins eftir fimm ár er um það bil 1 420 000 kr.

Þegar verð lækkar er vaxtaþrósentan minni en 1.

**1.72** Jósef safnar gömlum íkonum (trúarleg málverk sem máluð eru á tré). Árið 2014 var verðgildi safnsins 1 600 000 kr. Verðgildi þess eykst um 5% á ári.

- Hvers virði var íkonasafnið árið 2015?
- Hvers virði verður safnið 5 árum eftir 2015.



Flott, þá þurfum við aðeins að borga 22 000 kr.

Sjónvarp kostaði 110 000 kr. Það var selt með 50% afslætti. Síðasta sölundag var verðið lækkað um 30% til viðbótar.

Nei, við þurfum að borga 38 500 kr.

50% + 30% er auðvitað 80% afsláttur.

A



B



C



**1.73** Hver krakkanna hér fyrir ofan hefur rétt fyrir sér?

**1.74** Þegar Emma fæddist lagði amma hennar 200 000 kr. inn á reikning með 2,1% vöxtum. Inneignin á að standa óhreyfð með óbreyttum vöxtum þar til Emilía verður 18 ára. Hvað verður þá mikið inni á reikningnum?

**1.75** Á ákveðnu tímabili var 10% árleg verðhækkun á gulli. Hversu mikið hækkaði verðið þá á tveimur árum?

**1.76** Sumarbústaður hækkaði í verði frá 13 500 000 í 15 000 000 á einu ári. Bústaðurinn hélt áfram að hækka í verði um jafn háa prósentu í fjögur ár. Hvert var verðgildi bústaðarins eftir fjögur ár?

**1.77** Í Undralandi var árleg launahækkun í nokkur ár milli 3,6% og 5,8%. Árslaun voru í upphafi þessa tímabils 4 000 000 kr. Finndu bilið sem launin gátu verið á eftir sex ár.

**1.78** Nýr jeppi kostaði fyrir mörgum árum 3 420 000 kr. Fyrsta árið féll bíllinn í verði um 30%. Næstu fjögur árin lækkaði verðgildi bílsins enn frekar um 5% á ári. Hvers virði var jeppinn eftir fimm ár?

**1.79** Vélhjól kostaði fyrir nokkrum árum 250 000 kr. Eftir eitt ár hafði það lækkað um 25% og eftir tvö ár um 15% í viðbót. Næstu tvö árin lækkaði verðið enn frekar um 4% á ári. Finndu verðgildi vélhjólsins eftir fjögur ár.

**1.80** Vélhjól kostaði nýtt 409 000 kr. Verðgildi þess lækkaði um það bil um 10% á ári. Mjög eftirsótt gömul vélhjólategund kostaði eitt árið 225 000 kr. og hækkaði í verði um 5% á ári. Notaðu töflureikni og finndu út hve langur tími líður áður en vélhjólin tvö eru jafn mikils virði.

# Í stuttu máli

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																																																			
<p><b>reiknað út laun og skatt</b></p>	<p>Jakob hafði 330 000 kr. í brúttólaun á mánuði. Iðgjald í lífeyrissjóð var 4%, hann borgaði 37,13% í skatt. Stéttarfélagsgjaldið var 1,5%. Hvað fékk Jakob útborgað á mánuði?</p>	<p>Brúttólaun            - iðgjald í lífeyrissjóð            = skattstofn</p> <p style="text-align: right;">330 000 kr.            - 330 000 kr. · 0,04 = - 13 200 kr.            = skattstofn 316 800 kr.</p> <p>Skattstofn            - skattur            + persónuafsláttur            = laun eftir skatt            - stéttarfélagsgjöld            = nettólaun</p> <p style="text-align: right;">316 800 kr.            - 316 800 kr. · 0,3713 = - 117 628 kr.            + persónuafsláttur +51 920 kr.            = laun eftir skatt 251 092 kr.            - 0,015 · 330 000 = - 4950 kr.            = 246 142 kr.</p> <p><u>Jakob fær 246 142 kr. útborgað á mánuði.</u></p>																																																			
<p><b>notað töflureikni til að gera skilmerkilega fjárhagsáætlun</b></p>	<p>Rósa gerði áætlun um fjárhag sinn fyrir næstu viku. Hún vinnur sér inn 4000 kr. á viku, er með 8000 kr. í laun fyrir laugardagsvinnuna og 3000 kr. fyrir að gæta hunds Mús frænda. Hún gerir ráð fyrir að hún muni nota 2600 kr. í bíóferðir, 2000 kr. í strætó, 4000 kr. í mat og drykki, 1000 kr. til að kaupa blað, 1400 kr. í tónlist og 4000 kr. á tónleika.</p> <p>Notaðu töflureikni til að gera fjárhagsáætlun Rósu fyrir næstu viku.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td colspan="2">Fjárhagsáætlun Rósu</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Texti</td> <td>Tekjur</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Vasapeningar</td> <td>4 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>Passa hund</td> <td>3 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>Laugardagsvinna</td> <td>8 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>Samtals tekjur</td> <td>15 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>Texti</td> <td>Gjöld</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>Bíó</td> <td>2 600 kr.</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>Strætó</td> <td>2 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>Matur og drykkur</td> <td>4 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>Blað</td> <td>1 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>Tónlist</td> <td>1 400 kr.</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>Tónleikar</td> <td>4 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>Samtals gjöld</td> <td>15 000 kr.</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	1	Fjárhagsáætlun Rósu		2			3	Texti	Tekjur	4	Vasapeningar	4 000 kr.	5	Passa hund	3 000 kr.	6	Laugardagsvinna	8 000 kr.	7	Samtals tekjur	15 000 kr.	8			9	Texti	Gjöld	10	Bíó	2 600 kr.	11	Strætó	2 000 kr.	12	Matur og drykkur	4 000 kr.	13	Blað	1 000 kr.	14	Tónlist	1 400 kr.	15	Tónleikar	4 000 kr.	16	Samtals gjöld	15 000 kr.
	A	B																																																			
1	Fjárhagsáætlun Rósu																																																				
2																																																					
3	Texti	Tekjur																																																			
4	Vasapeningar	4 000 kr.																																																			
5	Passa hund	3 000 kr.																																																			
6	Laugardagsvinna	8 000 kr.																																																			
7	Samtals tekjur	15 000 kr.																																																			
8																																																					
9	Texti	Gjöld																																																			
10	Bíó	2 600 kr.																																																			
11	Strætó	2 000 kr.																																																			
12	Matur og drykkur	4 000 kr.																																																			
13	Blað	1 000 kr.																																																			
14	Tónlist	1 400 kr.																																																			
15	Tónleikar	4 000 kr.																																																			
16	Samtals gjöld	15 000 kr.																																																			

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																																																							
<p><b>gert greinargott bókhald í töflureikni</b></p>	<p>Helga skoðaði fjárhag sinn í síðustu viku. Þann 14. sept. átti hún 26 860 kr. í bankanum, 15. sept. borgaði hún fyrir kaffihúsaveitingar 1580 kr., þann 16. sept. fékk hún 4000 kr. í vasapeninga. Hún keypti heyrnartól þann 17. sept. sem kostuðu 10 580 kr. og þann 18. sept. keypti hún mat fyrir 2900 kr. Hún passaði barn 19. sept. og fékk 5000 kr. fyrir það og þann 20. sept. keypti hún minniskubb fyrir 5960 kr.</p> <p>Gerðu greinargott bókhald yfir tekjur og gjöld Helgu í umræddri viku.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Dags</td> <td>Texti</td> <td>Gjöld</td> <td>Tekjur</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>14. sept.</td> <td>Inneign 14.09</td> <td></td> <td>26 860 kr.</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>15. sept.</td> <td>Kaffi</td> <td>1 580 kr.</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16. sept.</td> <td>Vasapen.</td> <td></td> <td>4 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>17. sept.</td> <td>Heyrnartól</td> <td>10 580 kr.</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>18. sept.</td> <td>Matur</td> <td>2 900 kr.</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>19. sept.</td> <td>Passa barn</td> <td></td> <td>5 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>20. sept.</td> <td>Minniskubbur</td> <td>5 960 kr.</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td></td> <td>Samtals</td> <td>21 020 kr.</td> <td>35 860 kr.</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> <td>Inneign 21.09</td> <td></td> <td>14 840 kr.</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	1	Dags	Texti	Gjöld	Tekjur	2	14. sept.	Inneign 14.09		26 860 kr.	3	15. sept.	Kaffi	1 580 kr.		4	16. sept.	Vasapen.		4 000 kr.	5	17. sept.	Heyrnartól	10 580 kr.		6	18. sept.	Matur	2 900 kr.		7	19. sept.	Passa barn		5 000 kr.	8	20. sept.	Minniskubbur	5 960 kr.		9		Samtals	21 020 kr.	35 860 kr.	10		Inneign 21.09		14 840 kr.
	A	B	C	D																																																					
1	Dags	Texti	Gjöld	Tekjur																																																					
2	14. sept.	Inneign 14.09		26 860 kr.																																																					
3	15. sept.	Kaffi	1 580 kr.																																																						
4	16. sept.	Vasapen.		4 000 kr.																																																					
5	17. sept.	Heyrnartól	10 580 kr.																																																						
6	18. sept.	Matur	2 900 kr.																																																						
7	19. sept.	Passa barn		5 000 kr.																																																					
8	20. sept.	Minniskubbur	5 960 kr.																																																						
9		Samtals	21 020 kr.	35 860 kr.																																																					
10		Inneign 21.09		14 840 kr.																																																					
<p><b>útskýrt útreikninga og gert grein fyrir fjárhagsáætlun og bókhaldi</b></p>	<p>Gerðu grein fyrir fjárhagsáætlun Rósu á blaðsíðunni á undan.</p>	<p>Rósa notaði töflureikni til að gera fjárhagsáætlun fyrir næstu viku.</p> <p>Áætlunin sýnir hve mikla peninga hún hafði hugsað sér að vinna sér inn og nota í næstu viku. Hún vissi að vasapeningar, laugardagsvinnan og að gæta hundsins myndi samtals nema um það bil 15 000 kr.</p> <p>Í vikunni á eftir þurfti hún að kaupa strætómiða. Hún ætlaði í bíó og á tónleika og þar að auki notaði hún venjulega einhverja peninga til að hlaða niður tónlist, kaupa mat og drykki og eitt blað fyrir helgina. Þess vegna gerði hún ráð fyrir að gjöldin yrðu um það bil 15 000 kr.</p>																																																							
<p><b>reiknað út vexti af inneign</b></p>	<p>Hve mikið færðu í vexti ef þú átt 246 000 kr. í banka og ársvextir eru 4,5% miðað við</p> <p><b>a</b> eitt ár  <b>b</b> tíu mánuði  <b>c</b> 175 daga</p>	<p><b>a</b> <math>246\,000 \text{ kr.} \cdot 0,045 = \underline{11\,070 \text{ kr.}}</math>  <u>Ég fæ 11 070 kr. í vexti eftir eitt ár.</u></p> <p><b>b</b> <math>246\,000 \text{ kr.} \cdot 0,045 \cdot \frac{10}{12} = \underline{9225 \text{ kr.}}</math>  <u>Ég fæ 9225 kr. í vexti eftir tíu mánuði.</u></p> <p><b>c</b> <math>246\,000 \text{ kr.} \cdot 0,045 \cdot \frac{175}{360} = \underline{5381 \text{ kr.}}</math>  <u>Ég fæ 5381 kr. í vexti eftir 175 daga.</u></p>																																																							

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																																																																																										
<b>reiknað út fjölda vaxtadaga</b>	Hve margir vaxtadagar eru frá inngreiðsludeginum 21. janúar 2015 til úttektardagsins 30. nóvember 2015?	<p>Í janúar (frá 21. jan.) 9 dagar</p> <p>Frá 1. febrúar til 1. nóvember eru 9 mánuðir, það eru <math>9 \cdot 30</math> dagar = 270 dagar</p> <p>Frá 1. nóv. - 30 nóv. 29 dagar</p> <p>Alls vaxtadagar = 308 dagar</p> <p>Það eru samtals <u>308 vaxtadagar frá inngreiðsludeginum 21. janúar til 30. nóv. þegar inneignin er tekin út.</u></p>																																																																																										
<b>reiknað með vaxtavöxtum</b>	Hanna setti 120 000 kr. á bankareikning sem bar 2% ársvexti. Hve háa upphæð gat hún tekið út eftir fjögur ár?	$H_4 = 120\,000 \text{ kr.} \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^4 = 129\,892 \text{ kr.}$ $H_4 = 120\,000 \text{ kr.} \cdot (1,02)^4 = 129\,892 \text{ kr.}$ <p>Hanna gat tekið út <u>129 892 kr. eftir fjögur ár.</u></p>																																																																																										
<b>reiknað út neyslu</b>	<p>Pór greiddi mánaðarlega 2400 kr. fyrir farsímann, hann notaði 2900 kr. í strætó, 2600 kr. í bíó, 16 000 kr. í föt, 6000 kr. í gjafir og 18 000 kr. í stutt ferðalög. Pór er með persónuafslátt.</p> <p><b>a</b> Hver eru útgjöld Pórs á ári?</p> <p><b>b</b> Að minnsta kosti hve margar klukkustundir á ári þarf Pór að vinna til að eiga fyrir útgjöldunum ef tímalaun hans eru 3300 kr.?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Texti</td> <td>Útgjöld á mánuði</td> <td>1</td> <td>Texti</td> <td>Útgjöld á mánuði</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Sími</td> <td>2 400 kr.</td> <td>2</td> <td>Sími</td> <td>2 400</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Straetó</td> <td>2 900 kr.</td> <td>3</td> <td>Straetó</td> <td>2 900</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Bíó</td> <td>2 600 kr.</td> <td>4</td> <td>Bíó</td> <td>2 600</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>Föt</td> <td>16 000 kr.</td> <td>5</td> <td>Föt</td> <td>16 000</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>Gjafir</td> <td>6 000 kr.</td> <td>6</td> <td>Gjafir</td> <td>6 000</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>Ferðalok</td> <td>18 000 kr.</td> <td>7</td> <td>Ferðalok</td> <td>18 000</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>Samtals</td> <td>47 900 kr.</td> <td>8</td> <td>Samtals</td> <td>=SUM(B2:B7)</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td></td> <td></td> <td>9</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>Mánuðir</td> <td>Útgjöld á ári</td> <td>10</td> <td>Mánuðir</td> <td>Útgjöld á ári</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>12</td> <td>574 800 kr.</td> <td>11</td> <td>12</td> <td>=A11*B8</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>Tímalaun</td> <td>3 300 kr.</td> <td>12</td> <td>Tímalaun</td> <td>3 300</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>Fjöldi vinnustunda</td> <td>174,2</td> <td>13</td> <td>Fjöldi vinnustunda</td> <td>=B11/B12</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td>14</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p><b>a</b> Útgjöld Pórs eru 574 800 kr. á ári.</p> <p><b>b</b> Pór þarf að vinna að minnsta kosti í 175 klst. á ári til að eiga fyrir mánaðarlegum útgjöldum sínum.</p>		A	B		A	B	1	Texti	Útgjöld á mánuði	1	Texti	Útgjöld á mánuði	2	Sími	2 400 kr.	2	Sími	2 400	3	Straetó	2 900 kr.	3	Straetó	2 900	4	Bíó	2 600 kr.	4	Bíó	2 600	5	Föt	16 000 kr.	5	Föt	16 000	6	Gjafir	6 000 kr.	6	Gjafir	6 000	7	Ferðalok	18 000 kr.	7	Ferðalok	18 000	8	Samtals	47 900 kr.	8	Samtals	=SUM(B2:B7)	9			9			10	Mánuðir	Útgjöld á ári	10	Mánuðir	Útgjöld á ári	11	12	574 800 kr.	11	12	=A11*B8	12	Tímalaun	3 300 kr.	12	Tímalaun	3 300	13	Fjöldi vinnustunda	174,2	13	Fjöldi vinnustunda	=B11/B12	14			14		
	A	B		A	B																																																																																							
1	Texti	Útgjöld á mánuði	1	Texti	Útgjöld á mánuði																																																																																							
2	Sími	2 400 kr.	2	Sími	2 400																																																																																							
3	Straetó	2 900 kr.	3	Straetó	2 900																																																																																							
4	Bíó	2 600 kr.	4	Bíó	2 600																																																																																							
5	Föt	16 000 kr.	5	Föt	16 000																																																																																							
6	Gjafir	6 000 kr.	6	Gjafir	6 000																																																																																							
7	Ferðalok	18 000 kr.	7	Ferðalok	18 000																																																																																							
8	Samtals	47 900 kr.	8	Samtals	=SUM(B2:B7)																																																																																							
9			9																																																																																									
10	Mánuðir	Útgjöld á ári	10	Mánuðir	Útgjöld á ári																																																																																							
11	12	574 800 kr.	11	12	=A11*B8																																																																																							
12	Tímalaun	3 300 kr.	12	Tímalaun	3 300																																																																																							
13	Fjöldi vinnustunda	174,2	13	Fjöldi vinnustunda	=B11/B12																																																																																							
14			14																																																																																									
<b>gert útreikninga um notkun á kreditkortu</b>	<p>Pétur skuldaði 47 000 kr. á kreditkortinu sínu. Hann borgaði 1,6% vexti á mánuði.</p> <p><b>a</b> Hve mikið skuldaði Pétur eftir 9 mánuði ef hann borgaði ekki niður skuldina?</p> <p><b>b</b> Hve háir urðu þá ársvextirnir?</p>	<p><b>a</b> <math>47000 \text{ kr.} \cdot 1,016^9 = 54\,218 \text{ kr.}</math></p> <p><u>Pétur skuldaði um það bil 54 218 kr.</u></p> <p><b>b</b> Á einu ári, það er að segja 12 mánuðum, varð skuldin <math>47\,000 \text{ kr.} \cdot 1,016^{12} = 56\,862 \text{ kr.}</math> Vextirnir voru 9 862 kr.</p> $\frac{9862}{47\,000} = 0,2098 \approx 21\%$ <p><u>Ársvextirnir voru um það bil 21%.</u></p>																																																																																										



Dú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																																																																																										
<p><b>áttað þig á mismuninum á ólíkum tegundum lána</b></p>	<p>Útskýrðu mismuninn á jafngreiðsluláni og láni með jöfnum afborgunum út frá greiðsluupphæð, afborgunum og vöxtum.</p>	<p>Pegar greitt er af <i>jafngreiðsluláni</i> er sama upphæðin greidd á hverjum gjalddaga. Í byrjun er vaxtahluti greiðsluupphæðarinnar hár en afborganirnar lágar. Hluti afborgunarinnar í greiðsluupphæðinni hækkar og vaxtahlutinn lækkar eftir því sem líður á lánstímann.</p> <p><i>Lán með jöfnum afborgunum</i> er þannig að greiðsluupphæðirnar eru misháar. Afborganirnar af þessum lánum er föst stærð og vaxtahlutinn er þá hár í byrjun þegar lánið er hátt en minnkar eftir því sem líður á lánstímann. Greiðsluupphæðirnar fara því smám saman lækkandi.</p>																																																																																										
<p><b>reiknað út kostnað vegna lána með jöfnum afborgunum</b></p>	<p>Halla og Egill tóku lán með jöfnum afborgunum að fjárhæð 1 000 000 kr. sem greiða átti niður á fimm árum. Lánið var með árlegum afborgunum. Ársvextir voru 7%.</p> <p>Notaðu töflureikni og finndu hve mikið Halla og Egill þurftu að borga samtals vegna lánsins.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Lánsfjárhæð</td> <td>1 000 000 kr.</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Vextir</td> <td>7%</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Fjöldi ára</td> <td>5</td> <td>=B1/B3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Afborgun</td> <td>200 000 kr.</td> <td>=B7*\$B\$2</td> <td></td> <td>=C7+D7</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>Ár</td> <td>Eftirstöðvar</td> <td>Vextir</td> <td>Árl. afborganir</td> <td>Greiðsluupphæð</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>1</td> <td>1 000 000 kr.</td> <td>70 000 kr.</td> <td>200 000 kr.</td> <td>270 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>2</td> <td>800 000 kr.</td> <td>56 000 kr.</td> <td>200 000 kr.</td> <td>256 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>3</td> <td>600 000 kr.</td> <td>42 000 kr.</td> <td>200 000 kr.</td> <td>242 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>4</td> <td>400 000 kr.</td> <td>28 000 kr.</td> <td>200 000 kr.</td> <td>228 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>5</td> <td>200 000 kr.</td> <td>14 000 kr.</td> <td>200 000 kr.</td> <td>214 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>Alls</td> <td></td> <td>210 000 kr.</td> <td>1 000 000 kr.</td> <td>1 210 000 kr.</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td>=B7-\$B\$4</td> <td></td> <td></td> <td>=SUM(E7:E11)</td> </tr> </tbody> </table> <p>Halla og Egill þurftu að borga alls <u>1 210 000 kr.</u></p>		A	B	C	D	E	1	Lánsfjárhæð	1 000 000 kr.				2	Vextir	7%				3	Fjöldi ára	5	=B1/B3			4	Afborgun	200 000 kr.	=B7*\$B\$2		=C7+D7	5						6	Ár	Eftirstöðvar	Vextir	Árl. afborganir	Greiðsluupphæð	7	1	1 000 000 kr.	70 000 kr.	200 000 kr.	270 000 kr.	8	2	800 000 kr.	56 000 kr.	200 000 kr.	256 000 kr.	9	3	600 000 kr.	42 000 kr.	200 000 kr.	242 000 kr.	10	4	400 000 kr.	28 000 kr.	200 000 kr.	228 000 kr.	11	5	200 000 kr.	14 000 kr.	200 000 kr.	214 000 kr.	12	Alls		210 000 kr.	1 000 000 kr.	1 210 000 kr.	13						14		=B7-\$B\$4			=SUM(E7:E11)
	A	B	C	D	E																																																																																							
1	Lánsfjárhæð	1 000 000 kr.																																																																																										
2	Vextir	7%																																																																																										
3	Fjöldi ára	5	=B1/B3																																																																																									
4	Afborgun	200 000 kr.	=B7*\$B\$2		=C7+D7																																																																																							
5																																																																																												
6	Ár	Eftirstöðvar	Vextir	Árl. afborganir	Greiðsluupphæð																																																																																							
7	1	1 000 000 kr.	70 000 kr.	200 000 kr.	270 000 kr.																																																																																							
8	2	800 000 kr.	56 000 kr.	200 000 kr.	256 000 kr.																																																																																							
9	3	600 000 kr.	42 000 kr.	200 000 kr.	242 000 kr.																																																																																							
10	4	400 000 kr.	28 000 kr.	200 000 kr.	228 000 kr.																																																																																							
11	5	200 000 kr.	14 000 kr.	200 000 kr.	214 000 kr.																																																																																							
12	Alls		210 000 kr.	1 000 000 kr.	1 210 000 kr.																																																																																							
13																																																																																												
14		=B7-\$B\$4			=SUM(E7:E11)																																																																																							
<p><b>reiknað út endurtekna prósentuhækkun og endurtekna prósentulækkun</b></p>	<p><b>a</b> Snjósleði lækkaði í verði um 13% á ári. Nýr sleði kostaði 1 000 000 kr. Hvert var verðgildi snjósleðans sex árum síðar?</p> <p><b>b</b> Hlutabréfasjóður hækkaði í verði um 19% árlega í fjögur ár. Maður nokkur lagði 200 000 kr. í sjóðinn.  Hve mikið gat hann tekið úr sjóðnum að fjórum árum liðnum ef hækkunin hélst óbreytt?</p>	<p><b>a</b> Á hverju ári var verðgildið <math>(100 - 13)\% = 87\%</math> af verðgildi snjósleðans árið áður. <math>87\% = 0,87</math> <math>1\,000\,000\text{ kr.} \cdot 0,87^6 \approx 434\,000\text{ kr.}</math></p> <p><u>Verðgildi snjósleðans var um það bil 434 000 kr. sex árum síðar.</u></p> <p><b>b</b> Á hverju ári er virði peninganna <math>(100 + 19)\% = 119\%</math> af virði þeirra árið áður. <math>119\% = 1,19</math> <math>200\,000\text{ kr.} \cdot 1,19^4 \approx 400\,000\text{ kr.}</math></p> <p><u>Maðurinn gat tekið út um það bil 400 000 kr. að fjórum árum liðnum.</u></p>																																																																																										

# Bættu þig!

## Laun, fjárhagsáætlun og bókhald

Mundu eftir skattþrepunum og persónuafslætti.

**1.81** Leystu þetta verkefni með töflureikni. Smíðaverkstæðið Völundur þarf að gera launabókhald fyrir janúar 2016 fyrir smiðina sína fimm. Allir smiðirnir greiða skatt samkvæmt skattþrepum að frádregnum persónuafslætti.

**a** Gerðu launabókhald fyrirtækisins fyrir janúar 2016.

	A	B	C	D	E	F
1	Launabókhald Smíðaverkstæðisins Völundar fyrir janúar 2016					
2						
3	Skattur	37,13% og 38,35%				
4						
5	Smiður	Fjöldi klst.	Tímalaun	Mánaðarlaun fyrir skatt	Útreiknaður skattur	Mánaðarlaun eftir skatt
6	Þuríður	112	3500 kr.	392 000 kr.	94 312 kr.	297 688 kr.
7	Björn	120	3750 kr.			
8	Roy	150	4000 kr.			
9	Michel	160	4500 kr.			
10	Jón	105	4500 kr.			
11	Samtals	647				

**b** Hve mikið fékk hver smiður útborgað að meðaltali á mánuði?

**c** Breyttu skattþrosentunni í eitt skattþrep sem er 36%. Hver urðu þá meðallaunin eftir skatt hjá smiðunum fimm?

**1.82** Tómas þurfti að greiða 3000 kr. á mánuði í kostnað vegna farsímans, hann notaði 2500 kr. í strætó, 2500 kr. í bíó, 10 000 kr. í fatakaup, 4000 kr. í gjafir og 30 000 kr. í mat.

Hve mörg kvöld þarf hann að vinna til að eiga nóg fyrir útgjöldunum ef hann vinnur í fjórar klukkustundir á kvöldi og fær í laun 2600 kr. á klst.?

**1.83** Notaðu reiknivél fyrir neysluviðmið sem finna má á heimasíðu velferðarráðuneytisins og kannaðu hver er framfærslukostnaður stelpu og stráks á aldrinum 14–17 ára miðað við skynsamlega og eðlilega neyslu.

Notaðu töflureikni og finndu mismun á kostnaði stelpu og stráks á sama aldri 14–17 ára. Reiknaðu með mat og drykk, fötum og skóm, heilsuvörum, hreinlætisvörum, tómsundum og ferðakostnaði.

- 1.84** Ísak fluttist í heimavistarskóla þegar hann fór í framhaldsskóla. Hann setti upp fjárhagsáætlun í einn mánuð. Hann skráði peninga sem hann fékk og það sem hann notaði peningana í fyrsta mánuðinn.

Tekjur		Útgjöld	
styrkur frá ömmu	146 000 kr.	leiga	100 000 kr.
ferðastyrkur frá stóra bróður	10 000 kr.	matur	46 000 kr.
aukavinna	38 600 kr.	ferðir	8000 kr.
		föt og skór	11 980 kr.
		líkamsrækt	7980 kr.
		netið/sími	5180 kr.
		tómstundir	3100 kr.
		snyrtivörur	4700 kr.
		gjafir	7000 kr.

Gerðu bókhald fyrir þennan fyrsta mánuð og finndu hvort bókhald Ísaks var nákvæmt.

	A	B
1	Fjárhagsáætlun	Tekjur
2	Styrkur	146 000 kr.
3	Ferðastyrkur	10 000 kr.
4	Aukavinna	40 000 kr.
5	Alls	196 000 kr.
6		Útgjöld
7	Heimavist	100 000 kr.
8	Matur	40 000 kr.
9	Ferðir	10 000 kr.
10	Föt, skór	16 000 kr.
11	Líkamsrækt	8000 kr.
12	Netið og sími	6000 kr.
13	Tómstundir	4000 kr.
14	Snyrtivörur	4000 kr.
15	Annað	8000 kr.
16	Alls	196 000 kr.

- 1.85** Nonni fór með ömmu til Bjössa bakara. Þau keyptu vörur fyrir 3500 kr. Þau ákváðu að nýta sér tilboð Bjössa bakara og borða á staðnum. Hvað borguðu Nonni og amma samtals fyrir vörurnar?

### TILBOÐ

Enginn vsk. ef þú borðar á staðnum!

- 1.86** Bíómiðar og aðgangsmiðar á dansleik bera 24% virðisaukaskatt.

- Aðgangsmiði fyrir Gunnu á dansleik kostaði 3000 kr. Hvað kostaði miðinn án vsk.?
- Bíómiði kostaði 1200 kr. með vsk. fyrir fullorðinn og 700 kr. fyrir barn. Jón og Gunna fóru á bíó með börnin sín tvö einn sunnudaginn. Hvað kostuðu miðarnir án vsk.?

Afreikningur vsk. af heildarverði  
19,35% vegna 24% vsk.  
9,91% vegna 11% vsk.

- 1.87** Ísleifur fór í skemmtigarð eitt sumarið í Reykjavík.

- Við innganginn stóð: Verð 3690 kr., þar af vsk. 714 kr. Hve mörg prósent var virðisaukaskatturinn?
- Í skemmtigarðinum keypti Ísleifur gos á 300 kr. Hvað stóð á kvittuninni að vsk. væri margar krónur?
- Ísleifur keypti minjagrip á 1350 kr. Hver var virðisaukaskatturinn í krónum?



## Lán og sparnaður

**1.88** Jens og Gauti fóru í sportvörubúð og keyptu sams konar gönguskó. Verðið á skónum nam 8% af mánaðarlaunum Jens en aðeins 6% af mánaðarlaunum Gauta. Jens vann sér inn 180 000 kr. á mánuði. Hver voru mánaðarlaun Gauta?

**1.89** Arna keypti sér bát og fékk lán með jöfnum afborgunum í banka. Lánsupphæðin var 700 000 kr. Hún greiddi lánið á fimm árum með árlegri afborgun. Ársvextirnir voru 9%. Gerðu afborgunaráætlun fyrir Örnu í töflureikni. Tilgreindu eftirstöðvar af láninu, vaxtaupphæðina, afborgunina, heildarkostnað á hverju ári og hversu mikið hún hafði borgað þegar hún hafði greitt upp lánið eftir 5 ár.

**1.90** Heiðrún ætlaði að kaupa nýtt sjónvarpstæki á 180 000 kr. Hún fékk tilboð um lán sem á að greiða niður á tíu mánuðum með 18 000 kr. afborgun á mánuði. Vextirnir voru 2,5% á mánuði.

- Notaðu töflureikni og gerðu afborgunaráætlun fyrir Heiðrúnu. Tilgreindu eftirstöðvar af láninu, vaxtaupphæðina, afborgun, heildarkostnað í hverjum mánuði og hversu háar heildargreiðslur af sjónvarpinu voru eftir 10 mánuði.
- Sýndu heildarkostnaðinn af láninu í myndriti.
- Heiðrúnu fannst lánið heldur dýrt og fór í annan banka. Þar var henni boðið lán með 1,5% vöxtum á mánuði. Að öðru leyti voru lánin eins. Hve mikið sparaði hún með því að velja síðarnefnda bankann?

**1.91** Heildsali nokkur seldi matvörur. Verðlistinn var gefinn upp án virðisauka-skatts. Notaðu töflureikni og gerðu verðlista þar sem vsk. er innifalinn í verðinu. Matur var með 11% vsk.

**1.92** Eðvarð setti 45 000 kr. í banka og fékk 2,5% ársvexti.

- Hve mikið fékk hann í vexti eftir eitt ár og eftir þrjú ár?
- Hve mörg ár þurftu peningarnir að liggja í bankanum óhreyfðir til þess að Eðvarð gæti tekið út að minnsta kosti 60 000 kr.?

Matvörur	Verð án vsk.
Hrökkbrauð	225 kr.
Baunir	104 kr.
Fiskibuff	385 kr.
Lasagnapakki	399 kr.
Pasta	182 kr.
Súrsæt sósa	260 kr.
Kartöflumús	138 kr.
Súpujurtir	295 kr.
Eggjanúðlur	426 kr.
Svart te	225 kr.
Appelsínusafi	236 kr.
Sulta	438 kr.
Grænt te	236 kr.

- **1.93** Bekkjardeild nokkur ætlaði að safna fyrir skólaferðalagi. Nemendurnir ákváðu að framleiða sápu til að selja. Til að búa til og pakka inn sápu þurfti:

Efni	Verð án vsk.
Sápu grunn, 5 kg	6250 kr.
Illmolíu, lavenderilm, 10 ml	640 kr.
Illmolíu, liljuilm, 10 ml	520 kr.
Litarefni (3 glös matarlit)	1200 kr.
Sápuform úr plasti	2800 kr.
Plastfilmu	500 kr.
Sellófan	1000 kr.
Gjafabönd	500 kr.



- Nemendurnir keyptu inn allar vörurnar í töflunni til að geta byrjað að framleiða sápu. Notaðu töflureikni og reiknaðu út hvað þau þurftu að borga fyrir hverja vöru með vsk. og heildarsummu með vsk.
- Sápuhnar sem nemendurnir framleiddu áttu að vera 100 g á þyngd. Finndu verðið sem þau þurftu að selja hverja sápu á ef ekki átti að vera tap á framleiðslunni.
- Reiknaðu heildarhagnað af sápuframleiðslunni ef nemendurnir seldu hverja sápu á 500 kr.

- 1.94** Notaðu töflureikni. Hve margir vaxtadagar eru:

- frá 9. janúar til 30. október
- frá 25. febrúar til 5. nóvember

- 1.95** Hugsaðu þér að þú sért að leggja fyrir peninga með því að leggja inn á reikning í banka. Þú ætlar að bera saman 40 000 kr. inngreiðslu með 3% ársvöxtum og 35 000 kr. inngreiðslu með 4% ársvöxtum.

- Sýndu í töflureikni hvernig peningaupphæð þín stækkar árlega í tíu ár.
- Hve lengi þurfa upphæðirnar tvær að standa óhreyfðar í bankanum þar til þú átt um það bil jafn mikið á báðum bankareikningunum.

- 1.96** Elías og Edda tóku lán með jöfnum afborgunum að fjárhæð 3 000 000 kr. Lánið átti að greiða niður á tíu árum. Ársvextir voru 4% og afborgun var einu sinni á ári. Notaðu töflureikni og finndu heildarkostnaðinn af láninu þegar það var að fullu greitt.



## Virðisbreyting

**1.97** Íþróttavöruverslun seldi hjól á 50 000 kr. Þegar leið á sumarið var ákveðið að lækka verðið um 25%. Nokkru síðar var verðið aftur lækkað um 10% af hinu niðursetta verði.

Hvað kostaði hjólið eftir þetta?

**1.98** Gróa og Geir keyptu fyrir löngu bát á 2 000 000 kr. Á hverju ári lækkar verðgildi bátsins um 8%.

Hvert var verðgildi bátsins eftir 3 ár, 5 ár og 10 ár?

**1.99** Lítil íbúð kostaði fyrir mörgum árum 12 000 000 kr. Hún hækkaði í verði um 5% á hverju ári.

Hvert var verðgildi íbúðarinnar eftir 2 ár, 5 ár og 8 ár?

**1.100** Fyrir mjög mörgum árum keypti listaverkasafnari listaverk fyrir 5 000 000 kr. Á hverju ári hækkuðu listaverkin um u.þ.b. 10%.

Hvers virði voru listaverkin eftir 1 ár, 5 ár, 10 ár og 20 ár?

● **1.101** Arnór vann sér inn 2200 kr. á klst. Yfirmaðurinn hækkaði launin um 10% en viku seinna sá hann eftir öllu saman og lækkaði launin um 10%.

Hver voru tímalaun Arnórs eftir þetta?

● **1.102** Verð á jakka var hækkað um 30%. Nokkrum vikum síðar var jakkinn auglýstur á upphaflega verðinu.

Um hve mörg prósent var verðið þá lækkað?

● **1.103** Baldur keypti hengirúm með 30% afslætti. Eftir að hafa notað hengirúmið um hríð var hann svo ánægður með það að hann keypti annað til að gefa kærustunni sinni. Að þessu sinni hafði verðið verið lækkað um 50% af upphaflega verðinu. Baldur borgaði samtals 5400 kr. fyrir bæði hengirúmin.

Hvert var upprunalega verðið á hengirúminu?



# Þjálfðu hugann

- 1.104** Í apríl fyrir nokkrum árum hækkaði íþróttaverslun verð á hjóli um 10%. Í september sama ár lækkaði verslunin verðið á sama hjóli um 10%.
- a** Hvert var verðið í september? Er verðið það sama í september og það var í apríl?
  - b** Hvað hefði hjólið kostað ef verðið í apríl hefði fyrst verið lækkað um 10% og því næst hækkað í september um 10%?
- 1.105** Lárus fór einu sinni sem oftar í verslunarferð. Í einni versluninni stóð á veggspjaldi: „Helmingsafsláttur af útsöluverði á öllum peysum!“ Hann fann peysu með 25% afslætti.
- Hve mörg prósent afslátt samtals fékk Lárus af verði peysunnar?
- 1.106** Bátasali seldi tvo báta, báða fyrir 450 000 kr. Annan bátinn seldi hann með 25% tapi en hann græddi 25% á sölu hins bátsins.
- a** Hvert var upphaflegt verð bátanna?
  - b** Hvert var tapið eða gróðinn í peningum?
- 1.107** Matvöruverslun auglýsti að matvöruverðið hefði verið lækkað um upphæð sem nam virðisaukaskattinum. Vitað var að matvöruverslunin þurfti að greiða vsk. til skattayfirvalda. Berðu saman eldra verðið og nýja verðið án vsk.
- Um hve mörg prósent var varan lækkuð?
- 1.108** Fataverslun seldi buxur á 6000 kr. Næsta dag lækkaði verslunin verðið á buxunum um 10%. Daginn eftir hækkaði verslunin verðið aftur um 10%. Þannig var verðið ýmist hækkað eða lækkað um 10% á hverjum degi í alls tuttugu daga.
- Hvert var verðið á buxunum eftir þetta?
- 1.109** Haraldur átti 47 000 kr. í banka á tveimur mismunandi reikningum. Hluti peninganna var á reikningi með 2% ársvöxtum. Afgangurinn af peningunum var á öðrum reikningi sem gaf 1,5% ársvexti. Eitt árið fékk Haraldur samtals 840 kr. í vexti.
- Hve há fjárhæð var á hvorum reikningi fyrir sig?







# Rúmfræði og hönnun

Erlenda orðið yfir rúmfræði er „geometri“. Ef það er þýtt beint merkir orðið „jarðmæling“. Í upphafi var það einmitt tilgangur „geometri“, að mæla og reikna út fjarlægðir og horn í tengslum við landslag og byggingarverkefni. Íslenska orðið „rúmfræði“ merkir einmitt fræðin sem fjalla um rúm eða rými hluta og umhverfis.





## Stærðfræðiorð

skammhlið  
langhlið  
Pýþagórasarregla  
einslögun  
hlutfall  
mælikvarði  
fjarvídd  
hvarfpunktur  
A-snið  
gullinsnið

?

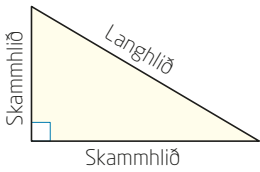
„Verð ég að klifra upp í fánastöngina til að mæla hvað hún er há?“  
spyr Óskar á meðan hann klórar sér í höfðinu með metrakvarðanum.

Hann fær svarið:  
„Að minnsta kosti ekki á meðan sólin skín og metrakvarðinn og fánastöngin kasta skugga!“

Hver getur verið skýringin á þessu svari?

Í kaflanum verða skoðuð helstu rúmfræðilegu fyrirbrigði og útreikningar sem eru notuð í tæknigreinum, arkitektúr, landafræði og listum.

# Þríhyrningareikningar



## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út óþekktar hliðar í réttthyrndum þríhyrningi
- reikna út hliðar í nokkrum sértílvikum þríhyrninga
- færa rök fyrir einslögum
- reikna út hliðar einslaga forma

### Skammhlið

Í réttthyrndum þríhyrningi kallast tvær styttri hliðarnar skammhliðar. Þessar tvær hliðar eru armar rétta hornsins í þríhyrningnum.

Þríhyrningurinn er sá marghyrningur sem hefur fæstar hliðar. Öllum öðrum marghyrningum er hægt að skipta í þríhyrninga. Þess vegna er þríhyrningurinn mikilvægt grunnform í rúmfræði. Þar sem við getum gert ýmsa útreikninga á þríhyrningum getum við einnig gert útreikninga á mörgum öðrum formum.

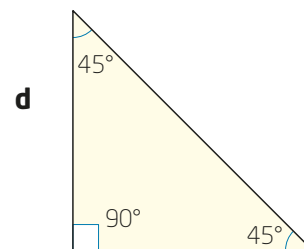
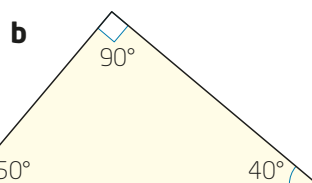
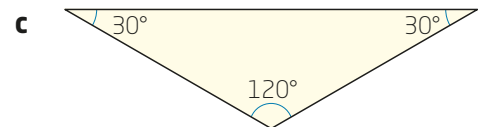
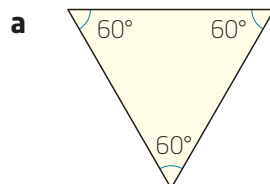
Þríhyrningar með mismunandi eiginleika og einkenni bera mismunandi heiti:

Jafnhliða	Jafnarma	Réttthyrndur	Gleiðhyrndur	Hvasshyrndur
Allar hliðar eru jafn langar.	Tvær hliðar eru jafn langar.	Eitt horn er $90^\circ$ .	Eitt horn er stærra en $90^\circ$ .	Öll hornin eru minni en $90^\circ$ .

### Langhlið

er lengsta hliðin í réttthyrndum þríhyrningi. Hún er mótlæg hlið rétta hornsins.

## 2.1 Hvers konar þríhyrningar eru þetta?





## Könnun á rétthyrndum þríhyrningi 1

### Þið þurfið

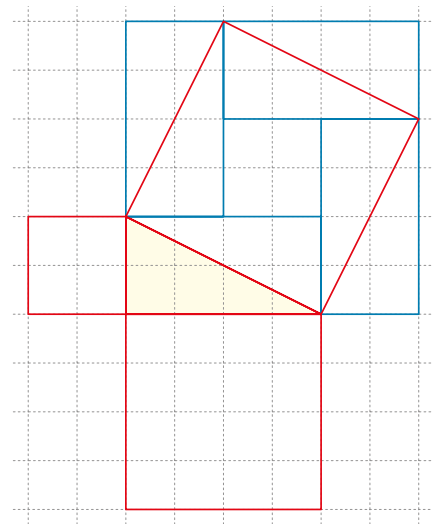
- rúðustrikað blað með  $1 \cdot 1$  cm rúðum
- reglustiku
- horn eða gráðuboga

### Aðferð

Notaðu línurnar í rúðunetinu til að teikna rétthyrndan þríhyrning á miðju blaðsins. Þú ræður stærðinni en þú átt að nota heila reiti.

Láttu hverja hlið í þríhyrningnum vera hlið í ferningi og teiknaðu ferningana þrjá út frá þríhyrningnum. Notaðu horn eða gráðuboga til að fá nákvæmlega  $90^\circ$  horn þar sem þú getur ekki notað reitina. Finndu flatarmál ferninganna þriggja með því að telja reitina.

Til að fá nákvæmt flatarmál ferningsins sem er út frá langhlið þríhyrningsins skaltu líta á hverja hlið sem hornalínu í rétthyrningi eins og bláu línurnar á myndinni sýna.



Skráðu niðurstöður allra í bekknum inn í töflu:

Nemandi	Flatarmál minnsta ferningsins	Flatarmál ferningsins í miðstærðinni	Flatarmál stærsta ferningsins

Skoðaðu tölurnar í töflunni.

Hvaða tengsl finnur þú milli flatarmála ferninganna þriggja?



## Könnun á rétthyrndum þríhyrningi 2

Notið rúmfræðiforrit til að teikna rétthyrndan þríhyrning.

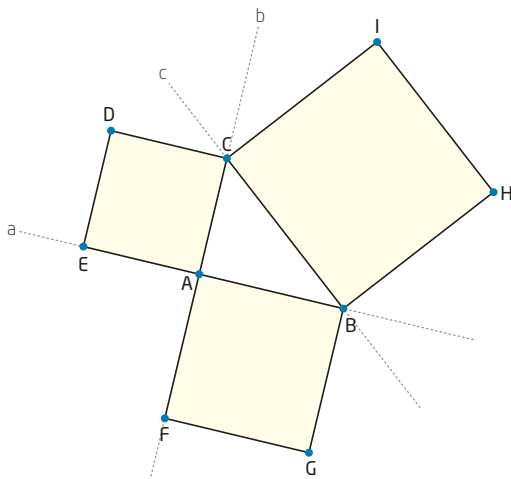
### Þið þurfið

- Tölvu með rúmfræðiforriti

### Aðferð

- Teiknaðu beina línu.
- Notaðu verkfærið „Hornrétt lína“ til að búa til  $90^\circ$  horn.
- Merktu punkt á hvora línu.
- Teiknaðu þríhyrning milli oddpunkts  $90^\circ$  hornsins og punktanna tveggja. Feldu síðan línurnar sem eru fyrir utan þríhyrninginn.

Notaðu verkfærið „reglulegur marghyrningur“ til að teikna fering út frá öllum hliðum þríhyrningsins.



Notaðu verkfærið „flatarmál“ til að mæla flatarmál feringanna þriggja.

Reiknaðu út summu flatarmála minni feringanna tveggja. Hvað kemur í ljós?

Breyttu formi og stærð hyrninganna með því að draga hornpunkta þríhyrningsins til. Taktu eftir hvernig flatarmálið breytist.

# Regla Pýþagórasar

Í verkefninu á blaðsíðunni á undan komu í ljós tengsl sem rakin eru til stærðfræðingsins og heimspekingsins Pýþagórasar sem var uppi um það bil 550 f.Kr. Þessi tengsl kallast *Pýþagórasarregla* og hún er notuð þegar lengdir tveggja hliða í rétthyrndum þríhyrningi eru þekktar og reikna á út lengd þriðju hliðarinnar.

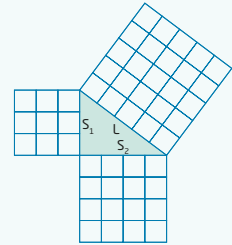


## Regla Pýþagórasar

Í rétthyrndum þríhyrningi er summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhliðinni.

$$\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$$

Reglan gildir einnig í hina áttina. Ef summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur er jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhliðinni er þríhyrningurinn rétthyrndur.



## Sýnidæmi 1

Í rétthyrndum þríhyrningi eru skammhliðarnar 2 cm og 5 cm á lengd. Finndu lengd langhliðarinnar.

### Tillaga að lausn 1

Við teiknum þríhyrninginn og notum ferningaaðferðina.

Við teiknum hjálparmynd og skráum málín sem eru þekkt, á hana. Síðan reiknum við flatarmál ferninganna sem eru út frá hliðunum sem þekktar eru.

Flatarmál ferningsins út frá langhliðinni:  
 $(4 + 25) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2$

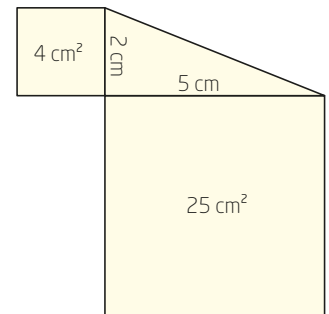
Ef við þekkjum flatarmál ferningsins getum við fundið hliðarlengdina með því að finna ferningsrót af flatarmálinu:

$$\sqrt{29} \approx 5,4$$

Langhliðin er um það bil 5,4 cm á lengd.

### Pýþagórasarregla

$$\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$$



### Tillaga að lausn 2

Við leysum dæmið  $\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$

$$l^2 = 2^2 + 5^2$$

$$l^2 = 4 + 25$$

$$l^2 = 29$$

$$l = \sqrt{29}$$

$$l \approx 5,4$$

Langhliðin er um það bil 5,4 cm á lengd.

Venjulega eru ekki notaðar mælieiningar inn í jöfnum.

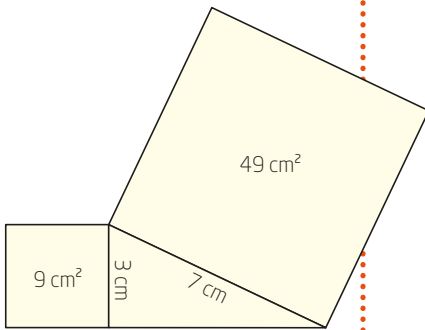
## Sýnidæmi 2

Í rétthyrndum þríhyrningi er langhliðin 7 cm og önnur skammhliðin er 3 cm. Hve löng er hin skammhliðin?

### Tillaga að lausn 1

Við teiknum þríhyrninginn og notum ferninga aðferðina.

Við teiknum hjálparmynd og skráum málín sem eru þekkt. Því næst reiknum við flatarmál ferninganna út frá þekktu hliðunum.



Flatarmál ferningsins sem er út frá annarri skammhliðinni:  
 $(49 - 9) \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$

Pegar við þekkjum flatarmál ferningsins getum við fundið hliðarlengdina með því að finna ferningsrótina af flatarmálinu:

$$\sqrt{40} \approx 6,3$$

Skammhliðin er um það bil 6,3 cm á lengd.

### Tillaga að lausn 2

Við leysum dæmin með jöfnu: langhlið<sup>2</sup> = skammhlið<sub>1</sub><sup>2</sup> + skammhlið<sub>2</sub><sup>2</sup>

$$7^2 = s^2 + 3^2$$

$$7^2 - 3^2 = s^2$$

$$s^2 = 49 - 9$$

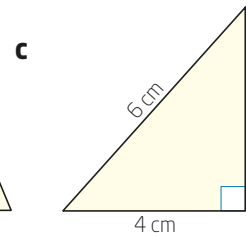
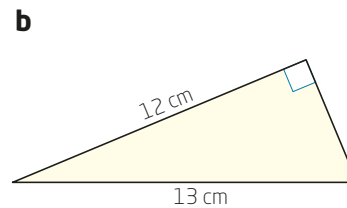
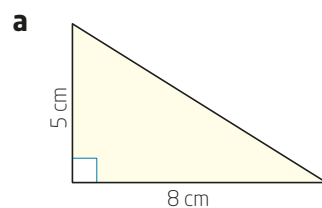
$$s^2 = 40$$

$$s = \sqrt{40}$$

$$s \approx 6,3$$

Skammhliðin eru um það bil 6,3 cm á lengd.

## 2.2 Finndu lengd þriðju hliðarinnar í þríhyrningunum.



## 2.3 Notaðu reglustiku og mældu lengd og breidd skólaborðsins þíns. Reiknaðu lengd hornalínunnar. Athugaðu hvort svar þitt er rétt með því að mæla hornalínuna á borðinu.



2.4 Athugaðu hvort þríhyrningarnir eru rétthyrndir. Hliðarlengdirnar eru:

- a 5 cm, 7 cm, 9 cm                      c 1,8 cm, 2,5 cm, 3,0 cm  
 b 8 m, 15 m, 17 m                      d 2,0 cm, 2,1 cm, 2,9 cm

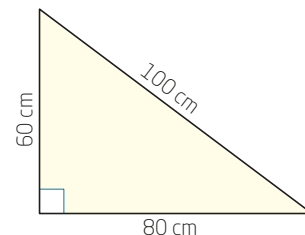
2.5 Notaðu töflureikni og reiknaðu út lengdir hliðanna sem vantar í rétthyrndu þríhyrningana hér á eftir:

	Skammhlið 1	Skammhlið 2	Langhlið
<b>Þríhyrningur 1</b>	12	9	
<b>Þríhyrningur 2</b>	9,5		10,7
<b>Þríhyrningur 3</b>	13,0		14,8

2.6 Húsgagnasmiðir og húsasmiðir þurfa oft að nota rétt horn þegar þeir smíða húsgögn eða byggja hús. Pýþagóríska þrenndin 60, 80, 100 er mikið notuð til að ganga úr skugga um að t.d. horn í herbergi séu rétt. Þá mælir maður 60 cm frá horninu eftir öðrum veggnum og 80 cm eftir hinum veggnum og merkir punktana. Ef hornið er  $90^\circ$  á að vera nákvæmlega 1 metri milli þessara tveggja punkta (einmitt pláss fyrir metrakvarðann í skólastofunni).

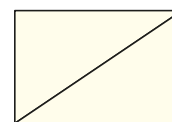
Pýþagórísk þrennd eru náttúrulegar tölur sem passa inn í Pýþagórasarregluna.

- a Rannsakaðu hvort eitthvert horn í kennslustofunni eða heima er  $90^\circ$  með því að nota pýþagóríska þrenndina 60, 80, 100.  
 b Finndu þrjár aðrar þrenndir sem þú getur notað til að kanna hvort horn er rétt.



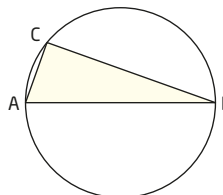
2.7 Bílskúr Ómars hefur rétthyrndan grunnflöt þar sem breiddin er 4 m og lengdin er 6 m.

Hversu löng er hornalínan?



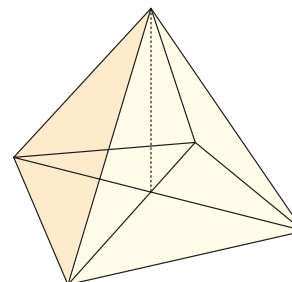
2.8 Þvermálið  $AB$  í hring er 12 cm á lengd. Á hringboganum er punkturinn  $C$  þar sem  $AC$  er 4 cm.

Hversu löng er hliðin  $BC$ ?



2.9 Grunnflötur píramída er ferningslaga með 8 m hlið. Hæð píramídans er 10 m.

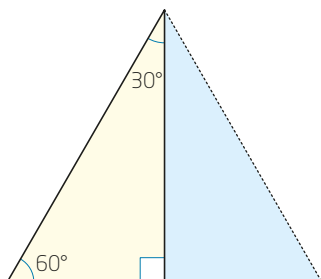
Finndu flatarmál eins hliðarflatarins.





## Pýþagórasarreglan og sérstakir þríhyrningar

Í réttthyrndum þríhyrningum þar sem hvössu hornin hafa ákveðin mál er hægt að nota Pýþagórasarregluna ásamt öðrum eiginleikum þríhyrninganna.



**2.10** Skoðaðu myndina til vinstri. Lóðrétta strikið skiptir stóra þríhyrningnum í tvo jafn stóra hluta.

- Hvers konar þríhyrningur er stóri þríhyrningurinn?
- Hvers konar þríhyrningur er blái þríhyrningurinn?
- Hve löng er styttri skammhliðin í bláa þríhyrningnum þegar hliðarlengdin í stóra þríhyrningnum er 10 cm?
- Hve löng er hliðin í stóra þríhyrningnum þegar styttri skammhlið bláa þríhyrningsins er 7 cm?
- Reiknaðu lengd hæðarinnar í þríhyrningunum í c-lið og d-lið.

Í þríhyrningi þar sem hornin eru  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$  er lengd langhliðarinnar tvöföld lengd styttri skammhliðarinnar.

### Sýnidæmi 3

Reiknaðu lengdir óþekktu hliðanna í þríhyrningnum.

#### Tillaga að lausn

Þar sem þetta er þríhyrningur með  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$  horn er lengd langhliðarinnar tvöföld lengd styttri skammhliðarinnar.

Við köllum styttri skammhliðina  $x$ . Þá er lengd langhliðarinnar  $2x$ .

Pýþagórasarreglan segir:

$$\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$$

$$(2x)^2 = 9^2 + x^2$$

$$4x^2 - x^2 = 9^2$$

$$3x^2 = 81$$

$$x^2 = \frac{81}{3}$$

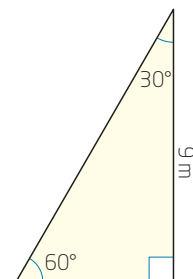
$$x^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27}$$

$$x \approx 5,2$$

$$2x \approx 10,4$$

Styttri skammhliðin er um það bil 5,2 m og langhliðin er um það bil 10,4 m.



**2.11** Í þríhyrningi með  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$  horn er lengri skammhliðin 14 cm.

Hver er lengd hinna hliðanna tveggja?

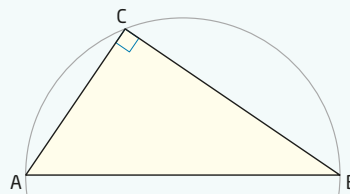
**2.12** Í töflunni hafa allir þríhyrningarnir  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$  horn.

Finndu málin sem vantar í töfluna.

	Stytttri skammhliðin	Lengri skammhliðin	Langhliðin
<b>Þríhyrningur 1</b>	6		
<b>Þríhyrningur 2</b>		12	
<b>Þríhyrningur 3</b>			16

### Regla Palesar

ABC er þríhyrningur þar sem AB er miðstrengur hring. Ef  $\angle C = 90^\circ$  liggur C á hringferlinum. Og öfugt: Ef C liggur á hringferlinum er  $\angle C 90^\circ$ .



**2.13** Hornin í þríhyrningnum ABC eru  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$ . Langhliðin er 10 cm.

**a** Notaðu reglu Palesar til að teikna þríhyrninginn með reglustiku og gráðuboga.

**b** Finndu flatarmál þríhyrningsins.

**2.14** Í þríhyrningi er langhliðin þreföld lengd styttri skammhliðarinnar.

Lengri skammhliðin er 7 m. Teiknaðu þríhyrninginn og finndu lengdir óþekktu hliðanna.

**2.15** Í rétthyrndum, jafnarma þríhyrningi er langhliðin 12 cm á lengd.

**a** Teiknaðu þríhyrninginn. Hvað eru hornin stór?

**b** Hversu langar eru skammhliðarnar?

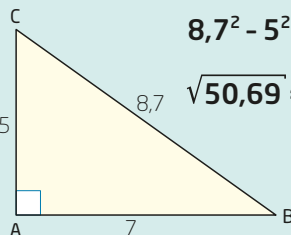
**2.16** Hvaða nemandi eða nemendur hafa rétt fyrir sér?

Þríhyrningurinn er rétthyrndur.

A

Þríhyrningurinn er ekki rétthyrndur.

B



$$8,7^2 - 5^2 = 75,69 - 25 = 50,69$$

$$\sqrt{50,69} \approx 7,1$$

Útreikningarnir eru ekki réttir.

C

Hornið A er gleitt.

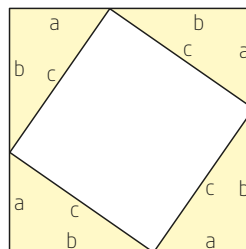
D

## Sönnun á Pýþagórasarreglunni

### Aðferð 1 - Endurröðun flatarmynda

#### Þið þurfið

- rúðustrikuð blöð - lituð og hvít með jafn stórum reitum
- skæri
- reglustiku



#### Aðferð 1

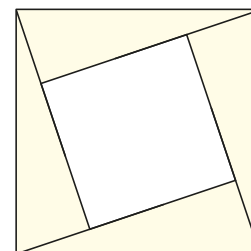
Klippað út tvo jafn stóra ferninga, einn hvítan og einn litaðan.

- 1 Merkið punkt af handahófi einhvers staðar á eina hlið litaða ferningsins. Snúið ferningnum  $90^\circ$  og merkið punkt á sams konar stað á næstu hlið. Endurtakið leikinn þar til þið hafið merkt punkt á allar hliðarnar.
- 2 Teiknið ferning þar sem hornin eru í punktum fjórum.
- 3 Klippið út þríhyrningana fjóra sem myndast í hornunum og leggið þá ofan á hvíta ferninginn eins og á myndinni.
- 4 Kallið skammhliðarnar í þríhyrningi a og b og langhliðina c.
- 5 Skráið með bókstöfum flatarmál hvíta ferningsins í miðjunni.
- 6 Flytjið lituðu þríhyrningana til þannig að þið fáið tvo gula rétthyrninga ofan á hvíta ferninginn.
- 7 Hvernig getur þú nú skrifað með bókstöfum flatarmál hvíta ferningsins?

#### Aðferð 2 - Algebruaðferð

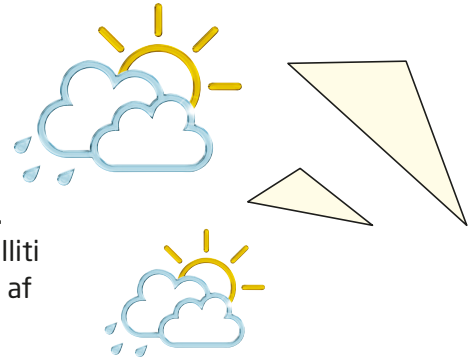
Skoðið myndina. Allir þríhyrningarnir eru rétthyrndir og jafn stórir. Kallið styttri skammhliðina  $a$ , lengri skammhliðina  $b$  og langhliðina  $c$ .

- 1 Skráið með bókstöfum flatarmál stóra ferningsins.
- 2 Skráið með bókstöfum flatarmál þríhyrninganna fjögurra.
- 3 Skráið með bókstöfum flatarmál litla ferningsins.
- 4 Finnið summu svaranna í lið 2 og lið 3 og einfaldið eins og hægt er.
- 5 Hver eru tengslin milli svaranna í lið 1 og lið 4.



## Að sýna einslögun

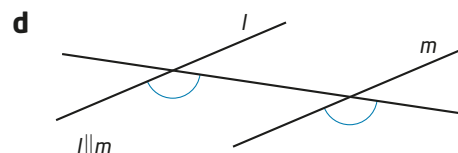
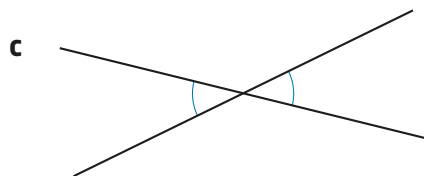
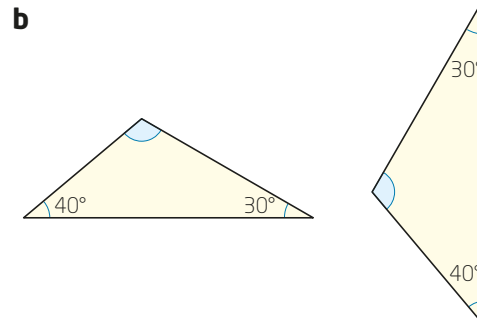
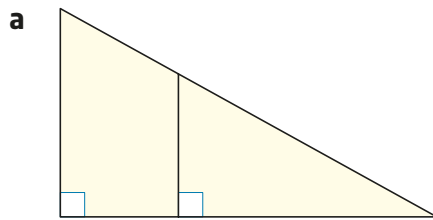
Skýjamyndirnar tvær hér til hægri eru einslaga vegna þess að myndirnar hafa sama form, það er að segja þær eru eins í laginu. Þær eru bara misstórar. Á sama hátt eru þríhyrningarnir tveir einslaga. Þótt annar sé stærri en hinn og honum hafi verið snúið lítillega með tilliti til hins er form þríhyrninganna alveg eins. Form þríhyrnings ákvarðast af hornunum.



Pegar ætlunin er að sýna fram á einslögun er gengið út frá hornunum. Við getum ekki mælt hornin en við getum útskýrt út frá uppgefnum málum og stærðfræðilegum tengslum hvers vegna hornin eru eins.

Tveir þríhyrningar eru einslaga ef samsvarandi horn þeirra eru jafn stór.

**2.17** Skoðu myndirnar. Útskýrðu hvers vegna hornin tvö sem merkt eru eins eru jafn stór.



$l \parallel m$  þýðir að  $l$  og  $m$  eru samsíða línur.

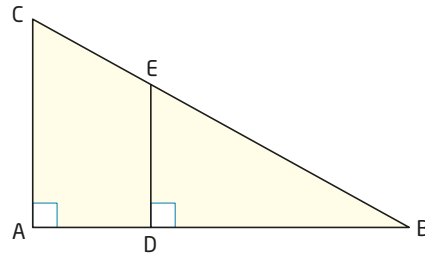
Tvö horn eru jafn stór ef

- þau hafa sama hornamál
- ef hægt er að reikna út að þau hafi sama hornamál
- þau geta fallið hvort ofan í annað
- þau eru topphorn
- þau eru einslaga horn við samsíða línur
- samsvarandi armar hornanna eru hornréttir hvor á annan

## Sýnidæmi 4

Táknið  $\sim$  merkir „hefur sömu lögun“ og/eða „er einslaga“

Sýndu að  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ .



### Tillaga að lausn

Við finnum tvö og tvö horn sem eru jafn stór.

$$\angle CAB = \angle EDB = 90^\circ$$

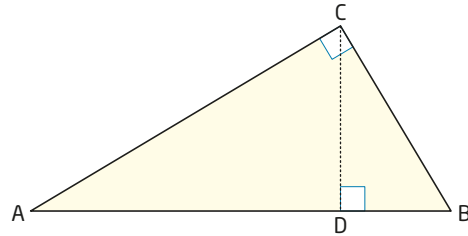
$\angle ABC = \angle DBE$  vegna þess að þetta horn er sameiginlegt báðum þríhyrningunum.

Þá er  $\angle ACB = \angle DEB$  vegna þess að hornasumma þríhyrnings er  $180^\circ$ .

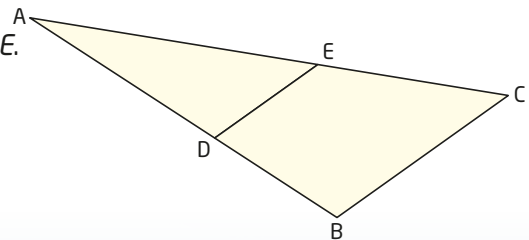
Þríhyrningarnir hafa tvö og tvö jafn stór horn eða öll horn jafn stór. Þess vegna er  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ .

**2.18 a** Sýndu að  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ .

**b** Sýndu að  $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ .

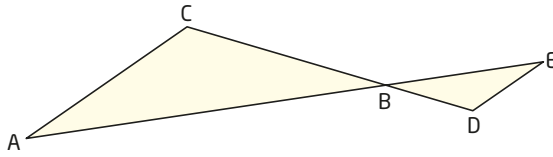


**2.19**  $DE \parallel BC$ . Sýndu að  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ .

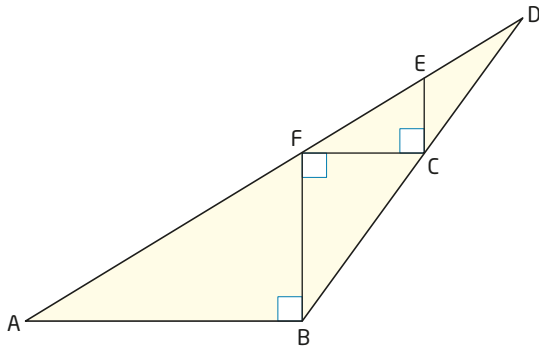




**2.20**  $AC \parallel DE$ . Sýndu að  $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ .



**2.21** Finndu dæmi um einslaga þríhyrninga á myndinni. Útskýrðu hvers vegna þeir eru einslaga.



**2.22** Prófaðu þetta verkefni bæði með hvasshyrndum og gleiðhyrndum þríhyrningi.

Teiknaðu óreglulegan þríhyrning,  $ABC$ . Finndu miðpunkt hversrar hliðar og kallaðu punktana  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Teiknaðu þríhyrninginn  $DEF$ .

- Hve margir einslaga þríhyrningar eru á myndinni sem þú teiknaðir? Útskýrðu svarið.
- Gildir svarið þitt í a-lið um alla hugsanlega þríhyrninga? Rökstyddu svarið.

**2.23** Fullyrðing hvaða nemanda er sönn?

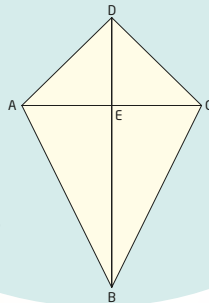
Allir þríhyrningarnir á myndinni eru einslaga.

**A**

Það eru þrjú pör af einslaga þríhyrningum á myndinni.

**B**

Á myndinni er  $BD$  miðperill  $AC$ .



Það eru tvö pör af einslaga þríhyrningum á myndinni.

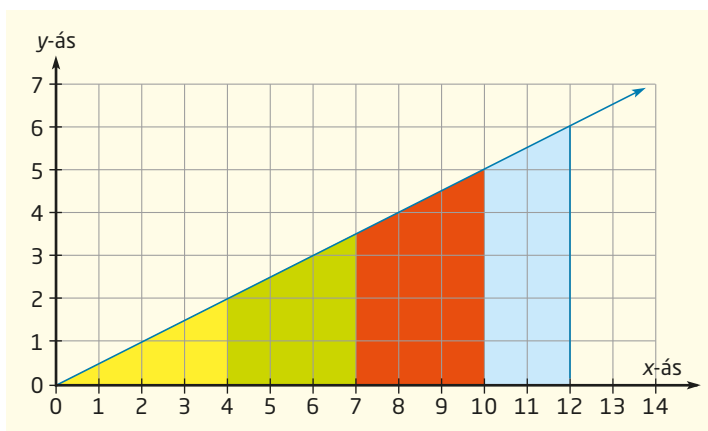
**C**

Á myndinni eru sex þríhyrningar sem eru allir einslaga.



## Að reikna lengdir út frá einslögum

Guli þríhyrningurinn liggur ofan á græna þríhyrningnum. Græni þríhyrningurinn liggur ofan á rauða þríhyrningnum o.s.frv.



Myndin sýnir fjóra einslaga þríhyrninga sem liggja hver ofan á öðrum. Taflan sýnir hlutföllin milli skammhliðanna tveggja í hverjum þríhyrningi.

	Lengri skammhliðin	Styttri skammhliðin	$\frac{\text{Lengri skammhliðin}}{\text{Styttri skammhliðin}}$
Gulur þríhyrningur	4	2	$\frac{4}{2} = 2$
Grænn þríhyrningur	7	3,5	$\frac{7}{3,5} = 2$
Rauður þríhyrningur	10	5	$\frac{10}{5} = 2$
Blár þríhyrningur	12	6	$\frac{12}{6} = 2$

**2.24** Notaðu þríhyrningana fjóra á myndinni efst á blaðsíðunni.

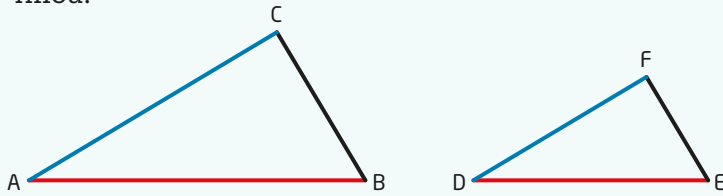
- Reiknaðu út lengdir langhliðanna fjögurra.
- Gerðu töflu eins og þá sem er hér til vinstri og fylltu hana út.
- Gerðu töflu eins og þá sem er í b-lið og finndu hlutfallið milli langhliðar og lengri skammhliðar í hverjum þríhyrningi.
- Veldu tvo af þríhyrningunum. Kallaðu annan þeirra þríhyrning 1 og hinn þríhyrning 2. Reiknaðu út þessi hlutföll:

	Langhlið	Styttri skammhlið	Langhlið Styttri skammhlið
Gulur þríhyrningur			
Grænn þríhyrningur			
Rauður þríhyrningur			
Blár þríhyrningur			

$$\frac{\text{Styttri skammhlið 1}}{\text{Styttri skammhlið 2}} \quad \frac{\text{Lengri skammhlið 1}}{\text{Lengri skammhlið 2}} \quad \frac{\text{Langhlið 1}}{\text{Langhlið 2}}$$

- Útskýrðu með eigin orðum hvað niðurstöðurnar merkja.

Í tveimur einslaga þríhyrningum er sama hlutfall milli samsvarandi hliða.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Þá gildir eftirfarandi:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

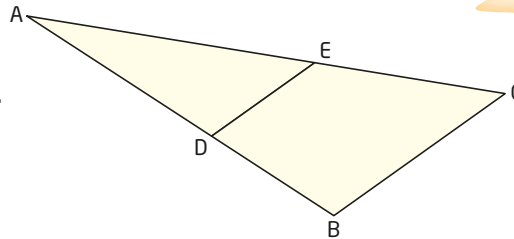
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

### Sýnidæmi 5

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ .

$AB = 7$  cm,  $AD = 4$  cm og  $DE = 3$  cm.

Reiknaðu lengd  $BC$ .



Þegar gefið er að þríhyrningarnir séu einslaga þurfum við ekki að sanna það.

#### Tillaga að lausn 1

Þar sem  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ,

þá er sama hlutfall milli samsvarandi hliða.

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{BC}{3} = \frac{7}{4}$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{BC}{\cancel{3}} = \frac{7}{4} \cdot 3$$

$$BC = \frac{21}{4}$$

$$BC = 5,25$$

$BC$  er 5,25 cm á lengd.

**2.25** Pétur mælir skugga fánastangarinnar og fær út 15 m. Þar næst stillir hann metrakvarðanum upp lóðrétt þannig að hann myndar  $90^\circ$  horn við jörðina. Hann mælir skugga metrakvarðans og fær út 1,25 m.

- Teiknaðu skissu af þessum atburði og skráðu málin á teikninguna.
- Hversu há er fánastöngin?



**2.26** Kamilla á dúkkuhús úti í garði sem er 2,75 m á breidd og 3,85 m á lengd. Hæð upp í mæni er 2,20 m.

Afi ætlar að smíða hundakofa með sömu lögun og dúkkuhúsið.

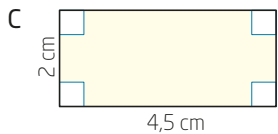
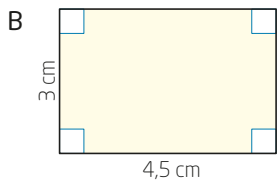
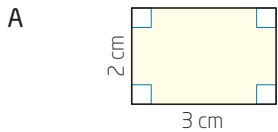
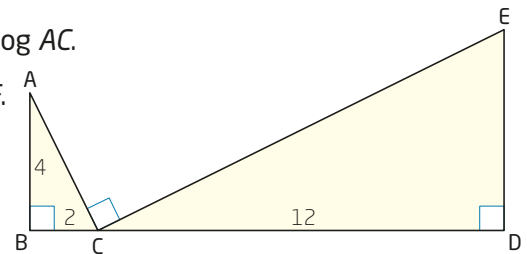
Hver verður lengd og breidd hundakofans ef hæð upp í mæni verður 80 cm?

**2.27 a** Sýndu að  $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ .

**b** Finndu lengdir hliðanna  $DE$ ,  $CE$  og  $AC$ .

**c** Reiknaðu út lengdina frá  $A$  til  $E$ .

**d** Hafa  $\triangle ACE$ ,  $\triangle ABC$  og  $\triangle CDE$  sömu lögun? Rökstyddu svarið.



Við vitum að þríhyrningar eru einslaga ef tvö og tvö horn þeirra eru jafn stór. Þessi regla gildir ekki fyrir aðra marghyrninga.

Á spássíunni sérðu þrjá rétthyrninga og við vitum að öll hornin eru  $90^\circ$ . Jafnframt sjáum við að þeir eru ekki allir einslaga.

### Sýnidæmi 6

Sýndu með útreikningi hvaða rétthyrningar á spássíunni eru einslaga.

#### Tillaga að lausn

Ef rétthyrningarnir eru einslaga er hlutfallið milli lengdar og breiddar hið sama.

$$A: \frac{\text{lengd}}{\text{breidd}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$C: \frac{\text{lengd}}{\text{breidd}} = \frac{4,5}{2} = 2,25$$

$$B: \frac{\text{lengd}}{\text{breidd}} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

Við sjáum að hlutfallið  $\frac{\text{lengd}}{\text{breidd}}$  er hið sama í rétthyrningunum  $A$  og  $B$ .

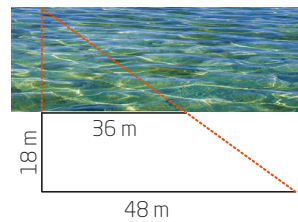
Rétthyrningarnir  $A$  og  $B$  eru einslaga.

- 2.28 Rétthyrningur er 7 m á breidd og 12 m á lengd. Rétthyrningur með sömu lögun á að vera 18 m á lengd. Hver verður breiddin í síðarnefnda rétthyrningnum?

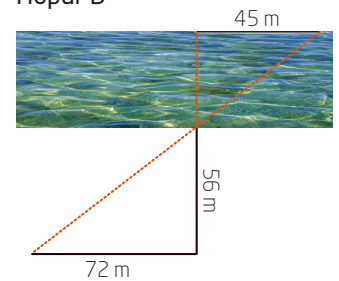
- 2.29 Tveir nemendahópar ætla með mælingu að finna breidd á tveimur ám. Báðir hópar mæla sína á.

- a Reiknaðu breidd árinna sem hópur A mælir.  
b Reiknaðu breidd árinna sem hópur B mælir.

Hópur A

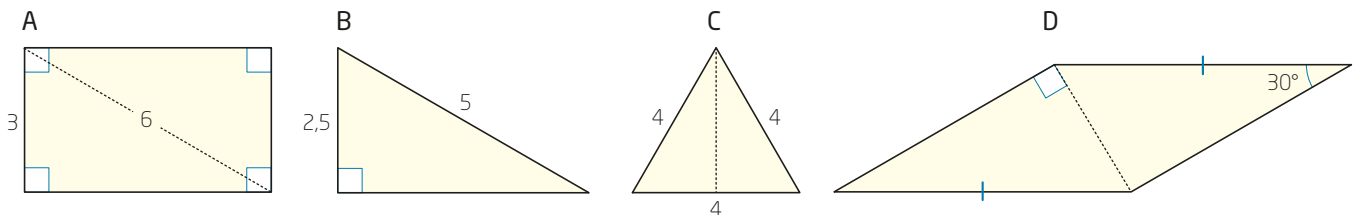


Hópur B



- 2.30 Tveir og tveir nemendur ræða saman um þetta verkefni.

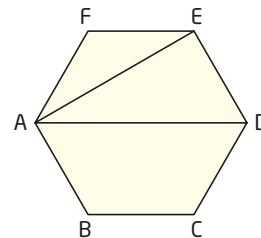
- a Hvað kallast formin A–D?  
b Hvaða eiginleikar eða einkenni eru sameiginleg þessum formum? Eru formin einslaga?  
c Eru hlutar formanna einslaga?



- 2.31 Grunnlína þríhyrningsins  $ABC$  er 4,0 cm og hæðin er 5,5 cm.

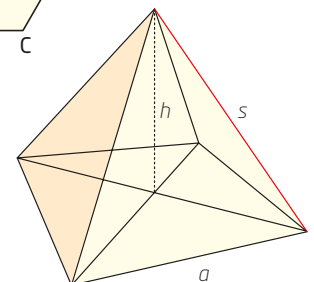
- a Hvert er flatarmál  $\triangle ABC$ ?  
b Hve löng er hliðin  $AC$  ef hæðin sker  $AB$  í punkti sem er 3 cm frá  $A$ ?  
c Þríhyrningurinn  $DEF$  hefur sömu lögun og þríhyrningurinn  $ABC$ . Hve löng er hæðin í þríhyrningnum  $DEF$  ef grunnlínan er 8 cm?  
d Hvert er flatarmál  $\triangle DEF$ ?

- 2.32 Í reglulegum sexhyrningi er lengri hornalínan  $AD = 8$  cm. Hversu löng er styttri hornalínan  $AE$ ?



- 2.33 Í píramída með ferningslaga grunnfleti er breiddin  $a = 35$  m og hæðin  $h = 30$  m.

- a Hve löng er hliðarbrúnin  $s$ ?  
b Hvert er yfirborðsflatarmál píramíðans?





# Kort og mælikvarði

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- finna mælikvarða sem hlutfall milli eftirmyndar og frummyndar
- nota mælikvarða til að reikna fjarlægðir á korti
- gera vinnuteikningar og nota þær

Lína þagnaði til að ná andanum og kennslukonan sem nú var farið að finnast að Lína væri bæði óþægur og erfiður krakki stakk upp á því að bekkurinn teiknaði heldur dálitla stund. Hún taldi víst að Lína sæti stillt og þrúð á meðan hún væri að teikna. Og hún tíndi fram blöð og blýanta og skipti milli barnanna.

„Þið megið teikna hvað sem þið viljið,“ sagði hún og settist síðan sjálf við kennarapúltið og fór að leiðrétta stíla. Eftir dálitla stund leit hún upp til að gá hvernig þeim gengi að teikna. Þá sátu allir krakkarnir og horfðu á Línu sem lá á gólfinu og teiknaði af hjartans lyst. „Já, en Lína,“ sagði kennslukonan höst, „hvers vegna teiknarðu ekki á blaðið?“

„Það er allt orðið útteiknað fyrir löngu, en hesturinn minn kemst ekki allur fyrir á þessu litla blaðsnífsi,“ sagði Lína. „Núna er ég að teikna framfæturna en þegar ég kem að rassinum er ég hrædd um að ég verði að færa mig fram á gang.“

Astrid Lindgren

### Hlutföll

Í einslaga þríhyrningum eru sömu hlutföll milli samsvarandi hliða.

Bæði börn og fullorðnir geta hlegið að Línu langsokk sem áttar sig ekki á að hún þarf að minnka hestinn þegar hún á að teikna hann á pappír.

Við getum hugsað okkur að hestur Línu sé 175 cm á hæð og 180 cm á lengd.

Til að teikningin verði raunveruleg og komist fyrir á blaðinu verður að minnka hæð og lengd í sömu hlutföllum.

- 2.34** Stærð A4-blaðs er um það bil  $21 \text{ cm} \cdot 29 \text{ cm}$ . Gerðu tillögu um hæð og lengd á teikningu Línu af hestinum þannig að hann komist fyrir á einu A4-blaði.

## Finna og nota mælikvarða

Á myndinni sést Karen sem í raunveruleikanum er 164 cm á hæð. Hún stendur fyrir framan stóran malarflutningabíl. Við segjum að myndin sé eftirmynd af raunveruleikanum. Í þessu tilviki er um minnkun að ræða.

**Mælikvarði** er hlutfallið milli lengdar eftirmynda og samsvarandi lengdar á frummyndinni.

Mælikvarðinn 1 : 100 merkir að 1 eining á eftirmyndinni samsvarar 100 einingum á frummyndinni.



### Sýnidæmi 7

Notaðu myndina og upplýsingarnar í textanum hér fyrir ofan til að finna hæð bílsins.

#### Tillaga að lausn

Á myndinni er Karen 2 cm á hæð. Í raunveruleikanum er hún 164 cm á hæð.

Mælikvarði:  $2 : 164$  Við styttum báðar tölurnar með 2.  
 $1 : 82$

Við mælum hæð malarflutningabílsins og fáum út að hann sé 8,4 cm á myndinni.

Mælikvarðinn segir okkur að 1 cm á myndinni samsvari 82 cm í raunveruleikanum.

$$8,4 \text{ cm} \cdot 82 = 688,8 \text{ cm} \approx \underline{6,9 \text{ m}}$$

Malarflutningabíllinn er um það bil 6,9 m hæð.

#### Eftirmynd

Hver punktur á eftirmynd hefur samsvarandi punkt á frummyndinni.

Við segjum að mælikvarðinn sé 1 á móti 82.

**2.35** Eiffeltorninn er 324 m á hæð. Í minjagripaverslun eru seldar litlar lyklakippur sem eru eftirmyndir af Eiffeltorninum. Þær eru 3 cm á hæð.

Í hvaða mælikvarða eru eftirmyndirnar gerðar?

**2.36** Ráðhúsið í Ósló er 66 m á hæð þar sem það er hæst. Á póstkorti með mynd af ráðhúsinu er samsvarandi hæð 7,5 cm.

Í hvaða mælikvarða er myndin á póstkortinu?

## Sýnidæmi 8

Á myndinni er fullorðin lús stækkuð.  
Í raunveruleikanum er lúsin 2,5 mm á lengd.  
Finndu mælikvarðann á myndinni.



Við deilum  
í báðar tölurnar  
með 2,5.

### Tillaga að lausn

Við mælum lengd lúsarinnar á myndinni  
og fáum 50 mm.

$$50 : 2,5 = 20 : 1$$

Mælikvarðinn á myndinni er 20 : 1

Tvípunkturinn  
er lesinn:  
„á móti“.

Mælikvarðinn sýnir minnkun eða stækkun.

Minni tala : stærri tala → sýnir að eftirmyndin hefur verið minnkuð.

Stærri tala : minni tala → sýnir að eftirmyndin hefur verið stækkuð.

- 2.37** a Notaðu þessa mælikvarða. Styttu ef hægt er.  
 $1 : 25\ 000$     $50\ 000 : 5$     $2,5 : 1\ 000\ 000$     $700 : 10$
- b Segðu til um hvort mælikvarðarnir í a-lið sýna stækkun eða minnkun.
- c Hugsaðu þér að þú mælir lengd eftirmyndar og fáir út 5 cm.  
Hve löng er myndin í raunveruleikanum miðað við mælikvarðana í a-lið?

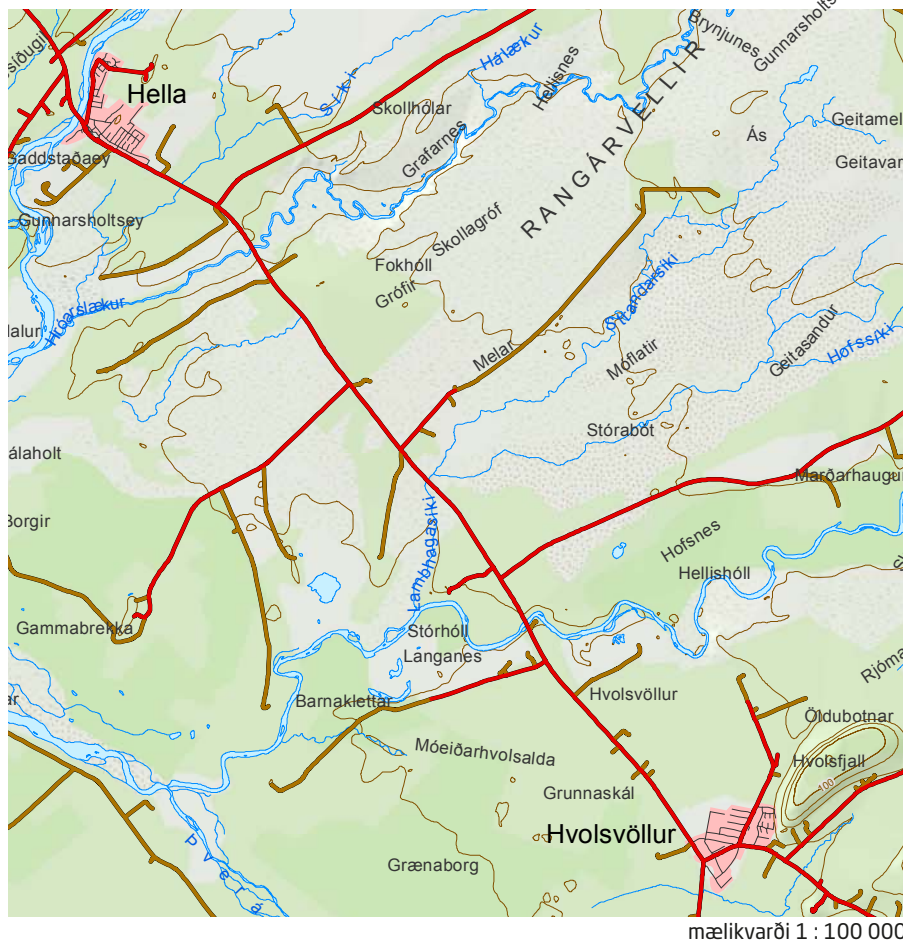
- 2.38** Styttu nokkur er 15 m á hæð í raunveruleikanum.  
Á mynd er sama styttu 2,5 cm.  
Í hvaða mælikvarða er myndin?

- 2.39** Myndin er tekin í rafeindasmásjá af fjölonæmum gulum klasasýklum sem starfsmenn sjúkrahúsa óttast mjög. Í raunveruleikanum er þvermál slíks sýkils um það bil 1,5  $\mu\text{m}$ . Einn  $\mu\text{m} = \frac{1}{1000}$  mm.  
Mældu það sem þarf til að finna mælikvarðann á myndinni.

$1\ \mu\text{m} = 1\ \text{míkrómetri} = \frac{1}{1000}\ \text{mm}$   
 $= 0,001\ \text{mm}$ . Gríski bókstafurinn  
 $\mu$  er borinn fram sem „mý“.

## Sýnidæmi 9

Séra Jakob þurfti að aka frá Helli í Rangárþingi ytra til Hvolsvallar. Hann veltir fyrir sér hvort hann komist þessa leið á 15 mínútum.



Notaðu kortið til að ganga úr skugga um hvort þetta er mögulegt.

### Tillaga að lausn

Við leggjum þráð eftir veginum á kortinu frá Helli að Hvolsvelli. Þráðurinn er 13 cm á lengd.

13 cm á kortinu samsvarar þá 13 km í raunveruleikanum.

Við köllum meðalhraða  $h$ , vegalengd  $v$  og tímann  $t$ .

Meðalhraði:  $h = \frac{v}{t} = \frac{13 \text{ km}}{0,25 \text{ klst.}} = \underline{\underline{52 \text{ km/klst.}}}$  sem er lítil meðalhraði.

Presturinn kemst auðveldlega á áfangastað á 15 mínútum.

### Mælikvarðinn

sýnir að 1 cm á kortinu samsvarar 100 000 cm í raunveruleikanum.

$$100\,000 \text{ cm} = 1000 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

$$15 \text{ mínútur} = 0,25 \text{ klst.}$$

**2.40** Ásbjörn býr í miðbæ Hafnarfjarðar. Hann hjólar að heiman í gegnum Garðabæ og Kópavog til Reykjavíkur alla leið niður í miðbæ.

Hve langt hjólar Ásbjörn?



## Hve langt?

### Þið þurfið

- ýmis landakort með mismunandi mælikvörðum
- reglustiku, band, reipi, málband
- spjöld með borgar- og/eða bæjarnöfnum

### Aðferð

- 1 Dragðu tvö spjöld.
- 2 Finndu viðeigandi landakort til að mæla fjarlægðina milli staðanna.
- 3 Hvaða mælikvarði er á kortinu sem þú valdir?
- 4 Hver er fjarlægðin milli staðanna miðað við loftlínu?
- 5 Hver er vegalengdin milli staðanna?
- 6 Athugaðu á netinu hver fjarlægðin er. Hversu miklu munar á niðurstöðum þínum og upplýsingunum á netinu?
- 7 Flugvél flýgur á meðalhraðanum 800 km/klst. Hve langur er flugtíminn milli borganna.

London

Moskva

Vestmanna-  
eyjar

Akureyri

Reykjavík

Ísafjörður

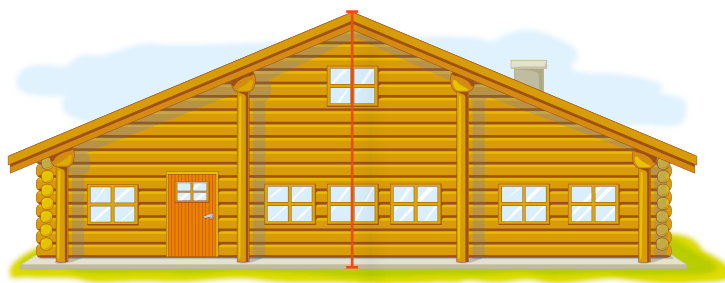
New York

Tokýó





**2.41** Á teikningunni sést hús-gafl. Hæðin upp í mæni er 5,1 m.



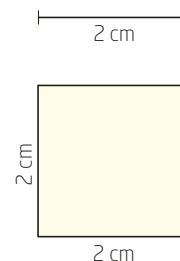
- a Mældu og finndu hvaða mælikvarði er notaður.
- b Mældu og reiknaðu út hversu breitt húsið er í raunveruleikanum.

**2.42** Fjarlægðin milli Parísar og Dakar er í loftlínu 4200 km. Á landakorti er þessi fjarlægð 8,4 cm.

- a Hver er mælikvarðinn á kortinu?
- b Á öðru landakorti er loftlínan Reykjavík-Mogadishu 13,5 cm. Mælikvarðinn á landakortinu er 1 : 66 000 000. Hversu langt er þetta í loftlínu í raunveruleikanum?

**2.43** Teiknaðu strikið hér til hliðar og ferninginn í mælikvarðanum 2 : 1 og 1 : 4.

- a Finndu lengd striksins og flatarmál ferningsins á nýju teikningunum.
- b Hafa lengdirnar stækkað eða minnkað?
- c Hvert er hlutfallið milli flatarmála ferninganna? Hafa ferningarnir stækkað eða minnkað?
- d Hugsaðu þér að þú sért með tening þar sem hliðarnar eru 2 cm. Þú átt að búa til nýjan tening í mælikvarðanum 2 : 1. Finndu lengd hliðarbrúna, flatarmál hliðarflata og rúmmál nýja teningsins. Hvert er hlutfallið milli rúmmálanna?
- e Sama tening á einnig að gera eftirmynd af í mælikvarðanum 1 : 4. Finndu lengd hliðarbrúna, flatarmál hliðarflata og rúmmál nýja teningsins. Hvert er hlutfallið milli rúmmálanna?
- f Settu fram reglu um tengsl flatarmáls og rúmmáls forma sem eru minnkuð og stækkuð í ákveðnum mælikvarða.





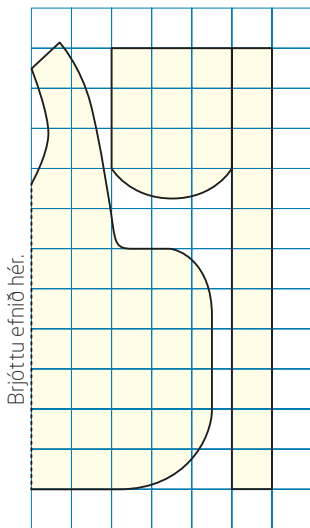
## Vinnuteikningar

Pegar ætlunin er að búa til, byggja eða framleiða eitthvað er nauðsynlegt að skipuleggja verkefnið með vinnuteikningum. Stundum notum við vinnuteikningar frá öðrum en stundum þurfum við sjálf að gera vinnuteikningarnar. Vinnuteikningu má gera með mismunandi aðferðum. Hún þarf að uppfylla eitt eða fleiri af eftirfarandi skilyrðum:

- á henni þurfa að standa málin á því sem á að búa til
- hún þarf að lýsa aðferðinni við að búa hlutinn til
- hún þarf að lýsa útliti hlutarins þegar hann er tilbúinn

**2.44** Teikningin sýnir snið af svuntu. Búa má svuntuna til í fullorðinsstærð (um það bil 170 cm) og í barnastærð (fyrir um það bil 8 ára barn). Til að búa svuntuna til þarf að yfirfæra málin á efnið.

- Fullorðinsstærð: Hver reitur samsvarar 10 cm.
- Barnastærð: Hver reitur samsvarar 7,5 cm.



- ✓ Brjóttu efnið saman um miðjuna.
- ✓ Klípptu sniðin út.
- ✓ Saumaðu skáband í hálsmálið og kringum svuntuna.
- ✓ Saumaðu hálsböndin saman bak við hnakkann.
- ✓ Settu rykkingartvinna efst á hvorn vasa og rykktu ofurlítið.
- ✓ Settu borða eða skáband á vasana og saumaðu þá á svuntuna.
- ✓ Brjóttu skáböndin yfir á rönguna og saumaðu þau með stórum sporum.
- ✓ Snúðu böndunum við, saumaðu fyrir endana og festu þau á svuntuna.

- a** Hver verður lengd fullorðinssvuntunnar?
- b** Hver verður lengd barnasvuntunnar?

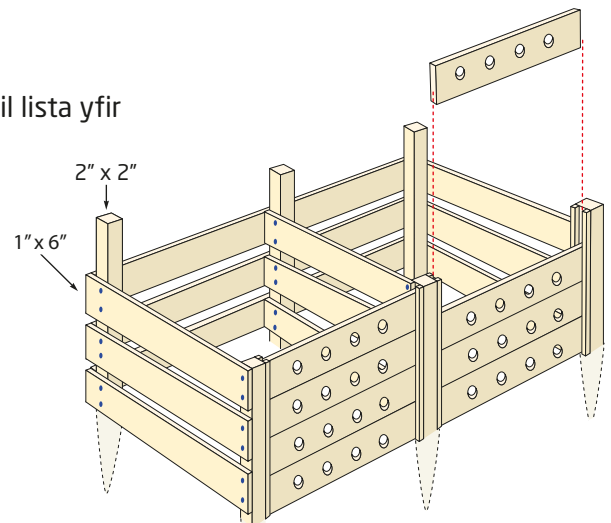
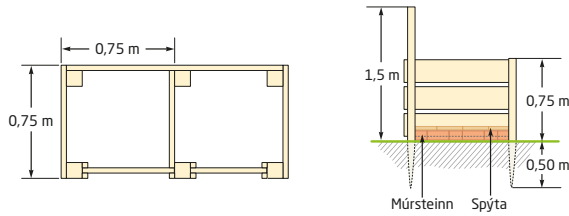
Íða ætlar að sauma eina svuntu í fullorðinsstærð og tvær svuntur í barnastærð. Hún kaupir efni úr stranga sem er 140 cm á breidd.

- c** Hversu mikið efni þarf Íða að kaupa?

Mattías ætlar að sauma svuntu handa litlu systur sinni sem er fjögurra ára. Hún er 105 cm á hæð.

- d** Hve marga sentimetra þarf hver reitur að samsvara til að svuntan passi fyrir litlu systur Matthíasar?

**2.45** Notaðu vinnuteikninguna af safnkössunum til að búa til lista yfir nauðsynlegt efni.

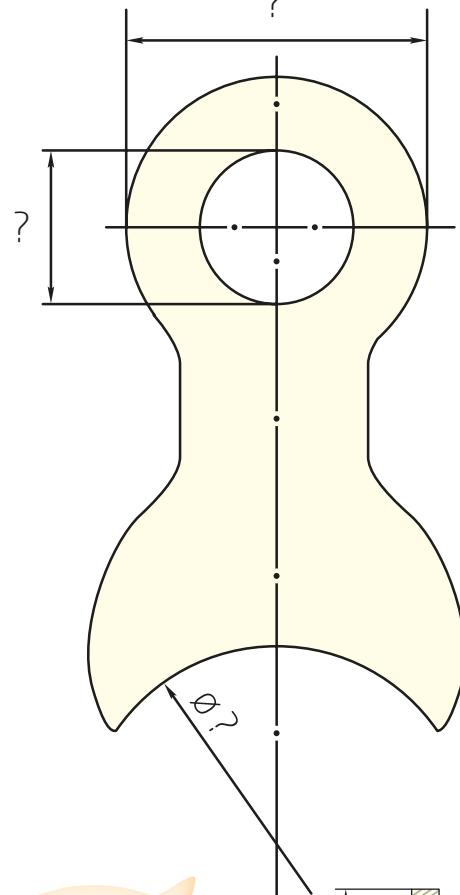


**2.46** Vinnuteikning af vélarhluta er í mælikvarðanum 5 : 1.

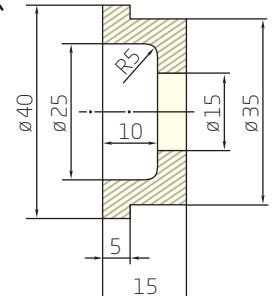
- Hvað merkir það að mælikvarðinn er 5 : 1?
- Eitt málið á teikningunni er 120 mm. Hversu margir millimetrar eru það í raunveruleikanum?
- Vélarhlutinn er 32 mm á lengd. Hver verður þessi lengd á vinnuteikningunni?

**2.47** Teikningin sýnir tvo mismunandi vélarhluta. Annar sést að ofan og hinn frá hlið.

- Efri teikningin er í mælikvarðanum 2 : 1. Hver eru mál vélarlutans í raunveruleikanum?
- Vélarhlutinn sem sést hér á myndinni er framleiddur úr stálplötu sem er 800 · 600 mm á stærð. Hve marga vélarhluta er hægt að fá úr einni plötu?
- Neðri teikningin sýnir þversnið af sívölum vélarhluta sem er samhverfur um öxul sem liggur í gegnum hann.
  - Námundaðu rúmmál vélarlutans.
  - Vélarhlutinn er úr áli sem hefur eðlismassann  $2,7 \text{ g/cm}^3$ . Hve mikið af áli þarf í 250 slíka vélarhluta?



Við notum táknið  $\emptyset$  til að tákna þvermál þegar það kemur ekki fram á teikningu að uppgefið mál sé þvermál.



**2.48** Hugsaðu þér að þú eigir að byggja hundakofa handa stórum hundi. Hundurinn er 60 cm á hæð og vegur um það bil 25 kg. Gerðu vinnuteikningar í mælikvarðanum 1 : 10.

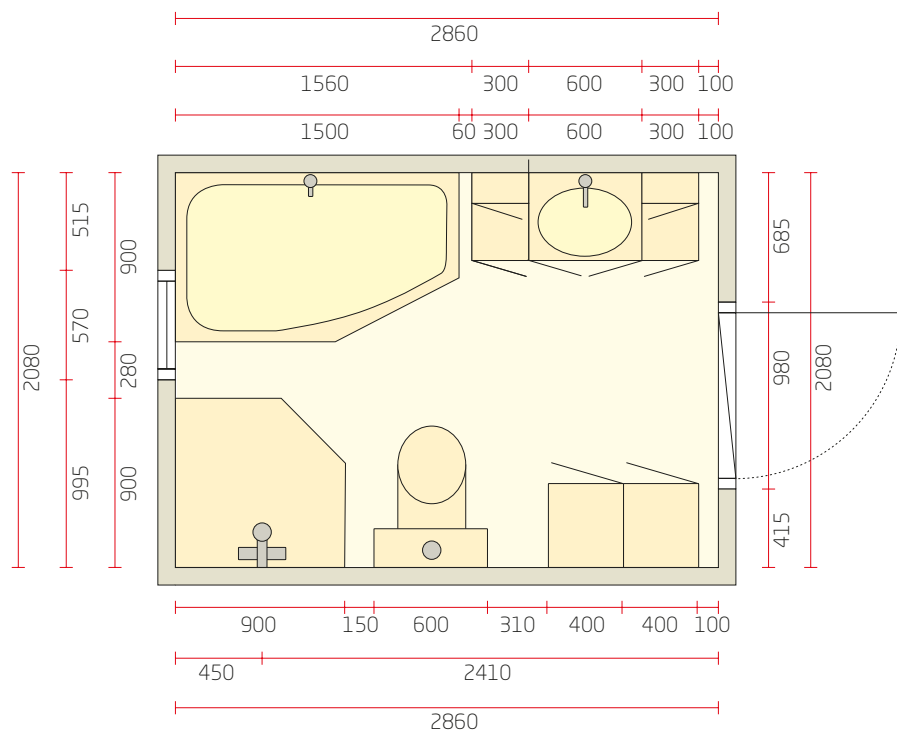
- Gerðu grunnteikningu (séða að ofan).
- Gerðu teikningu af framhliðinni séða að framan og aðra teikningu séða frá hlið.



**2.49** Teikningin hér fyrir neðan sýnir baðherbergi. Öll mál eru í millimetrum.

- Hvaða einingar eru á tölunum á teikningunni?
- Hver er brúttóstærð gólfsins í baðherberginu?
- Um það bil hvaða mælikvarði er notaður á teikningunni?
- Um það bil hve mörg prósent af flatarmáli gólfsins fer undir innréttingar og búnað? Námuntaðu svarið.
- Notaðu sama mælikvarða og gerðu samsvarandi teikningu sem sýnir baðherbergið heima hjá þér.

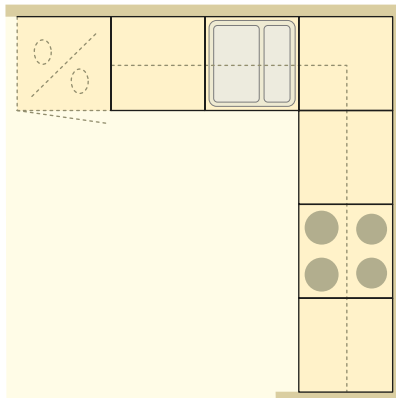
**Brúttóflatarmál** er allt flatarmálið áður en hluti þess er tekinn undir búnað og innréttingar.



## Sýnidæmi 10

Teikningin sýnir hluta af grunnteikningu af íbúð þar sem eldhúskróknum er komið fyrir.

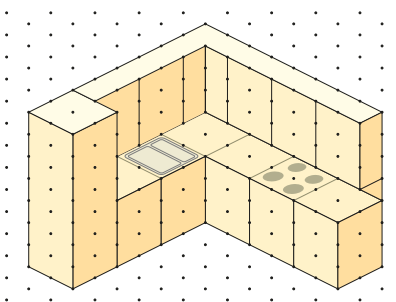
Notaðu þrívíddarpunktablað og gerðu teikningu sem sýnir sama eldhús.



### Tillaga að lausn

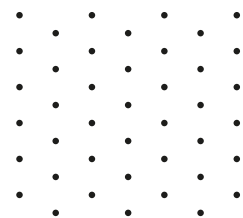
Við notum þrívíddarpunktablað til að gera teikninguna.

Flestar einingar í eldhúsinnréttingu eru 60 cm á breidd, 60 cm á dýpt og 90 cm á hæð. Þá er hagkvæmt að láta fjarlægð milli punkta tákna 30 cm í raunveruleikanum.



### Þrívíddarpunktablað

Á slíku blaði eru punktarnir merktir eins og hornin í jafnhliða þríhyrningi.



**2.50** Teiknaðu draumaeldhúsið þitt.

- Gerðu grunnteikningu og skráðu málin á teikninguna.
- Notaðu þrívíddarpunktablað og teiknaðu eldhúsið.

**2.51** Teiknaðu herbergið þitt.

- Gerðu grunnteikningu.
- Hugsaðu þér að þú standir í einu horninu. Notaðu þrívíddarpunktablað og gerðu teikningu sem lýsir því sem þú sérð frá þessu horni.





# Fjarvíddarteikning

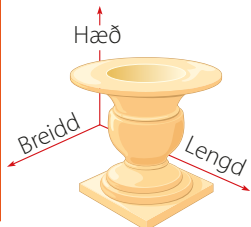
## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- bera kennsl á og lýsa hvernig fjarvídd er notuð í myndum og teikningum
- teikna skissur með einum eða fleiri hvarfpunktum

**Fjarvíddarteikning** er notuð til að sýna þrívíða hluti og fyrirbæri á tvívíðum fleti þannig að myndin sýnist hafa dýpt.

**Þrívíður** hlutur er mældur eftir þremur ásum sem eru hornréttir hver á annan í raunveruleikanum.



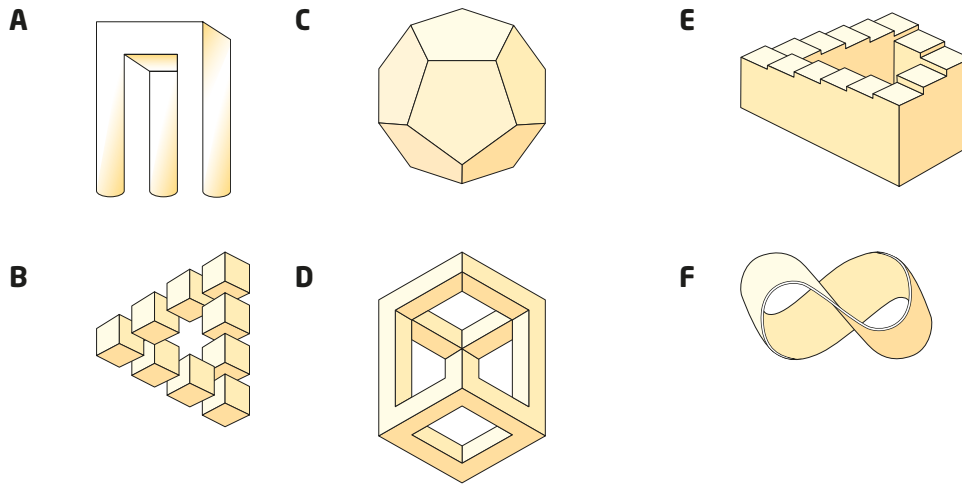
Veröldin í kringum okkur er þrívíð. Bæði í listum og vísindum er til siðs að gera eftirmyndir á pappír af raunveruleikanum. Það getur verið nokkuð erfitt að fá fram dýpt í slíkar myndir þar sem pappír hefur einungis tvær víddir. Í Egyptalandi til forna voru gerðar myndir sem höfðu ekki dýpt.



Egyptsk freska  
(veggmálverk)  
um 1400 f.Kr.

Margar aðferðir er hægt að nota til að fá fram dýpt í myndir. Fjarvíddarteikning er ein þeirra. Með því að yfirfæra þrívíða hluti yfir á tvívíðan flöt er hægt að fá fram svokölluð form sem rugla augað eða „ólíkindaform“. Það eru myndir sem ekki geta staðist í raunveruleikanum, nokkurs konar sjónhverfingar.

**2.52** Hvaða form hér á eftir er hægt að búa til í þrívídd?



**2.53** Skoðu listaverkin hér á eftir. Útskýrðu fyrir bekkjarfélagi þínum hvað gerir þau að ólíkinda myndum.



Sandro del Prete: Skákborð



M. C. Escher: Foss

- 2.54**
- a** Leitaðu á netinu að ólíkinda myndum (e. impossible figures) og finndu mismunandi aðferðir við að teikna slíkar myndir.
  - b** Teiknaðu þínar eigin ólíkinda myndir.



## Eiginleikar og einkenni fjarvíddar

### Þið þurfið

- myndir af „flugvél innanborðs“ og „götu í borg“ á A4-blaði (verkefnablöð til ljósritunar 3.2.12 og 3.2.13)
- reglustiku, blýant, strokleður
- pappír eða blað til ljósritunar – með ferningum

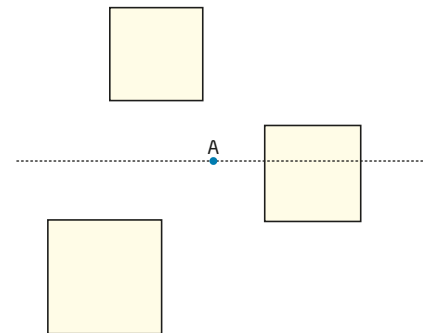
### Hluti 1 - Að uppgötva

- 1 Teiknaðu línurnar tvær sem eru sýndar með rauðum lit á flugvélamyndinni.
- 2 Haltu áfram að teikna línur í sömu mynd. Teiknaðu láréttar línur sem liggja í sömu átt og skrokkur flugvélarinnar. Finndu að minnsta kosti sex línur.
- 3 Finndu á sama hátt að minnsta kosti sex láréttar línur sem liggja í sömu átt og gatan á borgarmyndinni.
- 4 Hvað er sérstakt við línurnar sem þú teiknaðir?
- 5 Hvað heldurðu að átt sé við með orðinu „hvarfpunktur“?
- 6 Veldu annan lit og dragðu línu gegnum punktinn sem þú telur vera hvarfpunktinn. Línan á að vera samsíða grunnlínu (neðstu línu) myndarinnar.
- 7 Útskýrðu með eigin orðum hvað átt er við með láréttu línunni sem kallast sjónhæðarlína.

### Hluti 2 - Að teikna

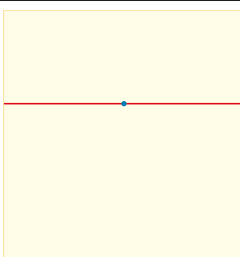
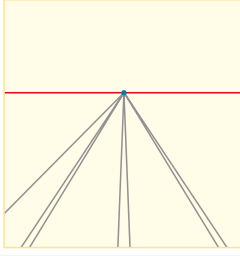
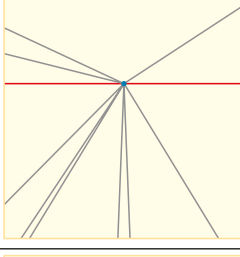
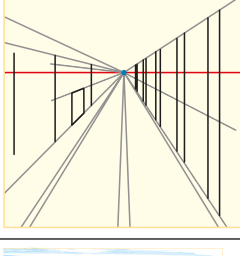

Markmiðið er að teikna þrjú kubba sem svífa um í lausu lofti. Notaðu reglustiku og blýant þegar þú teiknar. Myndin hér til hægri sýnir hvernig þú getur byrjað.

- 1 Teiknaðu einn kubb í einu. Ferningurinn sýnir framhlið kubbsins. Byrjaðu á að draga hjálparlínur frá hverju horni í punkt A.
- 2 Teiknaðu bakhlið kubbsins með því að draga strik milli hjálparlínanna. Gættu þess að strikin verði samsíða hliðarbrúnum ferningsins.
- 3 Gerðu nú allar hliðar kubbsins skýrar og greinilegar og strokaðu út það sem eftir er af hjálparlínunum.
- 4 Hvað kallast punkturinn A?
- 5 Hvað kallast punktallínan?



Í eins punkts fjarvídd er notuð sjónhæðarlína og hvarfpunktur. Allar láréttar línur sem liggja í lengdarátt eru dregnar í hvarfpunktinn en allar lóðréttar línur eiga að vera samsíða.

**Sjónhæðarlína** er alltaf dregin sem lárétt lína.

Teiknaðu einfalda götummynd í eins punkts fjarvídd. Notaðu blýant.		
Prep	Lýsing	Mynd
1	Teiknaðu sjónhæðarlínu og merktu hvarfpunkt á línuna.	
2	Teiknaðu allar brúnirnar á götunni neðan frá og í hvarfpunktinn. Þessar línur eiga að sýna gangstéttirnar, götubrúnirnar og hvar trjabolir og jörð mætast.	
3	Teiknaðu hjálparlínur ofan frá og í hvarfpunktinn. Hjálparlínurnar eiga að sýna efsta hluta bygginganna, ljósastaura, tré o.s.frv.	
4	Teiknaðu allar lóðréttar línur þar sem þú átt að teikna hús, tré og fleira.	
5	Ljúktu við teikninguna og strokaðu út óparfar hjálparlínur.	

**Hvarfpunktur** er sá punktur þar sem tvær eða fleiri samsíða línur virðast skerast óendanlega langt frá þeim sem horfir á.

**Eins punkts fjarvídd** hefur eina sjónhæðarlínu og einn hvarfpunkt.

**2.55** Veldu eitt myndefni hér fyrir neðan og teiknaðu það í eins punkts fjarvídd.

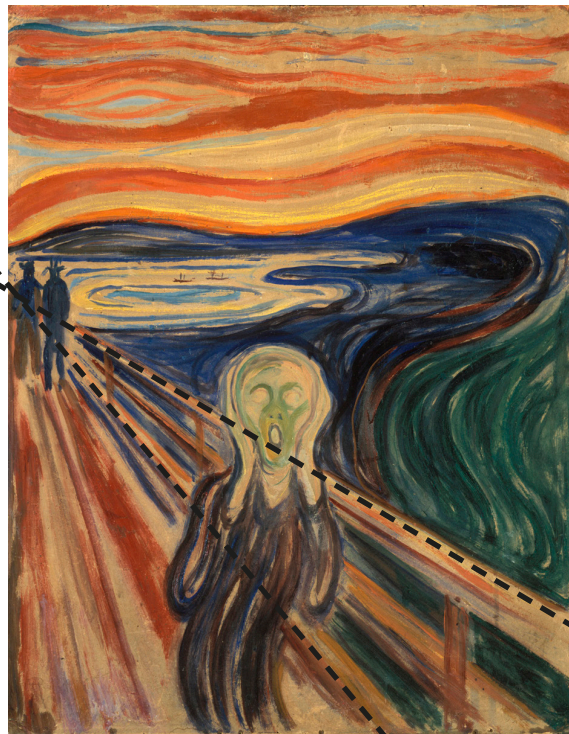
skókassi

herbergið þitt

gangur

landslag

Hvarfpunkturinn  
getur verið fyrir  
utan myndina.



Edvard Munch:  
„Ópið“, 1893

**2.56** Notaðu rúmfræðiforrit.

**a** Teiknaðu kubb eða kassa í eins punkts fjarvídd.

- Teiknaðu lárétta sjónlínu.
- Merktu hvarfpunktinn F á miðja sjónhæðarlínuna.
- Teiknaðu reglulegan ferhyrning, ABCD, fyrir neðan sjónhæðarlínuna.
- Teiknaðu háflínur úr hverju horni ferhyrningsins gegnum hvarfpunktinn.
- Merktu punktinn P á háflínuna efst til vinstri sem þú notar sem útgangspunkt til að teikna dýptina í kubbinn.
- Teiknaðu línur sem eru samsíða vinstri hlið og efri hlið gegnum P.
- Finndu skurðpunkta samsíða línanna og hinna háflínanna og haltu áfram að teikna samsíða línur gegnum þessa skurðpunkta þar til þú hefur teiknað „bakhliðina“ á kubbinn.
- Teiknaðu nú allar hliðarbrúnir kubbsins skýrt og greinilega og þurrkaðu út háflínur og hjálparlínur.

**b** Breyttu staðsetningu hvarfpunktsins og sjónhæðarlínunnar og skoðaðu hvernig kubburinn breytist.

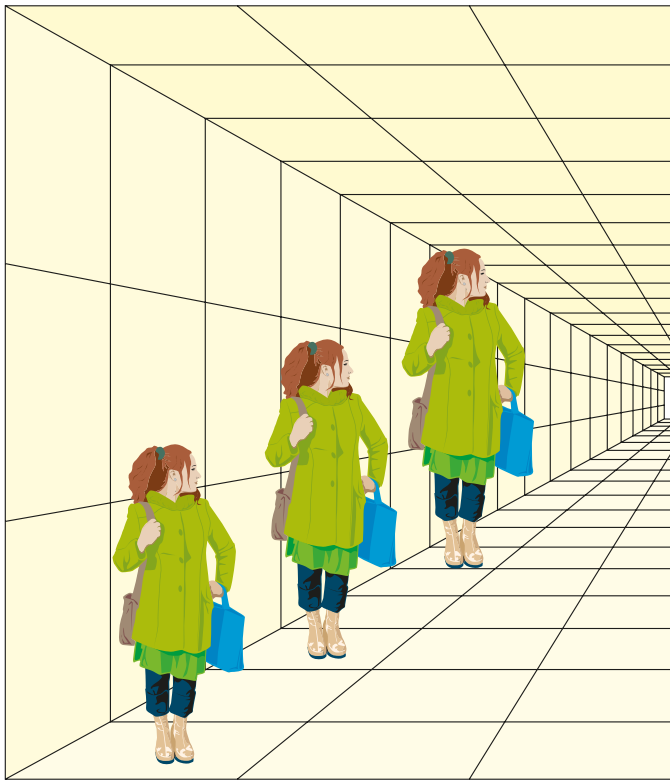
**1** Hvar er sjónhæðarlínan ef þú horfir á kubbinn ofan frá?

**2** Hvar er sjónhæðarlínan ef þú horfir á kubbinn neðan frá?

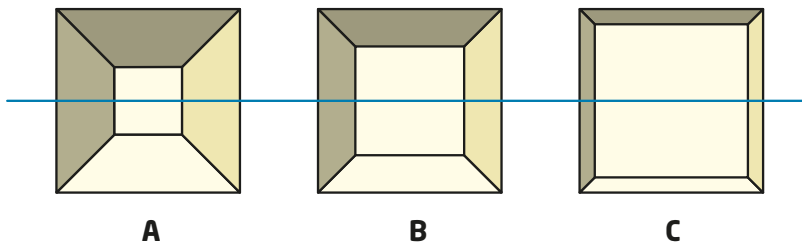


**2.57** Línur sem sýna fjarvidd má nota til að skapa sjónhverfingu.

- a Hvaða kona er hávöxnust? Mældu og athugaðu málið.
- b Hvernig þarf að breyta myndinni til að fá fram rétta fjarvidd?



**2.58**



Settu kassa fyrir  
framan þig  
og hafðu hann í  
hæfilegri fjarlægð.

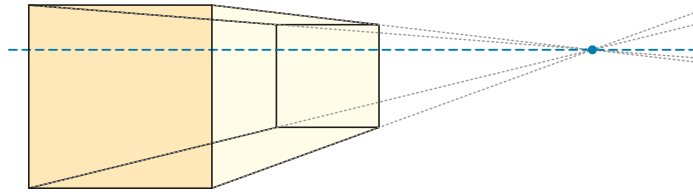
Myndirnar sýna sama opna kassann teiknaðan í eins punkts fjarvidd á þrjá mismunandi vegu.

Á hvaða mynd finnst þér að þú standir næst kassanum?

**2.59** Skoðaðu ljósmyndir og málverk heima hjá þér eða í skólanum. Þú getur líka notað netið. Finndu dæmi þar sem eins punkts fjarvidd er notuð.

- a Finndu sjónhæðarlínuna og hvarfpunktinn.
- b Finndu út hvar listamaðurinn eða ljósmyndarinn er staðsettur með hliðsjón af myndefninu.

## Fleiri en einn hvarfpunktur



Ef við færum hvarfpunktinn á teikningu sem er í eins punkts fjarvídd út á hliðarbrún verður teikningin ekki trúverðug. Til að fá fram dýpt í myndina á annan hátt notum við í staðinn tvo eða þrjá hvarfpunkta.

Í tveggja punkta fjarvídd notum við sjónlínu með tveimur hvarfpunktum. Eitt hornið snýr að áhorfandanum. Allar línur sem eru láréttar í raunveruleikanum eru dregnar í hvarfpunktinn og allar línur sem eru lóðréttar í raunveruleikanum eru samsíða.

Í þriggja punkta fjarvídd notum við sjónlínu með tveimur hvarfpunktum og þriðji hvarfpunkturinn er yfir eða undir sjónlínunni. Allar línur sem eru láréttar í raunveruleikanum eru dregnar í hvarfpunktana á sjónlínunni og allar línur sem eru lóðréttar í raunveruleikanum eru dregnar í þriðja hvarfpunktinn.



Bygging, ljósmynduð í tveggja punkta fjarvídd. Geturðu útskýrt hvers vegna sjónhæðarlínan er svo neðarlega á myndinni?



Bygging, ljósmynduð í þriggja punkta fjarvídd þar sem þriðji

hvarfpunkturinn er undir sjónhæðarlínunni. Þetta kallast einnig fuglasjónarhorn.



Bygging, ljósmynduð í þriggja punkta fjarvídd þar sem þriðji hvarfpunkturinn er yfir ofan sjónlínu. Þetta kallast einnig músarsjónarhorn.

**2.60** Teiknaðu mjólkurfernu í tveggja punkta fjarvídd og þriggja punkta fjarvídd.

**2.61** Skoðaðu myndirnar hér á eftir og segðu til um hvers konar fjarvídd hefur ef til vill verið notuð.



**Tveggja punkta fjarvídd**

Í henni er ein sjónhæðarlína og tveir hvarf-punktur. Eitt hornið snýr að lesandanum.

**Þriggja punkta fjarvídd**

Í henni er ein sjónhæðarlína tveir hvarf-punktur og þriðji hvarf-punkturinn er fyrir ofan eða fyrir neðan sjónhæðar-línuna.

**2.62** Notaðu rúmfræðiforrit.

**a** Teiknaðu kubb í tveggja punkta fjarvídd.

**b** Færðu sjónhæðarlínuna upp fyrir kubbinn. Hvaða hlutar kubbsins eru sýndir?

**c** Færðu sjónhæðarlínuna niður fyrir kubbinn. Hvaða hlutar kubbsins eru sýndir?

**d** Færðu hvarf-punktana til og taktu eftir hvar þér finnst þú vera með hliðsjón af kubbum.

**2.63** Taktu þrjár myndir af skólabyggingunni þinni eða af annarri byggingu í nágrenninu. Ein myndin á að sýna eins punkts fjarvídd, önnur myndin á að sýna tveggja punkta fjarvídd og sú þriðja á að sýna þriggja punkta fjarvídd.

Prentaðu myndirnar út eða notaðu stafrænt teikniforrit. Teiknaðu línur á myndirnar þínar sem sýna sjónhæðarlínu og hvarf-punkta.

# Tækni, list og arkitektúr

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

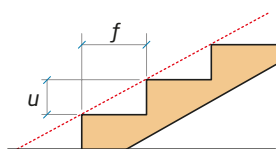
- lýsa grunnreglum byggingartækninnar
- nota mikilvæga eiginleika þríhyrninga
- útskýra hvað einkennir gullinsnið



Þegar ætlunin er að byggja til dæmis hús, brýr, stiga, almenningsgarða eða eitthvað annað þarf að gæta þess að þessar byggingar verði öruggar, traustar og þjóni tilgangi sínum. Þar að auki mega þær helst ekki vera ljótar eða spilla umhverfinu á nokkurn hátt.

Stjórnámamenn gera deiliskipulag sem koma á í veg fyrir að byggingar rísi hvar sem er. Allir sem ætla að hefja byggingarframkvæmdir þurfa að sækja um byggingarleyfi. Yfirvöld eiga að gæta þess að aðeins séu veitt slík leyfi þegar lög, deiliskipulag og alls kyns viðmiðunarreglur leyfa.

Ef þú hefur í hyggju að byggja stiga þarf hvert þrep að vera í eðlilegri stærð. Það má ekki vera of langt og ekki of stutt. Í byggingarreglugerð eru settar fram viðmiðunarreglur um hvernig tengslin milli framstigs þrepanna (það er dýptar) og uppstigs þeirra (þ.e. hæðar) þurfa að vera til að stiginn verði þægilegur.



$f$  = framstig í mm  
 $u$  = uppstig í mm

### Formúla fyrir stiga:

$$f + 2u = (620 \pm 20) \text{ mm},$$

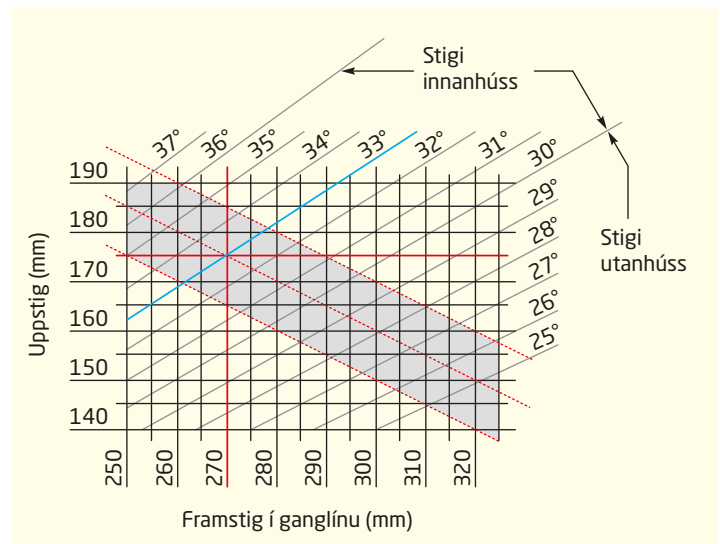
þar sem  $f$  táknar framstig, það er dýpt þrepsins, og  $u$  táknar uppstig, það er hæðina milli þrepa (hvorttveggja mæld í millimetrum).

- 2.64** Finndu fjóra mismunandi stiga, tvo utanhúss og tvo innanhúss. Mældu uppstig og framstig þrepanna og athugaðu hvort þau uppfylla kröfurnar í stigaformúlunni.



Byggingarreglugerð mælir svo fyrir um að auk þess að fylgja skuli stigaformúlunni eigi hallinn á innanhússstigum að vera milli 30° og 36° og á stigum utanhúss 30° eða minna. Myndin hér til hliðar sýnir tengslin milli stærðanna þriggja, framstigsins, uppstigsins og hallans. Uppfylli stiginn þessar reglur eiga málin að vera innan gráa svæðisins á myndinni.

Lesu má af myndinni að 175 mm uppstig og 270 mm framstig gefur 33° halla.



**2.65** Notaðu töfluna með upplýsingum um framstig, uppstig og halla.

- Finndu halla stíganna sem þú mældir í dæmi 2.64. Eru þessar tröppur með þann halla sem mælt er með fyrir inni- og útistiga?
- Hugsaðu þér að þú ætlir að smíða stiga með 30° halla og framstigi 285 mm. Hvert á uppstigið þá að vera?
- Stigi hefur framstigið 275 mm og uppstigið 158 mm. Er þessi stigi í samræmi við reglurnar?
- Stigi utanhúss þarf að hafa 28° halla. Þú mátt ekki nota (svigrúmið +/-20) í stigaformúlunni. Hvað þarftu þá að velja sem framstig og uppstig?

**Ganglína** er sá hluti þreps í stiga sem gengið er á.

- **2.66** Prep hringstigans á myndinni geta ekki fullnægt reglunum nema á ákveðnum stað á þrepinu. Finndu hringstiga eða sveigðan stiga. Taktu nauðsynleg mál og finndu hvar á milli hliðarenda þrepanna málin uppfylla kröfurnar í stigaformúlunni.





## Þríhyrningur eða ferhyrningur

### Þið þurfið

- sogrör
- pípuhreinsara

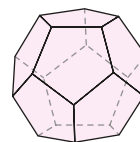
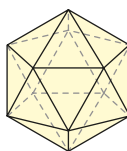
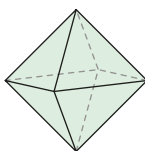
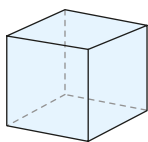
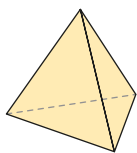
### Aðferð

Komdu pípuhreinsurunum fyrir inni í sogrörunum þannig að smávegis af pípuhreinsurunum standi út úr báðum endum röranna. Öll sogrörin eiga að vera jafn löng. Næst skaltu binda rörin saman með því að vefja endum pípuhreinsaranna hverjum um annan.



- 1 Búðu til einn þríhyrning og einn ferhyrning.
  - a Athugaðu hvort formið er stífara.
  - b Hvað geturðu sagt um hornin í þessum tveimur formum?
- 2 Byggðu við þríhyrninginn þannig að þú búir til þrístrendan píramída (fjórflötung). Byggðu einnig við ferhyrninginn og búðu til tening.
  - a Leggðu mat á hvor þeirra fjórflötungurinn eða teningurinn heldur forminu betur ef kröftum er beitt til að skekkja þá.
  - b Hvort formanna hentar betur ef stærri byggingarframkvæmdir eru fyrirhugaðar? Útskýrðu hvers vegna.
- 3 Prófaðu að nota sömu aðferð og í lið 2 til að búa til
  - áttflötung (þrívítt form úr 8 jafnhliða, eins þríhyrningum)
  - tvítugflötung (þrívítt form úr 20 jafnhliða, eins þríhyrningum)
  - tólfflötung (þrívítt form úr 12 jafnhliða, eins fimmhyrningum)

Er auðveldara að búa sum formin til en önnur? Ef svo er - hvaða form og hvers vegna?



**2.67** Hvar finnur þú þríhyrninga á myndunum hér á eftir og hvaða hlutverki gegna þeir?

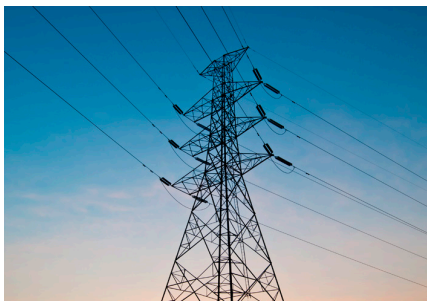
**a** Bindingsverk



**b** Paksperrur



**c** Háspennumastur



**d** Akashi Kalkya-brúin, Kobe, Japan



**2.68** Ertu sammála röksemdum nemendanna? Rökstyddu svarið.

Hvers vegna er þríhyrningurinn stíft form?

A Vegna þess að hornasumman er alltaf  $180^\circ$ .

B Við þekkjum lengdir allra hliðanna þegar hornin eru þekkt.

C Við þekkjum stærð allra hornanna ef hliðarlengdirnar eru ákveðnar.

D Vegna þess að þríhyrningur er alltaf helmingur af ferhyrningi.

E Það er bara til einn þríhyrningur þar sem hliðarnar eru af tiltekinni lengd.

A

B

C

D

E



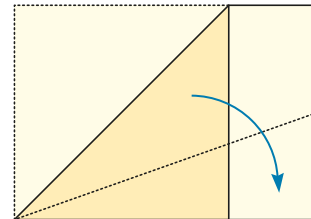
## A-stærðirnar

### Þið þurfið

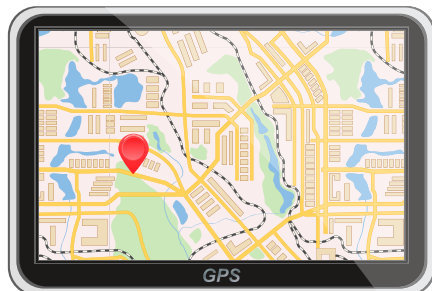
- A4-blöð
- reglustiku

### Aðferð

- 1 Notaðu A4-blað, brjóttu blaðið og búðu til eins stóran ferning og hægt er.
- 2 Brjóttu blaðið eftir hornalínunni í ferningnum að lengri hlið A4-blaðsins. Hvað kemur í ljós?
- 3 Mældu breidd blaðsins með reglustiku.
- 4 Notaðu Pýþagórasarregluna til að reikna út lengd hornalínunnar í stóra ferningnum.
- 5 Mældu með reglustiku og gakkðu úr skugga um að niðurstaðan sé rétt. Ef rétthyrningur er einslaga við A4-blaðið segjum við að hann sé í A4-stærð.
- 6 Breidd rétthyrnings er 1. Hver hlýtur nákvæm lengd að vera til að rétthyrningurinn sé í A-stærð?
- 7 Notaðu hringfara og reglustiku til að teikna rétthyrning í A-stærð þar sem breiddin er 4 cm.
- 8 Mældu og reiknaðu. Hvaða stafræna tæki hér fyrir neðan hefur skjá sem er næstum því í A-stærð?



**A-stærðirnar** eru staðlaðar pappírsstærðir þar sem hlutfallið milli lengri og styttri hliðanna er ferningsróttin af 2.



GPS-tæki í bíl



Farsími



Spjaldtölva

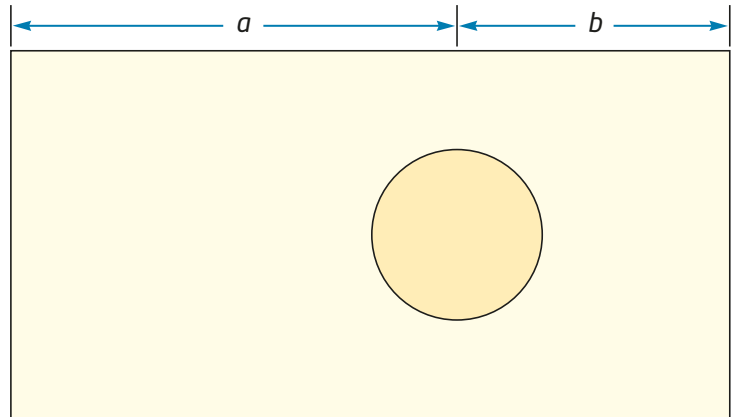
- 9 Mældu breidd og lengd rétthyrninga í umhverfi þínu, t.d. glugga, dyr, bækur o.s.frv. Athugaðu hvort einhverjir þessara rétthyrninga séu í A-stærð.



## Gullinsnið

Í fjölskyldu Jóns og Gunnu er venjan að hafa ávaxtaskál á eldhúsbörðinu en fjölskyldumeðlimir eru ósammála um hvar skálin á að standa. Sumir þeirra vilja hafa hana á miðju bórðinu en öðrum finnst fallegra ef hún stendur ofurlítið til hliðar á bórðinu.

„Svona vil ég hafa hana,“ segir mamma ákveðin og setur skálina eins og myndin sýnir.



**2.69** Á bórðinu sem sýnt er á myndinni fyrir ofan er  $a = 1,4833$  m og  $b = 0,9167$  m.

Reiknaðu hlutföllin  $\frac{a}{b}$  og  $\frac{a+b}{a}$ . Hvað kemur í ljós?

Hlutfall **gullinsniðs** er u.þ.b. 1,618.

**Gullinsnið** er ákveðin skipting á striki. Í skiptingunni er ákveðið samræmi þannig að hlutfallið milli lengri og styttri hluta striksins er jafnt og hlutfallið milli alls striksins og lengri hlutarins.

Hlutfallið er  $\approx 1,618$

Hlutfallið er:  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

$\varphi$  er grískur bókstafur sem kallast fi.

Gullinsniðið kemur fyrir víða í náttúrunni og er oft notað í listum og arkitektúr.

**2.70** Á myndinni má sjá framhlið Parþenonhofsins (Meyjarhofsins) á Akrópólshæðinni í Aþenu í Grikklandi.

- Mældu lengd og breidd rétt-hyrningsins kringum Parþenon.
- Reiknaðu hlutfallið milli lengdar og breiddar. Hvað sýnir þetta hlutfall?



Í gullnum rétthyrningi er hlutfallið milli lengdar og breiddar gullinsnið, það er um það bil 1,618.

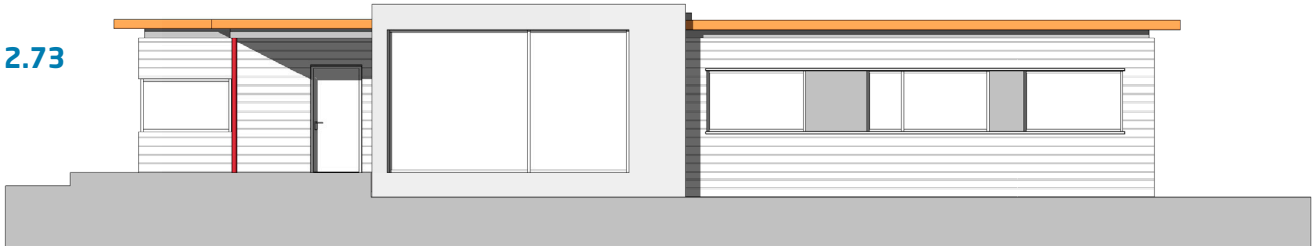
Svona getur þú teiknað gullinn rétthyrning		
Prep	Lýsing	Mynd
1	Teiknaðu grunnlínu og notaðu síðan hringfara og reglustiku til að teikna ferninginn $ABCD$ .	
2	Skiptu ferningnum í tvo eins rétthyrninga með því að miða við miðþveril grunnlínunnar. Kallaðu skurðpunkt miðþverilsins og grunnlínunnar $S$ .	
3	Mældu strikið $SC$ með hringfara og merktu samsvarandi lengd frá $S$ eftir grunnlínunni. Kallaðu skurðpunktinn $E$ .	
4	Ljúktu við að teikna rétthyrninginn með því að teikna þveril frá $E$ sem sker framlengda línuna $DC$ . Kallaðu þann skurðpunkt $F$ .	



**2.71** Veldu þrjú mismunandi mál fyrir styttri hlið rétthyrninga og teiknaðu þrjá mismunandi rétthyrninga með gullinsniði.

**2.72** Gullinn rétthyrningur hefur breiddina 1. Sýndu með reikningi að lengdin er  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**2.73**



Myndin sýnir framhlið af húsi sem er í funkisstíl.

**a** Mældu og kannaðu hvort þú finnur rétthyrningslaga form sem hafa hlutföllin

$$1 : 1 \quad 1 : \sqrt{2} \quad 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad 1 : \sqrt{3}$$

**b** Teiknaðu eigin tillögu að framhlið húss þar sem þú notar rétthyrningsformin í a-lið.

**2.74** Myndin til hægri sýnir framhlið kirkjunnar Notre Dame í París. Mældu lengdir á myndinni og finndu hlutföll í byggingunni sem samsvara gullinsniði.



**2.75** Byrjunin á talnarunu Fibonaccis er eftirfarandi:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

**a** Skoðaðu mynstrið í talnaruninni og finndu þrjár næstu tölur.

**b** Útskýrðu með eigin orðum hvernig talnarunan er byggð upp.

**c** Notaðu töflureikni til að finna 30 fyrstu tölurnar í Fibonacci-rununni.

Við látum  $T_n$  vera tölu númer  $n$  í Fibonacci-röðinni.

**d** Notaðu töflureikni og reiknaðu út hlutfallið milli tveggja talna sem koma hvor á eftir annarri,  $T_n : T_{n-1}$ . Notaðu allar tölurnar frá og með  $T_2$  til og með  $T_{30}$ .

**e** Námunndaðu allar hlutfallstölurnar að þremur aukastöfum. Hvaða tölu nálgast hlutfallstölurnar eftir því sem  $n$  stækkar?



Leonardo Fibonacci,  
ítalskur stærðfræðingur  
(um það bil 1170-1220)

## Fibonacci og spíralar

### Þið þurfið

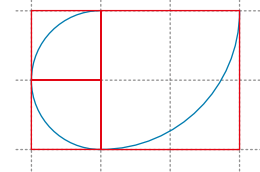
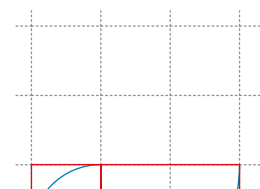
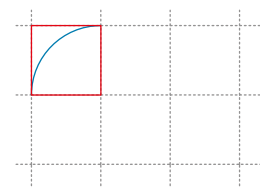
- rúðustrikað blað
- hringfara og reglustiku
- ananas, greniköngul eða furuköngul
- mynd af sólblómi
- tússpenna (eða margar teiknibólur)



### Aðferð

#### Hluti 1

- 1 Byrjaðu á því að teikna lítinn ferning þar sem hliðarlengdin er 1.
- 2 Settu odd hringfarans í eitt hornið og teiknaðu boga yfir hornalínuna í ferningnum yfir í mótlægt horn.
- 3 Teiknaðu jafn stóran ferning við hlið þess fyrri þannig að þú getir haldið áfram frá hringboganum sem þú byrjaðir á og teiknað boga yfir hornalínuna eins og í fyrri ferningnum.
- 4 Nú hefur þú teiknað rétthyrning. Bættu nú við ferningi með hliðarlengdina 2 þannig að þú fái nýjan rétthyrning. Haltu áfram með bogann.
- 5 Haltu áfram að teikna ferninga á langhlið rétthyrningsins og teiknaðu bogana.
- 6 Skráðu hliðarlengdina í hverjum ferningi jafnóðum og þú teiknar. Hvað kemur í ljós?



#### Hluti 2

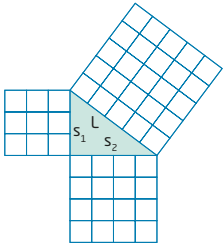
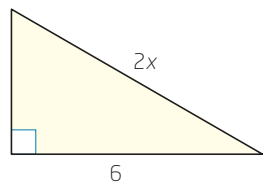
Myndin sýnir hvernig mynstrið á ananasinum myndar vefju. Fylgja má vefjunum frá hægri til vinstri eða frá vinstri til hægri. Útvegaðu ananas, notaðu tússpenna og merktu vefju sem liggur til vinstri. Teldu frá þessari vefju hve margar „vinstrisnúnar“ vefjur eru kringum ananasinn. Endurtaktu leikinn með „hægrisnúnu“ vefjunum.

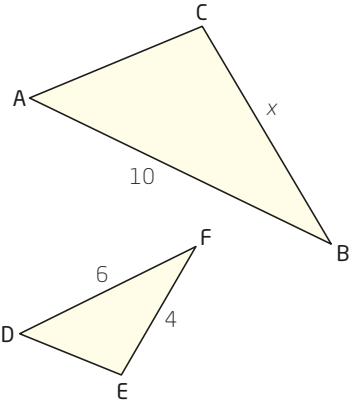
Prófaðu þetta á köngli og á myndinni af sólblómi.

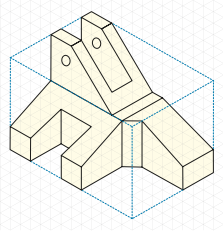
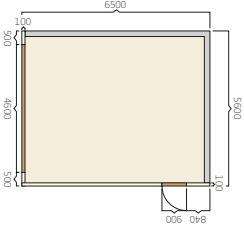
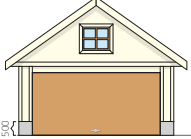
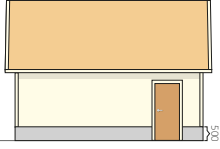
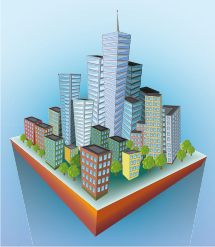

Hvað kemur í ljós?



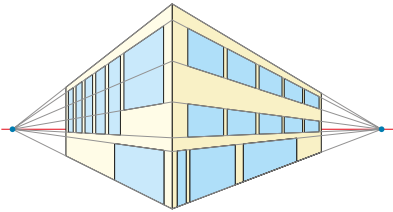
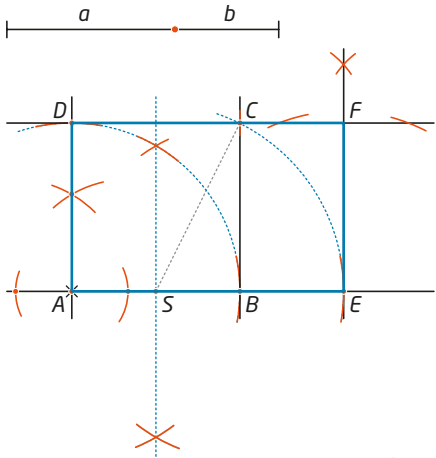
# Í stuttu máli

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reiknað út lengdir óþekktra hliða í rétthyrndum þríhyrningum	<p><b>a</b> Hvað segir Pýþagórasarreglan okkur?</p> <p><b>b</b> Finndu lengd langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi þar sem skammhliðarnar eru 5 m og 8 m.</p> <p><b>c</b> Í rétthyrndum þríhyrningi er langhliðin 13 m og önnur skammhliðin 5 cm. Finndu lengd hinnar skammhliðarinnar.</p>	<p><b>a</b> Í rétthyrndum þríhyrningi er ferningstala langhliðarinnar jöfn summu ferningstalna skammhliðanna.</p>  <p><b>b</b></p> $l^2 = s_1^2 + s_2^2$ $l^2 = 5^2 + 8^2$ $l^2 = 25 + 64$ $l^2 = 89$ $l = \sqrt{89}$ $l \approx 9,4$ <p><u>Langhliðin er um það bil 9,4 m</u></p> <p><b>c</b></p> $l^2 = s_1^2 + s_2^2$ $13^2 = 5^2 + s_2^2$ $s_2^2 = 169 - 25$ $s_2^2 = 144$ $s_2 = \sqrt{144}$ $s_2 = 12$ <p><u>Hin skammhliðin er um það bil 12 cm</u></p>
reiknað út hliðarlengdir í nokkrum þríhyrningum af sérstakri gerð	<p>Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er lengri skammhliðin 6 cm. Hve langar eru hinar hliðarnar?</p>	<p>Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er langhliðin tvöfalt lengri en styttri skammhliðin.</p> $l^2 = s_1^2 + s_2^2$ $(2x)^2 = x^2 + 6^2$ $4x^2 - x^2 = 36$ $3x^2 = 36$ $x^2 = 12$ $x = \sqrt{12}$ $x \approx 3,5$  <p><u>Styttri skammhliðin er um það bil 3,5 cm</u></p> <p><u>Langhliðin er um það bil <math>2 \cdot 3,5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}</math></u></p>

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
<b>rökstutt að form séu einslaga</b>	<p><b>a</b> Hvað vitum við um einslaga þríhyrninga?</p> <p><b>b</b> Hvenær vitum við að tvö horn séu jafn stór?</p>	<p><b>a</b> Tvö og tvö horn eru jafn stór og hlutfallið milli samsvarandi hliða er jafnt.</p> <p><b>b</b> Tvö horn eru jafn stór ef</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• uppgefin hornastærð þeirra er sú sama</li> <li>• við getum reiknað út að hornastærð þeirra sé sú sama</li> <li>• hornin falla hvort ofan í annað</li> <li>• þau eru topphorn</li> <li>• þau eru einslæg horn við samsíða línur</li> <li>• samsvarandi armar hornanna eru hornréttir hvorir á aðra</li> </ul>
<b>reiknað út lengdir hliða í einslaga formum</b>	<p>Þríhyrningarnir tveir eru einslaga. Reiknaðu út lengd óþekktu hliðarinnar <math>x</math>.</p> 	<p>Hlutfallið milli samsvarandi hliða er jafnt.</p> $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DF}$ $\frac{x}{4} = \frac{10}{6}$ $\cancel{4} \cdot \frac{x}{\cancel{4}} = \frac{10}{6} \cdot 4$ $x = \frac{40}{6}$ $x \approx 6,7$ <p><u><u><math>BC \approx 6,7 \text{ cm}</math></u></u></p>
<b>fundið mælikvarða sem sýnir hlutfallið milli eftirmyndar og frummyndar</b>	<p><b>a</b> Hús nokkurt er 12 m á hæð. Á mynd er hæðin 6 cm. Finndu mælikvarðann.</p> <p><b>b</b> Vinnuteikning er í mælikvarðanum 5 : 1. Á teikningunni er ein skrúfan 4 cm á lengd. Hve löng er skrúfan í raunveruleikanum?</p>	<p><b>a</b> 12 m = 1200 cm Eftirmynd : frummynd = 6 : 1200 = <u>1 : 200</u> <u>Mælikvarðinn er 1 : 200</u></p> <p><b>b</b> 4 cm = 40 mm 40 mm : 5 = 8 mm <u>Skrúfan er 8 mm lengd.</u></p>

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
<p><b>notað mælikvarða til að reikna út fjarlægðir á korti</b></p>	<p>Hver er fjarlægðin milli tveggja borga A og B þegar fjarlægðin er 5 cm á korti þar sem mælikvarðinn er 1 : 2 500 000 er 5 cm?</p>	<p><math>5 \cdot 2\,500\,000 \text{ cm} = 12\,500\,000 \text{ cm}</math>  <math>= 125\,000 \text{ m} = \underline{125 \text{ km}}</math></p> <p><u>Fjarlægðin er 125 km</u></p>
<p><b>búið til og notað vinnuteikningar</b></p>	<p><b>a</b> Gerðu grunnteikningu og framhlið af bílskúr.</p> <p><b>b</b> Hvers konar vinnuteikning er þetta?</p> 	<p><b>a</b> Grunnmynd:</p>  <p>Framhlið bílskúrsins:</p>  <p>Hlið bílskúrsins:</p>  <p><b>b</b> Vinnuteikningin er teiknuð á þrívíddarpunktablað.</p>
<p><b>borið kennsl á og lýst mismunandi fjarvídd í myndum og teikningum</b></p>	<p><b>a</b> Hvað er sjónhæðarlína og hvarfpunktur?</p> <p><b>b</b> Hvers konar fjarvídd er notuð á teikningunni?</p> 	<p><b>a</b> Sjónhæðarlína er lárétt lína á teikningu. Hvarfpunktur safnar saman línunum, sem í raunveruleikanum eru samsíða, í einum punkti á teikningunni.</p>  <p><b>b</b> Notuð er þriggja punkta fjarvídd vegna þess að á myndinni eru þrír hvarfpunktar.</p>



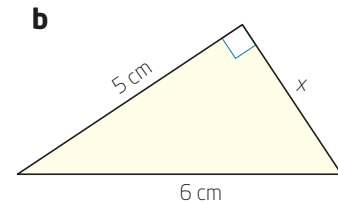
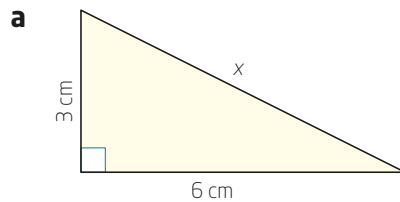
Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
teiknað skissur með einum eða fleiri hvarfpunktum	Teiknaðu byggingu með tveggja punkta fjarvídd.	
lýst nokkrum reglum sem gilda í byggingartækni	Hvers vegna verður þríhyrningsformið oft fyrir valinu frekar en ferhyrningsformið sem grunnform í byggingum?	Þríhyrningurinn verður fyrir valinu vegna þess að hann er stífara form. Þegar búið er að ákveða hliðarlengdirnar eru hornastærðirnar um leið fastar. Í ferhyrningi geta hornastærðirnar breyst þótt hliðarlengdirnar séu fastar. Ef einungis ferhyrningar eru notaðir getur það orðið til þess að byggingin skekkist eða gefur auðveldlega eftir fyrir utanaðkomandi krafti.
notað mikilvæga eiginleika þríhyrninga	<p>a Hvað vitum við um hornasummu þríhyrnings?</p> <p>b Hvaða upplýsingar þarf maður að hafa til að geta búið til tiltekinn þríhyrning?</p>	<p>a Hornasumman í öllum þríhyrningum er <math>180^\circ</math>.</p> <p>b Annaðhvort þarf að þekkja lengdir allra hliðanna eða tveggja horna og einnar hliðar. Einnig nægir að þekkja tvær hliðar og eitt horn ef hornið er ekki mótlægt annarri þekktu hliðinni.</p>
útskýrt hvað einkennir gullinsnið	<p>a Hvert er nákvæmt gildi og námundargildi gullinsniðs?</p> <p>b Hvað einkennir gullinsnið?</p> <p>c Teiknaðu gullinn rétthyrning.</p>	<p>a <math>\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618</math></p> <p>b Gullinsnið er hlutfall sem skiptir striki í tvo hluta þannig að hlutfallið milli lengdar striksins í heild og lengri hluta striksins er hið sama og hlutfallið milli lengri hluta striksins og styttri hlutans.</p> <p>c </p>

# Bættu þig!

## Þríhyrningsútreikningar

**2.76** Í þríhyrningi eru tvö hornanna  $63^\circ$  og  $48^\circ$ . Hvað er þriðja hornið stórt?

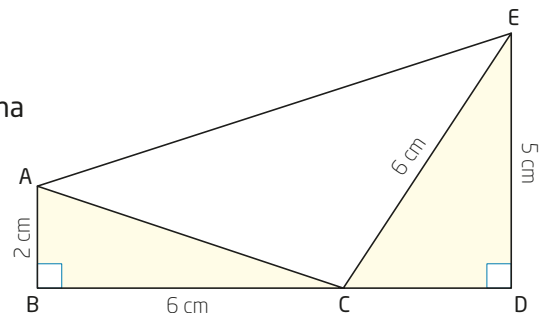
**2.77** Reiknaðu lengdir óþekktu hliðanna.



**2.78** Snúra sem er með tólf hnúta með jöfnu millibili er bundin saman þannig að hún myndar hring. Útskýrðu hvernig þú getur notað snúruhringinn til að búa til þríhyrning sem þú getur notað til ganga úr skugga um að eitt hornið sé rétt.

**2.79 a** Reiknaðu út lengdir strikana  $AC$ ,  $CD$  og  $AE$ .

**b** Finndu flatarmál  $\triangle ACE$ .

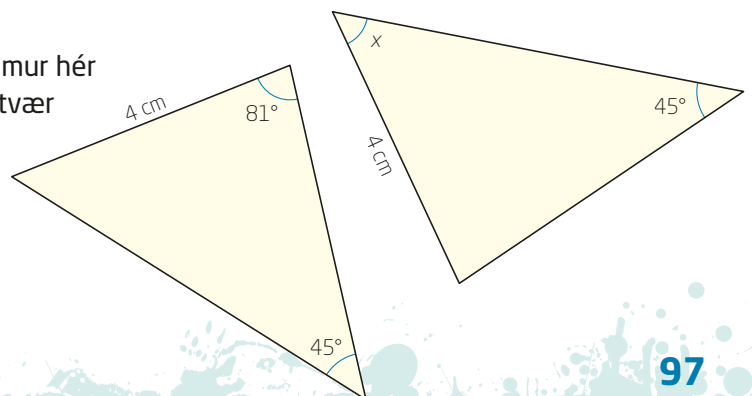


**2.80** Í rétthyrnda þríhyrningnum  $ABC$  er  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 5$  cm og  $AC = 7$  cm. Athugaðu hvort  $\angle B$  er jafnt og, stærra en eða minna en  $60^\circ$ .

**2.81** Hornalína fernings er 9,9 cm. Finndu hliðarlengdirnar.

**2.82** Í þríhyrningunum tveimur hér til hliðar eru tvær og tvær hliðar jafn langar.

Hve stórt er  $\angle x$ ?





**2.83** Tré brotnaði í 1,5 m hæð yfir jörðu. Toppurinn á trénu féll til jarðar í 10 m fjarlægð frá neðsta hluta trésins, mælt eftir jörðinni.  
Hve hátt var tréð?

**2.84** Hanna og Loftur byggja sólpall þar sem hornin eiga að vera rétt. Þau mæla eina hlið sólpallsins og hún reyndist vera 5,3 m. Hornalínan er 9,2 m.  
Hvað eru hinar hliðarnar langar?

**2.85** Gert er ráð fyrir að píramídarnir á myndinni séu einslaga. Stærsti píramídinn heitir Keops-píramídinn. Hann er 147 m á hæð. Grunnflöturinn er ferningslaga og er hliðarlengdin 230 m.



**a** Hliðarlengd grunnflatar næst stærsta píramídans, Kefren-píramídans, er 215 m.

Hversu hár er þessi píramídi?

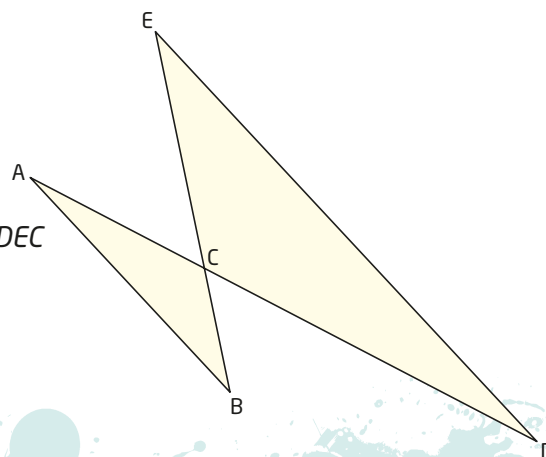
**b** Minnsti píramídinn á myndinni, Menkaura-píramídinn, var upphaflega 65,5 m á hæð.

Hve breiður er grunnflöturinn?

**2.86**  $AB \parallel DE$ .

**a** Útskýrðu hvers vegna  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

**b**  $AB = 7,0$ ,  $BC = 3,0$  og  $DE = 13,0$ .  
Hve löng er  $BE$ ?



## Kort og mælikvarði

- 2.87** Höggmyndin „Kona með strokk“, sem sjá má í höggmyndagarðinum við Ásmundarsafnið við Sigtún í Reykjavík, er 190 cm á hæð. Til sölu eru 20 cm háar afsteypur af styttni.

Í hvaða mælikvarða er afsteypan gerð?



- 2.88** Notaðu myndina af maríuhænunni. Í raunveruleikanum er maríuhænan 5 mm á lengd.

Í hvaða mælikvarða er myndin?



- 2.89** Fjarlægðin í loftlínu milli Reykjavíkur og Egilsstaða er um það bil 375 km. Á korti er þessi fjarlægð 75 cm.

Í hvaða mælikvarða er kortið?

- 2.90** Frjókornið á myndinni er 0,05 mm á breidd í raunveruleikanum.

Mældu frjókornið á myndinni og finndu mælikvarðann.



- 2.91** Kortið af Ástralíu er í mælikvarðanum 1 : 60 000 000. Á kortinu sést hvar stærstu borgirnar eru.

Finndu fjarlægðina milli

- a** Perth og Brisbane
- b** Sydney og Brisbane
- c** Melbourne og Hobart
- d** Hobart og Darwin

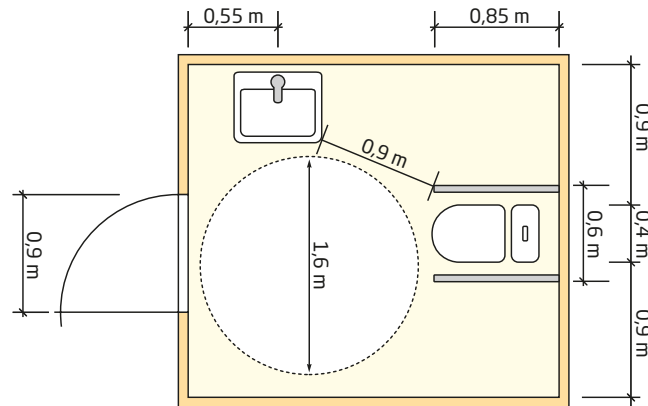


**2.92** Teikningin hér fyrir neðan sýnir baðherbergi með *algildri hönnun*.

**Algild hönnun**

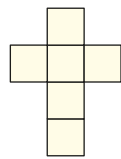
Með algildri hönnun er leitast við að tryggja gott aðgengi fyrir alla þannig að fólki sé ekki mismunað um aðgengi og almenna notkun mannvirkja á grundvelli fötlunar, skerðingar eða veikinda.

[www.mannvirkjastofnun.is/byggingar/algild-honnun/](http://www.mannvirkjastofnun.is/byggingar/algild-honnun/)

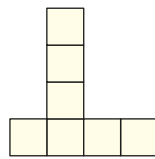


- Finndu mælikvarðann með því að mæla.
- Stækkaðu myndina og teiknaðu baðherbergið í mælikvarðanum 1 : 25.

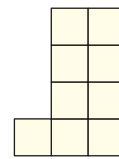
**2.93** Teikningarnar A-C sýna sömu myndina séða frá mismunandi hliðum.



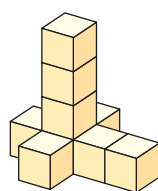
**A**



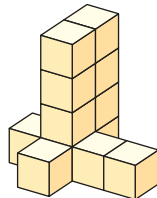
**B**



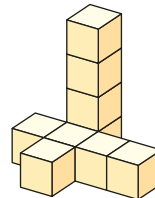
**C**



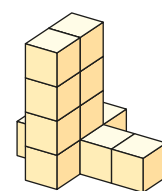
Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3



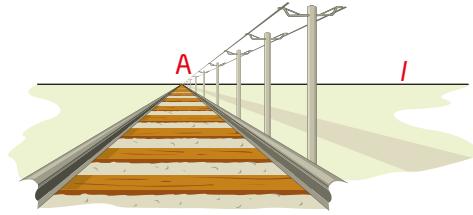
Mynd 4

- Hverjar þrívíðu myndanna 1-4 sem teiknaðar hafa verið á þrívíddarpunktablað passa við allar teikningarnar A, B og C í senn?
- Veldu eina af myndunum 1-4 og teiknaðu hana á þrívíddarpunktablað séða frá að minnsta kosti tveimur hliðum.

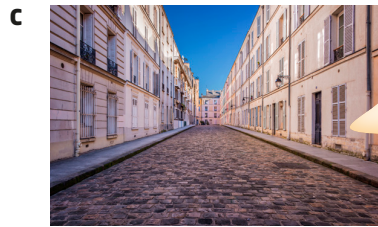
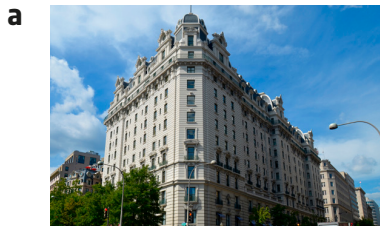


## Fjarvíddarteikningar

- 2.94 a Hvað kallast punkturinn A á teikningunni?  
b Hvað kallast línan l á teikningunni?



- 2.95 Hvers konar fjarvídd er notuð á litlu myndunum?



- eins punkts fjarvídd
- tveggja punkta fjarvídd
- þriggja punkta fjarvídd



- 2.96 Útskýrðu hvaða áhrif staðsetning persónanna miðað við sjónhæðarlínu hefur á hvernig við skynjum teikninguna.

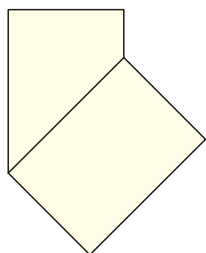


## Tækni, list og arkitektúr

- 2.97** Mældu framstig ( $f$ ) og uppstig ( $u$ ) þrepa á tveimur mismunandi stigum í umhverfi þínu.  
Kannaðu með reikningi hvort stiginn er í samræmi við tröppuformúluna í byggingarreglugerð:

$$f + 2u = (620 \pm 20) \text{ mm}$$

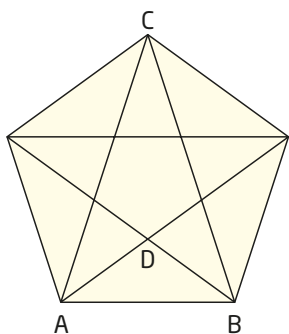
- 2.98** Stytttri hlið í rétthyrningi í A-stærð er 5 cm. Teiknaðu rétthyrninginn með hringfara og reglustiku.



- 2.99** Hugsaðu þér að þú sért með marga eins rétthyrninga í A-stærð. Þú átt að leggja marga slíka hvorn ofan á annan. Myndin sýnir hvernig á að byrja. Settu blað 3 ofan á blað 2 eins og blað 2 er ofan á blaði 1.

- Hve mörg blöð notar þú áður en næsta blað mun lenda ofan á blaði 1?
- Gerðu skissu af blöðunum í a-lið með eins mörgum blöðum og þarf. Hugsaðu þér að styttri hlið blaðsins hafi lengdina 1. Hvað þekja blöðin þá stórt svæði?

- 2.100** Venjulegt greiðslukort hefur form gullins rétthyrnings.  
Hver er lengd kortsins ef breiddin er 5,4 cm?



- 2.101** Notaðu rúmfræðiforrit.
- Teiknaðu reglulegan fimmhyrning og dragðu hornalínurnar eins og myndin sýnir.
  - Mældu  $AB$ ,  $AC$  og  $AD$ .
  - Reiknaðu hlutföllin  $AC : AB$  og  $AB : AD$ . Hvað kemur í ljós?

# Þjálfaðu hugann

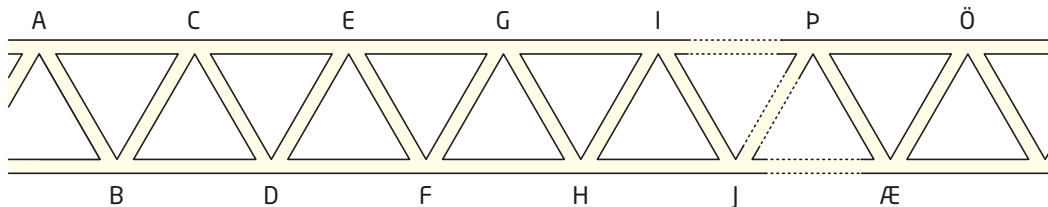
- **2.102** Lirfa nokkur étur sig í gegnum fimm binda alfræðirit sem stendur í bókahillu. Lirfan étur sig frá bls. 1 í 1. bindi og allt til síðustu blaðsíðunnar í 5. bindi. Hvert bindi er 4 cm á þykkt. Í gegnum hve marga sentimetra étur lirfan sig?



- **2.103** Hugsaðu þér að þú sért með sex prik sem hafa lengdirnar 1, 2, 3, 4, 5 og 6.
- Hve marga mismunandi þríhyrninga getur þú búið til með því að nota þrjú prikanna sem hliðar?
  - Hve margir þríhyrninganna í a-lið eru rétthyrndir?



- **2.104** Maur byrjar í A og fetar sig milli tveggja bókstafa gegnum rörin sem sýnd eru á myndinni. Maurinn þarf alltaf að fara frá vinstri til hægri, hann má aldrei fara frá hægri til vinstri. Að öðru leyti getur hann valið leiðina að vild.



- Á hve marga mismunandi vegu kemst maurinn frá A til B?
- Á hve marga mismunandi vegu kemst maurinn frá A til C?
- Á hve marga mismunandi vegu kemst maurinn frá A til D?
- Á hve marga mismunandi vegu kemst maurinn frá A til E?
- Settu fram tilgátu um hvernig möguleikunum fjölgar eftir því sem fjarlægðin eykst. Prófaðu tilgátuna með því að telja á hve marga mismunandi vegu maurinn kemst frá A til F.
- Finndu, án þess að telja, á hve marga mismunandi vegu maurinn kemst frá A til Ö.





# Algebra og jöfnur

Algebra er verkfæri sem er notað í allri stærðfræði. Sama hvers konar stærðfræði þú notar – þú þarft að vita hvernig framkvæma skal mismunandi reikniaðgerðir og hvaða aðferðir eiga við hverju sinni. Oft þarftu að reikna með formúlum og bókstöfum sem þú þarft síðar að velja gildi á. Þá þarftu að nota reglur algebrunnar.



## Stærðfræðiorð

jöfnuhneppi  
innsetningaraðferðin  
samlagningaraðferðin  
grafísk lausn  
liður  
þáttur  
þáttun  
brotabrot  
núllreglan  
ferningsreglan  
samokareglan  
annars stigs jafna  
ójafna



Bæði í stærðfræði og öðrum greinum muntu þurfa að leysa jöfnur og ójöfnur.

?

Vogarskálarnar eru í jafnvægi þegar þrjár kúlur eru í annarri skálinni og tveir kubbar í hinn. Einn kubbur og tvær kúlur vega 210 grömm. Hvað vegur þá einn kubbur? Hvað vegur ein kúla?



# Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuheppi

## Markmið

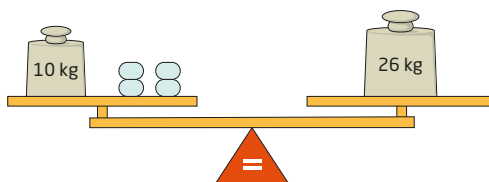
### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- leysa línuleg jöfnuheppi með innsetningaraðferðinni
- leysa línuleg jöfnuheppi með samlagningaraðferðinni
- leysa línuleg jöfnuheppi með teiknaðferðinni
- setja upp og leysa línuleg jöfnuheppi sem tengjast daglegu lífi
- reikna með formúlum



Jafna er samsett úr tveimur stæðum sem tengdar eru með jöfnumerki. Það þýðir að stæðurnar eru jafngildar. Jafna inniheldur eina eða fleiri óþekktar stærðir. **Það sem stendur vinstra megin við jöfnumerkið er jafnt því sem stendur hægra megin.** Jöfnurnar sem þú hefur leyst fram að þessu hafa haft eina óþekktu stærð. Venjulega er bókstafurinn  $x$  notaður til að tákna óþekktu stærðina og þú hefur lært hvernig leysa má slíkar jöfnur. Lausn jöfnu segir til um hvaða gildi  $x$  hlýtur að hafa til að jafnan sé rétt.

Þú getur hugsað þér að jafna sé skálavog. **Það þarf að vera jafnvægi milli þess sem er hægra megin og vinstra megin í jöfnunni.** Ef þú bætir við eða dregur frá öðrum megin í jöfnunni verður þú að gera hið sama hinum megin. Sama á við um margföldun og deilingu með tölum. Á meðan þú gætir þess að gera sömu reikningsaðgerðirnar báðum megin mun jafnan verða áfram rétt. Þetta má sýna með eftirfarandi mynd.



Fjórar jafn þungar kúlur plús 10 kg vega 26 kg. Ef við fjarlægjum 10 kg af hvorri hlið sjáum við að fjórar kúlur vega 16 kg. Það þýðir að hver kúla vegur fjórðung af 16 kg, það er að segja 4 kg.

Láttu  $x$  tákna þyngd einnar kúlu í kílógrömmum. Með jöfnu verður þetta sett þannig fram:

$$4x + 10 = 26 \quad | -10$$

$$4x = 16 \quad | :4$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = \underline{\underline{4}}$$

### 3.1 Leystu jöfnurnar.

**a**  $5x - 3 = 2x + 6$

**b**  $2x + 5 = 3x + 3$

**c**  $7x - 1 = 9x + 5$

**d**  $4x - 3 = 6x + 10$

**e**  $\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2} - 3x$

**f**  $\frac{x+3}{4} = 5$

**g**  $\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$

**h**  $\frac{5x+3}{5} = \frac{1-x}{3}$

**i**  $\frac{1}{6}x + \frac{3}{5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$

**3.2** Helga og Ingunn eiga jafn mikið af peningum. Helga kaupir tvo tebolla. Þá á hún 550 kr. eftir. Ingunn kaupir einn sams konar tebolla. Hún á 1000 kr. eftir.

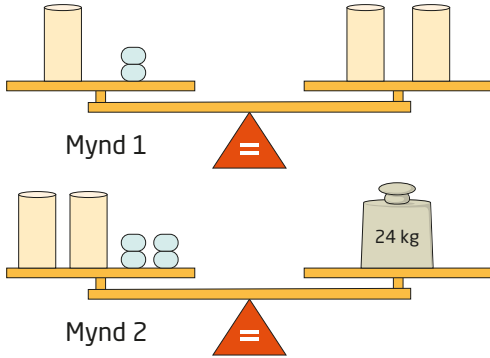
Hvað kostar einn tebolli?

**3.3** Skrifaðu hvert dæmi sem jöfnu, leystu hana og svaraðu spurningunni.

- a** Lísá ætlar að kaupa pils og skyrtu. Verð skyrtunnar nemur tvöföldu verði pilsins. Lísá borgar 11 400 kr. fyrir hvort tveggja. Hvað kostar pilsin og hvað kostar skyrtan?
- b** Hannes kaupir þrjár stílabækur og fjóra blýanta áður en skólinn byrjar. Stílabækurnar kosta fjórfalt meira en blýantarnir. Hannes borgar samtals 2560 kr. Hvað kostar ein stílabók?
- c** Ómar, Sara og Theódór voru í sumurvinnu. Ómar vann sér inn 8000 kr. meira en nemur þreföldum launum Söru. Theódór vann sér inn 4000 kr. minna en tvöföld laun Söru. Laun Ómars námu tvöföldum launum Theódórs. Hversu mikið vann hvert þeirra sér inn í sumarfríinu?

## Jöfnur með fleiri en einni óþekktri stærð

Pegar fleiri en ein óþekkt stærð er í jöfnu geta margar lausnir komið til greina. Ef vogin á mynd 1 er í jafnvægi má segja að sívalningur hafi sama gildi og tvær kúlur en við vitum ekki hvert gildi kúlanna er. Það getur verið hvað sem er svo fremi að sívalningurinn hafi tvöfalt gildi einnar kúlu.



Ef við eigum að finna gildi kúlunnar og sívalningsins þurfum við meiri upplýsingar. Með þeim upplýsingum sem við höfum fengið til viðbótar á mynd 2 getum við með rökhugsun fundið lausn. Við sjáum að einn sívalningur og tvær kúlur vege helminginn af 24 kg, það er að segja 12 kg. Af fyrri upplýsingum má sjá að tveir sívalningar vege 12 kg og að einn sívalningur vegur þá 6 kg. Þar með vegur ein kúla 3 kg.

Þetta má setja fram sem tvær jöfnur. Látum  $x$  tákna þyngd sívalnings og  $y$  þyngd kúlu.

Mynd 1 gefur jöfnuna:

$$I \quad x + 2y = 2x$$

Mynd 2 gefur jöfnuna:

$$II \quad 2x + 4y = 24$$

### Jöfnuhneppi

felur í sér tvær eða fleiri jöfnur með tvær eða fleiri óþekktar stærðir.

Leysa má *jöfnuhneppi* á marga vegu. Í báðum jöfnunum hafa  $x$  og  $y$  sama gildi. Það þýðir að við getum úr fyrri jöfnunni fundið stæðu sem tákna  $x$  og sett hana inn í síðari jöfnuna. Þá höfum við minnkað dæmið niður í eina jöfnu með aðeins einni óþekktri stærð og slíkar jöfnur hefur þú leyst áður. Í jöfnu II má deila með 2 báðum megin við jöfnumerkið.

Jöfnurnar tvær má því umrita þannig:

$$I \quad \begin{aligned} 2y &= 2x - x \\ 2y &= x \end{aligned}$$

$$II \quad x + 2y = 12$$

Af jöfnu I sérðu að setja má  $x$  í staðinn fyrir  $2y$ . Jafna II verður þá

$$II \quad \begin{aligned} x + x &= 12 && \text{sem hefur lausnina} \\ 2x &= 12 && \underline{x = 6} \end{aligned}$$

Ef við setjum lausnina inn í jöfnu I fæst:

$$\begin{aligned} 2y &= 6 \\ \underline{y} &= 3 \end{aligned}$$

Þetta er nákvæmlega það sama og við fengum með rökhugsuninni sem við beittum á myndirnar af sívalningunum og kúlunum. Aðferðin sem notuð var til að leysa þetta jöfnuhneppi kallast *innsetningaraðferðin*.

## Sýnidæmi 1

Leystu jöfnuhneppið:

$$\text{I} \quad 2x + 3y = 55$$

$$\text{II} \quad 4x + y = 35$$

### Tillaga að lausn

Það borgar sig að skoða jöfnurnar vel til að finna hvorri þeirra fylgir einfaldari útreikningur.

Ef leysa má aðra jöfnuna með tilliti til  $x$  eða  $y$  á einfaldan hátt er gott að byrja á henni. Hér má nota jöfnu II til að finna  $y$ .

$$\text{II} \quad 4x + y = 35$$

$$y = 35 - 4x$$

Nú getum við sett stæðuna  $(35 - 4x)$  í staðinn fyrir  $y$  í jöfnu I:

$$\text{I} \quad 2x + 3y = 55$$

$$2x + 3(35 - 4x) = 55$$

$$2x + 105 - 12x = 55 \quad | - 105$$

$$2x - 12x = 55 - 105$$

$$-10x = -50 \quad | : (-10)$$

$$x = 5$$

Við setjum nú  $x = 5$  inn í jöfnu II:

$$\text{II} \quad y = 35 - 4 \cdot 5 = 35 - 20 = 15$$

Lausn jöfnuhneppisins er:

$$\underline{x = 5, y = 15}$$

**Að leysa jöfnu** með tilliti til  $x$  eða  $y$  á einfaldan hátt er gott að byrja á henni. Hér má nota jöfnu II til að finna  $y$ .  
Að leysa jöfnu með tilliti til  $x$  eða  $y$  á einfaldan hátt er gott að byrja á henni. Hér má nota jöfnu II til að finna  $y$ .  
Að leysa jöfnu með tilliti til  $x$  eða  $y$  á einfaldan hátt er gott að byrja á henni. Hér má nota jöfnu II til að finna  $y$ .  
Að leysa jöfnu með tilliti til  $x$  eða  $y$  á einfaldan hátt er gott að byrja á henni. Hér má nota jöfnu II til að finna  $y$ .

Við leysum aðra jöfnuna með tilliti til annarrar óþekkta stærðarinnar. Sú stæða sem þannig fæst er síðan sett inn í hina jöfnuna og þá erum við aðeins með eina óþekkta stærð. Þá höfum við minnkað dæmið niður í eina jöfnu sem hægt er að leysa. Þá lausn setjum við inn í stæðu fyrir hina óþekkta stærðina. Þannig höfum við leyst jöfnuhneppið með reikningi. Þetta kallast **innsetningaraðferðin**.



Oft má breyta vandamálum úr daglegu lífi yfir í stærðfræðileg viðfangsefni eins og jöfnuhneppi.



## Sýnidæmi 2

Súsanna pantaði pakka með tveimur jafn þungum æfingaboltum og þremur jafn þungum lóðum. Pakkinn vegur 55 kg. Silja pantaði pakka með fjórum æfingaboltum og einu lóði sömu gerðar og Súsanna pantaði. Þessi pakki vegur 35 kg. Hvað vegur einn æfingabolti og hvað vegur eitt lóð?

### Tillaga að lausn

Láttu einn æfingabolta vega  $x$  kg og eitt lóð vega  $y$  kg.

Þá vegur pakki Súsönnu

$$2x + 3y = 55$$

Pakki Silju vegur

$$4x + y = 35$$

Þessar jöfnur eru þær sömu og í sýnidæmi 1. Lausnin er þess vegna að einn æfingabolti vegur 5 kg og eitt lóð vegur 15 kg.

### Innsetningaraðferðin 3.4

er aðferð til að leysa jöfnuhneppi. Þá finnur maður stæðu fyrir aðra óþekkту stærðina í annarri jöfnunni og setur stæðuna í staðinn fyrir hina óþekkту stærðina í hinnri jöfnunni.

Leystu jöfnuhneppin með reikningi. Notaðu *innsetningaraðferðina*.

**a** I  $x + 5y = 10$

II  $3x - y = 14$

**b** I  $4x + 2y = 0$

II  $3x + y = -1$

**c** I  $x - y = 8$

II  $5x + 3y = 16$

**d** I  $2x - 3y = 10$

II  $x + y = 20$

**3.5** Í íþróttum gerði Valdís samtals 100 armbeygjur og magaaefingar. Valdís gerði fjórfalt fleiri magaaefingar en armbeygjur.

Settu fram tvær jöfnur, eina fyrir hvora málsgrein hér á undan. Láttu  $x$  tákna fjölda magaaefinga og  $y$  fjölda armbeygja.

Leystu jöfnuhneppið og finndu hvað Valdís gerði margar armbeygjur og hve margar magaaefingar.





Ef við erum með tvær jöfnur felur hvor þeirra í sér tvær stærðir sem eru jafn gildar. Stæðan sem er vinstra megin við jöfnúmerkið og stæðan sem er hægra megin eru jafn gildar. Ef við leggjum saman eða drögum aðra stæðuna frá hinni skiptir ekki máli hvora við veljum vegna þess að þær eru jafn gildar.

Ef við skráum jöfnurnar hvora undir aðra getum við lagt saman vinstri hlið jafnanna annars vegar og hægri hlið jafnanna hins vegar. Þá kemur fram ný jafna sem einnig hlýtur að vera rétt. Ef við gerum þetta á hagkvæman hátt mun nýja jafnan einungis innihalda eina óþekkta stærð. Við köllum þetta **samlagningaraðferðina**.

### Sýnidæmi 3

Leystu jöfnuhneppið með því að nota samlagningaraðferðina.

I  $x + 5y = 10$

II  $3x - y = 14$

#### Tillaga að lausn

Ef við margföldum neðri jöfnuna með 5 fáum við  $-5y$  (og  $5y$  eru í efri jöfnunni). Við leggjum vinstri hliðar jafnanna saman og þá eru aðeins  $x$ -in eftir:

I  $x + 5y = 10$

II  $3x - y = 14 \quad | \cdot 5$

I  $x + 5y = 10$

II  $15x - 5y = 70$

I + II  $16x = 80$

Nú getum við fundið  $x$ :

$$x = \frac{80}{16} = 5$$

Til að finna  $y$  setjum við  $x = 5$  inn í upprunalegu jöfnu nr. II.

$$3x - y = 14$$

$$3 \cdot 5 - y = 14$$

$$15 - 14 = y$$

$$y = 1$$

Lausn jöfnuhneppisins er:  $x = 5, y = 1$

**Samlagningaráðferðin 3.6**

er notuð til að leysa jöfnuhneppi. Þá eru jöfnurnar lagðar saman þannig að önnur hvor óþekkta stærðin,  $x$  eða  $y$ , hverfi í samlagningunni. Yfirleitt þarf að margfalda aðra eða báðar jöfnurnar fyrst.

Að leysa jöfnu með reikningi samsvarar algebrískri lausn, t.d. með því að nota innsetningaráðferðina eða samlagningaráðferðina.

Þegar leysa á jöfnuhneppi er sú aðferð valin sem hentar best svo fremi að ekki sé tilgreint í dæminu hvaða aðferð skuli notuð.

Leystu jöfnuhneppin með reikningi. Notaðu *samlagningaráðferðina*.

**a I**  $x + 2y = 16$

**II**  $2x - y = 7$

**b I**  $4x - y = 5$

**II**  $x + y = 5$

**c I**  $7x + y = 0$

**II**  $3x + y = 4$

**d I**  $3x - 4y = 2$

**II**  $2y - 5x = 6$

**3.7**

Anna og Guðný eru á kaffihúsi. Anna kaupir tvær gosflöskur og eina bolla. Guðný kaupir eina gosflösku og þrjár bollur. Anna borgar 1360 kr. og Guðný borgar 1280 kr.

Hvað kostar ein gosflaska og hvað kostar ein bolla?

**3.8**

Grímur bóndi er með nokkrar landnámsætur og nokkra grísi. Dýrin eru alls 36 talsins og samtals hafa þau 96 fætur.

Hve marga grísi og hve margar ætur er Grímur bóndi með?

**3.9**

Í ísbúð eru seldar ískúlar í brauðformi. Dag nokkurn höfðu verið seld 15 brauðform með 41 ískúlu. Einhverjir höfðu keypt form með tveimur kúlum og aðrir með þremur kúlum. Enginn keypti eina kúlu í brauðformi.

Hve margir ísar voru seldir af hvorri tegund?

**3.10**

Ísbíllinn selur kassa með þremur vanilluíssum og sjö súkkulaðiíssum. Hver pakki kostar 1180 kr. Kassi með fimm ísum af hvorri tegund kostar 1300 kr.

Hvað kostar einn vanilluís og hvað kostar einn súkkulaðiís?



## Grafísk lausn

Hægt er að leysa línulegt jöfnuhneppi með teikningu. Hvora jöfnu má tákna með beinni línu eða grafi og við teiknum línurnar í sama hnitakerfi. Ef línurnar skerast hefur jöfnuhneppið lausn. Það er x-gildið og y-gildið sem er lausn í báðum jöfnunum, nefnilega hnit skurðpunktsins.

Þegar um jöfnuhneppi er að ræða má sýna hvora jöfnuna fyrir sig sem beina línu í hnitakerfi.

### Sýnidæmi 4

Leystu jöfnuhneppið með því að teikna gröf jafnanna.

I  $x + 5y = 10$

II  $3x - y = 14$

#### Tillaga að lausn

Teikning í höndunum:

Ef við leysum jöfnuhneppið með tilliti til x með því að teikna gröf jafnanna er hagkvæmast að gera það þannig að við sjáum hallatölurnar og skurðpunktana við y-ásinn..

I  $x + 5y = 10$

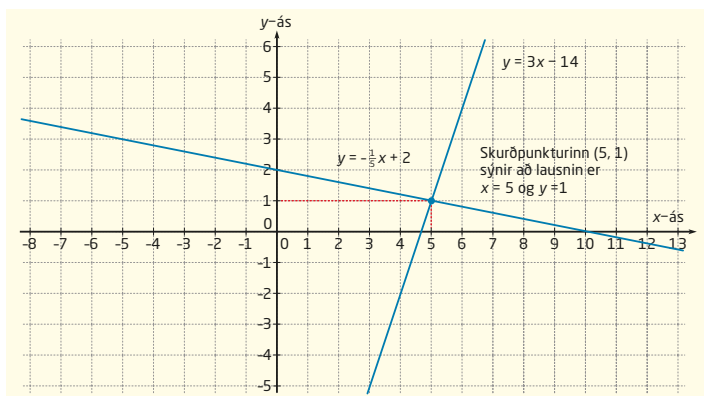
II  $3x - y = 14$

$$5y = -x + 10 \quad | :5$$

$$-y = -3x + 14 \quad | : -1$$

$$y = -\frac{1}{5}x + 2$$

$$y = 3x - 14$$



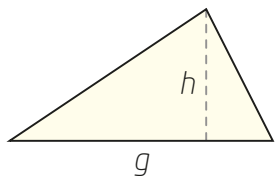
Lausnin:  $x = 5$  og  $y = 1$

Stafræn teikning:

Við leysum jöfnuhneppið með rúmfræðiforriti og teiknum gröf jafnanna. Við skráum hvora jöfnu í inntaksreitinn og ýtum á færsluhnappinn („enter“-hnappinn). Þá birtast gröfin og hægt er að lesa hnit skurðpunktsins.

**3.11** Leystu dæmi 3.4 og 3.6 með því að teikna gröf jafnanna. Gakktu úr skugga um að þú fái sömu lausn og þegar þú leystir jöfnuhneppin með reikningi.

## Formúlureikningur



Þú hefur lært margar formúlur bæði í stærðfræði og náttúrufræði. Formúlan  $F = \frac{1}{2} g \cdot h$  sýnir hvernig við reiknum út flatarmál þríhyrnings þar sem grunnlínan er  $g$  og hæðin er  $h$ .

Ef við þekkjum flatarmálið og eigum að finna hæðina getum við breytt formúlunni þannig að við fáum stæðu fyrir  $h$ . Þetta er sama formúlan en hún hefur verið skrifuð á annan hátt. Þú getur hugsað um formúluna sem jöfnu. Stærðin sem þú átt að finna er óþekkta breytan. Við segjum að við leysum jöfnuna með tilliti til  $h$  eða að við einangrum  $h$ . Hægt er að margfalda hvora hlið formúlunnar með 2:

$$2F = g \cdot h$$

Til að fá formúlu fyrir  $h$  þarftu að deila með  $g$ :

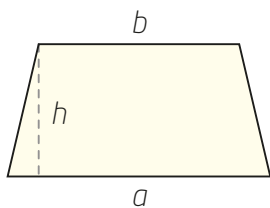
$$\frac{2F}{g} = h, \text{ eða skrifað í hina áttina: } h = \frac{2F}{g}.$$

Þetta kallast *formúlureikningur*. Í formúlureikningi þarftu að hugsa um formúluna eins og formúlujöfnu og leysa hana eins og allir bókstafirnir væru tölur nema stærðin sem þú átt að einangra.

### Sýnidæmi 5

Trapisa hefur flatarmálið  $F$ . Samsíða hliðarnar tvær hafa lengdirnar  $a$  og  $b$ . Hæðin er  $h$ .

- Finndu formúlu fyrir aðra samsíða línuna.
- Finndu  $a$  þegar  $F = 40$ ,  $b = 8$  og  $h = 4$ .



### Tillaga að lausn

- a** Formúlan fyrir flatarmál trapisu er:

$$F = \frac{(a + b) \cdot h}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2F = (a + b) \cdot h \quad | : h$$

$$\frac{2F}{h} = a + b \quad | - b$$

$$\frac{2F}{h} - b = a$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2F}{h} - b}}$$

- b** Við setjum gildin inn í formúluna í a-lið.

$$a = \frac{2 \cdot 40}{4} - 8 = 20 - 8 = \underline{12}$$

Lengd óþekkту samsíða hliðarinnar er 12

Til að finna  $a$  þurfum við að margfalda fyrst með 2. Næst deilum við með  $h$ , þar næst drögum við  $b$  frá báðum megin við jöfnumerkið í formúlujöfnunni.

## Sýnidæmi 6

Láttu  $K$  vera verð á vöru. Verðið er lækkað um  $p\%$ .  
Láttu  $N$  vera nýja lækkaða verðið.

- Skrifaðu formúlu fyrir  $N$ .
- Notaðu formúluna í a-lið til að finna formúlu fyrir  $K$ .
- Hve mikið kostaði skyrta áður en verðið var lækkað um 20% eða í 8400 kr.?

### Tillaga að lausn

- a** Þegar verðið er lækkað um  $p\%$  er breytipátturinn

$$\frac{100-p}{100} = 1 - \frac{p}{100}$$

Lækkaða verðið er þá:

$$\underline{\underline{N = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)}}$$

- b** Ef við leysum formúlujöfnuna í a-lið með tilliti til  $K$  þurfum við að deila með breytipættinum:

$$\underline{\underline{\frac{N}{1 - \frac{p}{100}} = K}} \quad \text{eða} \quad \underline{\underline{K = \frac{N}{1 - \frac{p}{100}}}}$$

- c** Gefið er að  $N = 8400$  og  $p = 20$ . Breytipátturinn er þá

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$$

Breytipátturinn settur inn í formúlu sem við fundum í b-lið:

$$K = \frac{8400}{0,80} = 10\,500$$

Skyrtan kostaði 10 500 kr. áður en verðið var lækkað.

Breytipátturinn er  $1 + \frac{p}{100}$  þegar eitthvað eykst um  $p\%$ , og  $1 - \frac{p}{100}$  þegar eitthvað minnkar um  $p\%$ .







**3.12** Formúlan fyrir meðalhraðann  $h$  þegar við höfum farið vegalengdina  $v$  á tímanum  $t$  er:

$$h = \frac{v}{t}$$

- Notaðu formúlureikning til að finna formúlu fyrir  $t$ .
- Hve langt hefur þú hjólað þegar meðalhraðinn er 25 km/klst. og þú hefur hjólað í 3,5 klst.
- Notaðu formúlureikning til að finna formúlu fyrir  $v$ .
- Hve lengi ertu að hjóla 50 km á meðalhraðanum 27 km/klst.? Skrifðu svarið í klst. og mín.

**Réttur strendingur** er strendingur þar sem allir hliðarfletir eru hornréttir á grunnflöt.

- 3.13**
- Skrifaðu formúluna fyrir rúmmál sívalnings,  $R$ , þar sem geisli sívalningsins er  $r$  og hæðin  $h$ .
  - Finndu formúlu fyrir geislann  $r$ .
  - Finndu geislann þegar hæðin er 10 cm og rúmmálið er 1 lítri.
  - Skrifaðu formúlu fyrir yfirborðsflatarmál ( $Y$ ) rétts strendings með ferningslaga grunnfleti þar sem hlið grunnflatar er  $g$  og hæðin er  $h$ .
  - Finndu formúlu fyrir hæðina  $h$ .
  - Finndu hæð strendings með sama form og strendingurinn í d-lið þar sem yfirborðsflatarmálið er  $210 \text{ cm}^2$  og ferningslaga botninn og lokið hafa hliðarlengdina 5 cm.

**Réttstrendingur** er réttur strendingur þar sem allir hliðarfletir og grunnfletir eru rétthyrningar.

- 3.14** Verðið á vöru er  $K$  áður en verðið hækkaði um  $p\%$
- Finndu formúlu fyrir nýja verðið  $N$ .
  - Leystu formúluna í a-lið með tilliti til  $p$ .
  - Gamall bíll kostaði 350 000 kr. árið 2012. Aðeins yngri bíll af sömu gerð kostaði 390 000 kr. árið 2015. Notaðu formúluna í b-lið til að finna breytipáttinn og verðið í prósentum.

## Skóstærð og fót lengd?

Þetta verkefni er fyrir allan þekking.

### Þið þurfið

- reglustiku
- málband
- blað og blýant

Til að reikna út skóstærð má nota formúluna  $S = \frac{3F + 5}{2}$ ,

þar sem  $S$  táknar skóstærðina og  $F$  er fót lengdin mæld í sentimetrum.

### Aðferð

- 1 Mælið fót lengd helmings nemenda í bekkjardeildinni. Skráið einnig í dálkinn *raunveruleg skóstærð* hvaða skóstærð nemendurnir nota venjulega.
- 2 Reiknið út skóstærðina með formúlunni sem gefin er upp hér fyrir ofan.
- 3 Gerið sameiginlega töflu og skráið niðurstöðurnar.

Nafn	Fót lengd	Reiknuð skóstærð	Raunveruleg skóstærð
		$S = \frac{3F + 5}{2}$	

- 4 Gangið úr skugga um að formúlan eigi við allar fót lengdir sem þið hafið mælt.
- 5 Notið formúluna fyrir skóstærð til að búa til formúlu fyrir fót lengdina  $F$ .
- 6 Kannið skóstærð hins helmings nemendanna í bekknum.

Nafn	Fót lengd	Reiknuð skóstærð	Raunveruleg skóstærð

Reiknið út fót lengdina með formúlunni sem þið bjugguð til í lið 5.

- 7 Gangið úr skugga um að formúlan passi fyrir allar skóstærðir.



# Bókstafareikningur

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- deila í almenn brot með almennum brotum
- reikna með almennum brotum þar sem teljari og nefnari geta innihaldið bókstafi
- þátta algebrustæður
- stytta almenn brot með bókstafastæðu

Pegar þú reiknar með bókstöfum notar þú sömu reglur og gilda fyrir talnareikning. Ef þú átt að leggja saman eða draga frá með almennum brotum þarftu að finna samnefnarann. Þegar þú margfaldar almenn brot þarftu að margfalda teljara með teljara og nefnara með nefnara. Mikilvægt er að þú hugsir þig vel um áður en þú styttr almenn brot. Þú mátt aðeins stytta *þætti*, ekki *liði*.

Pegar við reiknum með bókstöfum notum við ekki blandnar tölur. Við notum alltaf eiginleg eða óeiginleg brot.

**Liður** er tala eða algebrustæða sem er lögð við eða dregin frá annarri tölu eða stæðu. Liðirnir eru aðgreindir með plús- eða mínustákni.

**Þáttur** er tala eða algebrustæða sem margfaldað er með. Þættir eru aðgreindir með margföldunarmerki.

**Þáttun** felst í að skrifa tölu eða algebrustæðu sem margfeldi tveggja eða fleiri þátta.

Áður en við skoðum bókstafareikning nánar skulum við rifja upp reikning með almennum brotum.

**3.15** Reiknaðu og skráðu svarið á eins einfaldan hátt og hægt er.

**a**  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1$

**c**  $\frac{2}{21} - \frac{4}{7} + \frac{1}{3}$

**b**  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10}$

**d**  $5 - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} - \frac{9}{10}$

**3.16** Reiknaðu og skráðu svarið á eins einfaldan hátt og hægt er.

**a**  $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14}$

**c**  $\frac{2}{3} \cdot 12$

**e**  $\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{22}$

**b**  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$

**d**  $4 \cdot \frac{7}{10}$

**f**  $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{15}$

**3.17** Reiknaðu og skráðu svarið á eins einfaldan hátt og hægt er.

**a**  $\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

**c**  $7 : \frac{2}{3}$

**e**  $4 : \frac{2}{3}$

**b**  $\frac{3}{5} : 6$

**d**  $1 : \frac{1}{3}$

**f**  $\frac{3}{4} : \frac{9}{8}$

## Brotaminni

Þetta spil er fyrir 2-4 leikmenn.

### Þið þurfið

- 20 spjöld (verkefnablað 3.3.3)

### Aðferð

- 1 Spjöldin eru stokuð og þeim dreift á hvolf á borðið.
- 2 Leikmenn draga til skiptis tvö spjöld að eigin vali. Ef gildi spjaldanna er jafnt fær leikmaðurinn spjöldin. Ef gildin eru ekki jöfn setur leikmaðurinn spjöldin aftur á hvolf á sama stað.
- 3 Þegar leikmaður fær samstæðu - eða slag - getur hann valið tvö ný spjöld allt þar til spjöldin sem hann dregur eru ekki samstæður.
- 4 Næsti leikmaður endurtekur leikinn.
- 5 Þegar búið er að finna allar samstæðurnar er spilinu lokið.

Sá vinnur sem hefur fengið flesta slagi.

$$4 : \frac{1}{3}$$

$$\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\frac{108}{72}$$

$$\frac{5+4}{4-1}$$

## Bókstafareikningur með almennum brotum

Nú ætlum við að æfa reikning með almennum brotum þar sem teljari og nefnari geta verið bókstafir. Við byrjum á að skoða samlagningu og frádrátt. Þú átt að hugsa nákvæmlega eins og vanalega þegar teljari og nefnari eru tölur. Ef nefnararnir eru jafngildir getur þú sett alla teljarana upp á eitt brotastrik. Ef mínusmerki er fyrir framan brotastrikið þarftu að muna að það gildir fyrir alla liðina sem mynda teljarann. Það merkir að þú þarft að skipta um formerki á öllum liðum teljarans.

Ef mismunandi nefnarar eru í almennu brotunum sem þú átt að einfalda þarftu fyrst að finna samnefnarann, lengja brotin og setja allt upp á eitt brotastrik. Samnefnarinn er *minnsta sameiginlega margfeldi* allra nefnaranna.

### Sýnidæmi 7

Gott er að setja sviga utan um allan teljarann þegar mínusmerkið er fyrir framan brotið. Þá er auðveldara að muna eftir að skipta um formerki.

Dragðu saman líka liði og einfaldaðu eins og hægt er.

$$\frac{4}{a+1} + \frac{3a}{a+1} - \frac{a+2}{a+1}$$

#### Tillaga að lausn

$$\begin{aligned} \frac{4}{a+1} + \frac{3a}{a+1} - \frac{a+2}{a+1} &= \\ \frac{4 + 3a - (a+2)}{a+1} &= \\ \frac{4 + 3a - a - 2}{a+1} &= \frac{2a+2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{\cancel{a+1}} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Hér eru allir nefnararnir eins. Þá má setja öll brotin upp á eitt strik.

### Sýnidæmi 8

Stundum eru nefnararnir samsettir úr mörgum þáttum. Þá þarf að gæta þess að allir þættirnir séu með til að unnt sé að lengja upprunalegu brotin þannig að þau fái sama nefnara. Allir þættirnir sem eru í hinum mismunandi nefnurum verða að vera með í samnefnaranum.

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ a &= a \\ 2b^2 &= 2 \cdot b \cdot b \\ \text{Samnefnari:} \\ 2 \cdot a \cdot b \cdot b &= 2ab^2 \end{aligned}$$

Dragðu saman líka liði og einfaldaðu eins og hægt er.

$$\frac{3}{2a} + \frac{a-1}{a} - \frac{2b^2 - a + 4}{2b^2}$$

#### Tillaga að lausn

$$\begin{aligned} \frac{3}{2a} + \frac{a-1}{a} - \frac{2b^2 - a + 4}{2b^2} &= \\ \frac{3 \cdot b^2}{2ab^2} + \frac{(a-1) \cdot 2b^2}{2ab^2} - \frac{(2b^2 - a + 4) \cdot a}{2ab^2} &= \\ \frac{3b^2 + 2ab^2 - 2b^2 - 2ab^2 + a^2 - 4a}{2ab^2} &= \\ \frac{a^2 - 4a + b^2}{2ab^2} &= \end{aligned}$$

Hér eru mismunandi nefnarar þannig að við verðum að finna samnefnarann. Ekki er hægt að þátta nefnarana meira nema  $b^2 = b \cdot b$ . Þá eru þættirnir í samnefnaranum  $2a$  og  $b^2$ . Það þýðir að samnefnarinn er  $2ab^2$ . Þá getum við lengt öll brotin og einfaldað í lokin.



**3.18** Dragðu saman og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $\frac{2}{3a} + \frac{5}{3a} - \frac{1}{3a}$

**b**  $\frac{5}{a+2} + \frac{a-3}{a+2}$

**c**  $\frac{a+b}{2} + \frac{a^2-2b}{2} - \frac{a-b}{2}$

**d**  $\frac{x^2}{x-1} - \frac{3}{x-1} - \frac{x-3}{x-1}$

**Minnsta sameiginlega margfeldi** tveggja eða fleiri talna er minnsta talan sem er deilanleg með öllum tölunum.

**3.19** Dragðu saman og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $\frac{a}{2} - \frac{a-b}{2} + \frac{b}{4}$

**b**  $2 + \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a}$

**c**  $\frac{x-1}{2x} + \frac{4}{x} - \frac{1}{2}$

**d**  $\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}$

**e**  $\frac{x+3y}{xy} - \frac{3}{x} + \frac{4+x}{y}$

**f**  $\frac{a+b}{a^2b} - \frac{1+a}{ab} + \frac{b+1}{b^2}$

**3.20** Hvert er minnsta sameiginlega margfeldið?

**a**  $x, x^2, xy, y^2$

**b**  $ab, ab^2, a^2b^2$

**c**  $x, (x+4), 3x$

**3.21** Finndu samnefnarann, dragðu saman liði og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $\frac{x}{4y} - \frac{3}{xy} + \frac{y-x}{x}$

**b**  $1 - \frac{a+4}{2a^2} + \frac{1}{2a}$

**c**  $\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x(x-1)}$

**3.22** Hvaða nemandi eða nemendur hafa rétt fyrir sér?

Hvert er minnsta sameiginlega margfeldi þessara stæðna?

$2x^2y \quad 4x \quad 6xy^2$

Það er  $x$  vegna þess að það er með í öllum stæðunum.

**A**

Það er  $48x^4y^3$ , vegna þess að þá er nóg af  $x$ -um og  $y$ -um í minnsta sameiginlega margfeldinu.

**B**

Það er  $12x^2y^2$ , sem allar stæðurnar ganga upp í.

**C**

Það er ekki til neitt minnsta sameiginlega margfeldi.

**D**





**3.23** Þáttaðu stæðurnar og finndu minnsta sameiginlega margfeldið.

**a**  $2a + 2b$   
 $3a + 3b$

**b**  $4b + 2a$   
 $6b + 3a$

**c**  $3a + 6b$   
 $2a + 4b$

**3.24** Þáttaðu stæðurnar og finndu minnsta sameiginlega margfeldið.

**a**  $a^2 - a$   
 $2a - 2$

**b**  $2a + ab$   
 $2b + b^2$

**c**  $ab + b^2$   
 $a^2 + ab$

**3.25** Dragðu saman líka liði og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $\frac{a}{a^2 - a} - \frac{3}{2a - 2}$

**b**  $\frac{a}{2a + ab} + \frac{b}{2b + b^2}$

**c**  $\frac{b + 1}{ab + b^2} - \frac{a - 1}{a^2 + ab}$

**3.26** Hvaða nemandi eða nemendur hafa rétt fyrir sér?

Hvert er minnsta sameiginlega margfeldi þessara stæðna?

$ab - ab^2$     $ab^2 - ab^3$     $ab^2$

Það er  $ab^2$ , vegna þess að það er með í öllum stæðunum.

**A**

Það er  $ab^3$ , vegna þess að þá er nóg af bæði  $a$  og  $b$ .

**B**

**C**

Það er  $ab^2(1 - b)$  vegna þess að allar stæðurnar þrjár ganga upp í þessa stæðu.

Stæðurnar hafa ekkert minnsta sameiginlega margfeldi.

**D**





## Teningakast

Kennari stjórnar þessu verkefni eða nemendur fara eftir fyrirmælunum hér á eftir.

### Þið þurfið

- tvo teninga fyrir hvern nemanda, helst hvor í sínum lit.

### Aðferð

#### Prep 1

- 1 Kastaðu báðum teningunum í einu.
- 2 Finndu margfeldi talnanna sem upp koma á teningunum tveimur.
- 3 Finndu margfeldi tölunnar sem upp kemur á öðrum teningnum og tölunnar sem er undir hinum teningnum.
- 4 Finndu margfeldi tölunnar sem er undir öðrum teningnum og tölunnar sem upp kemur á hinum teningnum (öfugt við lið 3).
- 5 Finndu margfeldi talnanna sem eru undir báðum teningunum.
- 6 Finndu summu margfeldanna í liðum 2, 3, 4 og 5.
- 7 Berðu svar þitt í lið 6 saman við svör bekkjarfélaganna.

#### Áskorun

Notaðu aðra teninga, til dæmis með 8, 12 eða 20 tölum. Verkefnið verður meira spennandi ef teningarnir tveir eru af tveimur mismunandi gerðum en þú skalt fyrst byrja með tvo sams konar teninga.

#### Prep 2

Hvaða skýring er á þessu?

- 1 Kallaðu töluna á öðrum teningnum  $a$  og töluna á hinum teningnum  $b$ .
- 2 Skráðu stæðurnar í liðum 2, 3, 4, og 5 í hluta 1 og táknaðu þær með  $a$  og  $b$ .  
(Ekki er nauðsynlegt að nota fleiri bókstafi. Ábending: Mundu að summa talnanna ofan á og undir venjulegum teningi er alltaf 7.) Liður 2 verður þá:  $a \cdot (7 - b)$ . Skráðu alla liðina í hluta 1 á þennan hátt
- 3 Margfaldaðu síðan upp úr svigunum og finndu summuna sem samsvarar þá lið 6 í hluta 1.  
Hvað kemur í ljós?





**3.27** Hugsaðu þér að jörðin sé hnöttótt kúla og að þú getir strengt snúru utan um hana í stóran hring.

Hugsaðu þér að þú viljir nota aðra snúru sem er nógu löng til að liggja fyrir ofan fyrri snúruna en á sama stað á hnettinum og í nákvæmlega 1 m fjarlægð frá fyrri snúrunni allan hringinn.

- a** Hversu miklu lengri verður síðari snúran að vera en sú fyrri? (Þú þarft ekki að þekkja geisla jarðar. Kallaðu hann  $r$  og settu fram stæðu fyrir lengd hvorrar snúru fyrir sig.)

Hugsaðu þér að þú ætlir að endurtaka leikinn með tveimur öðrum snúrum en að þessu sinni á að setja þær utan um hnöttótta appelsínu.

- b** Hve miklu lengri þarf síðari snúran að vera en sú fyrri að þessu sinni?



**3.28** **a** Veldu fjórar tölur úr töflunni til hægri þannig að þær séu innan fernings sem eru  $2 \cdot 2$  reitir, t.d. svona:

8	9
13	14

Margfaldaðu töluna efst til hægri með tölunni neðst til vinstri.

Margfaldaðu síðan töluna efst til vinstri með tölunni neðst til hægri.

Finndu mismun þessara svara.

- b** Endurtaktu leikinn með fjórum öðrum tölum.

Hvað kemur í ljós?

- c** Að þessu sinni skaltu velja fjórar tölur einhvers staðar í töflunni. Kallaðu töluna efst til vinstri  $a$ . Skráðu algebrustæðu fyrir hverja af hinum tölunum þremur táknaða með  $a$ .

Margfaldaðu og finndu mismuninn milli margfelda algebrustæðnanna á sama hátt og þegar þú margfaldaðir tölurnar.

Hvað hefur þú nú sannað?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25



## Þáttun og stytting stæðna með almennum brotum

Almenn brot með tölum eru jafn stór ef gildi þeirra er hið sama. Þetta á við þegar þú getur reiknað frá einu almennu broti til annars með því að margfalda teljara og nefnara með sömu tölu eða þegar þú getur þáttað teljara og nefnara og stytt samnefnarann þannig að brotin verði jafn stór.

Það sem þú eiginlega gerir er að margfalda eða deila með 1 vegna þess að  $\frac{a}{a} = 1$  alveg sama hvert gildið á a er.

### Sýnidæmi 11

- a Sýndu að  $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$  með því að lengja annað brotið.
- b Sýndu að  $\frac{2}{5} = \frac{18}{45}$  með því að stytta annað brotið.

#### Tillaga að lausn

- a Þú þarft að finna út með hvaða tölu þú átt að lengja brotið.  $18 : 3 = 6$  og  $24 : 4 = 6$ . Þú þarft sem sagt að lengja með 6:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$$

- b Til að stytta almenna brotið getur þú þáttað það þannig að annar þátturinn verði annars vegar teljari og hins vegar nefnari í hinu stytta broti.  $18 : 9 = 2$  og  $45 : 9 = 5$

$$\frac{18}{45} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{2}{5}$$

Þetta er aðeins hægt ef sama tala kemur út úr  $18 : 3$  og  $24 : 4$ .

Mundu að það má ekki stytta liði, einungis þætti.

Ef þú átt að stytta almennt brot með bókstafastæðu þarf að þátta stæðurnar. Þegar þú hefur þáttað teljara og nefnara hvorn fyrir sig getur þú stytt jafngilda þætti ef um þá er að ræða.

### Sýnidæmi 12

Þáttaðu og stytstu almennu brotin ef það er hægt.

- a  $\frac{9a^2 + 6ab}{3a^2}$
- b  $\frac{10a^3b^2 - 5a^2b^2}{2ab - b}$

#### Tillaga að lausn

$$\text{a } \frac{9a^2 + 6ab}{3a^2} = \frac{\overset{1}{3}a(3a + 2b)}{\underset{1}{3}a \cdot a} = \frac{3a + 2b}{a}$$

$$\text{b } \frac{10a^3b^2 - 5a^2b^2}{2ab - b} = \frac{5a^2b^2(2a - 1)}{b^1(2a - 1)} = \frac{5a^2b}{1}$$

Þegar þú ætlar að þátta bókstafastæðu sem inniheldur tvo eða fleiri liði verðurðu að leita að tölum og bókstöfum sem eru sameiginlegir öllum liðunum. Slíkar tölur og bókstafi áttu að taka út fyrir sviga. Ef þú ert í vafa um hvort þú hafir gert rétt geturðu prófað að margfalda inn í svigann og athuga hvort upphaflega stæðan kemur út.

**3.29** Lengdu brotin þannig að nefnarinn verði 48.

**a**  $\frac{5}{12}$

**b**  $\frac{1}{6}$

**c**  $\frac{2}{3}$

**3.30** Sýndu að brotin séu jafngild.

**a**  $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

**b**  $\frac{45}{81} = \frac{5}{9}$

**c**  $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$

**3.31** Þáttaðu stæðurnar í teljara og nefnara og stytstu brotin eins og hægt er.

**a**  $\frac{3a+6}{6}$

**b**  $\frac{2x^2-6x}{4x}$

**c**  $\frac{b^2-5b}{b}$

**d**  $\frac{9a-a^2}{3a}$

**e**  $\frac{xy-y^2}{x-y}$

**f**  $\frac{12a-18}{12a}$

**g**  $\frac{4y^2-28y}{4xy}$

**h**  $\frac{18a^2+9a}{12a^2+6a}$

**i**  $\frac{10x^2y^2+15xy^2}{2xy^3+3y^2}$

Pegar þú átt að margfalda saman tvö eða fleiri almenn brot setur þú öll brotin upp á eitt strik og margfaldar teljarana saman annars vegar og nefnarana hins vegar.



**Sýnidæmi 13**

Settu brotin upp á eitt strik. Þáttaðu, stytstu og einfaldaðu svarið eins og hægt er.

$\frac{14}{15} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

**Tillaga að lausn**

$\frac{14}{15}$	$\cdot$	$\frac{3}{4}$	$\cdot$	$\frac{5}{7}$	$=$	$\frac{14 \cdot 3 \cdot 5}{15 \cdot 4 \cdot 7}$	$=$	$\frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 1}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$	$=$	$\frac{1}{2}$
-----------------	---------	---------------	---------	---------------	-----	---	-----	---	-----	---------------

**3.32** Settu brotin upp á eitt strik. Þáttaðu, stytstu og einfaldaðu svarið eins og hægt er.

**a**  $\frac{12}{25} \cdot \frac{10}{24}$

**b**  $\frac{35}{64} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{7}$

**c**  $\frac{2}{45} \cdot 5 \cdot \frac{3}{4}$

Í bókstafastæðu er gott að athuga fyrst hvort hægt sé að þátta og stytta. Þú skalt ekki margfalda saman bókstafastæður strax í upphafi. Mundu að ef fleiri en einn liður er í einhverju almenna brotinu verðurðu að setja sviga utan um liðastærðirnar áður en þú setur brotin upp á eitt strik.

### Sýnidæmi 14

**Liðastærð** er stærð sem skiptist í liði, t.d.  $8 + x$ ,  $a - b + x$ ,  $3x - 8$ ,  $4(x^2) + 3 \cdot 4$

Þáttaðu og stytstu ef hægt er. Fullstytstu almenna brotið í svarinu.

$$\frac{x-2}{3x+3} \cdot \frac{x^2+x}{2x-4}$$

**Tillaga að lausn**

$$\frac{x-2}{3x+3} \cdot \frac{x^2+x}{2x-4} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot x\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)} \cdot 2\cancel{(x-2)}} = \frac{x}{6}$$

**3.33** Þáttaðu og stytstu þar sem hægt er. Fullstytstu brotið í svarinu.

**a**  $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{4x}$

**b**  $\frac{2a+4}{5} \cdot \frac{5a}{a+2}$

**c**  $\frac{x}{2-x} \cdot \frac{4y-2xy}{x^2}$

**d**  $\frac{a^2+2}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{10+5a^2}$

**e**  $\frac{xy^2 - x^2y}{4x-2} \cdot \frac{2x^2-x}{x^2y-xy^2}$

**f**  $\frac{a^2-2ab}{b^2+b} \cdot \frac{b^2+b^3}{ab-2b^2}$

**Margföldunarandhverfa** er brotið sem tala er margfölduð með til að fá margfeldið 1. T.d. eru  $\frac{2}{3}$  og  $\frac{3}{2}$  margföldunarandhverfur vegna þess að  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ . Einnig eru 6 og  $\frac{1}{6}$  margföldunarandhverfur vegna þess að  $\frac{6}{1} \cdot \frac{1}{6} = 1$ .

Pegar deilirinn í deilingardæmi er almennt brot geturðu fundið svarið með því að breyta stæðunni í margföldunardæmi með *margföldunarandhverfu* brotsins. Þá skipta teljari og nefnari um sæti.

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

Pegar brotið inniheldur bókstafastæðu ferðu nákvæmlega eins að. Eftir að þú hefur snúið við brotinu sem deilt er með og sett margföldunarkerki í stað deilingarkerkis þarftu að þátta og stytta eins og hægt er. Það er nákvæmlega eins og þegar þú reiknar með tölum.

**3.34** Þáttaðu, stytstu og einfaldaðu eins og hægt er.

a  $\frac{x-3}{2} : \frac{x^2-3x}{4}$

c  $\frac{3x-6}{x} : 3$

b  $x : \frac{x^2}{x-1}$

d  $\frac{a^2b^2-ab}{a+1} : \frac{ab-1}{ab+b}$

Stundum koma brotabrot fyrir í dæmum. *Brotabrot* eru almenn brot þar sem teljarinn og/eða nefnarinn er einnig almennt brot. Þú getur einfaldað brotabrot með því að skrifa aðal brotastrikið sem deilingamerki.

**Sýnidæmi 15**

Einfaldaðu eins og hægt er.

a  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$

b  $2 + \frac{1}{\frac{4}{2}}$

c  $\frac{\frac{a+5}{a^2+2a}}{\frac{2a+10}{3a+6}}$

d  $\frac{\frac{x}{xy+y}}{\frac{y}{x+1}}$

**Tillaga að lausn**

a  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$

b  $2 + \frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{9}{4} : \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{9}{2}$

c  $\frac{\frac{a+5}{a^2+2a}}{\frac{2a+10}{3a+6}} = \frac{a+5}{a^2+2a} : \frac{2a+10}{3a+6} = \frac{a+5}{a^2+2a} \cdot \frac{3a+6}{2a+10} = \frac{(a+5) \cdot 3(a+2)}{a(a+2) \cdot 2(a+5)} = \frac{3}{2a}$

d  $\frac{\frac{x}{xy+y}}{\frac{y}{x+1}} = \frac{x}{xy+y} : \frac{y}{x+1} = \frac{x}{xy+y} \cdot \frac{x+1}{y} = \frac{x(x+1)}{y(x+1) \cdot y} = \frac{x}{y^2}$

Mundu að  $\frac{2}{1} = 2$

**Brotabrot** er almennt brot þar sem teljarinn eða nefnarinn eða bæði teljari og nefnari eru almenn brot.

**3.35** Einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{10}}$

**b**  $\frac{\frac{2}{3}}{12}$

**c**  $\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a}{b}}$

**d**  $\frac{\frac{x+xy}{3}}{\frac{x^2}{6y}}$

**e**  $\frac{2a - \frac{a}{b}}{\frac{a}{2}}$

**f**  $\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x^2}}$

**g**  $\frac{\frac{a}{b} - \frac{1}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$

**h**  $\frac{\frac{x^2+x}{y^2}}{\frac{x}{y^3}}$

**i**  $\frac{\frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$

**3.36** Skrifaðu sem deilingardæmi. Styttu og einfaldaðu svarið eins og hægt er.

**a**  $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{9}}$

**b**  $\frac{\frac{2}{3}}{11}$

**c**  $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}}$

**d**  $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}$

**3.37** Skrifaðu sem deilingardæmi. Styttu og einfaldaðu svarið eins og hægt er.

**a**  $\frac{\frac{3}{a}}{\frac{b}{a}}$

**b**  $\frac{\frac{xy}{4}}{\frac{x}{y}}$

**c**  $\frac{\frac{x+y}{4}}{\frac{y}{2x}}$

**d**  $\frac{\frac{a-5}{5}}{\frac{a}{10}}$

**3.38 a** Sýndu að  $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ .

**b** Sýndu að  $\frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$ .

**c** Sýndu að svarið við dæmi 3.35i má skrifa sem  $\frac{y}{x} - 1$

**3.39** Hvaða nemandi eða nemendur hafa rétt fyrir sér?



a

A

Hvernig má umrita þetta brotabrot?

$$\frac{a^2 - \frac{a}{b}}{a^2 b}$$

1 - a

B

$$\frac{ab - 1}{ab^2}$$

C

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{ab^2}$$

D



## Hvaða spjöld mynda slag?

Þetta verkefni er fyrir 2–4 nemendur sem spila hver gegn öðrum eða í pörum sem spila hvort gegn öðru.

### Þið þurfið

- eitt sett af spjöldum sem kennarinn dreifir (verkefnablað 3.3.7)

### Aðferð

- Stokkið spjöldin vel.
- Leggið fjögur spjöld upp í loft á borðið.
- Kannið hvort þið finnið tvö spil sem mynda slag. Ef þið einfaldið eða styttrið stæðuna á einu spjaldi verður það eins og stæðan á öðru spjaldi og þessi tvö spjöld mynda þá slag. Sá leikmaður sem finnur tvö spjöld sem eiga saman á að segja hátt og snjallt: Slagur! Síðan verður hann að útskýra hvers vegna þessi tvö spil mynda slag, annaðhvort munnlega eða skriflega. Sé svarið rétt fær leikmaðurinn slaginn.
- Ef ekkert af spjöldunum fjórum mynda slag á að leggja fjögur ný spjöld á borðið.
- Leikmenn endurtaka lið 3, ef til vill lið 4 og þar næst lið 3 – allt þar til einhver leikmannanna sér tvö spjöld sem mynda slag.
- Þannig er haldið áfram að leggja spjöld á borðið og leita að slag þar til engin spjöld eru eftir.
- Sá leikmaður eða það par er sigurvegari sem hefur fengið flesta slagi þegar spilinu er lokið.

$$\frac{2x+4}{x+2}$$

$$2$$

$$\frac{x^2y - xy}{xy}$$

$$x - 1$$

## Margföldun stæða innan sviga

Þegar þú átt að margfalda liðastærð innan sviga með tölu eða bókstafastæðu þarf að margfalda alla liði í sviganum með tölunni eða bókstafastæðunni. Þannig eyðir þú sviganum:

$$2a(b - 3ab) = 2a \cdot b - 2a \cdot 3ab = 2ab - 6a^2b$$

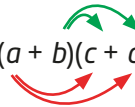
Þú getur sleppt milliútreikningnum þegar þú getur fundið margfeldið með hugareikningi. Þegar margfalda á saman tvo sviga getur þú fyrst hugsað þannig að seinni sviginn sé bókstafastæða sem á að margfalda með liðunum í fyrri sviganum. Þá ferðu að eins og hér fyrir ofan til að eyða síðari sviganum.

$$\begin{aligned}(a + 3b)(2a + b) &= \\ a \cdot (2a + b) + 3b \cdot (2a + b) &= \\ a \cdot 2a + a \cdot b + 3b \cdot 2a + 3b \cdot b &= \\ 2a^2 + ab + 6ab + 3b^2 &= \\ \underline{2a^2 + 7ab + 3b^2} &= \end{aligned}$$

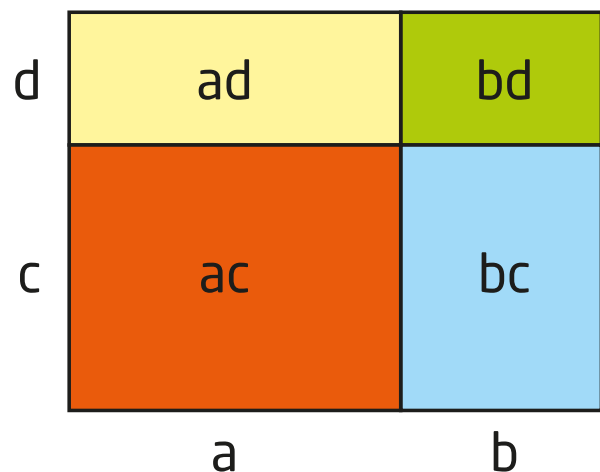
Ef mínus er í öðrum sviganum þarftu að muna eftir formerkjunum.

Þú getur hoppað beint frá fyrstu línu til næstsíðustu línu ef þú hugsar þér að margfalda eigi inn í svigann  $(2a + b)$  með  $a$  og þar næst eigi að margfalda inn í svigann  $(2a + b)$  með  $3b$ .

Þetta má sýna á þennan hátt:  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$



Þetta má einnig sýna með rúmfræðimynd þar sem flatarmál rétthyrninga er skoðað. Flatarmál stóra rétthyrningsins er  $(a + b)(c + d)$  en það er einmitt summan af minni rétthyrningunum fjórum, þeim rauða, gula, bláa og græna.



## Sýnidæmi 16

Eyddu svigunum, dragðu saman og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $(4x + 1)(2x + 3)$     **b**  $(\frac{1}{2}x + y)(2x - 6y)$     **c**  $(a - 3)(2a + 1) - (2a + 1)(3a + 2)$

### Tillaga að lausn

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad & (4x + 1)(2x + 3) = \\ & 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 3 = \\ & 8x^2 + 12x + 2x + 3 = \\ & \underline{\underline{8x^2 + 14x + 3}} \end{aligned}$$

Venja er að skrá fyrst liðinn með hæsta veldisvísinn.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & (\frac{1}{2}x + y)(2x - 6y) = \\ & \frac{1}{2}x \cdot 2x + \frac{1}{2}x \cdot (-6y) + y \cdot 2x + y \cdot (-6y) = \\ & x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2 = \\ & \underline{\underline{x^2 - xy + 6y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad & (a - 3)(2a + 1) - (2a + 1)(3a + 2) = \\ & (a \cdot 2a + a \cdot 1 + (-3) \cdot 2a + (-3) \cdot 1) - (2a \cdot 3a + 2a \cdot 2 + 1 \cdot 3a + 1 \cdot 2) = \\ & 2a^2 + a - 6a - 3 - 6a^2 - 4a - 3a - 2 = \underline{\underline{-4a^2 - 12a - 5}} \end{aligned}$$

Það er skynsamlegt að setja sviga utan um stæðurnar sem þú margfaldar saman. Þá er auðveldara að muna eftir að breyta formerkjum þegar mínusmerki er fyrir framan svigann.

Mundu að þegar margfölduð eru saman tvö eins formerki verður útkoman + (plús) + og +, - og - og þegar tvö mismunandi formerki eru margfölduð saman gefur það - (mínus) + og -, - og +.

**3.40** Eyddu svigunum, dragðu saman og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $(x + 2)(x + 3)$

**b**  $(4 + x)(2x + 5)$

**c**  $(6x - 1)(x + 1)$

**d**  $(2x + 3y)(y - x)$

**e**  $(-x + 4)(3x - 2)$

**f**  $(-a - 2b)(b - 3a)$

**g**  $(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y)(6x - 12y)$

**h**  $(x^2 + 2x)(3x + 1)$

**i**  $(-2x^3 - x^2)(-x - 3)$

**3.41** Eyddu svigunum, dragðu saman og einfaldaðu eins og hægt er.

**a**  $2(a + 2) + (2a + 1)(a - 1)$

**b**  $x(x - 3) + (x + 2)(x - 1)$

**c**  $5x(3x - y) - (x + y)(2x + 3)$

**d**  $(2a + 3)(a - 1) - (3 - x)(-x - 4)$

**e**  $(4x - 2)(9 - x) - (3 - x)(-x - 4)$

**f**  $3(a - 4)(2a + b) - 2b(a + 1)(a - 2)$

# Að leysa jöfnu með þáttun – ferningsreglurnar og ójöfnur

## Markmið

### HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- þátta annars stigs jöfnu
- nota ferningsreglurnar í báðar áttir
- leysa annars stigs jöfnur með þáttun með því að beita ferningsreglum, samokareglunni og núllreglunni
- leysa fyrsta stigs ójöfnur

Hvernig getur þú í einni svipan séð svarið við þessu dæmi?

$$12 \cdot 4318 \cdot 53 \cdot 198 \cdot 0 \cdot 5617 \cdot 3$$

Þetta lítur út fyrir að vera mjög flókið en ef þú skoðar dæmið af nákvæmni sérðu að einn þátturinn er 0. Þá hlýtur svarið að vera 0. Sama er hvert margfeldi allra hinna talnanna er – við vitum að tala sem margfölduð er með 0 verður alltaf 0.

Ef margfeldi talna eða algebrustæða er 0 hlýtur að minnsta kosti einn þáttanna að vera 0. Þetta köllum við **núllregluna**.

## Sýnidæmi 17

Notaðu núllregluna til að leysa jöfnurnar.

**a**  $x(x - 3) = 0$

**b**  $(x - 1)(x + 4) = 0$

### Tillaga að lausn

Hvor þáttur um sig á vinstri hlið jöfnunnar táknar tölu sem hefur mismunandi gildi eftir því hvaða gildi er valið á  $x$ . Við eigum að finna hvaða gildi á  $x$  gerir það að verkum að annar þátturinn hafi gildið 0.

Hér er margfeldi tveggja talna þar sem svarið á að vera 0. Þá hlýtur önnur talnanna að vera 0.

<b>a</b>	$x(x - 3) = 0$	<b>b</b>	$(x - 1)(x + 4) = 0$
	$x = 0$ eða $x - 3 = 0$		$x - 1 = 0$ eða $x + 4 = 0$
	<u>Það þýðir að <math>x = 0</math> eða <math>x = 3</math></u>		<u><math>x = 1</math> eða <math>x = -4</math></u>

## Sýnidæmi 18

Leystu jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 4x = 0$

**b**  $2x^2 + x = 0$

**c**  $9x = x^2$

### Tillaga að lausn

Taktu eftir að allar jöfnurnar innihalda liði með  $x^2$  og  $x$ . Þá getum við þáttað stæðurnar.

**a**  $x^2 - 4x = 0$

$$x(x - 4) = 0$$

Jafnan hefur tvær lausnir:

$$x = 0 \text{ eða } x - 4 = 0$$

sem gefur lausnirnar  $x = 0$  eða  $x = 4$

**b**  $2x^2 + x = 0$

$$x(2x + 1) = 0$$

sem gefur lausnirnar  $x = 0$  eða

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$$

**c** Talan 0 er hvorki hægra megin né vinstra megin í þessari jöfnu. Við getum lagað þetta með því að draga  $x^2$  frá báðum megin í jöfnunni:

$$9x = x^2$$

$$9x - x^2 = 0$$

$$x(9 - x) = 0$$

Þetta gefur lausnina  $x = 0$  eða

$$9 - x = 0$$

$$9 = x$$

$$\underline{\underline{x = 9}}$$



**Núllreglan** segir að sé margfeldi tölu og algebrustæðu 0 hlýtur að minnsta kosti annar þátturinn að vera 0.

Þú getur aðeins notað núllregluna þegar jafnan er skrifuð sem margfeldi þar sem svarið verður 0.

**3.42** Notaðu núllregluna til að leysa jöfnurnar.

**a**  $x(x - 10) = 0$

**b**  $(x + 5)(x + 12) = 0$

**c**  $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}\right) = 0$

**3.43** Notaðu núllregluna til að leysa jöfnurnar.

**a**  $(4x - 8)(5x + 1) = 0$

**b**  $\frac{1}{4}(9 - x)(x - 11) = 0$

**c**  $x(x - 3) = 10$

**3.44** Leystu jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 2x = 0$

**b**  $x^2 + 5x = 0$

**c**  $4x^2 - 12x = 0$

**d**  $3x^2 + 5x = 0$

**e**  $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$

**f**  $\frac{2}{3}x^2 = \frac{4}{9}x$

**3.45 a** Margfeldi tölu og tölu sem er 3 minni en fyrrnefnda talan er 0. Hvaða gildi getur talan haft?

**b** Ferningstala tölu er fjórföld talan. Hvaða gildi getur talan haft?

Er hægt að þátta stæðu sem inniheldur þrjá liði? Áður en við svörum þessari spurningu skulum við kanna hvort fyrir liggur eitthvert kerfi eða mynstur þegar við margföldum tvær eins svigastæður með tveimur liðum. Við erum því komin að svokölluðum *ferningsreglum*.

### Sýnidæmi 19

Eyddu svigunum með því að margfalda þá saman

**a**  $(x + 1)^2$

**c**  $(2x + 1)^2$

**e**  $(a + b)^2$

**b**  $(x + 3)^2$

**d**  $(x + y)^2$

Þegar svigar eru margfaldaðir saman eru liðir innan sviganna margfaldaðir saman.

#### Tillaga að lausn

**a**  $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 = \underline{x^2 + 2x + 1}$

**b**  $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = \underline{x^2 + 6x + 9}$

**c**  $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1) = 4x^2 + 2x + 2x + 1 = \underline{4x^2 + 4x + 1}$

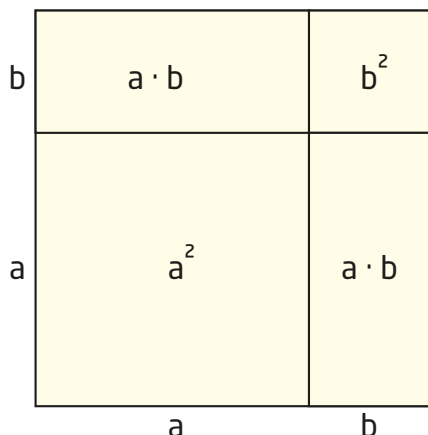
**d**  $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = \underline{x^2 + 2xy + y^2}$

**e**  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$

Í sýnidæminu á blaðsíðunni hér á undan höfum við reiknað út ferningsstærð summu tveggja liða. Þetta má skrá sem margfeldi tveggja eins summa en með því að skoða mynstrið í svörunum getur þú lært að skrifa svarið án milliútreikninga.

Sýnidæmið sýnir að svarið er jafnt ferningsstærð fyrri liðarins plús tvöfalt margfeldi beggja liða plús ferningstala síðari liðarins. Þetta kallast *fyrsta ferningsreglan*.

*Fyrstu ferningsregluna* má sýna í rúmfræðimynd með því að skoða flatarmálsútreikninga.



Flatarmál stóra ferningsins má skrifa sem  $(a + b)^2$ .

Stóri ferningurinn samanstendur af ferningi með hliðina  $a$ , tveimur rétthyrningum með hliðarnar  $a$  og  $b$  og einum ferningi með hliðina  $b$ . Flatarmál þessara hyrninga eru samtals  $a^2 + 2ab + b^2$ . Summa flatarmála litlu flatanna er jöfn flatarmáli stóra ferningsins.

### Fyrsta ferningsreglan

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**3.46** Notaðu *fyrstu ferningsregluna* til að skrifa svörin án milliútreiknings.

**a**  $(a + 1)^2$

**c**  $(2x + 3)^2$

**e**  $(2x + y)^2$

**b**  $(a + 5)^2$

**d**  $(2 + x)^2$

**f**  $(3a + 4b)^2$

**3.47** Einfaldaðu stæðurnar eins og hægt er. Notaðu *fyrstu ferningsregluna* ásamt öðrum algebrureglum.

**a**  $(a + 1)^2 - 2a$

**d**  $a(b + 2) + (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

**b**  $(2x + 1)^2 - x(x - 1)$

**e**  $(2a + 3)^2 + (1 + a)^2 - (a + 3)^2$

**c**  $x^2 + 4 - (x + 2)^2$

Þú þarft að þekkja mynstrið úr fyrstu ferningsreglunni og nota það til að þátta stæður með þremur liðum.

### Sýnidæmi 20

Notaðu fyrstu ferningsregluna til að þátta stæðurnar ef hægt er.

**a**  $x^2 + 12x + 36$       **b**  $a^2 + 4a + 4$       **c**  $x^2 + 6x + 10$

#### Tillaga að lausn

**a** Hér sérðu að  $36 = 6^2$ , og að  $12 = 2 \cdot 6$ . Fyrsta ferningsreglan á því við hér:

$$x^2 + 12x + 36 = \underline{(x + 6)^2}$$

**b** Hér er  $4 = 2^2$  og  $4 = 2 \cdot 2$ . Stæðan passar því við mynstrið í fyrstu ferningsreglunni:

$$a^2 + 4a + 4 = \underline{(a + 2)^2}$$

**c** Hér er  $6 = 2 \cdot 3$  en  $10$  er ekki  $3^2$ . Þá á fyrsta ferningsreglan ekki við og ekki er mögulegt að þátta stæðuna með því að nota fyrstu ferningsregluna.

#### fyrsta ferningsreglan

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**3.48** Notaðu fyrstu ferningsregluna til að þátta stæðurnar.

**a**  $a^2 + 10a + 25$       **c**  $9x^2 + 6x + 1$       **e**  $16x^2 + 24xy + 9y^2$   
**b**  $9 + 6x + x^2$       **d**  $4a^2b^2 + 4ab + 1$       **f**  $\frac{1}{4}a^2 + a + 1$

**3.49** Notaðu fyrstu ferningsregluna til að þátta stæðurnar ef hægt er.

**a**  $a^2 + 5a + 25$       **c**  $a^2 + 9a + 81$       **e**  $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$   
**b**  $x^2 + 8x + 16$       **d**  $x^2 + 14x + 49$       **f**  $a^2 + 20ab + 100b^2$

Nú skulum við sjá hvernig mynstrið breytist ef við finnum ferningsstærð mismunar í staðinn fyrir ferningsstærð summu.

### Sýnidæmi 21

Margfaldaðu upp úr svigunum.

**a**  $(x - 1)^2$

**b**  $(x - 3)^2$

**c**  $(a + b)^2$

#### Tillaga að lausn

**a**  $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1) = x^2 - x - x + 1 = \underline{\underline{x^2 - 2x + 1}}$

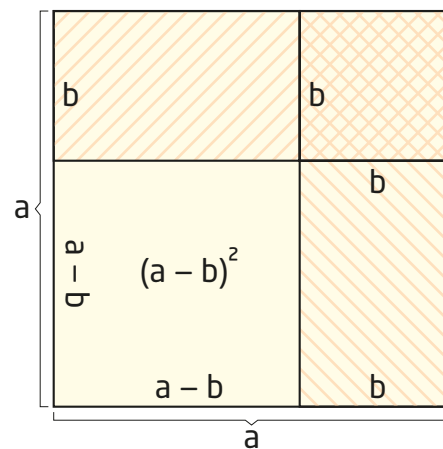
**b**  $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = \underline{\underline{x^2 - 6x + 9}}$

**c**  $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \underline{\underline{a^2 - 2ab + b^2}}$

Í þessu sýnidæmi höfum við reiknað út ferningsstærð mismunar milli tveggja liða. Hér þarftu líka að skoða mynstrið í svörunum og læra að skrifa svar án milliútreiknings.

Eini munurinn á sýnidæmunum með ferningsstærð summu og ferningsstærð mismunar er að liðurinn í miðjunni í svarinu er neikvæður. Það merkir að ferningsstærð mismunar milli tveggja liða er jöfn ferningsstærð fyrri liðarins mínus tvöfalt margfeldi beggja liða, plús ferningsstærð síðari liðarins. Þetta er *önnur ferningsreglan*.

*Aðra ferningsregluna* má einnig sýna með rúmfræðimynd. Stærri innri ferningurinn hefur flatarmálið  $(a - b)^2$ . Flatarmál stóra ferningsins er  $a^2$ . Ef við drögum flatarmál efri rétthyrningsins (með flatarmálið  $ab$ ) og rétthyrningsins til hægri (einnig með flatarmálið  $ab$ ) frá stóra rétthyrningnum, þá er að segja  $a^2 - 2ab$ , höfum við dregið flatarmál ferningsins með hliðina  $b$  tvisvar frá. Þá verðum við að bæta  $b^2$  við til að fá flatarmálið  $(a - b)^2$ .



#### Önnur ferningsreglan

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**3.50** Notaðu *aðra ferningsregluna* til að skrá svörin án milliútreiknings.

**a**  $(x - 8)^2$

**c**  $(3a - 1)^2$

**e**  $(2a - 3b)^2$

**b**  $(b - 5)^2$

**d**  $(4 - x)^2$

**f**  $(x - \frac{1}{2})^2$

Á sama hátt og þú þekkir mynstur út frá fyrstu ferningsreglu þarftu nú að þekkja mynstrið og geta þáttað þriggja liða stæður út frá annarri ferningsreglu ef hún á við. Eini munurinn er formerkið á undan liðnum í miðjunni.

### Sýnidæmi 22

Notaðu aðra ferningsregluna til að þátta stæðurnar ef það er hægt.

**a**  $a^2 - 5a + 25$       **b**  $x^2 - 18x + 81$       **c**  $a^2 - 3a + \frac{9}{4}$

#### Tillaga að lausn

**a** Þessa stæðu er ekki hægt að þátta beint með því að nota aðra ferningsreglu. Þá yrði annaðhvort liðurinn í miðjunni að vera

$$10a \text{ eða síðasti liðurinn að vera } \frac{25}{4}$$

**b**  $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$  því  $18 = 2 \cdot 9$  og  $81 = 9^2$

**c**  $a^2 - 3a + \frac{9}{4} = (a - \frac{3}{2})^2$  því  $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$  og  $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$

**3.51** Notaðu aðra ferningsregluna til að þátta ef hægt er.

**a**  $x^2 - 4x + 4$

**c**  $a^2 - 18a + 81$

**e**  $a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{81}{16}$

**b**  $b^2 - 6b - 9$

**d**  $x^2 - 12x - 36$

**f**  $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64}$

**3.52** Notaðu fyrstu eða aðra ferningsregluna til að þátta stæðurnar ef hægt er.

**a**  $x^2 - 8x + 16$

**d**  $49 - 28a + 4a^2$

**g**  $49b^2 + 28ab + 4a^2$

**b**  $x^2 + 8x - 16$

**e**  $49 - 28a - 4a^2$

**h**  $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

**c**  $x^2 + 8x + 16$

**f**  $4a^2 + 28a + 49$

**i**  $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

Önnur

ferningsreglan

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$





Nú getur þú leyst nokkrar annars stigs jöfnur með þremur liðum ef mynstrið passar við fyrstu eða aðra ferningsregluna.

**Annars stigs jafna** er jafna á forminu  $ax^2 + bx + c = 0$  þar sem  $a$ ,  $b$  og  $c$  eru fastar (tölur) og  $x$  er breyta. Talan  $a$  er ekki 0.

### Sýnidæmi 23

Leystu jöfnurnar með því að þátta.

**a**  $x^2 - 8x + 16 = 0$

**c**  $x^2 + 4 = 4x$

**b**  $x^2 + 10x + 25 = 0$

**d**  $3x^2 - 36x + 108 = 0$

#### Tillaga að lausn

**a** Þetta er önnur ferningsreglan:

$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 16 = 0 \\ (x - 4)^2 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \underline{x = 4} \end{array}$$

Það er einungis ein tala sem hefur ferningstöluna 0 og það er sjálf talan 0.

**c**

$$\begin{array}{r} x^2 + 4 = 4x \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ \underline{x = 2} \end{array}$$

Hér þarf fyrst að umskrifa jöfnuna þannig að 0 verði hægra megin.

**b**  $x^2 + 10x + 25 = 0$

$$\begin{array}{r} (x + 5)^2 = 0 \\ x + 5 = 0 \\ \underline{x = -5} \end{array}$$

**d**  $3x^2 - 36x + 108 = 0 \quad | :3$

$$\begin{array}{r} x^2 - 12x + 36 = 0 \\ (x - 6)^2 = 0 \\ x - 6 = 0 \\ \underline{x = 6} \end{array}$$



### 3.53 Leystu jöfnurnar með þáttun.

**a**  $x^2 - 4x + 4 = 0$

**b**  $x^2 + 6x + 9 = 0$

**c**  $a^2 - 18a + 81 = 0$

**d**  $x^2 + 12x + 36 = 0$

**e**  $a^2 + \frac{9}{2}a + \frac{81}{16} = 0$

**f**  $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = 0$

Eina tegund annars stigs jafna með tveimur liðum má leysa með þáttun.  
Dæmi um slíka jöfnu er

$$x^2 - 49 = 0$$

Þegar þátta á stæðu sem hefur það mynstur sem sjá má vinstra megin í jöfnunni á að nota svokallaða *samokareglu*.

Fyrst þarf að finna hvernig þetta mynstur kemur fram þegar við margföldum saman svigastærðir af sérstakri gerð.

### Sýnidæmi 24

Margfaldaðu saman svigastærðirnar.

**a**  $(x + 2)(x - 2)$

**c**  $(2x - 5)(2x + 5)$

**b**  $(a + 1)(a - 1)$

**d**  $(a + b)(a - b)$

#### Tillaga að lausn

**a**  $(x + 2)(x - 2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = \underline{\underline{x^2 - 4}}$

**b**  $(a + 1)(a - 1) = a^2 - a + a - 1 = \underline{\underline{a^2 - 1}}$

**c**  $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 + 10x - 10x - 25 = \underline{\underline{4x^2 - 25}}$

**d**  $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = \underline{\underline{a^2 - b^2}}$

Mundu að þegar svigastærðir eru margfaldaðar saman á að margfalda hvern lið í öðrum sviganum með hverjum lið í hinum sviganum.

Hér sést einnig mynstur sem endurtekur sig þegar við margföldum saman tvær svigastærðir þar sem önnur er summa tveggja liða og hin er mismunur sömu liða. Síðasta dæmið sýnir almennt að svarið verður ferningsstærð fyrri liðar mínus ferningsstærð síðari liðar.

#### Samokareglan

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**3.54** Notaðu *samokaregluna* til að margfalda upp úr sviganum.

**a**  $(x + 3)(x - 3)$

**c**  $(ax + 5)(ax - 5)$

**b**  $(4 - a)(4 + a)$

**d**  $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

Nú getur þú leyst tveggja liða jöfnu sem hefur mynstur samokareglunnar með því að þátta og nota núllregluna.

### Sýnidæmi 25

Leystu jöfnurnar.

a  $x^2 - 4 = 0$

b  $x^2 - 1 = 0$

c  $4x^2 - 25 = 0$

d  $x^2 - \frac{9}{25} = 0$

#### Tillaga að lausn

Við notum samokaregluna til að þátta:

a  $x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

núllreglan gefur okkur

$x + 2 = 0$  eða  $x - 2 = 0$

lausnirnar eru tvær

$x = -2$  eða  $x = 2$

b  $x^2 - 1 = 0$

$(x + 1)(x - 1) = 0$

$x + 1 = 0$  eða  $x - 1 = 0$

Lausnin er  $x = -1$  eða  $x = 1$

c  $4x^2 - 25 = 0$

$(2x - 5)(2x + 5) = 0$

$2x - 5 = 0$  eða  $2x + 5 = 0$

$2x = 5$  eða  $2x = -5$

$x = \frac{5}{2}$  eða  $x = -\frac{5}{2}$

d  $x^2 - \frac{9}{25} = 0$

$(x + \frac{3}{5})(x - \frac{3}{5}) = 0$

$x + \frac{3}{5} = 0$  eða  $x - \frac{3}{5} = 0$

$x = -\frac{3}{5}$  eða  $x = \frac{3}{5}$

Hvernig getum við þáttað  $a^2 + b^2$ ?

Það er ekki hægt. Milli liðanna þarf að vera mínus til að hægt sé að þátta samokaregluna.



**3.55** Notaðu þáttun og núllregluna til að leysa jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 100 = 0$

**b**  $9x^2 - 16 = 0$

**c**  $36x^2 = 121$

**samokareglan**

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**3.56** Notaðu ferningsreglurnar eða samokaregluna til að leysa jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 26x + 169 = 0$

**d**  $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 0$

**b**  $2x^2 - 24x + 72 = 0$

**e**  $225x^2 = 144$

**c**  $x^2 - 9 = 0$

**f**  $4x^2 - 20x + 25 = 0$

**3.57** Leystu jöfnurnar.

**a**  $x(x - 5) = 0$

**c**  $(x + 15)(x + 10) = 0$

**b**  $(x - 8)(x - 9) = 0$

**d**  $x^2 = 0$

**3.58** Leystu jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 5x = 0$

**c**  $3x - 5x^2 = 0$

**b**  $10x + 2x^2 = 0$

**d**  $100x + x^2 = 0$

**3.59** Leystu jöfnurnar.

**a**  $x^2 - 10x + 25 = 0$

**c**  $81 - 4x^2 = 0$

**b**  $x^2 - 16 = 0$

**d**  $x^2 + 20x + 100 = 0$

**3.60** Þáttaðu og stytstu ef hægt er.

**a**  $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 6}$

**c**  $\frac{6x + 18}{3x^2 + 18x + 27}$

**b**  $\frac{a^2 - 10a + 25}{a^2 - 25}$

**d**  $\frac{(x + 2)(x - 3)}{(x^2 - 9)}$

**3.61** Eyddu svigunum með því að margfalda inn í þá og dragðu saman líka liði eins og hægt er.

**a**  $4(x - 1) + 2(x - 2)^2$

**b**  $(2x - 4)^2 - (x - 2)^2$

**c**  $x^2 + 2(x - 3) - (4 + x)x + (2 - x)^2$



## Að leysa annars stigs jöfnur með teikningu

Þú getur leyst annars stigs jöfnu með því að teikna graf jöfnunnar. Þá teiknar þú fleygbogann sem annars stigs jafna felur í sér. Þar næst lestu af grafinu hvert  $x$ -gildið er í núllpunktunum, það er að segja í skurðpunktunum við  $x$ -ásinn.

### Sýnidæmi 26

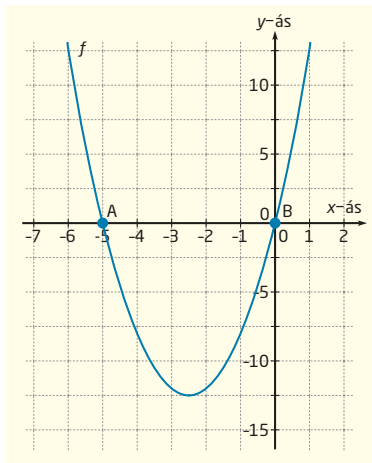
Leystu jöfnuna með því að teikna graf hennar.

$$10x + 2x^2 = 0$$

#### Tillaga að lausn

$$10x + 2x^2 = 0$$

Fallið  $f(x) = 10x + 2x^2$  táknar jöfnuna.



Grafið er sýnt til vinstri.

Pegar lesið er af grafinu sést að núllpunktarnir eru  $(-5, 0)$  og  $(0, 0)$ .

Lausnir jöfnunnar eru

$$\underline{x = -5 \text{ eða } x = 0.}$$

**3.62** Leystu jöfnurnar með því að teikna gröf þeirra.

**a**  $x(x - 5) = 0$

**d**  $(12 - x)(12 + x) = 0$

**b**  $(x - 8)(x - 9) = 0$

**e**  $(4 - x)x = 0$

**c**  $(x + 15)(x + 10) = 0$

**f**  $x^2 = 0$

**3.63** Leystu jöfnurnar með því að teikna gröf þeirra.

**a**  $x^2 - 10x + 25 = 0$

**c**  $81 - 4x^2 = 0$

**e**  $x^2 + 16 = 8x$

**b**  $x^2 - 16 = 0$

**d**  $x^2 + 20x + 100 = 0$

**f**  $9x^2 + 24x = -16$

**Að leysa jöfnu með teikningu** felur í sér að teikna gröf jafnanna og lesa af grafinu skurðpunktana milli grafsins og  $x$ -ássins.

Mundu að endurskrifa jöfnuna þannig að 0 sé hægra megin við jöfnumerkið.



# Ójöfnur

Ójöfnumerki er heiti tákanna < og >

Nú verður skoðað hvernig við getum leyst verkefni með því að leysa ójöfnu. Notuð eru tákinn <, sem þýðir „er minna en“ og > sem þýðir „stærra en“.

## Sýnidæmi 27

Sigríður og Ívar eru í sumarvinnu við að tína bláber hvort hjá sínum landeiganda. Sigríður fær 240 fyrir hvert box sem hún fyllir. Ívar fær 80 kr. fyrir hvert box en þau að auki 8000 kr. á dag. Sigríður og Ívar fylla jafn mörg box en þau geta ekki fyllt fleiri en 100 box á dag.

Hve mörg box þurfa þau að fylla á dag til að Sigríður vinni sér inn meira en Ívar?

- Settu upp ójöfnuna fyrir þetta dæmi.
- Leystu ójöfnuna með teikningu.
- Leystu ójöfnuna með reikningi.

### Tillaga að lausn

- Við látum  $x$  tákna fjölda boxa sem Sigríður og Ívar fylla. Sigríður fær  $240x$  krónur en Ívar  $80x + 8000$  kr.

Ójafnan verður:

$$\underline{\underline{240x > 80x + 8000}}$$

- Lausnin verður öll  $x$ -gildin sem gera það að verkum að línan sem sýnir laun Sigríðar liggur hærra en línan sem sýnir laun Ívars. Bláa línan táknar laun Sigríðar og sú svarta laun Ívars.

Lausnin sem gröfin sýna er  $x > 50$

Ef Sigríður og Ívar tína meira en 50 box mun Sigríður hafa meiri laun.

- Við getum leyst ójöfnur næstum því á sama hátt og við leysum jöfnur.

$$12x > 4x + 400 \quad | -4x$$

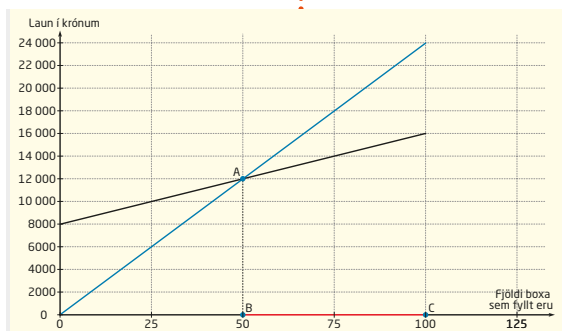
$$12x - 4x > 400$$

$$8x > 400 \quad | : 8$$

$$x > \frac{400}{8}$$

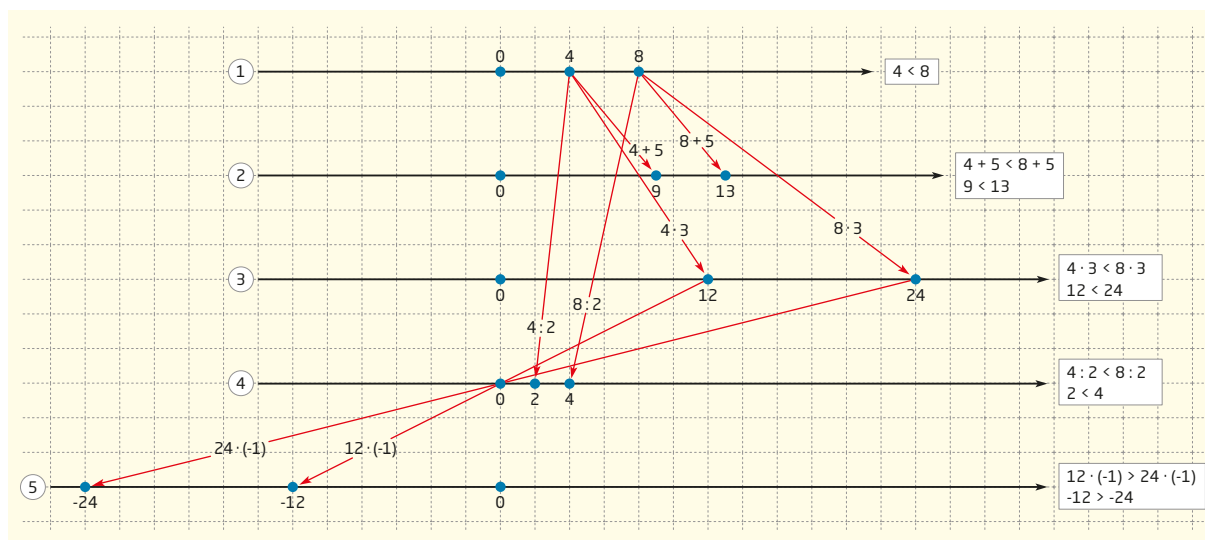
$$\underline{\underline{x > 50}}$$

Þú hefur áður leyst svona ójöfnur með teikningu. Hvora hlið í ójöfnunni má sýna með beinni línu í hnitakerfi.



Rauða línan á  $x$ -ásnum sýnir að Sigríður vinnur sér inn meira ef þau fylla milli 50 og 100 box.

Hvers vegna má bæta við, draga frá, margfalda og deila með sömu tölu báðum megin við ójöfnumerkið?



- 1 Á fyrstu talnalinunni hafa tölurnar 4 og 8 verið merktar. Tölurnar vinstra megin á talnalinunni eru minni en þær sem eru til hægri þannig að  $4 < 8$ .
- 2 Ef tölu er bætt við, til dæmis 5, flytjast báðar tölurnar fimm einingar til hægri en röð þeirra innbyrðis breytist ekki. Á sama hátt flytjast tölurnar jafn mikið til vinstri þegar tala er dregin frá.
- 3 Ef margfaldað er með jákvæðri tölu, til dæmis með 3, munu báðar tölurnar þrefaldast en röð þeirra á talnalinunni helst óbreytt.
- 4 Sama gerist ef deilt er með jákvæðri tölu, til dæmis með 2.
- 5 En hvað gerist ef við margföldum með neikvæðri tölu? Ef við til dæmis margföldum 12 með -1 og 24 með -1 sjáum við að röð talnanna á talnalinunni breytist.

Þegar við margföldum með -1 speglast tölurnar um 0-punktinn þannig að talan sem var lengra til vinstri lendir nú lengra til hægri á talnalinunni. Hér kemur í ljós ný regla sem gildir um ójöfnur:

Þegar við margföldum eða deilum með neikvæðri tölu báðum megin við ójöfnumerkið þarf að snúa ójöfnumerkinu við.

Að deila með neikvæðri tölu samsvarar því að margfalda með 1 deilt með tölunni:

$$\begin{aligned} \frac{8}{-2} &= 8 \cdot \frac{1}{-2} \\ &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

## Sýnidæmi 28

Leystu ójöfnuna  $3x + 10 < 7x - 14$  með reikningi.

### Tillaga að lausn

$$\begin{array}{l} 3x + 10 < 7x - 14 \quad | -7x \\ 3x - 7x + 10 < -14 \quad | -10 \\ 3x - 7x < -14 - 10 \\ -4x < -24 \quad | : -4 \\ \frac{-4}{-4}x > \frac{-24}{-4} \\ \underline{x > 6} \end{array}$$

### Ójafna

samanstendur af tveimur tölum eða algebrustæðum þar sem önnur hefur stærra gildi en hin. Þær eru aðgreindar með ójöfnumerki,  $>$  eða  $<$ .

**3.64** Leystu ójöfnurnar með reikningi.

**a**  $2x + 1 < x + 5$

**b**  $5x - 1 > 8x + 2$

**c**  $\frac{1}{2}x - 3 \leq \frac{1}{4}x + 1$

**d**  $2x + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}x + 1$

Táknin  $\leq$  og  $\geq$  eru notuð þegar við viljum hafa með lausn sem gerir stæðurnar jafnar. Táknin eru lesin „er minna en eða jafnt og“ og „er stærra en eða jafnt og“.

**3.65** Ragna og Karl keppa um hvoru þeirra takist að leggja meira fyrir af peningum á fjórum vikum. Áform Rögnu er að leggja vikulaunin sín fyrir í hverri viku. Hún fær 4800 kr. á viku. Karl leggur ekkert fyrir af föstu vikulaununum sínum en hann ætlar í staðinn að vinna hjá föður sínum. Hann fær 1600 kr. á klst.

Settu upp og leystu ójöfnu sem sýnir hve margar klukkustundir Karl þarf að vinna á fjórum vikum til að sigra í keppninni við Rögnu.

**3.66** Markús ætlar að æfa í líkamsræktarstöð svo oft í mánuði að hver æfingatími kosti ekki meira en 400 kr. Hann borgar 8400 kr. á mánuði.

Settu upp ójöfnu sem sýnir hve margar klukkustundir á mánuði hið minnsta Markús þarf að æfa. Leystu ójöfnuna.

**3.67** Póra á 100 000 kr. á bankareikningi í byrjun maí. Hún vill eiga að minnsta kosti 40 000 kr. í ágústlok. Hún notar 5000 kr. á viku í vasapening.

- a Settu fram ójöfnu sem lýsir hve mikið Póra á að eiga í ágústlok. Láttu  $x$  tákna fjölda vikna.
- b Í hve margar vikur getur Póra notað peningana á reikningnum til að eiga 40 000 kr. í ágústlok?



**3.68** Pú tekur bíl á leigu og færð tvenns konar tilboð:

Tilboð 1: 7000 kr. á dag + 70 kr. fyrir hvern ekinn kílómetra.

Tilboð 2: 10 000 kr. á dag + 30 kr. fyrir hvern ekinn kílómetra.

Settu fram jöfnu sem sýnir hve marga kílómetra þú þarft að aka til að tilboð 2 verði hagstæðara en tilboð 1. Leystu ójöfnuna með reikningi.

**3.69** Emma fékk sumarvinnu við símsölu. Hún fær tvenns konar launatilboð:

Tilboð 1: Kr. 60 000 á viku

Tilboð 2: Kr. 30 000 á viku + 5% af vikulegri sölu

Hve mikið þarf Emma að selja á viku til að tilboð 2 verði hagstæðara?

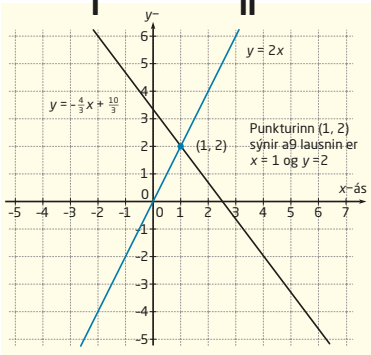
Ef ekki er tekið fram í dæminu hvaða aðferð þú átt að nota til að finna lausnina geturðu valið aðferð að vild.

**3.70** Í kaupstað nokkrum voru 63 000 íbúar árið 2000. Á hverju ári fjölgar íbúunum um 1300 manns. Í öðrum kaupstað helst íbúafjöldinn óbreyttur, það er að segja 71 000 íbúar.

- a Láttu  $x$  tákna fjölda ára eftir 2000. Útskýrðu að íbúafjöldann í fyrrnefnda kaupstaðnum megi skrá þannig:  $63\,000 + 1300x$ .
- b Hve lengi var íbúafjöldinn í síðarnefnda kaupstaðnum stærri en í hinum kaupstaðnum?
- c Á hvaða ári varð íbúafjöldinn í fyrrnefnda kaupstaðnum meiri en í hinum?



# Í stuttu máli

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
leyst línuleg jöfnuhneppi með innsetningar- aðferðinni	<p>Leystu jöfnuhneppið með innsetningaraðferðinni.</p> <p>I <math>4x + 3y = 10</math></p> <p>II <math>2x - y = 0</math></p>	<p>I <math>4x + 3y = 10</math></p> <p>II <math>2x - y = 0</math></p> <p>Jafna II gefur:</p> <p>II <math>y = 2x</math></p> <p>sem sett inn í jöfnu I gefur:</p> <p>I <math>4x + 3 \cdot 2x = 10</math></p> <p><math>10x = 10</math></p> <p><u><u><math>x = 1</math></u></u></p> <p>Þar með er:</p> <p><u><u><math>y = 2x = 2 \cdot 1 = 2</math></u></u></p>
leyst línuleg jöfnuhneppi með samlagningaraðferðinni	<p>Leystu jöfnuhneppið með samlagningaraðferðinni.</p> <p>I <math>4x + 3y = 10</math></p> <p>II <math>2x - y = 0</math></p>	<p>Við margföldum jöfnu II með 3 og fáum:</p> <p>I <math>4x + 3y = 10</math></p> <p>II <math>6x - 3y = 0</math></p> <p>Við leggjum saman jöfnurnar:</p> <p><math>10x = 10</math></p> <p><u><u><math>x = 1</math></u></u></p> <p>Þegar við setjum <math>x = 1</math> inn í jöfnu II fáum við:</p> <p><math>2 \cdot 1 - y = 0</math></p> <p><u><u><math>y = 2</math></u></u></p>
leyst línuleg jöfnuhneppi með því að teikna gröf jafnanna	<p>Leystu jöfnuhneppið með teikningu.</p> <p>I <math>4x + 3y = 10</math></p> <p>II <math>2x - y = 0</math></p>	 <p><u><u><math>x = 1</math></u></u></p> <p><u><u><math>y = 2</math></u></u></p>



Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
<p><b>sett upp og leyst línulegt jöfnuhneppi sem byggist á verkefni úr daglegu lífi</b></p>	<p>Alexander æfir sund. Hann syndir bringusund og baksund ákveðnar vegalengdir þegar hann er að hita upp. Dag nokkurn synti hann bringusund fjórar vegalengdir og baksund þrjár vegalengdir á 225 sekúndum. Næsta dag synti hann bringusund sex vegalengdir og baksund tvær vegalengdir á 250 sekúndum. Hann notaði jafn langan tíma á hverja vegalengd í bringusundi og jafnframt jafn langan tíma á hverja vegalengd í baksundi.</p> <p>Hve langan tíma var hann að synda hverja vegalengd í baksundi og hve langan tíma tók það hann að synda hverja vegalengd í bringusundi?</p>	<p>Láttu <math>x</math> tákna tímann sem það tók Alexander að synda vegalengdina í bringusundi og <math>y</math> tákna tímann sem hann synti hverja vegalengd í baksundi.</p> <p><b>I</b> <math>4x + 3y = 225</math></p> <p><b>II</b> <math>6x + 2y = 250</math></p> <p>Við margföldum jöfnu I með <math>-2</math> og jöfnu II með <math>3</math>.</p> <p><b>I</b> <math>-8x - 6y = -450</math></p> <p><b>II</b> <math>18x + 6y = 750</math></p> <p>Við leggjum jöfnurnar saman:</p> <p><b>I + II</b> <math>10x = 300</math>  <math>x = 30</math></p> <p>Þetta <math>x</math>-gildi setjum við inn í jöfnu II:</p> <p><math>6 \cdot 30 + 2y = 250</math>  <math>2y = 250 - 180 = 70</math>  <math>y = 35</math></p> <p><u>Í bringusundi notar Alexander 30 sek. á hverja vegalengd og í baksundi 35 sek. á hverja vegalengd.</u></p>
<p><b>reiknað með formúlum</b></p>	<p>Formúlan fyrir yfirborðsflatarmál kúlu með geislann <math>r</math> er</p> <p><math>Y = 4\pi r^2</math>.</p> <p><b>a</b> Finndu formúlu fyrir geislann <math>r</math>.</p> <p><b>b</b> Finndu <math>r</math> þegar yfirborðsflatarmálið er <math>100 \text{ cm}^2</math>.</p>	<p><b>a</b> <math>Y = 4\pi r^2 \quad   : 4\pi</math>  <math>\frac{Y}{4\pi} = r^2</math>  <math>r = \sqrt{\frac{Y}{4\pi}}</math></p> <p><b>b</b> <math>Y = 100 \text{ cm}^2</math>  <math>r = \sqrt{\frac{Y}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100}{4 \cdot 3,14}} \approx 2,8</math></p> <p><u>Geisli kúlunnar er um það bil 2,8 cm.</u></p>
<p><b>deilt í almennt brot með almennu broti</b></p>	<p>Reiknaðu dæmið.</p> <p><math>\frac{5}{12} : \frac{1}{3}</math></p>	<p><math>\frac{5}{12} : \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5}{4}</math></p>

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reiknað með almennum brotum þar sem teljari og nefnari geta innihaldið bókstafi	Dragðu saman: $\frac{2}{a^2 - a} + \frac{a}{a - 1} - \frac{1}{a}$	$\frac{2}{a^2 - a} + \frac{a}{a - 1} - \frac{1}{a}$ $= \frac{2}{a(a - 1)} + \frac{a^2}{a(a - 1)} - \frac{(a - 1)}{a(a - 1)}$ $= \frac{2 + a^2 - a + 1}{a(a - 1)} = \frac{a^2 - a + 3}{a^2 - a}$
stytt almenn brot með bókstafastæðu	Þáttaðu og stytstu. $\frac{a^3 b^2}{b^2 - ab} \cdot \frac{b - a}{a^2 b^2}$	$\frac{a^3 b^2}{b^2 - ab} \cdot \frac{b - a}{a^2 b^2}$ $= \frac{a^3 b^2 (b - a)}{b(b - a) a^2 b^2} = \frac{a}{b}$
þáttað algebrustæður og þáttað annars stigs stæður	Þáttaðu stæðuna. $9x^2 y^3 + 6xy^4$	$9x^2 y^3 + 6xy^4$ $= \underline{\underline{3xy^3 (3x + 2y)}}$
notað ferningsreglurnar í báðar áttir	<b>a</b> Eyddu sviganum með því að nota ferningsreglu. $(4x + 2y)^2$ <b>b</b> Þáttaðu ef hægt er. $3x^2 + 66x + 363$	<b>a</b> $(4x + 2y)^2 = \underline{\underline{16x^2 + 16xy + 4y^2}}$ <b>b</b> $3x^2 + 66x + 363$ $= 3(x^2 + 22x + 121)$ $= \underline{\underline{3(x + 11)^2}}$
leyst annars stigs jöfnur með þáttun, ferningsreglunum, samokareglunni og núllreglunni	Leystu jöfnurnar. <b>a</b> $3x^2 - 2x = 0$ <b>b</b> $x^2 - 18x + 81 = 0$ <b>c</b> $3x^2 - 108 = 0$	<b>a</b> $3x^2 - 2x = 0$ $x(3x - 2) = 0$ $\underline{\underline{x = 0}}$ eða $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$ <b>b</b> $x^2 - 18x + 81 = 0$ $(x - 9)^2 = 0$ $\underline{\underline{x = 9}}$ <b>c</b> $3x^2 - 108 = 0$ $3(x^2 - 36) = 0$ $3(x - 6)(x + 6) = 0$ $\underline{\underline{x = 6}}$ eða $\underline{\underline{x = -6}}$
leyst fyrsta stigs ójöfnur	Leystu ójöfnuna. $\frac{1}{2}x - 1 \leq x - 4$	$\frac{1}{2}x - 1 \leq x - 4$ $\frac{1}{2}x - x \leq -4 + 1$ $-\frac{1}{2}x \leq -3 \quad   \cdot -2$ $\underline{\underline{x \geq 6}}$

# Bættu þig!

## Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuheppni

**3.71** Pétur, María, Egill og Nanna selja happdrættismiða. Pétur selur helmingi minna en María og Egill selur fimm færri miða en Pétur. Nanna selur þrefaldan fjölda sem Egill selur. Samtals selja þau 64 miða.

Hve marga miða selur María?

**3.72** Blómabeð í garði nokkrum á að vera rétthyrningslaga. Lengdin á að vera 3 m meiri en breiddin.

**a** Settu upp stæðu fyrir flatarmál og ummál blómabeðsins.

**b** Hvert er flatarmálið þegar ummálið er 26 m?

**3.73** Leystu jöfnuheppin með teikningu og með reikningi.

**a I**  $y = 4x - 4$

**II**  $y = -\frac{1}{2}x + 5$

**b I**  $y = 3x + 3$

**II**  $y = 2x + 2$

**c I**  $y = -3x - 8$

**II**  $y = 2x - 3$

**d I**  $x - 8 = 4y$

**II**  $x + 2y = 2$

**e I**  $6x + y = -2$

**II**  $4y = x + 17$

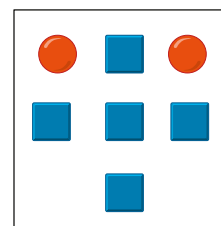
**f I**  $x + y = 4$

**II**  $5y - 2x + 15 = 0$

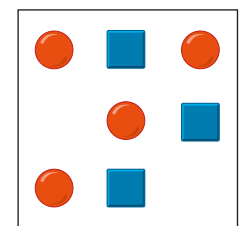


**3.74** Í spili nokkru hafa hringlaga spilapeningar ákveðið gildi og ferningslaga spilapeningar annað gildi. Spilaborð 1 gefur 100 stig og spilaborð 2 gefur 116 stig.

Hvert er gildi spilapeninganna hvorrar tegundar fyrir sig?



Spilaborð 1



Spilaborð 2

**3.75** Kristinn kaupir fjórar vatnsflöskur og þrjú rúnstykki og borgar 1840 kr. Mónica kaupir þrjár vatnsflöskur og fimm rúnstykki. Hún borgar 1820 kr.

Hve mikið þarf Anna að borga fyrir fimm vatnsflöskur og sjö rúnstykki?



### Flottir bílar

Startgjald 800 kr.  
160 kr./km

### Lúxusbílar

Startgjald 520 kr.  
240 kr./km

- 3.76 Magnea fær vinnu í pökkunarfyrirtæki og á að vinna 10 klst. á viku. Hún fær tvenns konar launatilboð.

Tilboð 1: 1680 kr. á klst. + 320 kr. fyrir hvern tilbúinn pakka.

Tilboð 2: 600 kr. fyrir hvern tilbúinn pakka.

- Hve marga pakka þarf Magnea að ljúka við að meðaltali á klukkustund til að tilboðin tvö verði jafn gild?
- Hvort launatilboðið er hagkvæmara fyrir Magneu ef hún gerir ráð fyrir að ljúka við fimm pakka á klukkustund?

- 3.77 Í mjólkurbúi nokkru eru framleiddar þrjár tegundir af ostum. Ostunum er pakkað í þrjár mismunandi gjafapakningar.

Notaðu verðlistann hér til hægri og finndu kílóverðið fyrir hverja ostategund.

- 3.78 Tvö leigubílafyrirtæki bjóða upp á mismunandi verð, sjá ramma til vinstri.

- Settu fram ójöfnu sem nota má til að finna hve langt þú þarft að aka til að það borgi sig að leigja bíl hjá Flottum bílum.  
Leystu ójöfnuna með reikningi.
- Teiknaðu í eitt hnitakerfi gröfin sem sýna verð leigubílafyrirtækjanna tveggja.
- Notaðu gröfin í b-lið.  
Hve langt þarftu að aka til að það borgi sig að nota Flotta bíla?  
Berðu saman við lausnina í a-lið.

**Lítill pakki** 1508 kr.  
400 g geitaostur  
300 g hvítostur

**Millistór pakki** 2884 kr.  
500 g hvítostur  
500 g geitaostur  
200 g bláostur

**Stór pakki** 5816 kr.  
800 g hvítostur  
1 kg geitaostur  
500 g bláostur

- 3.79 Rúmmál sívalnings finnst með formúlunni  $R = \pi r^2 \cdot h$ .

- Finndu formúlu fyrir hæðina  $h$ .
- Sívalningurinn rúmar einn lítra og hefur 5 cm radíus.  
Hver er hæð sívalningsins?

- 3.80 Á tónleika nokkra seldust 500 miðar. Miðaverð fyrir fullorðna var 1500 kr. og fyrir börn 800 kr. Samtals seldust miðar fyrir 662 500 kr.

Hve margir barnamiðar og hve margir fullorðinsmiðar seldust?

## Bókstafareikningur

3.81 Reiknaðu dæmin.

a  $\frac{5}{12} + \frac{11}{12} - \frac{7}{12}$

b  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$

c  $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{21}$

d  $\frac{7}{18} - \frac{5}{6} + \frac{4}{9}$

e  $\frac{7}{9} : \frac{28}{27}$

f  $\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{7}{9} + \frac{1}{3} \right)$

g  $12 + \frac{9}{11} \cdot \frac{22}{3}$

h  $\frac{5}{6} : \frac{15}{18}$

i  $\left( \frac{5}{7} - \frac{2}{5} \right) \cdot \left( \frac{21}{22} - \frac{1}{2} \right)$

3.82 Páttaðu stæðurnar.

a  $3x - 9$

b  $2b^2 + 16b$

c  $4x^2 + 2xy$

d  $21a^3 + 7a^2b$

e  $3a^3 - 12a^2 + 12a$

f  $a^4b^2 - a^2b$

3.83 Finndu minnsta sameiginlega margfeldið.

a 2, 6, 15

b 2, 4x, 12x

c  $2ab^2, 6a^2, 3b, 4a^3$

d  $7x^2y, 3xy, 6$

e  $2x^2, (3x - 9), 6x$

f  $4x, (2 - 6x), (4 - 12x)$

3.84 Finndu samnefnara, dragðu saman líka liði og einfaldaðu eins og hægt er.

a  $2 + \frac{1}{a}$

b  $\frac{x+1}{2x} + \frac{3x+5}{2x}$

c  $\frac{2a+b}{ab} - \frac{a+b}{ab}$

d  $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} - \frac{x+1}{3}$

e  $\frac{b-2}{b^2} + \frac{3b+1}{2b} - \frac{1}{3}$

f  $\frac{x^3-y^3}{x^2y^2} + \frac{y}{x^2} + \frac{2x}{y^2}$

g  $\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2-a} - \frac{1}{a-1}$

h  $\frac{3x}{4x+2} + \frac{x^2}{2x+1} - \frac{x}{2}$

i  $\frac{x-2}{6x} + \frac{x^2+\frac{2}{3}}{x^2+2x} - \frac{x}{x+2}$

3.85 Páttaðu og stytstu ef hægt er.

a  $\frac{9a}{2} \cdot \frac{4}{3ab}$

b  $\frac{x^4y^3}{5} : \frac{x^2y^2}{10}$

c  $\frac{a^2}{2a+ab} \cdot \frac{2+b}{b}$

d  $\frac{a-2}{2} \cdot \frac{4a^2}{2a-4}$

e  $4 \cdot \frac{x}{2x^2-2} \cdot \frac{x^2-1}{x^3}$

f  $\frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{a^2-ab}{b}}$



## Jöfnur leystar með þáttun – Ferningsreglurnar

**3.86** Reiknaðu og dragðu saman.

**a**  $(a - 4)^2$

**c**  $(x + 2)^2 - 4x$

**e**  $(3y + 2x)^2$

**b**  $5 + (x + 1)(x - 1)$

**d**  $(2a - b)(2a + b)$

**f**  $6a + (a - 3)^2$

**3.87** Reiknaðu og dragðu saman.

**a**  $(8 - x)(8 + x) - 32$

**b**  $(x + 4)^2 - (x - 4)^2$

**c**  $2(x + 2)^2 - 6x - 3(4 - x)(x + 4)$

**3.88** Þáttaðu með því að nota ferningsreglurnar eða samokaregluna.

**a**  $x^2 - 9$

**c**  $x^2 - 8x + 16$

**b**  $x^2 + 16x + 64$

**d**  $4x^2 - 25$

**3.89** Þáttaðu og stytstu.

**a**  $\frac{a^2 + 4a + 4}{a + 2}$

**c**  $\frac{a^2 - a}{a + 1} \cdot \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1}$

**e**  $\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y}$

**b**  $\frac{8}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{4}$

**d**  $\frac{2t^2 - 16t + 32}{t - 4}$

**f**  $\frac{x - y}{x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - y^2}$

**3.90** Leystu jöfnurnar.

**a**  $x^2 + 2x = 0$

**e**  $x^2 - 16 = 0$

**i**  $x^2 + 25 = 10x$

**b**  $2x^2 - 6x = 0$

**f**  $\frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{4}x$

**j**  $3x^2 - 27 = 0$

**c**  $2x^2 + x = 0$

**g**  $x^2 + 6x + 9 = 0$

**k**  $x^2 - 3x + 9 = 3x$

**d**  $x^2 = 2x$

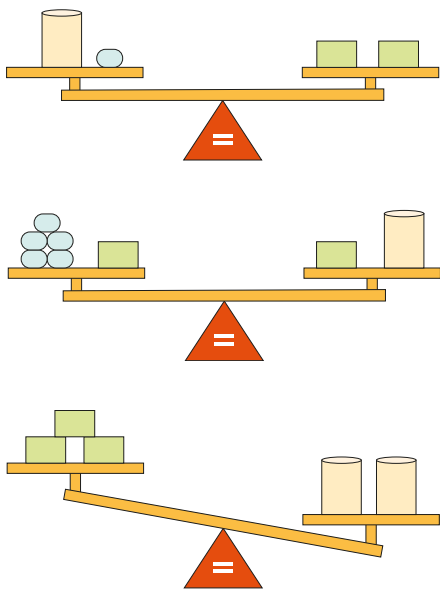
**h**  $x^2 - 22x + 121 = 0$

**l**  $x^2 + 18x + 100 = 19$

# Þjálfaðu hugann

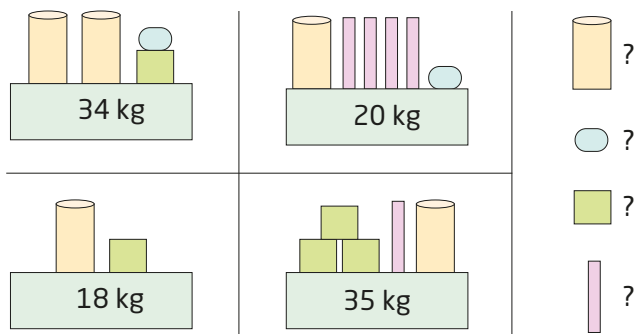
- 3.91 Fyrir fjórum árum var bróðir Katrínar þrisvar sinnum eldri en Katrín en eftir tvö ár verður hann tvisvar sinnum eldri en hún.  
Hversu gömul er Katrín og hversu gamall er bróðir hennar?

- 3.92 Hverju þarftu að bæta við vinstri vogarskálina á neðstu skálavoginni til að hún verði í jafnvægi?



Í dæmum 3.92 og 3.93 eru tvær óþekktar breytur. Þú getur leyst þessi dæmi án þess að setja upp jöfnu – bara með því að hugsa rökrétt.

- 3.93 Finndu hvað hver hlutur vegur.



# Orðskýringar

A	Skýringar
A-snið	flokkur staðlaðrar pappírsstærðar þar sem hlutfallið milli lengri og styttri hliðar pappírsins er ferningsróttin af 2
aðfella	bein lína sem graf falls nálágast; fjarlægðin milli línunnar og grafsins nálágast 0
afborgun	þegar lán er greitt til baka er lánsupphæðinni skipt í minni hluta sem kallast afborganir
algebrísk lausn	samheiti yfir að leysa jöfnur með reikningi, til dæmis með innsetningar- eða samlagningaraðferðinni
annars stigs fall	fall á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$ þar sem a, b og c eru fastar (tölur) og x er breyta; a er ekki 0
annars stigs jafna	jafna á forminu $ax^2 + bx + c = 0$ þar sem a, b og c eru fastar, b og c geta verið 0 en a getur ekki verið 0
B	
botnpunktur	punktur á grafi falls sem hefur lægra fallgildi en allir punktar í nágrenninu, sama og lægsti punktur
bókhalld	skráning allra tekna og gjalda á ákveðnu tímabili eftir að tekna hefur verið aflað eða gjöldin greidd
breiðbogi	ferill breiðboga greinist í tvo aðskilda óendanlega hlutfæra sem eru spegilmyndir hvor annars, graf ófugs hlutfalls er dæmi um breiðboga
breytipáttur	stærð sem notuð er til að reikna út hve mikið eitthvað hækkar eða lækkar á ári; breytipátturinn 1,12 merkir 12% aukningu á ári
brotabrot	almennt brot þar sem teljari eða nefnari eða bæði teljari og nefnari innihalda almenn brot
brúttóflatarmál	flatarmálið í heild áður en einhver hluti af því fer í annað, til dæmis innréttingar
brúttólaun	laun áður en skattur og annar frádráttur er dreginn af
D	
dráttur	í líkindareikningi: að draga blindandi og af handahófi kúlu, spilapening, kubb eða annað úr safni slíkra hluta
E	
endurtekinn dráttur	í líkindareikningi: ef maður leggur aftur í poka, kassa eða annað það sem maður hefur dregið þannig að aðstæðurnar verða eins og þær voru áður en dregið var; þetta kallast að draga með endurtekningu
eftirmynd	fyrir hvern punkt á eftirmyndinni er samsvarandi punktur á frummyndinni
einslaga	tvær þríhyrningslaga myndir eru einslaga ef þær hafa tvö og tvö jafn stór horn
eins punkts fjarvídd	hefur sjónlínu og einn hvarfpunkt
empírísk gögn	gögn sem eru fengin í tilraunum, úr reynslu af eða athugunum á raunveruleikanum
F	
fallgildi	gildið á y-ásnum
fallstæða	algebrustæða sem lýsir falli
fjarvíddarteikning	aðferð til að sýna þrívíðan hlut á tvívíðum fleti þannig að fram komi dýptaráhrif í myndina
formengi	mengi allra x-gilda sem fall gildir fyrir
fleygbogi	graf annars stigs falls
formúlureikningur	að nota formúlu sem jöfnu og leysa hana út frá stærðinni sem finna skal
fylliatburðir/fyllimengi atburða	tiltekinn atburður og fylliatburður hans eru til samans allir mögulegir atburðir, atburður og fylliatburður hans geta ekki gerst samtímis, summa líkinda fyrir atburðinn og fylliatburð hans er 1.
fyrsta ferningsreglan	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
G	
grafísk lausn á annars stigs jöfnu	aðferð til að leysa jöfnu með því að teikna graf annars stigs falls og finna skurðpunktinn milli grafsins og x-ássins
grafísk lausn á jöfnuhneppi	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að teikna gróf línulegu jafnanna og finna skurðpunkt þeirra
gullinsnið	þegar skipting striks er þannig að lengri hluti þess stendur í sama hlutfalli við styttri hlutann og strikið í heild stendur við lengri hlutann, hlutfallið er $\approx 1,618$

<b>H</b>	
háður atburður	þegar útkoma úr atburði er háð því sem gerist í öðrum atburði
hágildi	punktur sem hefur hærra y-gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
heildargreiðsla lána	summan af afborgunum, vöxtum og gjöldum sem borga þarf vegna láns við hverja afborgun
herma	í líkindareikningi: að búa til líkan af atburði
hlutfall	í tveimur einslaga myndum eru samsvarandi hliðar í sömu hlutföllum
hlutfallstala kostnaðar	segir til um greiðslur sem standa í réttu hlutfalli við lánsupphæð
hlutfallstíðni	fjöldi tiltekinnna athugana deilt með heildarfjölda athugana
hlutfallstölur	x og y eru hlutfallstölur ef $\frac{x}{y}$ er fasti
hvarfpunktur	punkturinn þar sem tvær eða fleiri samsíða línur virðast koma saman í einum og sama punktinum óendanlega langt frá þeim sem horfir
höfuðstóll	er fjárhæð sem vextir eru reiknaðir af
<b>I</b>	
inneign	upphæðin sem tilgreind er á bankareikningi
innlánsvextir	vextir af peningum sem liggja á bankareikningi, innlánsvextir eru lægri en útlánsvextir
innsetningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi, þá er fundin stæða fyrir eina breytu í einni jöfnunni og stæðan síðan sett inn fyrir þá breytu í annarri jöfnu
<b>J</b>	
jafnar líkur	í líkindareikningi: þar sem jafnar líkur eru á öllum útkomum
jafngreiðslulán	lán sem er greitt niður með jafn háum greiðslum á hverjum gjalddaga; í byrjun er hluti afborgananna lágur og hluti vaxtanna hár en síðan breytist þetta eftir því sem líður á lánstímann
jöfnuhneppi	tvær eða fleiri jöfnur með tveimur eða fleiri breytum
<b>K</b>	
krosstafla	tafla með línum og dálkum, notuð til að hafa yfirlit yfir tvo óháða viðburði eða tilraunir
<b>L</b>	
langhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast lengsta hliðin langhlið, langhliðin er mótlæg rétta horninu
lágildi	punktur sem hefur lægra y-gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
lán með jöfnum afborgunum	lán þar sem greiðslur á afborgunardegi eru breytilegar; afborgunin sjálf er óbreytt en vaxtahlutinn lækkar eftir því sem á lánstímann líður
liður	tala eða algebrustæða sem á að leggja við eða draga frá annarri stæðu, liðir eru aðgreindir með plús- eða mínustákni
líkindatré	í líkindareikningi: eins konar myndrit þar sem hver útkoma er einn punktur og línur tákna hvernig útkomur verða hver á eftir annarri með ákveðnum líkum
líkur út frá tilraunum	samsvara hlutfallslegri tíðni í tilraun; P er tíðni hagstæðra útkomna deilt með heildarfjölda mögulegra útkoma
<b>M</b>	
margföldunarreglan í líkindareikningi	líkurnar á að tveir óháðir atburðir verði samtímis eru fundnar með því að margfalda saman líkurnar á hvorum atburði fyrir sig: $P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$
markgildi falls	gildi sem fallgildið nálgast þegar óháða breytan nálgast ákveðið gildi eða stefnir í óendanlegt eða mínus óendanlegt
minnkun	hlutfallið, minni tala : stærri tala
minnsta sameiginlega margfeldi	minnsta talan sem allar tölurnar, sem um ræðir hverju sinni, ganga upp í
mælikvarði	hlutfallið milli lengdar á eftirmynd og samsvarandi lengdar á frummynd
<b>N</b>	
nafnvextir	vextir inn- og útlána sem gefnir eru upp hverju sinni án tillits til verðlagsbreytinga
nettólaun	laun eftir að skattar og fleiri frádráttarliðir hafa verið dregnir frá, útborguð laun
núllpunktsreglan	ef margfeldi talna eða algebrustæðna er 0 hlýtur að minnsta kosti annar - eða einn - þátturinn að vera 0

núllstöð falls	skurðpunktur grafs falls við x-ásinn; x-gildið er fundið með því að leysa jöfnuna $y = 0$ eða $f(x) = 0$ ; fallgildið er 0.
<b>O</b>	
orlofslaun	greiðslur frá atvinnurekanda sem maður fær í sumarleyfinu í stað launa; orlofslaunin eru nú (2016) að lágmarki 10,17% af öllum greiddum launum
<b>Ó</b>	
ójafna	inniheldur tvær tölur eða algebrustæður þar sem önnur hefur hærra gildi en hin; þær eru aðskildar með ójöfnumerkjunum $>$ eða $<$
<b>P</b>	
Pýþagórasarregla	Sjá „regla Pýþagórasar“
Pýþagórasarþrend	þrjár náttúrlegar tölur sem passa inn í Pýþagórasarregluna
<b>R</b>	
regla Pýþagórasar	langhlið <sup>2</sup> = skammhlið <sub>1</sub> <sup>2</sup> + skammhlið <sub>2</sub> <sup>2</sup> . Í rétthyrndum þríhyrningi er summa lengda skammhliðanna í öðru veldi jöfn lengd langhliðarinnar í öðru veldi
<b>S</b>	
samlagningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að leggja saman tvær línulegar jöfnur þannig að önnur óþekkta breytan hverfi
samokareglan	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
skammhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast styttri hliðarnar tvær skammhliðar, þessar tvær hliðar eru armar rétta hornsins
skattstofn	grunnurinn sem tekjuskattur er reiknaður af eftir að iðgjald í lífeyrissjóð hefur verið dregið af tekjunum
skattur	hluti launa sem launþegi þarf að borga til ríkis og sveitarfélaga til að fjármagna opinber gjöld
stækkun	hlutfallið, stærri tala : minni tala
<b>T</b>	
tekjuskattur	hluti af vinnutekjum, hagnaði af atvinnurekstri, vaxtatekjum o.fl.
topppunktur	punktur á grafi falls sem hefur hærra gildi en allir aðrir punktar í nágrenninu
tveggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum, eitt hornið snýr að áhorfandanum
<b>Ú</b>	
útlánsvextir	vextir á peninga sem fengnir eru að láni hjá bankanum; útlánsvextir eru hærri en innlánsvextir
útpunktur	samheiti yfir há- og lággildi í hnitakerfinu
<b>V</b>	
vaxtavextir	vextir af vöxtum fyrri ára
Vennmynd	skýringarmynd þar sem mengi eru teiknuð sem svæði afmörkuð af lokuðum ferlum, notuð til að lýsa innbyrðis afstöðu mengja og aðgerða sem verka á þau
vextir	kostnaður við að taka peninga að láni eða það sem maður fær borgað fyrir að leggja peninga inn í banka
virðisaukaskattur (vsk)	kallast oft í daglegu tali vaskur, er skattur sem er lagður á flestar vörur og þjónustu
<b>Þ</b>	
þáttun	tala eða algebrustæða er skrifuð sem margfeldi tveggja eða fleiri þátta
þáttur	tala eða algebrustæða sem er margfölduð með öðrum þætti, þættir eru oft aðskildir með margföldunarkerkinu
þriggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum og þriðja hvarfpunktinn fyrir ofan eða undir sjónlínunni
þrívíddarpunktablað	á þrívíddarpunktablaði er punktunum raðað eins og hornpunktum í jafnhliða þríhyrningum
þrívíður	hlutur sem hægt er að mæla eftir þremur ásum sem standa hornrétt hver á annan
<b>Ö</b>	
öfugt hlutfall	tvær stærðir, x og y, standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra ef margfeldið $x \cdot y = k$ þar sem k er fasti. Þessi tengsl má einnig skrá með $y = \frac{k}{x}$ og x er ekki 0.
önnur ferningsreglan	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$





# SKALI 3A

## STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

*Skali* býður upp á innihaldsríka og lifandi stærðfræðikennslu.

Nemendur öðlast bæði skilning og færni með því að vera virkir og leitandi þegar þeir vinna við stærðfræði. Nemendur og kennarar nota *Skala* til að lesa stærðfræði, vinna verkefni, rökræða lausnaleyðir og fást við stærðfræðilegar áskoranir á rannsakandi og skapandi hátt. *Skali* vekur áhuga nemenda með því að tengja stærðfræði við daglegt líf og bjóða upp á fjölbreytilega kennslu.

### Í *Skala* er lögð áhersla á

- hið faglega innihald, rökrétta uppbyggingu námsefnisins og framvindu námsins
- skýr og nákvæm markmið
- hagnýt dæmi og verkefni
- aðlögun námsefnisins að þörfum allra nemenda í sameiginlegu námssamfélagi þeirra
- nákvæmar leiðbeiningar og stuðning við kennara áður en kennsla hefst, meðan á henni stendur og eftir að henni lýkur

**Skali 3** samanstendur af tveimur nemendabókum, tveimur æfingaheftum og tveimur kennarabókum. Kennarabækurnar eru gefnar út á heimasíðu Menntamálastofnunar og þar eru auk þess að finna verkefnahefti, lausnir og annað fylgiefni með flokknum.

Höfundar:

Björnar Alseth

Grete Normann Tofteberg

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Janneke Tangen

  
MENNTAMÁLASTOFNUN  
40078

