SKALI 2B

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Skali 2B
Nemendabók
ISBN 978-9979-0-2010-3

Heiti á frummálinu: Maximum 9 Grunnbok (4. og 5. kafli)
Kápuhönnun: 07 Gruppen AS/Kristine Steen
Mynd á kápu: Verkís/Rafn Sigurbjörnsson
Teikningar: Børre Holth
Ritstjóri norsku útgáfunnar: Åse Bergundhaugen og Thor-Atle Refsdal

Myndir frá shutterstock.com
Bls. 8 a.n. Shutterstock; bls. 9 alekleks; bls. 11 Oleg Mikhaylov; bls. 13 Anbrei Kholmov; bls. 19 Vladimir Nenezic; bls. 21 leospek; bls. 22 Eugene Sergeev; bls. 27 t.v. bergamont; bls. 27 f.m. Nikolay Kuleshin; bls. 35 Bashutskyy; bls. 37 zentilia; bls. 39 a.n. Aliaksandr Shatny; bls. 41 Shutterstock; bls. 42 a.o. Rosti9; bls. 42 f.m. Madiz; bls. 42 a.n. GoodMood Photo; bls. 42 neðst ktsdesign; bls. 45 a.o. Nikolay Kuleshin; bls. 45 a.n. ChiccoDodiFC; bls. 47 neðst Shutterstock; bls. 49 Chainfoto24; bls. 50 a.o. oksana2010; bls. 50 a.n. meunierd; bls. 52 a.o. Gillian Holliday; bls. 52 a.n. Designstock; bls. 53 a.o. Waj; bls. 61 a.o. Artem Zamula; bls. 61 a.n. Sebastian Radu; bls. 62 Andy Lidstone; bls. 65 a.n. Elnur; bls. 66 a.o. Vietnam Photography; bls. 70 Shutterstock; bls. 73 Misunseo; bls. 74 Prixel Creative; bls. 75 Vereshchagin Dmitry; bls. 77; bls. 81 Alesksey Troshin; bls. 83 a.o. Shutterstock; 83 a.n. RG-vc; bls. 86 Africa Studio; bls. 89 salajean; bls. 92 Dioniya; bls. 93 sit; bls. 97 Shutterstock; bls. 100 Creativa Images;

Myndir frá istockphoto.com
Bls. 6–7 apainter; bls. 8 a.o. K-Kwanchai; bls. 25 Lupen; bls. 27 t.h. vetkit; bls. 39 a.o. Dolas; bls. 47 a.o. leungchopan; bls. 47 f.m. aronaze; bls. 53 a.n. vichie81; bls. 57 a.o. adventtr; bls. 57 a.n. Wavebreakmedia; bls. 66 f.m. design56; bls. 66 a.n. casadaphoto; bls. 101 jtyler; bls. 102 wtamas; bls 103 davidnavratil

Myndir frá dreamstime.com:
Bls. 31 Nataliia Prokofyeva; bls. 94 Scott Griessel

Myndir frá mbl.is
Bls. 68-69 Svanhildur Eiríksdóttir/Mbl.

Myndir af Wikimedia
Bls. 29 Ernst Wallis et al; bls. 55; bls. 65 f.m. aconcagua

Aðrir:
Bls. 12 WILDLIFE/R.Nagel/Ina agency
NTB scanpix: 45 f.m. og 65 a.o.

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2015
Menntamálastofnun
Kópavogi

Umbrot: Menntamálastofnun
Prentvinnsla: XXX

Eftirtaldir lásu yfir handrit að hluta eða í heild og veittu góð ráð við gerð bókarinnar: Kristín Bjarnadóttir, Ingólfur Steinsson og Þórdís Guðjónsdóttir. Þeim og öðrum sem að verkinu komu eru færðar bestu þakkir.

2B

SKALI

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

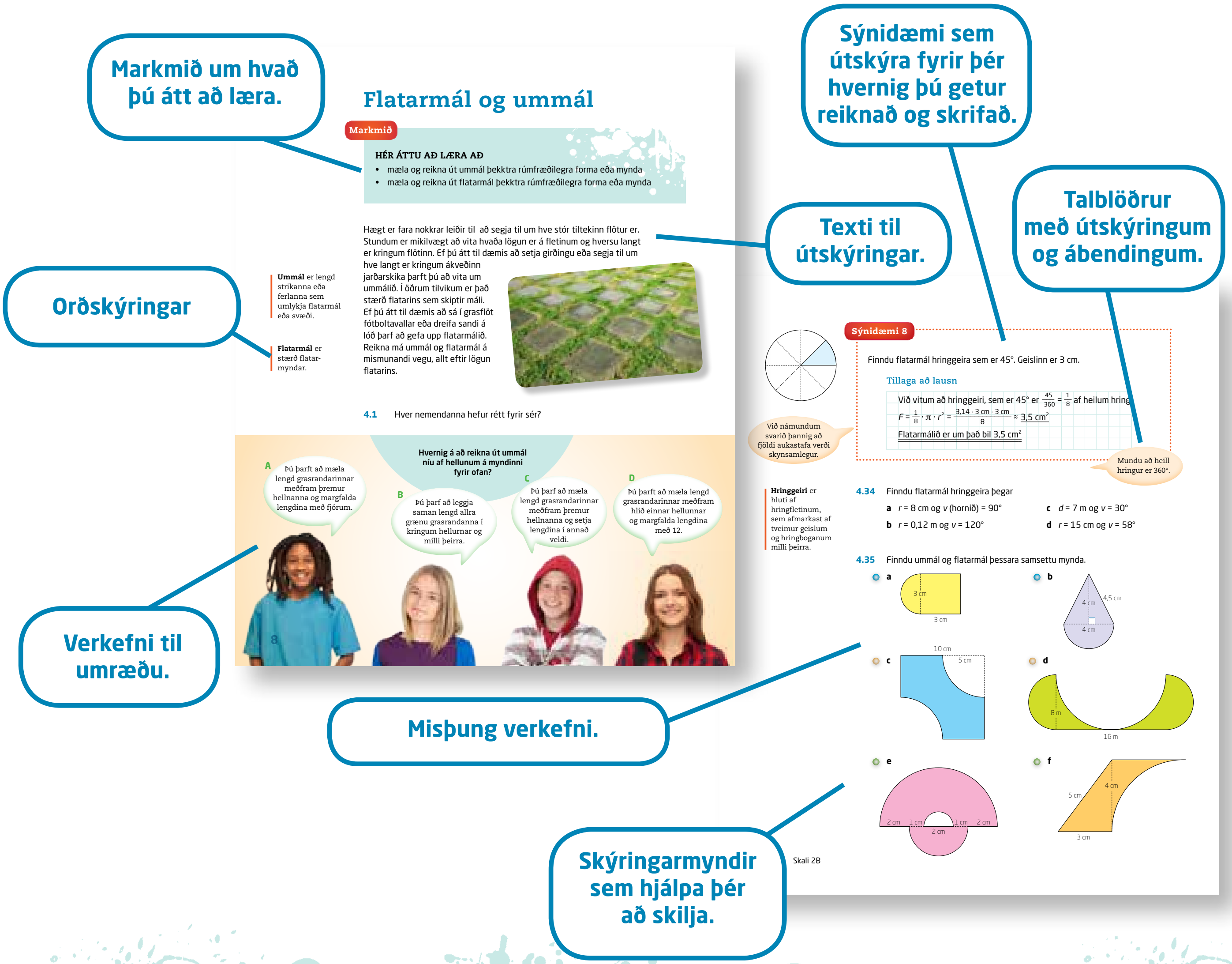
Formáli

Verið velkomin í *Skala* 2B.

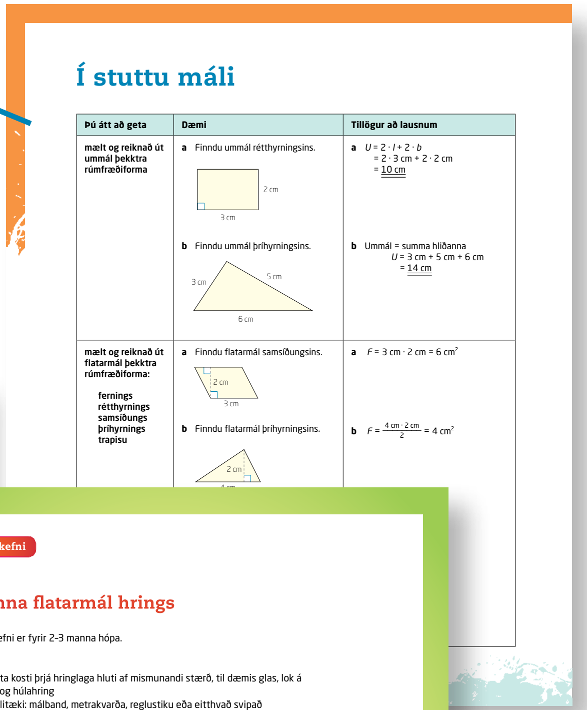
Nú byrjar stærðfræðin að verða virkilega spennandi, krefjandi og gagnleg.

- Stærðfræði er nytsamleg í daglegu lífi, bæði í námi og í atvinnulífinu.
- Í stærðfræði eru einnig gagnleg mynstur og kerfi, í henni eru rökleg tengsl og hún hefur sitt eigið táknbundna tungumál.
- Stærðfræðinám felur í sér gleði, undrun og sigra og útheimtir mikla vinnu!
- Í stærðfræðitímunum vinnur þú með öðrum, leysir dæmi og vandamál, vinnur hagnýt verkefni, spilar spil, rökræðir um lausnir og hugsanaferli og notar tölvu.

Hér sérðu hvernig nemendabók getur verið til hjálpar:

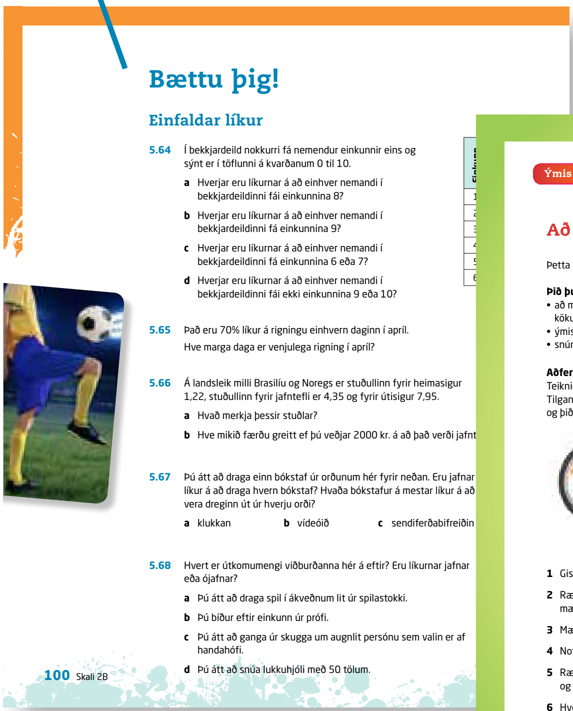


Samantekt á markmiðum sem vinnan fram undan byggist á.


Í stuttu máli

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
mælt og reiknað út ummál þekktra rúmfræðiforma	**a** Finndu ummál rétthyrningsins. (2 cm, 3 cm) **b** Finndu ummál þríhyrningsins. (3 cm, 5 cm, 6 cm)	**a** $U = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2 \cdot 3\text{ cm} + 2 \cdot 2\text{ cm} = \underline{\underline{10\text{ cm}}}$ **b** Ummál = summa hliðanna $U = 3\text{ cm} + 5\text{ cm} + 6\text{ cm} = \underline{\underline{14\text{ cm}}}$
mælt og reiknað út flatarmál þekktra rúmfræðiforma: fernings, rétthyrnings, samsíðungs, þríhyrnings, trapisu	**a** Finndu flatarmál samsíðungsins. (2 cm, 3 cm) **b** Finndu flatarmál þríhyrningsins. (2 cm)	**a** $F = 3\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$ **b** $F = \frac{4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2$

Til að æfa enn frekar það sem þú þarft að æfa.


Bættu þig!

Einfaldar líkur

5.64 Í bekkjardeild nokkurri fá nemendur einkunnir eins og sýnt er í töflunni á kvarðanum 0 til 10.

- **a** Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 8?
- **b** Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 9?
- **c** Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 6 eða 7?
- **d** Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái ekki einkunnina 9 eða 10?

5.65 Það eru 70% líkur á rigningu einhvern daginn í apríl. Hve marga daga er venjulega rigning í apríl?

5.66 Á landsleik milli Brasilíu og Noregs er stuðullinn fyrir heimasigur 1,22, stuðullinn fyrir jafntefli er 4,35 og fyrir útisigur 7,95.

- **a** Hvað merkja þessir stuðlar?
- **b** Hve mikið færðu greitt ef þú veðjar 2000 kr. á að það verði jafnt

5.67 Þú átt að draga einn bókstaf úr orðunum hér fyrir neðan. Eru jafnar líkur á að draga hvern bókstaf? Hvaða bókstafur á mestar líkur á að vera dreginn út úr hverju orði?

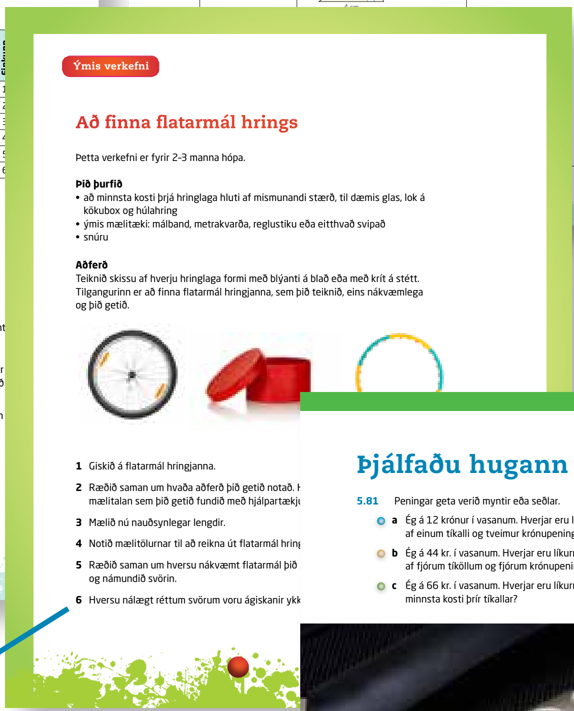
a klukkan **b** vídeóið **c** sendiferðabifreiðin

5.68 Hvert er útkomumengi viðburðanna hér á eftir? Eru líkurnar jafnar eða ójafnar?

- **a** Þú átt að draga spil í ákveðnum lit úr spilastokki.
- **b** Þú bíður eftir einkunn úr prófi.
- **c** Þú átt að ganga úr skugga um augnlit persónu sem valin er af handahófi.
- **d** Þú átt að snúa lukkuhjóli með 50 tölum.

100 Skali 2B

Til að vinna ýmis verkefni og spila spil.


Ýmis verkefni

Að finna flatarmál hrings

Þetta verkefni er fyrir 2-3 manna hópa.

Þið þurfið

- að minnsta kosti þrjá hringlaga hluti af mismunandi stærð, til dæmis glas, lok á kökubox og húlahring
- ýmis mælitæki: málband, metrakvarða, reglustiku eða eitthvað svipað
- snúru

Aðferð

Teiknið skissu af hverju hringlaga formi með blýanti á blað eða með krít á stétt. Tilgangurinn er að finna flatarmál hringjanna, sem þið teiknið, eins nákvæmlega og þið getið.

1. Giskið á flatarmál hringjanna.
2. Ræðið saman um hvaða aðferð þið getið notað. H mælitalan sem þið getið fundið með hjálpartækju
3. Mælið nú nauðsynlegar lengdir.
4. Notið mælitölurnar til að reikna út flatarmál hring
5. Ræðið saman um hversu nákvæmt flatarmál þið og námundið svörin.
6. Hversu nálægt réttum svörum voru ágiskanir ykk

Ýmis spennandi og krefjandi verkefni.


Þjálfaðu hugann

5.81 Peningar geta verið myntir eða seðlar.

- **a** Ég á 12 krónur í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að þær samanstandi af einum tíkalli og tveimur krónupeningum?
- **b** Ég á 44 kr. í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að þær samanstandi af fjórum tíköllum og fjórum krónupeningum?
- **c** Ég á 66 kr. í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að í vasanum séu að minnsta kosti þrír tíkallar?

5.82 Hverjar eru líkurnar á að leyninúmerið á ferðatöskunni þinni, sem í eru þrír tölustafir, sé spegiltala?

5.83 Hverjar eru líkurnar á að fjögurra stafa pin-númer á greiðslukortinu þínu innihaldi að minnsta kosti eina slétta tölu?

Spegiltala er tala eins og 131 eða 1221.

5.84 Hverjar eru líkurnar á að fjögurra stafa pin-númerið þitt sé spegiltala?

Kafli 5 • Líkur og talningarfræði **103**

Til hamingju með námsgreinina stærðfræði!

Með kveðju frá höfundum

Efnisyfirlit

Rúmfræði og útreikningar

Rúmfræði fjallar bæði um rúmfræðileg form og stærðir. Þú munt sjá hvernig reikna má lengdir, stærð flata og rúmmál rúmfræðilegra forma og mynda. Þú munt læra formúlur fyrir ummál, flatarmál og rúmmál og sjá hvers vegna formúlurnar gefa rétt svör. Þú munt læra meira um hringi og um að reikna út ummál og flatarmál hrings og hluta af hring.

Stærðfræðiorð

- ummál
- flatarmál
- rúmmál
- hornalína
- grunnlína
- hæð
- miðja, miðpunktur
- geisli
- þvermál
- hringferill
- snertill
- sniðill
- strengur
- hringgeiri
- rúmfræðilegur staður

?

Þú hefur tólf pinna, hvern í lengdinni 1. Notaðu pinnana til að búa til marghyrninga með ummálið 12 og með flatarmál sem er heil tala.

Hve mörg mismunandi flatarmál getur þú búið til? Teiknaðu allar lausnirnar.

Flatarmál og ummál

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- mæla og reikna út ummál þekktra rúmfræðilegra forma eða mynda
- mæla og reikna út flatarmál þekktra rúmfræðilegra forma eða mynda

Hægt er fara nokkrar leiðir til að segja til um hve stór tiltekinn flötur er. Stundum er mikilvægt að vita hvaða lögun er á fletinum og hversu langt er kringum flötinn. Ef þú átt til dæmis að setja girðingu eða segja til um hve langt er kringum ákveðinn jarðarskika þarft þú að vita um ummálið. Í öðrum tilvikum er það stærð flatarins sem skiptir máli. Ef þú átt til dæmis að sá í grasflöt fótboltavallar eða dreifa sandi á lóð þarf að gefa upp flatarmálið. Reikna má ummál og flatarmál á mismunandi vegu, allt eftir lögun flatarins.

Ummál er lengd strikanna eða ferlanna sem umlykja flatarmál eða svæði.

Flatarmál er stærð flatarmyndar.

4.1 Hver nemendanna hefur rétt fyrir sér?

Hvernig á að reikna út ummál níu af hellunum á myndinni fyrir ofan?

A Þú þarft að mæla lengd grasrandarinnar með fram þremur hellnanna og margfalda lengdina með fjórum.

B Þú þarft að leggja saman lengd allra grænu grasrandanna í kringum hellurnar og milli þeirra.

C Þú þarft að mæla lengd grasrandarinnar með fram þremur hellnanna og setja lengdina í annað veldi.

D Þú þarft að mæla lengd grasrandarinnar með fram hlið einnar hellunnar og margfalda lengdina með 12.

Ýmis verkefni

Stærsta og minnsta ummál og flatarmál

Þið þurfið

- 5-10 metra langa snúru
- 6 til 12 sessur (fyrir verkefnið utanhúss eða í leikfimissalnum)
- eða ferningslaga talningarkubba (fyrir verkefni við skólaborð)
- Nemendur vinna í hópum þar sem eru að minnsta kosti fjórir í hóp

Aðferð

Hluti 1: Stærsta og minnsta flatarmálið

a Bindið enda snúrunnar saman.
Haldið bandinu þannig að það myndi rétthyrning.
Breytið síðan lengdinni og breiddinni þannig að flatarmál rétthyrningsins verði
- stærra en hið fyrra
- minna en hið fyrra
- eins stórt og mögulegt er
- eins lítið og mögulegt er

b Allir í hópnum halda í snúruna með annarri hendi og hafi langt bil á milli, þannig að hver hönd myndi horn. Þeir halda snúrunni þannig að flatarmálið verði
- eins stórt og mögulegt er
- eins lítið og mögulegt er
- Nemendur ræða saman um hvaða form hefur stærsta mögulega flatarmálið þegar ummálið er fasti.
- Nemendur ræða saman um hvaða form hefur minnsta mögulega flatarmálið þegar ummálið er fasti.

Hluti 2: Stærsta og minnsta ummálið

a Nemendur nota sessur eða kubba, jafn marga í hverju verkefni þannig að flatarmálið verður fasti. Nemendur mynda rétthyrning með sessunum eða kubbunum. Nú búa þeir til nýjan rétthyrning þannig að ummálið verður
- stærra en ummál fyrri rétthyrningsins
- minna en ummál fyrri rétthyrnings
- eins stórt og mögulegt er
- eins lítið og mögulegt er

b Nemendur mynda samhangandi flöt með sessunum eða kubbunum og velja sjálfir lögunina. Ummálið á að verða
- eins stórt og mögulegt er
- eins lítið og mögulegt er
- Nemendur ræða saman um hvaða fletir hafa stærsta mögulega ummálið þegar flatarmálið er fasti.
- Nemendur ræða saman um hvaða fletir hafa minnsta mögulega ummálið þegar flatarmálið er fasti.

Hluti 3: Úrvinnsla

Nemendur gera skissur og skrifa um uppgötvanir sínar.

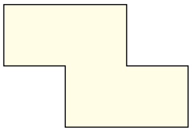
Að mæla og reikna ummál

Í kaflanum á undan fékkst þú við mælieiningar og mælitæki til að mæla lengd. Þú þarft að nota mismunandi mælitæki og ýmsar mælieiningar til að mæla lengd kringum mynd og kringum sundlaug.

> Ummál flatarmyndar eða svæðis er samanlögð lengd strikanna eða ferlanna sem afmarka myndina eða svæðið.

Sýnidæmi 1

Helga þarf að setja upp girðingu kringum leiksvæði fyrir hundinn sinn. Leiksvæðið lítur svona út séð að ofan:



Lengd stuttu hliðanna er helmingurinn af lengd lengri hliðanna. Lengri hliðarnar eru 4 m.

Hvað þarf girðingin að vera löng?

Tillaga að lausn

Myndin sýnir að svæðið afmarkast af tveimur löngum hliðum og sex stuttum hliðum. Þá er ummálið

$$U = 2 \cdot 4 \text{ m} + 6 \cdot 2 \text{ m} = \underline{\underline{20 \text{ m}}}$$

<u>Helga þarf að setja upp 20 m langa girðingu.</u>

4.2 Þórir ætlar að sauma kant kringum handklæði sem er orðið slitið í jöðrunum. Handklæðið er rétthyrningslaga og lengri hliðarnar eru einum og hálfum sinnum lengri en styttri hliðarnar sem eru 50 cm.

Hversu langur þarf kanturinn að vera?

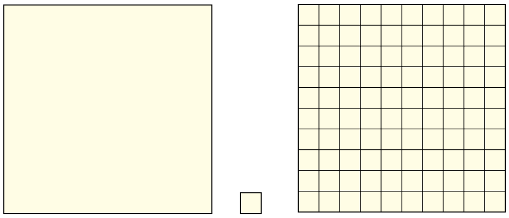
4.3 Hilmar ætlar að leggja gólflista með fram veggjunum í herberginu sínu. Gólfið er rétthyrningslaga. Lengri hliðarnar tvær eru 4 m. Hann keypti lista sem samtals eru jafn langir og ummál herbergisins. Listarnir eru alls 14 m á lengd.

Hversu langar eru styttri hliðarnar í herbergi Hilmars?

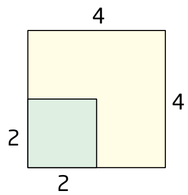
Að mæla og reikna flatarmál

Mælieiningar fyrir lengd eru notaðar til að mæla strik. Þegar mæla skal stærð flatar er notuð eining fyrir flatarmál.

Það er pláss fyrir tíu litla ferninga með fram hverri hlið stóra ferningsins. Það er því pláss fyrir $10 \cdot 10 = 100$ litla ferninga inni í stóra ferningnum. Ef við tíföldum lengdina hundraðfaldast flatarmálið.



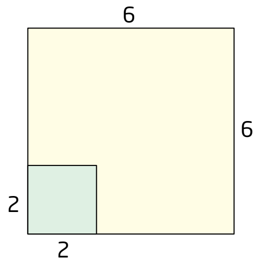
4.4 **a** Teiknaðu ferning þar sem hliðin er 2 cm á lengd. Teiknaðu annan ferning utan um þann fyrri eins og á myndinni til hægri. Hlið nýja ferningsins á að vera 4 cm.



b Hvað komast margir litlir ferningar fyrir í stóra ferningnum í a-lið?

c Finndu hlutfallið milli flatarmáls stóra ferningsins og flatarmáls litla ferningsins.

d Teiknaðu ferning þar sem hliðin er 2 cm og annan ferning utan um þann fyrri þar sem hliðin er 6 cm eins og á myndinni til hægri.



e Hvað komast margir litlir ferningar fyrir í þeim stóra í d-lið? Finndu hlutfallið milli flatarmáls stóra ferningsins og flatarmáls litla ferningsins.

f Hugsaðu þér ferning með hliðarlengdina s og annan ferning með hliðarlengdina $x \cdot s$ utan um þann fyrri. Talan x er heil jákvæð tala stærri en 1.
Hvað komast margir litlir ferningar fyrir í stóra ferningnum?

g Finndu hlutfallið milli flatarmáls stóra ferningsins og flatarmáls litla ferningsins.

4.5 Sólpallur Sigurðar er ferningslaga. Hann stækkar pallinn þannig að hann verði rétthyrningur. Hann verður tvöfalt lengri og einum og hálfum sinnum breiðari en hann var áður.

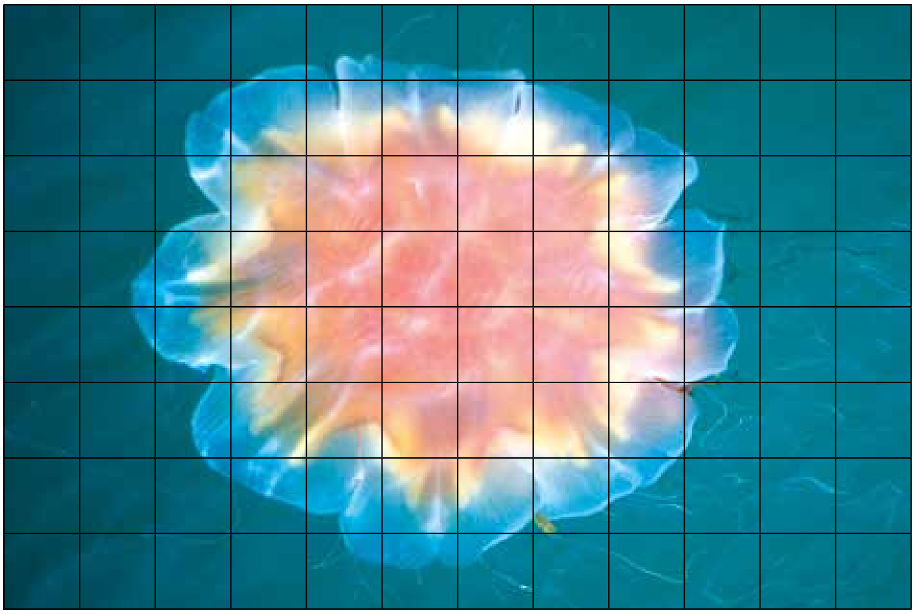
Hvað er nýi sólpallurinn mörgum sinnum stærri en sá gamli?

Þegar ætlunin er að mæla stærð flatar sem hefur ekki beinar línur og ekki er hægt að skipta í rétthyrninga og ferninga má leggja rúðunet yfir flötinn og telja reitina. Þá fæst námundað flatarmál. Því minni reitir, sem notaðir eru, því nákvæmara verður flatarmálið.

Sýnidæmi 2

Myndin sýnir marglyttu séða að ofan. Í rúðunetinu, sem er lagt ofan á myndina, eru reitirnir 1 cm^2 að stærð. Marglyttan og rúðunetið hafa verið minnkuð á myndinni.

Um það bil hve stórt er flatarmál marglyttunnar?



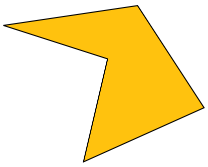
Tillaga að lausn

Ef við teljum alla reitina sem marglyttan nær alveg yfir og leggjum saman hina reitina sem marglyttan nær að hluta til yfir þannig að þeir fylli heila reiti fáum við námundað flatarmál marglyttunnar.

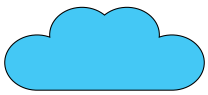
Flatarmál hvelju marglyttunnar er um það bil 39 cm^2.

4.6 Notaðu rúðunet til að giska á flatarmál myndanna.

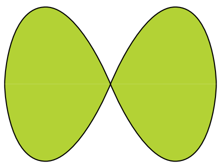
a



b

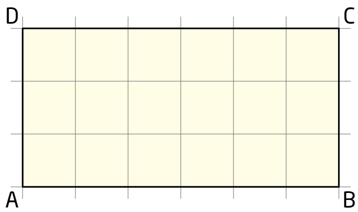


c



Að reikna flatarmál rétthyrnings

Þú hefur áður notað flatarmál rétthyrnings til að finna svar við margföldunardæmi. Hvort sem hliðarlengdirnar eru heilar tölur, tugabrot eða almenn brot finnst flatarmálið með því að margfalda saman lengd og breidd. Við getum skipt rétthyrningnum í stóra eða litla reiti og þú sérð að margfeldi lengdar og breiddar er fjöldi reita í öllum rétthyrningnum. Á myndinni er lengdin 6 og breiddin 3. Flatarmálið er $6 \cdot 3 = 18$. Ef þú telur reitina sérðu að það er rétt.



AB = CD = l (lengd)

AD = BC = b (breidd)

Flatarmál rétthyrnings: $F = l \cdot b$
Flatarmálið er lengd sinnum breidd.
Í sérstökum tilvikum, þar sem $l = b = h$ (hlið) er rétthyrningurinn ferningur. Flatarmál fernings: $F = h^2$

Sýnidæmi 3

Reiknaðu flatarmál rétthyrningslaga gólfs sem er 4,3 m á lengd og 3,2 m á breidd.

Tillaga að lausn

$F = l \cdot b = 4{,}3\text{ m} \cdot 3{,}2\text{ m} = 13{,}76\text{ m}^2 \approx \underline{13{,}8\text{ m}^2}$

$\underline{\underline{\text{Flatarmál gólfsins er } 13{,}8\text{ m}^2}}$

Svar er aldrei gefið upp með fleiri aukastöfum en eru í mælitölunum sem gefnar eru upp.

4.7 Karl ætlar að mála vegg í herberginu sínu. Hann þarf að vita hvert flatarmál veggjarins er. Þá getur hann reiknað út hve mikla málningu þarf að kaupa. Lengd veggjarins með fram gólfinu er 4,3 m. Hæð veggjarins er 2,8 m.

Hvert er flatarmál veggjarins?

4.8 Pétur ætlar að skipta um þakplötur á húsinu sínu. Hann þarf að vita hvert flatarmál þaksins er til að geta keypt þakplöturnar. Hvor hlið þaksins er rétthyrningslaga. Grunnlínan er 10,5 m. Hæðin er 4,5 m.

a Finndu flatarmál alls þaksins.

Þakplöturnar kosta 30 000 kr. á fermetra. Þar að auki kostar hatturinn á reykháfinn 82 000 kr.

b Hvað kostar að laga þakið ásamt hattinum?

Ýmis verkefni

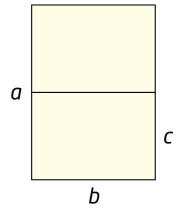
Leyndardómur A4-blaðs

Tveir og tveir nemendur vinna saman.

Þið þurfið

- bunka af A4-blöðum
- reglustiku
- metrakvarða
- reikningshefti

Aðferð



1 Takið A4-blað. Mælið lengri hliðina (*a* á myndinni) og styttri hliðina (*b* á myndinni). Reiknið hlutfallið $a : b$ (eða skrifað sem almennt brot: $\frac{a}{b}$).

2 Brjótið A4-blaðið í miðju. Þá er nýja styttri hliðin (*c* á myndinni) helmingurinn af *a*. Reiknið hlutfallið $b : c$.

3 Berið saman svörin úr 1. og 2. lið. Hvað kemur í ljós?

4 Leggið tvö A4-blöð þannig að lengri hliðarnar séu hlið við hlið. Þetta tvöfalda A4-blað kallast A3-blað. Mælið lengri hlið og styttri hlið A3-blaðsins. Hve langar eru þessar hliðar í samanburði við hliðar A4-blaðsins? Deilið með lengd styttri hliðarinnar í lengd lengri hliðarinnar. Berið svarið saman við svörin úr 1. og 2. lið.

5 Finnið námundargildið fyrir $\sqrt{2}$. Berið svarið saman við svörin í 1., 2. og 4. lið.

6 Í A-kerfinu er gengið út frá stærð á A0-blaði. Það hefur sama hlutfall milli lengri hliðar og styttri hliðar og A4-blað. Flatarmál A0-blaðs er 1 m^2.
Notið eins mörg A4-blöð og þið þurfið til að búa til A0-blað. Mælið lengri hliðina og styttri hliðina og deilið með annarri lengdinni í hina. Berið hlutföllin saman. Hvað kemur í ljós?

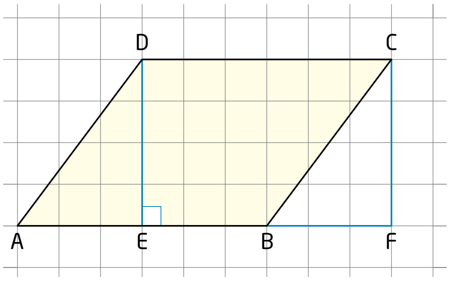
7 Reiknið út flatarmál A0-blaðsins sem þið bjugguð til. Berið niðurstöðuna saman við upplýsingarnar í 6. lið.

8 Kallið lengri hlið A4-blaðsins *a* og styttri hliðina *b*. Finnið nú lengri hlið og styttri hlið A3-blaðsins og skráið þessar lengdir með því að nota *a* og *b*. Setjið fram jöfnu sem sýnir að hlutfallið milli lengri hliðar og styttri hliðar þessara tveggja blaða er hið sama. Leysið jöfnurnar með tilliti til hlutfallsins $\frac{a}{b}$. Berið niðurstöðurnar saman við svörin í 1., 2. og 4. lið. Hvað kemur í ljós?

Að reikna flatarmál samsíðungs

Samsíðungur er ferhyrningur þar sem tvær og tvær hliðar eru samsíða.

Þegar þú átt að finna flatarmál samsíðungs getur þú skipt honum í hluta og flutt hlutana til þannig að þú getir borið samsíðunginn saman við rétthyrning. Á myndinni hér á eftir getur þú hugsað þér að ΔAED sé klipptur út og færður til hægri þannig að E lendi í F og AD falli í BC. Þá sérðu að samsíðungurinn hefur sama flatarmál og rétthyrningurinn EFCD.



AB = g (grunnlína)

DE = h (hæð)

Flatarmál samsíðungs er $g \cdot h$
þar sem h er fjarlægðin milli samsíða línanna.
Flatarmál = grunnlína · hæð

4.9 Eru setningarnar sannar?

a Rétthyrningur er einnig samsíðungur.

b Samsíðungur er einnig rétthyrningur.

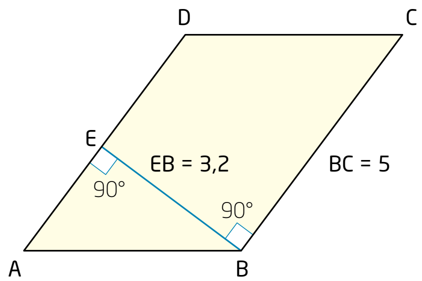
c Ferningur er einnig samsíðungur.

4.10 Teiknaðu samsíðung og finndu flatarmálið þegar

a grunnlínan = 6 cm og hæðin = 3 cm

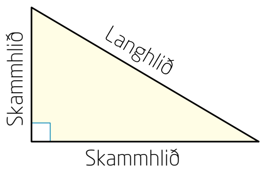
b grunnlínan = 5 cm og hæðin = 7 cm

4.11 Finndu flatarmál samsíðungsins ABCD.



Að reikna flatarmál þríhyrnings

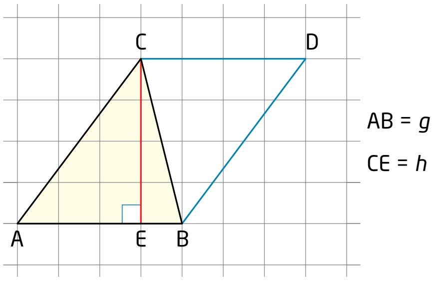
Ef þú ætlar að reikna út flatarmál rétthyrnds þríhyrnings er auðveldast að láta aðra skammhliðina vera grunnlínu og hina vera hæð.



Skammhliðar eru tvær styttri hliðarnar í rétthyrndum þríhyrningi.

Langhlið er lengsta hliðin í rétthyrndum þríhyrningi.

Alltaf má líta á þríhyrning sem helminginn af samsíðungi eins og sjá má á myndinni hér á eftir. Þríhyrningurinn ABC er upprunalega myndin. Síðan er þríhyrningnum BCD bætt við en hann er í sömu stærð og hefur sömu lögun og þríhyrningurinn ABC. Þannig er samsíðungurinn ABDC búinn til.



Flatarmál rétthyrnings er helmingurinn af flatarmáli samsíðungs sem hefur sömu hæð og þríhyrningurinn.

Flatarmál **Δ**ABC:

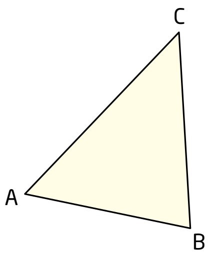
$$F = \frac{1}{2}\, g \cdot h = \frac{g \cdot h}{2}$$

Flatarmálið er grunnlínan sinnum hæð deilt með 2.

4.12 Í þríhyrningi er grunnlínan 6 cm og hæðin 4 cm. Ekkert hornið er rétt.

a Reiknaðu flatarmál þríhyrningsins.

b Teiknaðu rétthyrndan þríhyrning sem hefur sama flatarmál og þríhyrningurinn í a-lið.



4.13 **a** Teiknaðu þríhyrning svipaðan þeim sem er á myndinni til vinstri.

Merktu hornin A, B og C.

b AB á að vera grunnlína í nýjum þríhyrningi sem hefur sama flatarmál og **Δ**ABC en topppunkturinn á að vera annars staðar en í C.

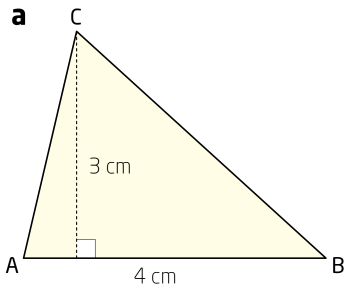
Hvar getur topppunkturinn verið?

c BC á að vera grunnlína í nýjum þríhyrningi sem hefur sama flatarmál og **Δ**ABC en topppunkturinn á að vera annars staðar en í A.

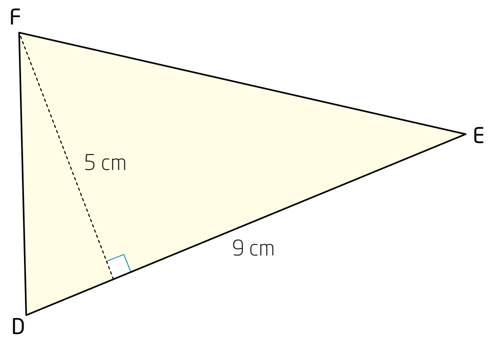
Hvar getur topppunkturinn verið?

4.14 Reiknaðu flatarmál þríhyrninganna.

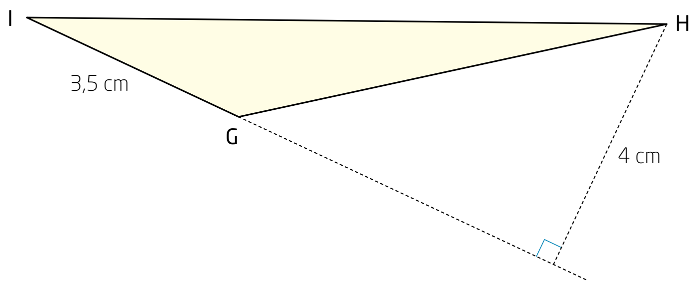
a



b



c



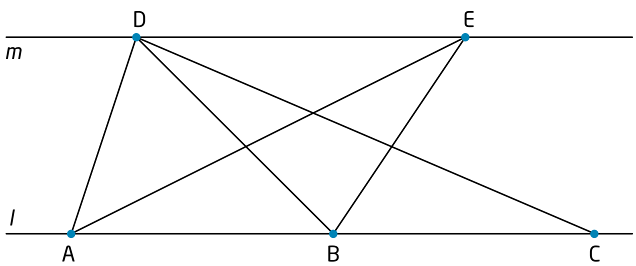
4.15 Í jafnarma þríhyrningi er grunnlínan 4 cm og hæðin 6 cm.

a Teiknaðu þríhyrninginn.

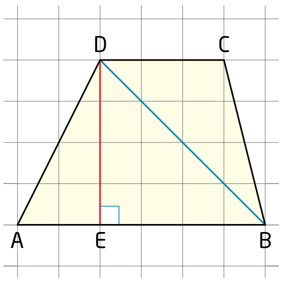
b Finndu flatarmál þríhyrningsins.

4.16 Flatarmál þríhyrnings er 12 cm². Gerðu að minnsta kosti þrjár tillögur um hve langar grunnlínan og hæðin geta verið.

4.17 Línurnar *l* og *m* eru samsíða og AB = BC.
Hvað getur þú sagt um flatarmál þríhyrninganna ABD, BCD, ABE og ACD?



Að reikna flatarmál trapisu



AB = a, CD = b, DE = h

Öllum ferhyrningum má skipta í tvo þríhyrninga. Trapisu má skipta í tvo þríhyrninga sem hafa sömu hæð. Grunnlínurnar eru samsíða. Við getum því fundið flatarmál trapisu ef við þekkjum lengd samsíða hliðanna og fjarlægðarinnar milli þeirra.

Skoðaðu merkingarnar undir myndinni hér til vinstri. Taktu eftir að h táknar hæðina í ΔBCD þegar þú hugsar þannig að þríhyrningurinn „standi á haus“ og grunnlínan sé CD.

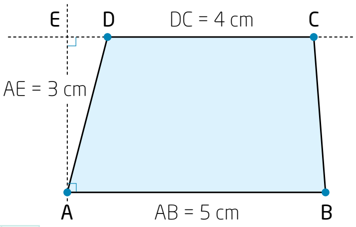
Flatarmál trapisu: flatarmál ΔABD + flatarmál ΔBCD

$$A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Flatarmálið er summan af samsíða hliðunum tveimur margfölduð með hæðinni og deilt með 2.

Sýnidæmi 4

Reiknaðu flatarmál trapisunnar ABCD.



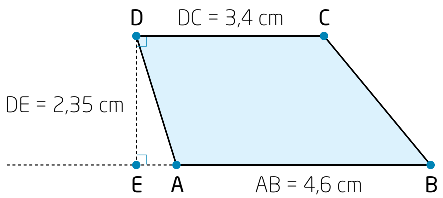
Tillaga að lausn

$$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \frac{(5 + 4) \cdot 3}{2} = \underline{13{,}5}$$

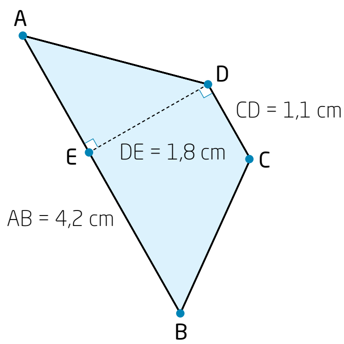
Flatarmál trapisunnar ABCD er 13,5 cm^2

4.18 Reiknaðu flatarmál trapisanna.

a



b



Ýmis verkefni

Ýmis form og einn fermetri

Tveir og tveir nemendur vinna saman.

Þið þurfið
- metrakvarða
- reikningshefti
- tæki til að teikna með á jörðina: krít til að teikna með á stétt, pinna til að rispa með í möl eða flösku með lituðu vatni til að búa til mynd í snjó
- stórt steypt svæði (til dæmis skólalóðin)

Aðferð

1 Teiknið ferhyrning með flatarmáli 1 m^2.

2 Teiknið samsíðung þar sem hæðin er $\frac{1}{2}$ m og flatarmálið 1 m^2.

3 Teiknið þríhyrning með flatarmálið 1 m^2.

4 Teiknið annan þríhyrning með grunnlínu sem er sameiginleg grunnlínu þríhyrningsins úr 3. lið. Flatarmálið á að vera 1 m^2.

5 Teiknið þríhyrning með eins litlu ummáli og mögulegt er. Flatarmálið á að vera 1 m^2.

6 Teiknið þríhyrning með eins stóru ummáli og mögulegt er. Flatarmálið á að vera 1 m^2.

7 Gerið skissu af myndunum sem þið teiknuðuð.

Þegar þið komið inn í kennslustofuna eigið þið að ræða saman um eftirfarandi spurningar:

a Hvaða form er á þríhyrningi sem er með minnsta mögulega ummálið þegar flatarmálið er 1 m^2?

b Er hægt að finna stærsta mögulega ummál þríhyrnings þegar flatarmálið er 1 m^2?

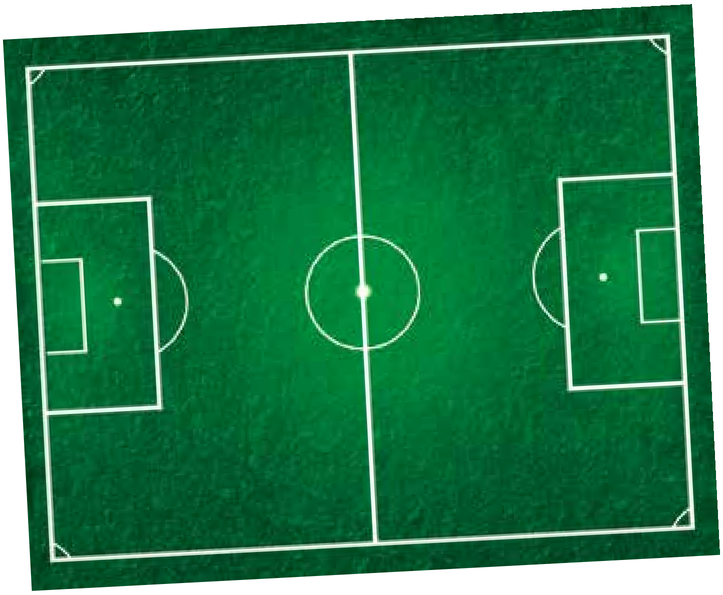
4.19 Trapisulaga lóð liggur milli tveggja samsíða gatna. Fjarlægðin milli gatnanna er 60 m. Lóðin liggur að götu nr. 1 á 40 metra kafla og að götu nr. 2 á 30 metra kafla. Tvö horn lóðarinnar eru 90°.

a Teiknaðu mynd sem sýnir hvernig lóðin getur litið út. Eru fleiri en ein lausn?

b Reiknaðu flatarmál lóðarinnar.

4.20 Taflan sýnir alþjóðleg mál á boltavöllum.

	Breidd	**Lengd**
Fótbolti	68 m	105 m
Handbolti	20 m	40 m
Blak	9 m	18 m
Tennis	10,97 m	23,77 m
Körfubolti	15 m	28 m



a Hvað komast margir handboltavellir fyrir á einum fótboltavelli?

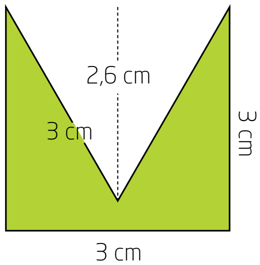
b Tveir þessara íþróttavalla hafa nákvæmlega sömu lögun en eru misstórir. Hverjir eru það og hve mörgum sinnum stærri er stærri völlurinn en sá minni?

c Boltastrákur hleypur fimm sinnum kringum fótboltavöllinn. Hve langt hleypur hann?

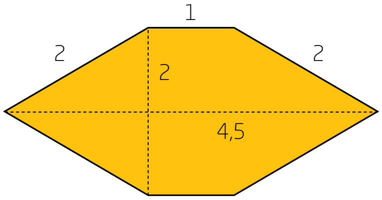
d María á að ryksuga tennisvöllinn. Hún ryksugar 4 m^2 á mínútu. Hve lengi er hún að ryksuga völlinn?

4.21 Reiknaðu flatarmál og ummál þessara samsettu mynda.

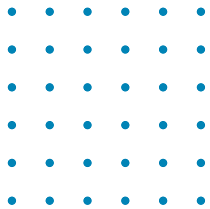
a



b



4.22 Teiknaðu punktamynstur eins og það sem er hér til hægri.
Fjarlægðin milli tveggja punkta, lárétt og lóðrétt, er 1.
Í verkefnunum hér á eftir áttu að draga strik frá punkti til punkts.



- **a** Teiknaðu rétthyrning með ummálið 12.
- **b** Teiknaðu þríhyrning með flatarmálið 6.
- **c** Teiknaðu jafnarma þríhyrning með flatarmálið 8.
- **d** Teiknaðu samsíðung sem er ekki rétthyrningur. Flatarmálið á að vera 6.
- **e** Teiknaðu trapisu þar sem lengd annarrar af samsíða hliðunum er helmingurinn af lengd hinnar. Flatarmál trapisunnar á að vera 9.
- **f** Teiknaðu marghyrning með flatarmálið 5 og ummálið 12.
Finndu fleiri en eina lausn ef það er mögulegt.

4.23 Efri hluti húsveggjar er trapisulaga en neðri hlutinn er rétthyrningslaga. Veggurinn er 14 m breiður og 8 m hár.
Hæð ystu veggja rétthyrningsins er 5 m. Veggurinn er samhverfur.
Hann er 4 m á breidd efst við mæninn.

Teiknaðu skissu af veggnum, skráðu málin á teikninguna og reiknaðu flatarmálið.

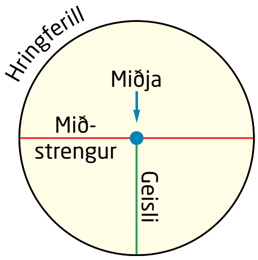
Rúmfræði hrings

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- finna námundargildi fyrir fastann π (pí)
- reikna út flatarmál og ummál hrings
- teikna rétthyrndan þríhyrning með því að styðjast við eiginleika og einkenni hrings
- teikna snertla hrings
- nota rúmfræðilega teikningu til að finna miðju hrings

Margir hlutir, sem við notum í hversdagslífinu, eru hringlaga. Í daglegu tali er stundum notað orðið „kringlóttur“ en í stærðfræði þurfum við að vera alveg nákvæm þegar talað er um hringi. Ef þú hefur hjólað á reiðhjóli með hjólum sem eru ekki alveg hringlaga veistu vel hvað það merkir þegar sagt er að eitthvað sé ekki hringlaga!



Hringur er skilgreindur sem ferill sem myndast af öllum punktum sem eru í sömu fjarlægð frá tiltekinni miðju.

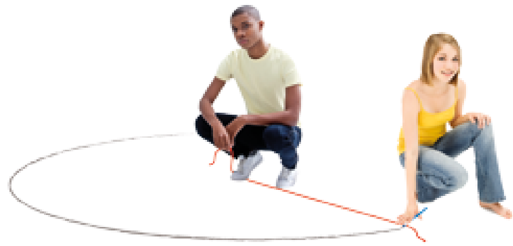
4.24 Skoðaðu myndina á spássíunni og útskýrðu eftirfarandi með eigin orðum.

a Hvað er geisli hrings?

b Hvað er þvermál hrings?

4.25 Láttu hugann reika um venjulegan dag í lífi þínu frá morgni til kvölds. Búðu til lista yfir hringlaga hluti sem þú notar.

4.26 Hópur unglinga fá skilaboð um að stilla sér upp í hring á skólalóðinni. Þeir hafa engin hjálpartæki til að teikna með. Hvernig geta þeir farið að því að mynda hringinn eins nákvæmlega og mögulegt er?



Snúra og hringur

Verkefnið á að vinna utandyra í 3–4 manna hópum.

Þið þurfið

- nokkrar snúrur í mismunandi lengdum
- tæki til að teikna á jörðina: krít til að teikna með á stétt, pinna til að rispa með í möl eða flösku með lituðu vatni (með matarlit) til að búa til mynd í snjó
- mælitæki: málband eða metrakvarða

Aðferð

Finnið slétt svæði þar sem er nóg pláss. Veljið snúru. Vinnið saman og teiknið hring með því að merkja fyrst með krossi miðju hringsins. Þar næst heldur einn ykkar öðrum enda snúrunnar föstum í miðju hringsins en annar teiknar hringferilinn með því að halda í hinn enda snúrunnar og færa hana hringinn. Halda þarf snúrunni vel strekktri. Þið eigið að nota mislangar snúrur til að teikna fleiri hringi í mismunandi stærð.

Hluti 1

Í þessu verkefni á að nota sömu snúru og viðkomandi hringur var teiknaður með. Þið merkið byrjunarpunkt og leggið snúruna eftir hringferlinum. Hve oft gengur snúran upp í ferilinn? Endurtakið leikinn með fleiri mismunandi hringjum. Hvað kemur í ljós?

Hluti 2

Mælið bæði þvermál og ummál nokkurra hringja eins nákvæmlega og þið getið. Ef erfitt er að mæla ummálið getið þið lagt snúruna eftir hringferlinum og síðan mælt lengd snúrunnar. Skráið niðurstöðurnar inn í töflu eins og þessa:

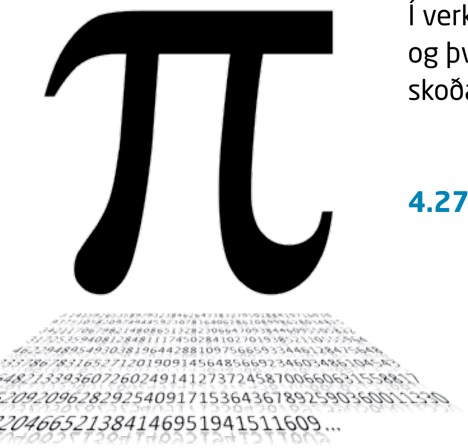
Ummál	Þvermál	Ummál : þvermáli

Í síðasta dálki eigið þið að deila í ummálið, sem þið mælduð, með þvermálinu. Berið saman niðurstöður ykkar og annarra nemendahópa. Ræðið saman í bekkjardeildinni í heild hvort þið sjáið eitthvert kerfi eða einhver tengsl í niðurstöðum hópanna. Ef svo er – hvaða tengsl koma í ljós?

Ummál hrings er lengd hringferilsins.

Þvermál er lengd miðstrengs.

Ummál og flatarmál hrings



Í verkefninu á blaðsíðunni á undan gátum við séð að hlutfallið milli ummáls og þvermáls í litlum og stórum hringjum virðist vera föst tala. Nú skulum við skoða þessi tengsl nánar.

4.27 Notaðu rúmfræðiforrit.

a Teiknaðu strikið AB og finndu miðpunktinn M á því.

b Teiknaðu hring þar sem M er miðpunkturinn og AB miðstrengurinn.

c Notaðu mælitæki og finndu lengd AB og ummál hringsins.

d Reiknaðu hlutfallið ummál : þvermál.

e Breyttu lengd AB með því að draga annan endapunktinn til. Fylgstu með mælitölunum og hlutfallinu. Lýstu því sem þú sérð.

Hlutfallið milli ummáls og þvermáls er þekkt sem talan π. Þetta er grískur bókstafur og er borið fram sem „pí". π er óræð tala og hefur óendanlega marga aukastafi. Venjulega er pí námundað að tveimur aukastöfum, þannig: π ≈ 3,14. Þessa tölu getum við notað til að finna ummál hrings þegar geislinn eða þvermálið er gefið.

Þvermálið er jafnt og 2 sinnum geisli. Ef geislinn er r getum við skrifað formúluna: $U = 2\pi r$.

Ummál hrings = π · þvermál

$U = \pi \cdot þ$

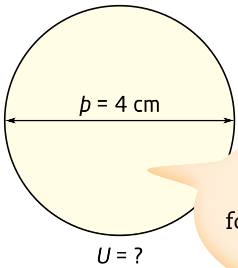
Sýnidæmi 5

Finndu ummál hrings með þvermálið 4 cm.

Tillaga að lausn

$U = \pi \cdot þ = 3{,}14 \cdot 4 \text{ cm} = \underline{12{,}56 \text{ cm}}$

Ummálið er 12,56 cm



Úr því að $þ = 2r$ má skrifa formúluna $U = \pi \cdot þ$ þannig $U = 2\pi r$.

Það er alþjóðleg venja að skammstafa geisla með bókstafnum r en geisli kallast radius á mörgum erlendum málum.

4.28 Finndu ummál hrings þegar

a þvermálið = 2 m

b þvermálið = 3,5 cm

c geislinn = 1,2 cm

d geislinn = 0,4 m

e þvermálið = 7,5

f geislinn = 0,8

Ef mál er gefið upp án einingar verður svarið einnig að vera án einingar.

Sýnidæmi 6

Finndu þvermál hrings með ummálið 15 m.

Tillaga að lausn

$þ = \frac{U}{\pi}$ = 15 m : 3,14 ≈ 4,8 m

Þvermálið er 4,8 m

4.29 Finndu þvermál hrings þegar ummálið er

a 25 m **b** 2,3 cm **c** 0,4 m

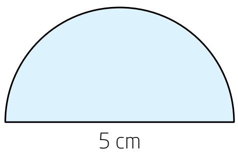
4.30 Finndu geisla hrings þegar ummálið er

a 112 m **b** 0,75 m **c** 3,6 cm

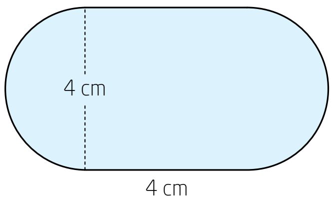
4.31 Lokið á olíutunnu hefur ummálið 176 cm. Hvert er þvermál olíutunnunnar?

4.32 Reiknaðu út ummál bláu svæðanna.

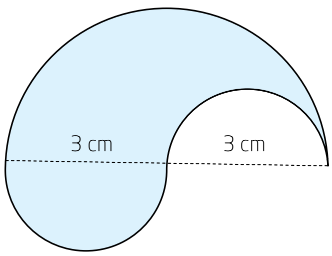
a



b

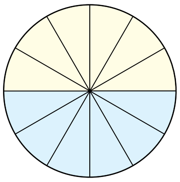


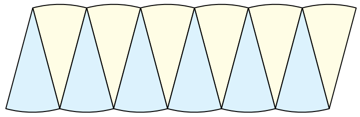
c



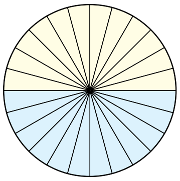
Við höfum skilgreint hring sem lokaðan feril. Flatarmál hringsins er flatarmál svæðisins sem ferillinn afmarkar. Fyrr í þessum kafla höfum við séð að marghyrningum má skipta í marga þríhyrninga. Þótt hringurinn hafi engar hliðar getum við notað svipaða aðferð til að reikna út flatarmál hringsins.

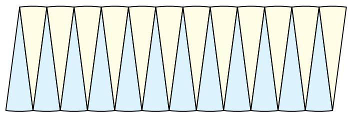
Við byrjum á að skipa hring í tólf hringgeira sem við klippum út og röðum saman á annan hátt.





Nú endurtökum við leikinn með hring sem skipt er í 24 geira. Eftir því sem geirarnir verða minni sést að formið nálgast æ meir rétthyrning þar sem lengdin er hálft ummál hringsins og breiddin jöfn geisla hringsins.





Með því að ganga út frá formúlunni um flatarmál rétthyrnings fáum við:

$$F = l \cdot b = \frac{2\pi r}{2} r = \pi \cdot r^2$$

Flatarmál hrings: $\pi \cdot$ geisli^2. $F = \pi r^2$

Sýnidæmi 7

Finndu flatarmál hrings með 5 cm geisla.

Tillaga að lausn

$F = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = \underline{78{,}5\text{ cm}^2}$

Flatarmál hringsins er 78,5 cm^2

4.33 Finndu flatarmál hrings þar sem

a $r = 2$ m

b $r = 17$ cm

c $r = 1{,}5$ km

d $r = 0{,}8$ m

e *þ* = 6 cm

f *þ* = 1,4 m

g $r = 1{,}6$ dm

h *þ* = 0,9 m

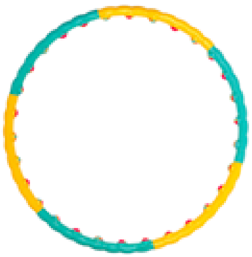
Að finna flatarmál hrings

Þetta verkefni er fyrir 2–3 manna hópa.

Þið þurfið
- að minnsta kosti þrjá hringlaga hluti af mismunandi stærð, til dæmis glas, lok á kökubox og húlahring
- ýmis mælitæki: málband, metrakvarða, reglustiku eða eitthvað svipað
- snúru

Aðferð
Teiknið skissu af hverju hringlaga formi með blýanti á blað eða með krít á stétt. Tilgangurinn er að finna flatarmál hringjanna, sem þið teiknið, eins nákvæmlega og þið getið.





1 Giskið á flatarmál hringjanna.

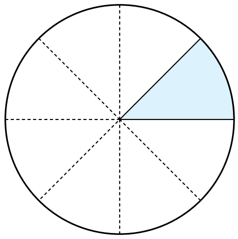
2 Ræðið saman um hvaða aðferð þið getið notað. Hver er nákvæmasta mælitalan sem þið getið fundið með hjálpartækjunum sem þið eruð með?

3 Mælið nú nauðsynlegar lengdir.

4 Notið mælitölurnar til að reikna út flatarmál hringjanna.

5 Ræðið saman um hversu nákvæmt flatarmál þið getið gefið upp og námundið svörin.

6 Hversu nálægt réttum svörum voru ágiskanir ykkar í 1. lið?



Við námundum svarið þannig að fjöldi aukastafa verði skynsamlegur.

Sýnidæmi 8

Finndu flatarmál hringgeira sem er 45°. Geislinn er 3 cm.

Tillaga að lausn

Við vitum að hringgeiri, sem er 45° er $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ af heilum hring.

$F = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{3{,}14 \cdot 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{8} \approx \underline{3{,}5\text{ cm}^2}$

Flatarmálið er um það bil 3,5 cm^2

Mundu að heill hringur er 360°.

Hringgeiri er hluti af hringfletinum sem afmarkast af tveimur geislum og hringboganum milli þeirra.

4.34 Finndu flatarmál hringgeira þegar

a r = 8 cm og v (hornið) = 90°

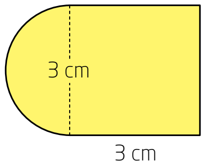
b r = 0,12 m og v = 120°

c d = 7 m og v = 30°

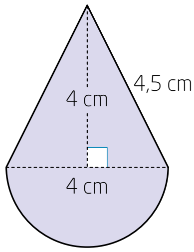
d r = 15 cm og v = 58°

4.35 Finndu ummál og flatarmál þessara samsettu mynda.

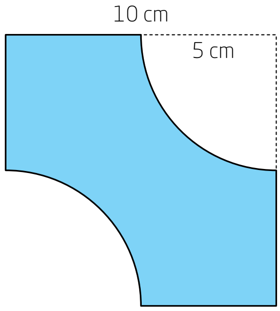
a



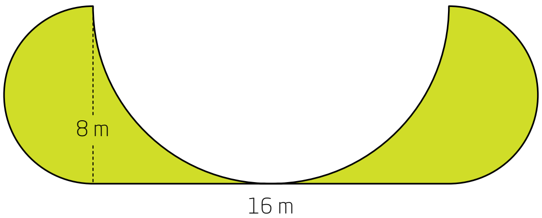
b



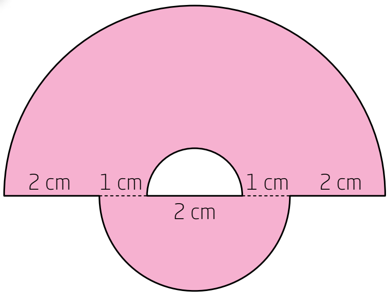
c



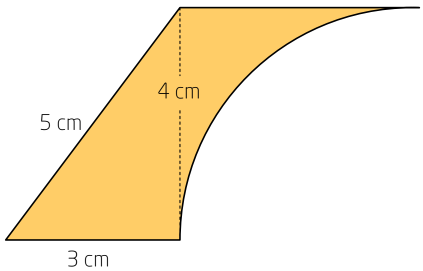
d



e



f



Hringur í rúmfræðiteikningum

Rúmfræðilegur staður er punktur eða punktasafn sem hefur ákveðna eiginleika eða einkenni. Hringur er rúmfræðilegur staður vegna þess að hann er safn punkta sem eru í ákveðinni fjarlægð frá miðju hringsins. Til að teikna rúmfræðileg form notum við eiginleika rúmfræðilegra staða.

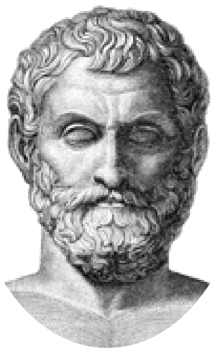
4.36 Teiknaðu eftirfarandi rúmfræðilega staði:

- **a** miðþveril striksins AB = 7 cm
- **b** helmingalínu 60° horns
- **c** samsíða línur sem eru í 3 cm fjarlægð frá línunni *l*

4.37 Gerðu hjálparmynd og teiknaðu eftirfarandi myndir:

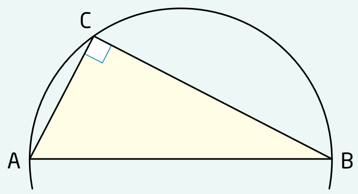
- **a** Teiknaðu rétthyrninginn ABCD þar sem AB = CD = 8 cm og BC = AD = 6 cm.
- **b** Dragðu báðar hornalínurnar í rétthyrningnum og kallaðu skurðpunktinn milli þeirra E.
- **c** Teiknaðu hring með miðju í E og geislann EA.
- **d** Lýstu út frá hringnum hvar punktarnir B, C og D eru.
- **e** Mældu hornið C.
- **f** Hvers konar þríhyrningur er ΔACD?
- **g** Hvað er ΔACD stór?
- **h** Hefðu svörin við spurningunum í d-lið, f-lið og g-lið orðið önnur ef þú hefðir byrjað með rétthyrning með öðrum hliðarlengdum?

Þú getur notað rúmfræðiforrit.

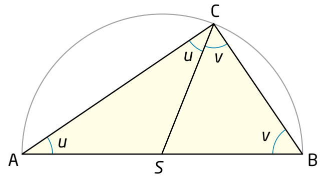


Í verkefni 4.37 sérðu tengsl sem Þales frá Milatos (624–547 f.Kr.) uppgötvaði. Þessi tengsl kallast *regla Þalesar*.

Regla Þalesar
ABC er þríhyrningur þar sem AB er miðstrengur hrings. Ef ∠C = 90° liggur C á hringferlinum. Og öfugt: Ef C er á hringferlinum þá er ∠C 90°.



Nú munum við sýna reglu Þalesar um að $\angle C = 90°$ ef C liggur á hringferlinum. Þegar við ætlum að sanna eitthvað þurfum við að ganga út frá þekkingu sem við búum þegar yfir. Við vitum að



- Δ ABC má skipta í tvo jafnarma þríhyrninga
- $\angle SAC = \angle ACS$ vegna þess að SA = SC = geisli hringsins
- $\angle SBC = \angle BCS$ vegna þess að SB = SC = geisli hringsins
- hornasumma þríhyrnings er 180°

Við köllum hornapörin tvö *u* og *v*.

$$
\begin{aligned}
u + u + v + v &= 180° \\
2u + 2v &= 180° \\
2(u + v) &= 180° \\
u + v &= \frac{180°}{2} \\
u + v &= \underline{90°}
\end{aligned}
$$

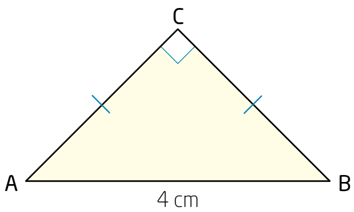
$$\underline{\underline{\angle ACB = u + v = 90°}}$$

Sýnidæmi 9

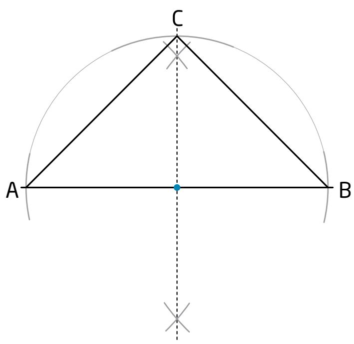
Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem AB er 4 cm, $\angle C = 90°$ og C liggur jafn langt frá A og frá B.

Tillaga að lausn

Hjálparteikning:



Rúmfræðiteikning:



Teiknilýsing:

1 Dreg línu og merki strikið AB = 4 cm.

2 Teikna miðþveril á AB.

3 Teikna hálfan hring með miðju í skurðpunktinum milli AB og miðþverilsins.

4 Finndu C í skurðpunktinum milli miðþverilsins og hálfhringsins. Punkturinn C hlýtur að liggja á miðþverlinum vegna þess að AC = BC.

5 Dreg strikin AC og BC.

4.38 Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem ∠B = 90°, AC = 8 cm og ∠C = 60°.

Gerðu alltaf hjálparteikningu og skráðu öll mál á hana.

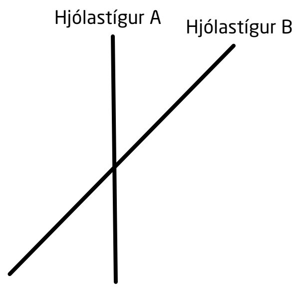
4.39 **a** Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem AC = 6 cm, ∠A = 75° og B liggur jafn langt frá A og frá C.

b Þríhyrningurinn ABC í a-lið er hluti af ferhyrningnum ABCD. Teiknaðu punktinn D þannig að ∠D = 90° og CD = 4 cm.

4.40 Teiknaðu ferhyrninginn ABCD þar sem BD = 8 cm. Hornið C er 2 cm frá BD, ∠ABD = 45°, ∠ADB = 67,5° og ∠C = 90°.

4.41 Tveir beinir hjólastígar skerast eins og myndin sýnir. Sveitarfélagið ætlar að koma fyrir vatnshana þannig að hann sé jafn langt frá hvorum stíg og minnst 4 m og mest 8 m frá stígamótunum.

Láttu 1 cm á teikningunni samsvara 1 m í raunveruleikanum og sýndu hvar vatnshaninn getur verið.



4.42 Tveir nágrannar búa við götu nokkra eins og myndin hér á eftir sýnir. Þeir ætla að koma póstkassa fyrir við götuna þannig að jafn langt sé fyrir þá báða að honum.

a Gerðu svipaða skissu og sýndu með teikningu hvar nágrannarnir verða að staðsetja póstkassann.

b Nágrannarnir ákveða að búa til hvor sinn stíg sem eru hornréttir hvor á annan og mætast við götuna. Hve margar lausnir eru mögulegar? Sýndu þetta á teikningu.

4.43 Ásgeir og Birna ætla að reyna að hitta í fötu hvort með sínum bolta. Þau eiga að standa 10 m hvort frá öðru. Fatan á að vera staðsett þannig að Ásgeir þarf að kasta 2 m lengra en Birna.

Notaðu hringfara eða rúmfræðiforrit til að sýna hvar hægt er að koma fötunni fyrir.

Snertill, strengur, sniðill

Snertill er bein lína sem snertir feril eða þrívíðan hlut í einum punkti.

Snertill hrings er bein lína sem snertir hringinn í einum punkti. Allir aðrir punktar á snertlinum eru fyrir utan hringinn. Snertill hrings er alltaf hornrétt á geisla hans.

Sýnidæmi 10

Teiknaðu hring með 2,5 cm geisla. Merktu punktinn P á hringferilinn og teiknaðu snertil hringsins í P.

Tillaga að lausn

Teiknilýsing:

1 Ég merki miðju hringsins, M.

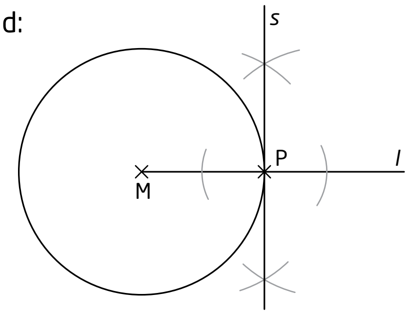
2 Ég teikna hring með geisla = 2,5 cm

3 Ég merki P á hringferilinn.

4 Ég dreg hálflínuna *l* frá M gegnum P.

5 Ég teikna snertilinn *s* sem þveril á *l* gegnum P.

Mynd:



4.44 Dragðu línuna *l* og merktu punktinn P á línuna. Teiknaðu hring sem snertir línuna í P og hefur 3,5 cm geisla.

4.45 Teiknaðu strikið *d* = 8 cm. Teiknaðu hring sem hefur strikið *d* fyrir miðstreng. Teiknaðu síðan snertlana í báðum punktunum þar sem d mætir hringferlinum.

Hvað geturðu sagt um snertlana tvo?

Sýnidæmi 11

Teiknaðu snertil hringsins gegnum punktinn P sem er fyrir utan hringinn.

Tillaga að lausn

Teiknilýsing:

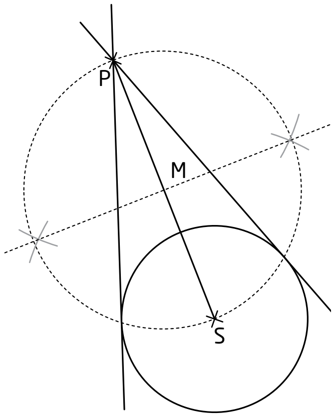
1 Ég dreg strikið SP.

2 Ég teikna miðþveril á SP og finn miðpunktinn M.

3 Ég teikna hring með miðju í M og miðstrenginn SP.

4 Ég dreg línurnar frá P að skurðpunktum hringanna. Lausnirnar eru tvær.

Mynd:



4.46 Skoðaðu sýnidæmi 11 og útskýrðu með hliðsjón af því sem þú hefur lært um rúmfræðilega staði hvers vegna teikningin er rétt.

Notaðu reglu Þalesar!

4.47 Teiknaðu hring með miðju í A. Merktu punktinn C fyrir utan hringinn og teiknaðu snertla hringsins gegnum C. Kallaðu snertipunktana B og D.

a Hvers konar ferhyrningur er ABCD?

b Er hægt að staðsetja punktinn C þannig að ABCD verði rétthyrningur?

4.48 Þú skalt vinna þetta verkefni með rúmfræðiforriti.

a Fylgdu eftirfarandi teiknilýsingu:

1 Byrjaðu á hring með miðju í A.

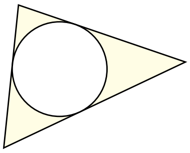
2 Merktu tvo punkta, B og C, á hringferilinn þannig að boginn milli B og C verði um það bil 80°.

3 Teiknaðu snertil hringsins í punktunum B og C hvorum fyrir sig. Kallaðu skurðpunkt snertlanna D.

4 Teiknaðu helmingalínu ∠BDC.

b Smelltu og dragðu punktinn B eða punktinn C til og breyttu þannig horninu. Hvað kemur í ljós? Í gegnum hvaða punkt liggur helmingalínan?

Ef þú hefur ekki rúmfræðiforrit þarftu að teikna af mikilli nákvæmni.



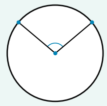
Innritaður hringur
Allar hliðar þríhyrningsins eru snertlar hringsins.

4.49 Notaðu rúmfræðiforrit.

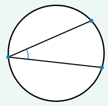
a Teiknaðu hring. Teiknaðu tvo snertla hringsins sem eru ekki samsíða. Helmingaðu hornið sem snertlarnir tveir mynda.
Hvað kemur í ljós?

b Teiknaðu þríhyrning. Teiknaðu síðan innritaðan hring í þríhyrninginn.

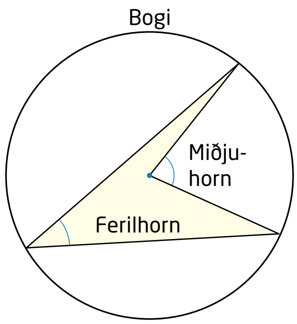
Í **miðjuhorni hrings** er oddpunktur hornsins í miðju hringsins og armar hornsins eru tveir geislar hringsins. Boginn milli armanna er jafn margar gráður og miðjuhornið.



Horn kallast **ferilhorn** þegar oddpunktur þess er á hringferlinum og báðir armar hornsins eru strengir í hringnum.



Hér á eftir skaltu athuga tengslin milli miðjuhorns og ferilhorns sem mynda sama boga í hringnum.



4.50 Kannaðu eftirfarandi með rúmfræðiforriti:

a Teiknaðu mynd eins og sýnd er hér fyrir ofan.

b Notaðu mælingartæki og mældu stærð miðjuhornsins og ferilhornsins. Berðu mælitölurnar saman.

c Nú skaltu flytja oddpunkt ferilhornsins til. Hvernig breytast mælitölurnar?

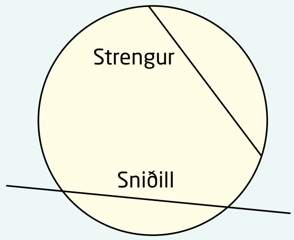
d Breyttu stærð beggja hornanna með því að stækka eða minnka bogann. Hvernig breytast mælitölurnar?

e Búðu til setningu sem lýsir tengslunum milli miðjuhorns og ferilhorns sem mynda sama boga.

4.51 Teiknaðu hring með miðjuhorni og ferilhorni þar sem miðjuhornið er 180°. Í hvaða samhengi hefur þú séð þessa mynd áður í þessum kafla?

Sniðill hrings er lína sem sker hringferilinn í tveimur punktum.

Strengur er strik sem liggur milli tveggja punkta á hringferlinum. Miðstrengurinn í hring er sérstök tegund strengs.



4.52 Teiknaðu hring með geislanum $r = 4$ cm og teiknaðu þrjá strengi sem eru ekki samsíða. Teiknaðu miðþveril á hvern streng. Útskýrðu það sem kemur í ljós.

Gott er að nota rúmfræðiforrit.

Miðja eða miðpunktur hrings finnst þar sem miðþverlar tveggja ósamsíða strengja skerast.

4.53 Jón á hringlaga garðborð. Hann þarf að bora gat í miðju borðsins fyrir sólhlífina.

Hvernig getur Jón fundið hvar miðja borðsins er?

4.54 Teiknaðu hring. Teiknaðu í hringinn streng sem er jafn langur og geisli hringsins. Teiknaðu nýjan, jafn langan streng sem byrjar þar sem fyrri strengurinn endar. Endurtaktu þetta nokkrum sinnum. Hvaða mynd kemur fram?

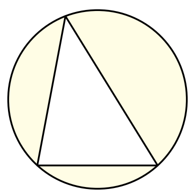
4.55 Dragðu hring með 3 cm geisla og teiknaðu miðstrenginn AB. Teiknaðu strenginn AC þannig að boginn AC = 135°. Teiknaðu síðan þríhyrninginn ABC og reiknaðu út stærð hornsins ABC.

4.56 Teiknaðu þríhyrning. Hugsaðu þér að allar þrjár hliðarnar í þríhyrningnum séu strengir í sama hringnum.

a Teiknaðu hringinn.

b Búðu til setningu um hvernig við finnum hring sem er umritaður um þríhyrninginn.

Umritaður hringur umlykur marghyrning þannig að öll horn marghyrningsins eru á hringferlinum.



Þrívíð rúmfræðiform

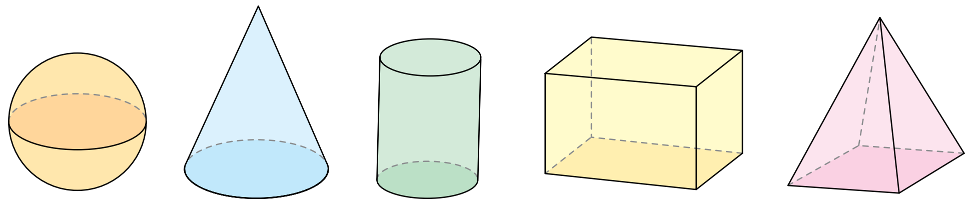
Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- þekkja réttstrending, píramída, keilu, sívalning og kúlu
- mæla og reikna út yfirborðsflatarmál og rúmmál þrívíðra forma og hluta
- reikna rúmmál með mismunandi mælitölum

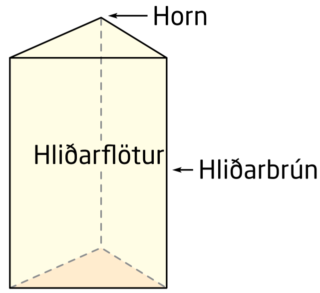
Þú hefur áður lært að línur eru einvíðar og að flötur er tvívíður. Hlutirnir í kringum okkur eru þrívíðir. Jafnvel þunnt blað er þrívítt vegna þess að það hefur þykkt. Í þessum kafla áttu að læra meira um nokkur algeng þrívíð form og myndir og um hvernig þú getur reiknað út yfirborðsflatarmál og rúmmál þeirra (magnið sem hluturinn rúmar).

4.57 Skráðu heiti formanna hér á eftir og skrifaðu hvað einkennir hvert fyrir sig.



A B C D E

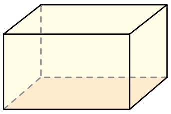
Þrívíðar myndir með sléttum flötum eru settar saman úr marghyrningum. Þekktustu formin eru sett saman úr þríhyrningum, ferhyrningum, fimmhyrningum og sexhyrningum. Venjulegur fótbolti er samsettur úr fimmhyrningum og sexhyrningum. Marghyrningarnir kallast hliðarfletir og hliðar þeirra kallast hliðarbrúnir. Horn formsins eru í þeim punktum þar sem horn þriggja eða fleiri marghyrninga mætast.



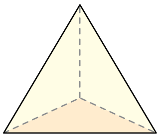
4.58 Hve margir hliðarfletir á fótbolta eru fimmhyrningar og hve margir eru sexhyrningar?

4.59 Hve margir hliðarfletir, hliðarbrúnir og horn eru á

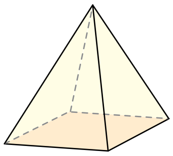
a réttum ferstrendingi



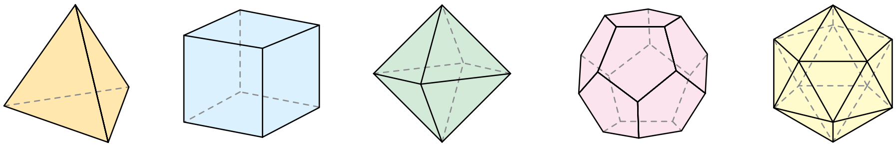
b þrístrendum píramída



c ferstrendum píramída



4.60 Formin hér fyrir neðan kallast fjórflötungur, sexflötungur (teningur), áttflötungur, tólfflötungur og tvítugflötungur.



Fjórflötungur Teningur Áttflötungur Tólfflötungur Tvítugflötungur

a Teiknaðu myndirnar og fylltu út í töfluna:

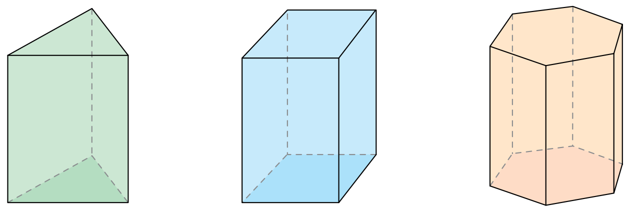
Heiti	**Fjöldi hliðarflata** ***f***	**Fjöldi hliðarbrúna** ***b***	**Fjöldi horna** ***h***	$f + b - h$
fjórflötungur				
sexflötungur				
áttflötungur				
tólfflötungur				
Tvítugflötungur				

b Skrifaðu setningu um það sem þú fannst í a-lið. Athugaðu hvort þetta á við önnur þrívíð form eða hluti, til dæmis fótbolta.

Ábending: Þú færð form fótbolta ef þú skerð hornin af tvítugflötungi.

Yfirborðsflatarmál og rúmmál réttra strendinga

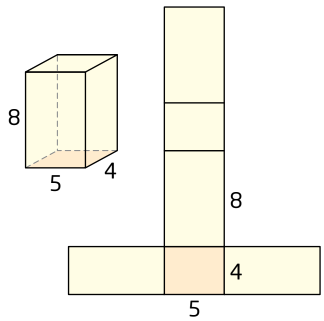
Í réttum strendingi eru hliðarfletirnir jafn margir og hliðarbrúnir botns og loks. Allir hliðarfletirnir milli botns og loks eru rétthyrningar sem standa hornrétt á botninn og lokið. Myndin sýnir þrístrending, ferstrending og sexstrending.



Yfirborðsflatarmál rétts strendings jafngildir summunni af flatarmáli allra flatanna sem mynda hann.

Sýnidæmi 12

Finndu yfirborðsflatarmál rétts ferstrendings þar sem rétthyrndi botninn er 5 cm á lengd og 4 cm á breidd. Hæð ferstrendingsins er 8 cm.



Tillaga að lausn

Flatarmál botns og loks er

$$2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \underline{40\text{ cm}^2}$$

Hliðarfletirnir eru tveir rétthyrningar með hliðarnar 5 cm og 8 cm og tveir rétthyrningar með hliðarnar 4 cm og 8 cm.

Flatarmál hliðarflatanna er:

$$2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} + 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 80\text{ cm}^2 + 64\text{ cm}^2 = \underline{144\text{ cm}^2}$$

Yfirborðsflatarmál strendingsins er summa allra hliðarflatanna. Það er

$$40\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2 = \underline{\underline{184\text{ cm}^2}}$$

4.61 Toblerone-súkkulaðipakki er í laginu eins og þrístrendingur.

a Gerðu teikningu af Toblerone-pakkanum á myndinni. Notaðu rétt mál. Mældu hæð þríhyrninganna eins nákvæmlega og þú getur.
Gott er að nota rúmfræðiforrit.

b Reiknaðu flatarmál umbúðanna.

c Hve marga Toblerone-pakka er hægt að prenta á stórt pappablað sem hefur flatarmálið 1 m^2?

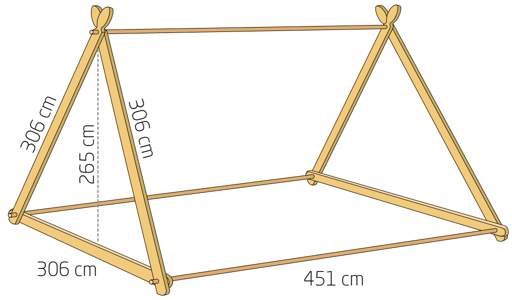
d Gerðu skissu sem sýnir hvernig nota má pappann sem best.

Finndu upplýsingar um Ásubergskipið (Osebergskibet) á netinu.

4.62 Myndin til hægri sýnir líkan af tjaldinu sem fannst í Ásubergskipinu.

Hvert er flatarmál tjalddúksins?

Gott er að nota rúmfræðiforrit til að teikna alla fletina og finna nauðsynleg mál.



4.63 Bekkjardeild nokkur er að safna fyrir skólaferðalagi. Krakkarnir ætla að búa til gjafaöskjur eins og myndin sýnir og selja í hverfinu. Hliðarbrúnir botnsins eru 25 cm og 15 cm. Öskjurnar eiga að vera 10 cm á dýpt.

a Hve mikinn pappa þarf til að búa til öskju? Svaraðu í cm^2.
(Ekki reikna með flipunum á lokinu.)

b Krakkarnir þurfa að framleiða 100 öskjur. Pappinn sem þeir nota kemur í örkum í stærðinni 100 cm · 120 cm.

Hve margar arkir þurfa krakkarnir að kaupa?
Rökstyddu svarið.

c Hve mikið af pappanum geta krakkarnir ekki notað?
Hve mörgum prósentum af pappanum, sem þeir kaupa, þurfa þeir að fleygja?

4.64 Þú átt að klippa pappír út úr A4-blaði þannig að þú getir brotið það saman og búið til réttan strending.

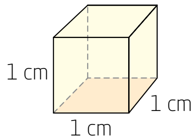
a Teiknaðu nokkrar mismunandi skissur sem sýna hvernig þú getur klippt.

b Hversu stór að yfirborðsflatarmáli getur strendingurinn þinn orðið?

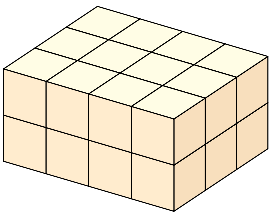
Þegar rúmmál íláts er mælt samsvarar það því að mæla magn þess innihalds sem kemst fyrir í ílátinu. Við margs konar aðstæður er hentugt að mæla rúmmál í lítrum eða desilítrum, einkum ef ílátið, sem mælt er, á að nota til að rúma vökva. Ef þú átt að búa til öskju eða vita hve margir hlutir eða hve stórir hlutir komast fyrir í henni er betra að þekkja mælitölurnar fyrir hæð, lengd og breidd og gefa rúmmálið upp í rúmmetrum eða rúmdesimetrum.

Rúmdesimetri er það sama og lítri.

$1 \text{ dm}^3 = 1\ l$



Þegar mæla skal rúmmál þrívíðra mynda eða hluta þarf að miða við ákveðna rúmmálseiningu. Teningur með 1 cm hlið hefur rúmmálið $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$. Þetta er lesið: „einn rúmsentimetri“. Þegar reikna skal út rúmmál rétts strendings þurfum við að sjá hve marga rúmsentimetra strendingurinn rúmar.



4.65 Ómar ætlar að byggja stóran kubb úr mörgum litlum teningslaga kubbum.

Litlu teningarnir eru í stærðinni $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}$. Stóri kubburinn á að líta út eins og sést á myndinni til vinstri.

a Hve marga teninga þarf Ómar í kubbinn sem hann ætlar að byggja?

b Hvert er rúmmál kubbsins hans Ómars, mælt í rúmsentimetrum?

c Hve marga teninga þarf Ómar ef hæð kubbsins á að vera 5 teningar?

d Hve marga teninga þarf Ómar til að búa til kubb sem er 1 dm^3?

4.66 Í öskju er pláss fyrir fimm teninga með fram annarri hliðinni og sex teninga með fram hinni hliðinni.

a Hve margir teningar komast fyrir í einu lagi í öskjunni?

b Það er rými fyrir þrjú lög af teningum í öskjunni.
Hvað komast þá margir teningar fyrir í öskjunni?

Ef við vitum flatarmál grunnflatarins G getum við fundið rúmmál strendings með því að margfalda flatarmál grunnflatarins með hæð strendingsins h.

$R = G \cdot h$

Sýnidæmi 13

Skókassi er 18 cm á breidd, 15 cm á hæð og 22 cm á lengd.
Hvert er rúmmál skókassans?

Tillaga að lausn

Rúmmál = flatarmál grunnflatarins · hæð

Grunnflöturinn er rétthyrningur þar sem flatarmálið er lengd · breidd.

$R = G \cdot h = l \cdot b \cdot h = 22\text{ cm} \cdot 18\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 5940\text{ cm}^3 = \underline{5{,}94\text{ dm}^3}$

Skókassinn rúmar næstum því 6 dm^3 eða 6 l

4.67 Hátalari er í laginu eins og réttstrendingur en þá eru allir hliðarfletir og grunnfletir rétthyrningar. Lengd, breidd og hæð eru 30 cm, 15 cm og 25 cm.

Finndu rúmmál hátalarans.

4.68 Hægt er að senda pakka í sérstökum umbúðakössum. Þú finnur málin í cm og verðið á kössunum í töflunni hér til hægri.

a Finndu rúmmál og yfirborðsflatarmál allra umbúðakassanna.

b Er sama verð á rúmsentimetra í öllum kössunum?

Lögun á umbúðakassa	Verð (kr.)	Stærð (cm)
Mjög lítill	250	$22{,}5 \cdot 14{,}5 \cdot 7$
Lítill	300	$27 \cdot 19 \cdot 10$
Miðlungs	350	$31 \cdot 22 \cdot 12$
Stór	400	$39 \cdot 25 \cdot 14$
Stærstur	500	$50 \cdot 30 \cdot 20$

(Heimild: Pósturinn, apríl 2015)

4.69 Hver hefur rétt fyrir sér?

Slagrými vélarinnar á vélhjóli Guðrúnar er 1200 rúmsentimetrar. Hvað eru það margir lítrar?

Lítill flutningskassi

Stór flutningkassi

Fatakassi

4.70 Ef þú þarf að flytja er hægt að fá sérstaka flutningskassa. Slíkir kassar eru af mismunandi stærð.

a Notaðu málin á kössunum hér til vinstri og finndu rúmmál hvers þeirra.

b Hugsaðu þér að þú ætlir að flytja og þurfir því flutningskassa undir um það bil 2 m^3 af hlutum.

Hve marga stóra kassa þarftu til að nóg pláss sé fyrir þessa hluti?

c Stóru kassarnir verða of þungir þannig að þú skiptir þeim út fyrir litla flutningskassa.

Hve marga litla flutningskassa þarftu til að geta flutt alla hlutina sem nefndir eru í b-lið.

4.71 Kristján og Tómas eru að byrja í iðnnámi og ætla að flytja í litla leiguíbúð. Þeir kaupa flutningskassa til að geta tekið með sér nauðsynlega hluti. Kristján kaupir tíu litla kassa, tólf stóra kassa og tvo fatakassa til að pakka niður fyrir flutninginn.

a Hve mikið rými fær Kristján fyrir hlutina sem hann ætlar að flytja með sér?

b Tómas þarf bara helminginn af því rými sem Kristján þarf. Tómas vill aðeins nota litla kassa. Hve marga kassa þarf Tómas að kaupa?

c Þeir ætla að flytja kassana á flutningabíl þar sem rýmið fyrir vörurnar er 2,3 m á lengd, 1,6 m á breidd og 1,3 m á hæð.
Hve mikið rými er fyrir vörurnar í flutningabílnum?

d Er pláss fyrir alla kassa Kristjáns og Tómasar í sömu ferðinni? Rökstyddu svarið.

4.72 Ísframleiðandi nokkur ætlar að selja 2 *l* af ís í ísboxum með ferningslaga botni þar sem hliðarbrúnin er 20 cm á lengd. Hver þarf hæð ísboxanna að vera?

4.73 Í þrístrendingi úr gleri er flatarmál grunnflatarins 10,8 cm^2 og hæðin er 6,3 cm.

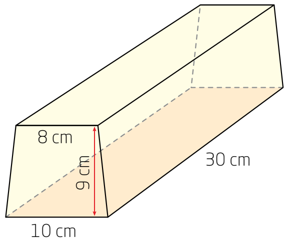
a Hvert er rúmmál þrístrendingsins?

b Eðlismassi glers er 2,6 g/cm^3. Hve mikið vegur þrístrendingurinn?

4.74 Réttur þrístrendingur hefur rúmmálið 48 m^3. Stærð grunnflatarins og hæðin eru heilar tölur.

Hvaða stærðir geta verið á grunnfletinum og hæðinni? Gerðu skissur af hinum mismunandi þrístrendingum.

4.75 Fiskbúðingur er í laginu eins og réttur strendingur með trapisulaga grunnfleti.



Lengsta hliðin í trapisunni er 10 cm, sú stysta er 8 cm og hæðin er 9 cm. Fiskbúðingurinn er 30 cm á lengd.

a Finndu rúmmál fiskbúðingsins.

b Breyttu rúmmálinu í lítra.

c 1 *l* af fiskbúðingi vegur 1 kg. Í 100 grömmum af fiskbúðingi eru 81 kcal. Hve margar kcal eru í öllum fiskbúðingnum?

Í réttum strendingi eru hliðarnar hornréttar á grunnfletina (botn og lok).

4.76 Kassinn á myndinni er ferstrendingur.

Ferstrendingur er strendingur með ferhyrnda grunnfleti og fjóra hliðarfleti.

Styttri hlið botnsins er 5 cm og lengri hliðin 25 cm. Hæðin er 20 cm.

a Finndu rúmmál kassans.

b Rúmmál duftsins í kassanum er $\frac{3}{4}$ af rúmmáli kassans. Til að búa til vanillubúðing þarf að bæta við 4,7 dl af mjólk.

Gerðu ráð fyrir að rúmmál tilbúins vanillubúðings sé summan af rúmmáli mjólkurinnar og duftsins. Hvert væri þá rúmmál vanillubúðingsins?

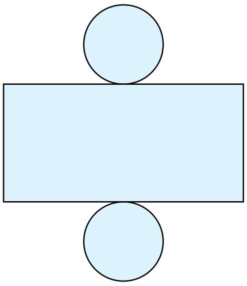
Yfirborðsflatarmál og rúmmál sívalnings

Ef þú tekur blað og rúllar því upp færðu sívalning án grunnflatanna. Ætlir þú að loka honum alveg þarftu hringflöt í hvorn enda. Mjög margir hlutir í hinu daglega lífi eru í laginu eins og sívalningur. Ef þú lítur í kringum þig muntu finna mörg dæmi um sívalninga.

4.77 Búðu til sívalning úr tveimur A4-blöðum. Annað blaðið á að vera sjálfur sívalningurinn og hitt blaðið notar þú til að búa til hringina sem mynda grunnfletina.

a Hvað þarftu að mæla til að finna geisla endahringjanna? Mældu og reiknaðu lengd geislans.

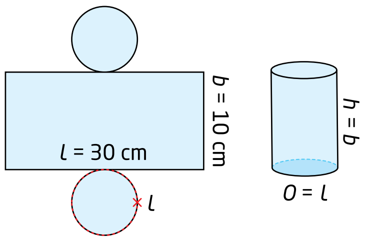
b Búðu til sívalninginn.



Þú finnur **yfirborðsflatarmál** sívalningsins með því að reikna út summu flatarmála grunnflatanna og rétthyrningsins sem myndar sveigðu hliðina. Sveigða hliðin kallast **möttull**.

Sýnidæmi 14

Reiknaðu yfirborðsflatarmál sívalnings þar sem möttullinn er búinn til úr rétthyrningi sem er 30 cm á lengd og 10 cm á breidd. Hæð sívalningsins er breidd rétthyrningsins.



Tillaga að lausn

Til að reikna yfirborðsflatarmál þarftu að finna geisla grunnflatanna. Ummál þeirra samsvarar lengd rétthyrningsins. Þá er

$$2\pi r = 30$$

$$r = \frac{30}{2\pi} = 4{,}775$$

Geislinn er 4,775 cm. Þá er yfirborðsflatarmál sívalningsins:

$$Y = 2\pi r^2 + l \cdot b$$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}755^2 + 30 \cdot 10 \approx \underline{442}$$

<u>Yfirborðsflatarmál sívalningsins er 442 cm²</u>

Við bíðum með að námunda að réttum fjölda tölustafa þar til í lokasvarinu.

4.78 Sívalningslaga ostaaskja er 18 cm í þvermál og hæðin er 8 cm. Lokið er 0,5 cm stærra í þvermál en er aðeins 3 cm á hæð.

Hve mikinn pappa þarf í öskjuna?

4.79 Reiknaðu út yfirborðsflatarmál sívalnings þar sem

a þvermálið er 8 cm og hæðin er 5 cm

b þvermálið er 5 cm og hæðin er 8 cm

4.80 Flöskurnar á myndinni eru 30 cm á hæð. Mældu þær lengdir sem þarf til að reikna með slumpreikningi yfirborðsflatarmál

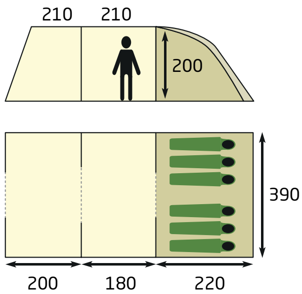
a flöskukassans

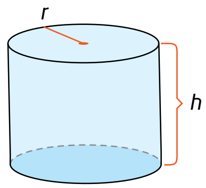
b eins af pappasívalningunum í bakgrunni myndarinnar

4.81 Skoðaðu myndirnar til hægri.

a Gerðu skissu sem sýnir þá mismunandi hluta sem tjaldið er gert úr. Notaðu málin, sem gefin eru upp, og skrifaðu þau á rétta staði á skissuna. Gerðu nauðsynlega útreikninga til að finna hliðarlengdirnar.

b Finndu flatarmál tjalddúksins sem tjaldið er búið til úr.





Rúmmál sívalnings er flatarmál grunnflatarins sinnum hæðin. Þar sem grunnflöturinn er hringur verður formúlan fyrir rúmmálið R þessi:

$$R = \pi r^2 h$$

Sýnidæmi 15

Reiknaðu út rúmmál sívalnings með geislann r = 3 cm og hæðina h = 8 cm.

Tillaga að lausn

$$R = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} \approx \underline{\underline{226\text{ cm}^3}}$$

4.82 Reiknaðu rúmmál sívalnings þegar

a r = 4 cm og h = 5 cm

b r = 17 cm og h = 8 cm

c r = 1,2 m og h = 8,4 m

d $þ$ = 1,8 m og h = 1,8 m

e $þ$ = 0,5 m og h = 2 m

f $þ$ = 16 cm og h = 0,6 m

4.83 Reiknaðu með slumpreikningi rúmmál blýantsins þíns. Svaraðu í mm^3.

Sýnidæmi 16

Súpudós er í laginu eins og sívalningur. Georg ætlar að kanna hvort dósin tekur 6 dl. Hann mælir ummálið og hæð dósarinnar. Ummálið er 26 cm og hæðin er 12 cm. hve marga desilítra tekur dósin?

Tillaga að lausn

Georg finnur geislann þannig:

$$2\pi r = 26$$

$$r = \frac{26}{2\pi} \approx 4{,}138$$

Nú getur Georg reiknað rúmmálið þannig:

$$R = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 4{,}138^2 \cdot 12 \approx \underline{645{,}5\text{ cm}^3}$$

Rúmmálið er $645{,}5\text{ cm}^3 = 0{,}6455\text{ dm}^3 \approx 0{,}65\ l = \underline{\underline{6{,}5\text{ dl}}}$

Dósin getur tekið 6,5 dl. Georg hugsar sem svo að 6 dl séu áreiðanlega í dósinni og að hún sé ekki alveg full.

4.83 Fyrirtæki nokkurt ætlar að steypa sívalningslaga brúarstólpa. Stólpinn er 1,5 m í þvermál og 12 m á hæð. Hve mikla steypu þarf í stólpann?

4.84 Sívalningslaga kexpakki er 6 cm að þvermáli og 18 cm á lengd.

a Hvert er rúmmál pakkans?

b Hver kexkaka er 6 mm á þykkt og vegur 12 g. Hve þungar eru kexkökurnar alls?

4.85 Fyrirtæki sem selur snyrtivörur ætlar að búa til nýjar umbúðir fyrir vörurnar sínar. Hvert ílát á að taka 200 ml og vera sívalningslaga. Finndu þvermál sívalninganna ef hæðin er

a 2 cm

b 3 cm

c Með hvaða hæð mælir þú? Rökstyddu svarið.

4.86 Í vélhjóli eru einn eða fleiri strokkar (sem eru sívalningslaga). Rúmmál strokkanna segir til um slagrýmið. Lengd strokkanna kallast slaglengd.

a Strokkur í vélhjóli er 64 mm í þvermál og hefur slaglengdina 60 mm. Hve margir cm^3 er strokkurinn?

b Hve stór er geisli strokks sem er 7,1 cm á lengd og hefur slagrými 350 cm^3?

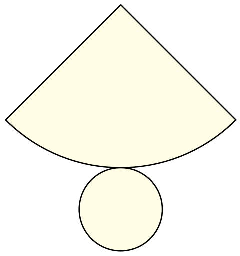
c Tveggja strokka vélhjól hefur samtals 600 cm^3 slagrými. Hver er slaglengd strokkanna ef þvermál hvors strokks er 8 cm?

4.87 Hverjir nemendanna hér að neðan hafa rétt fyrir sér?

Strokkurinn M hefur þvermálið $þ$ og hæðina h.

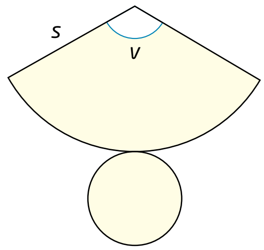
Strokkurinn N hefur þvermálið $\frac{1}{2}\,þ$ og hæðina $2\,h$.

Yfirborðsflatarmál og rúmmál píramída og keilu



Þú hefur séð að hliðarflötur keilu er hluti af hring, hann er hringgeiri. Botninn er minni hringur.

Þú getur reiknað yfirborðsflatarmál keilu á mismunandi vegu, allt eftir því hvaða mál eru þekkt. Ef geislinn og horn hringgeirans, sem myndar hliðarflötinn, eru þekkt getur þú reiknað út flatarmál hliðarflatarins. Þú getur einnig fundið geisla minni hringsins sem myndar grunnflötinn.



Þú hefur séð að flatarmál hringgeira er

$$F = \frac{v}{360°} \cdot \pi s^2$$

Til að finna flatarmál grunnflatarins þarftu að þekkja lengd geislans.
Ummál grunnflatarins hlýtur að vera jafnt lengdinni á boga hringgeirans.

Hringgeirinn er $\frac{v}{360}$ af öllum hringnum sem hefur ummálið $2\pi s$.
Þá er ummál hringlaga botnsins:

$$2\pi r = \frac{v}{360°} \cdot 2\pi s$$

Hér er s geislinn í hringgeiranum, sem myndar hliðarflötinn, og r er geisli hringlaga botnsins.

Ef þú deilir með 2π báðum megin við jöfnumerkið færðu geisla grunnflatarins.

$$r = \frac{v}{360°} \cdot s$$

Þú getur einnig fundið yfirborðsflatarmál keilunnar.

$$Y = F + \pi r^2 = \frac{v}{360°} \cdot \pi s^2 + \pi r^2$$

Sýnidæmi 17

Óskar býr til skemmtilega skopparakringlu úr pappa. Hún er keilulaga.
Sjálf keilan er hringgeiri með hliðina s = 6 cm og horn sem er 180°.
Toppurinn er hringur sem passar nákvæmlega í hringgeirann.
Reiknaðu flatarmál pappans sem Óskar notar.

Tillaga að lausn

Við reiknum fyrst út flatarmál hringgeirans: $F = \frac{180}{360} \cdot 3{,}14 \cdot 36 = 56{,}52 \text{ cm}^2$

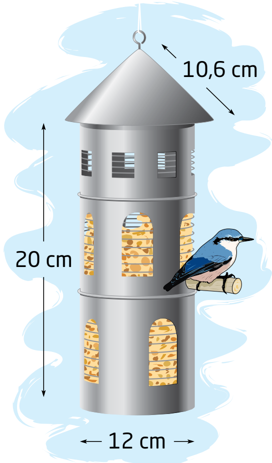
Þar næst finnum við geisla hringsins í toppnum: $r = \frac{180}{360} \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ cm

Þá er yfirborðsflatarmál keilunnar: $U = F + \pi r^2 = 56{,}52 + 3{,}14 \cdot 9 = \underline{84{,}78 \text{ cm}^2}$

<u>Óskar notar um það bil 85 cm² af pappa í skopparakringluna.</u>

4.89 Eyvindur býr til háan galdrahatt úr pappa handa litla bróður sínum fyrir skemmtun í leikskólanum. Hatturinn er keilulaga. Sjálf keilan er hringgeiri með hliðinni s = 45 cm og hornið 80°.

Reiknaðu út flatarmál pappans sem Eyvindur notar.



4.90 Blikksmiður nokkur ætlar að búa til fuglahús sem er í forminu eins og sívalningur með keilu efst, sjá myndina til hægri þar sem málin eru skráð. Miðjuhorn hringgeirans, sem þakið er búið til úr, er 270°.

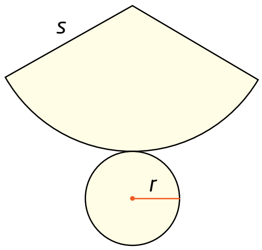
Reiknaðu út hve mikið blikk fer í fuglahúsið. Ekki taka gluggana með í reikninginn.

4.91 Marta ætlar að selja poppkorn á bekkjarskemmtun og býr til kramarhús úr pappír í tveimur stærðum:

20 stk. lítil: hliðin s = 25 cm og hornið 150°
15 stk. stór: hliðin s = 30 cm og hornið 160°

Hversu mikinn pappír þarf Marta að nota?

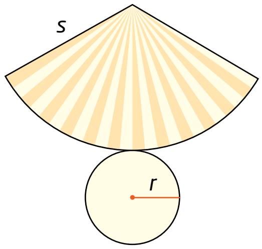
4.92 Stína þarf að gera við sólhlífina sína. Hún þarf efni sem er eins og hringgeiri í laginu með geislann 1,2 m og hornið 315°.
Hvert er yfirborðsflatarmál sólhlífarinnar?



Ef þú þekkir geisla hringlaga botns og lengd hliðanna, það er að segja geisla hringgeirans, getur þú reiknað út **yfirborðsflatarmál** keilu þannig:

$Y = \pi r^2 + \pi rs$

Lengd boga hringgeirans er $2\pi r$ = ummál hringlaga botnsins.
Flatarmál hringgeirans er summa flatarmála marga mjög smárra hringgeira.
Þeir eru námundaðir að þríhyrningum með hæð sem er jöfn geisla hringgeirans, *s*.



Hver þríhyrningur hefur flatarmálið $\frac{1}{2} \cdot x \cdot s$ þar sem *x* táknar lítinn hluta af boganum. Þegar öll þessi flatarmál eru lögð saman mun summa allra *x*-anna verða $2\pi r$ og vegna þess að þríhyrningarnir hafa allir sömu hæð verður flatarmál hringgeirans $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s = \pi rs$. Til að fá allt yfirborðsflatarmál keilunnar þarf að bæta við flatarmáli hringlaga botnsins sem er πr^2.

Sýnidæmi 18

Þvermál hringlaga grunnflatarins á toppís er 7 cm. Hliðarlengdin er 12 cm.
Hvert er yfirborðsflatarmál umbúðanna?

Tillaga að lausn

Geisli hringlaga grunnflatarins er $\frac{7}{2}$ cm = 3,5 cm.
Hliðin s = 12 cm. Þá er yfirborðsflatarmálið

$$Y = \pi r^2 + \pi rs = 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 + 3{,}14 \cdot 3{,}5 \cdot 12 = \underline{170{,}345}$$

<u>Allt yfirborðsflatarmálið er um það bil 170 cm²</u>

4.93 Kerti er í laginu eins og keila.

Hversu stórt er yfirborðsflatarmálið ef hliðin er 20 cm og geislinn er 4 cm?

4.94 Keilulaga indíánatjald er 2,5 m í þvermál neðst og 3 m á hæð.

Hvert er yfirborðsflatarmál tjalddúksins?

Sívalningur og keila

Þið þurfið

- þykk blöð
- reglustiku
- skæri
- hringfara
- límstifti
- 2,5 dl af salti, hrísgrjónum eða sandi

Aðferð

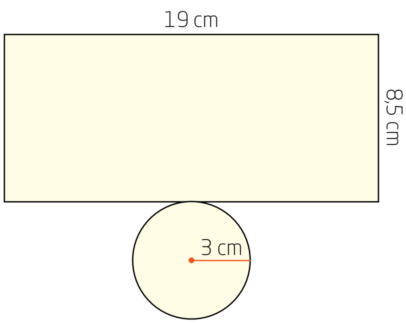
1 Notið hringfara eða rúmfræðiforrit og búið til hlutana sem þarf í sívalninginn og keiluna. Munið eftir að gera ráð fyrir límkanti. Sívalningurinn á bara að hafa einn grunnflöt og keilan engan.

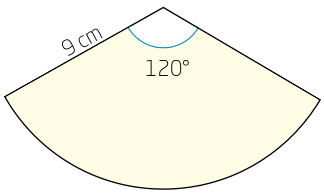
2 Klippið út og límið saman hlutana. Gætið þess að sívalningurinn hafi sama grunnflöt og keilan og að bæði formin séu jafn há.

3 Giskið á hve margar heilar keilur komast fyrir í sívalningnum.

4 Fyllið keiluna af salti, hrísgrjónum eða sandi. Gætið þess að yfirborðið sé alveg lárétt. Tæmið nú úr keilunni yfir í sívalninginn. Endurtakið leikinn þar til sívalningurinn er fullur.

5 Skrifið setningu um rúmmál keilu og rúmmál sívalnings sem hafa sömu hæð og sams konar botn.





Í verkefninu á blaðsíðunni hér á undan uppgötvaðir þú að sívalningur rúmar þrefalt á við keilu með jafn stóran hring í grunnfletinum og með sömu hæð. Rúmmál sívalnings er $\pi r^2 h$.

Rúmmál keilu er $R = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Sýnidæmi 19

Lárus mælir hæð toppíss. Hún er 10 cm. Þvermál toppsins er 7 cm. Finndu rúmmál íssins og reiknaðu út hve marga toppísa Lárus getur búið til úr 1 *l* af ís.

Tillaga að lausn

$R = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 40{,}83\text{ cm}^3$

$1\ l = 1000\text{ cm}^3$

Fjöldi toppísa úr einum lítra:

$1000\text{ cm}^3 : 40{,}83\text{ cm}^3 = \underline{24{,}49}$

Lárus getur búið til 24 heila toppísa úr einum lítra.

4.95 Hæð keilulaga glass er 16 cm og þvermálið er 10 cm.

Hvað kemst mikill mjólkurhristingur fyrir í glasinu?

4.96 Glerblásari nokkur framleiðir keilulaga vínglös.

a Hve mikið kemst fyrir í einu glasi þegar stærsta þvermálið er 6 cm og dýptin er 15 cm?

b Glas sem er 12 cm á dýpt á að rúma 2 dl. Hvað þarf stærsta þvermálið að vera?

4.97 Brauðformin hér fyrir neðan eru búin til úr hringgeirum með 90° horni. Ekki skal reikna með því sem er tvöfalt. Hliðin er 9 cm. Hæðin er 8,5 cm.

Hvað rúmar slíkt brauðform mikinn ís þegar hann á að vera alveg flatur á toppnum og ná 1,5 cm upp fyrir brún formsins?

Reikna skal með að sá hluti íssins, sem stendur upp úr brauðforminu, sé sívalningslaga.

Grunnflötur píramída er marghyrningur. Hver hlið píramídans er jafnarma þríhyrningur með topppunkti í ákveðinni hæð yfir miðpunkti marghyrningsins.
Á myndinni af píramídunum í Egyptalandi sést að grunnflöturinn er ferningur. Yfirborðsflatarmál píramída er summan af flatarmáli þríhyrninganna sem mynda hliðarfletina og flatarmáli grunnflatarins.

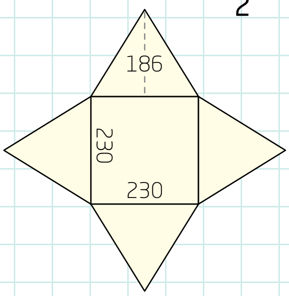
Sýnidæmi 20

Keopspíramídinn fyrir utan Kaíró hefur ferningslaga grunnflöt með 230 m hlið. Hæðin í þríhyrningslaga hliðarflötunum er 186 m.

Finndu yfirborðsflatarmál Keopspíramídans.

Tillaga að lausn

$$Y = 230 \cdot 230 + 4 \cdot \frac{230 \cdot 186}{2} = \underline{138\,460}$$



Yfirborðsflatarmál píramídans er 138 460 m^2

Píramídinn í Egyptalandi stendur á jörðinni þannig að yfirborðsflatarmálið er eiginlega bara flatarmál þríhyrninganna fjögurra. Þá er yfirborðsflatarmálið 85 560 m^2.

Þetta er jafn stórt og svæði sem er 1 km á lengd og 138,46 m á breidd eða meira en 20 fótboltavellir!

4.98 Hanki á lyklahring er í laginu eins og lítill píramídi með ferningslaga grunnfleti. Hliðarbrún grunnflatarins er 2,5 cm og hæð þríhyrndu hliðarflatanna er 3,8 cm.

Finndu yfirborðsflatarmál píramídans.

4.99 Á torginu fyrir framan Louvre-safnið í París er bygging úr gleri sem er eins og píramídi. Grunnflöturinn er ferningur með hliðarlengd 35 m og hæð þríhyrndu hliðarflatanna er 32 m. Píramídinn hefur engan botn.

Finndu yfirborðsflatarmál glerpíramídans.

Réttur strendingur og píramídi

Þú þarft

- þykkt blað eða pappa
- reglustiku
- skæri
- hringfara
- límstifti
- 3 dl af salti, hrísgrjónum eða sandi

Aðferð

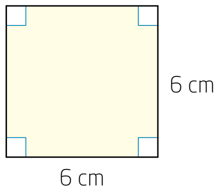
1 Notaðu hringfara eða rúmfræðiforrit og búðu til hlutana í strendinginn og píramídann. Mundu að gera ráð fyrir límkanti. Strendingurinn á bara að hafa einn grunnflöt og píramídinn engan.

2 Klipptu út og límdu saman hlutana. Gakktu úr skugga um að þú hafir búið til strending með sama grunnflöt og píramídinn og að bæði formin hafi sömu hæð.

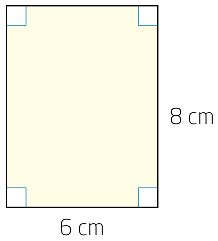
3 Giskaðu á hve margir fullir píramídar komast fyrir í strendingnum.

4 Fylltu píramídann með hrísgrjónum eða einhverju þvílíku. Gættu þess að yfirborðið sé lárétt. Helltu úr píramídanum yfir í strendinginn. Endurtaktu leikinn þar til strendingurinn er fullur.

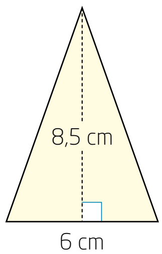
5 Skrifaðu setningu um rúmmál píramída og rúmmál strendings sem hafa sömu hæð og eins grunnflöt.



Grunnflötur strendings og píramídans



Hliðarflötur strendingsins

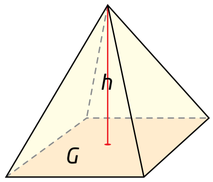


Hliðarflötur píramídans

Í verkefninu á blaðsíðunni hér á undan sástu að réttur strendingur rúmar þrefalt á við píramída með sama grunnflöt og hæð.

Ef grunnflötur hefur flatarmálið G og hæðin er h þá er rúmmál píramída

$$R = \frac{1}{3} G \cdot h$$



Sýnidæmi 21

Finndu rúmmál píramídans sem þú bjóst til. Grunnflötur hans er ferningur með 6 cm langa hlið. Hæð píramídans er 8 cm. Finndu rúmmálið bæði í cm^3 og dl.

Tillaga að lausn

Rúmmál píramídans er

$R = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 144$

Hliðarnar og hæðin eru mældar í cm þannig að rúmmálið er $\underline{144\ cm^3}$.
Þetta er hið sama og $0{,}144\ dm^3 = 0{,}144\ l = \underline{1{,}44\ dl}$.

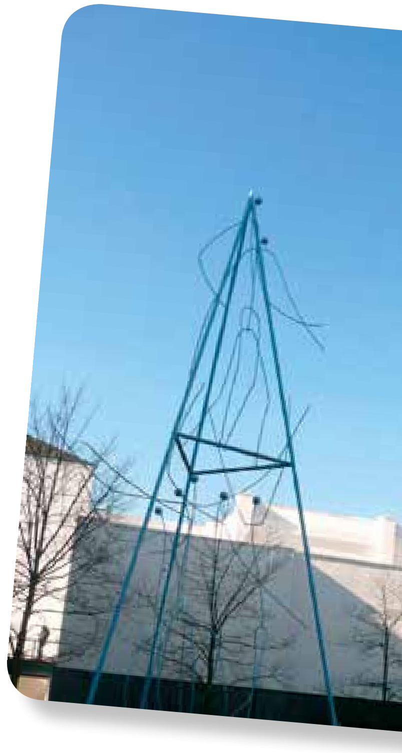
$\underline{\underline{\text{Rúmmálið er } 144\ cm^3\text{, eða } 1{,}44\ dl.}}$

4.100 **a** Keopspíramídinn er ferningslaga og er hver hlið 230 m.
Hæð píramídans var upphaflega 146 m.

Finndu rúmmál Keopspíramídans.

b 8 m af toppi píramídans eru horfnir. Grunnflöturinn í horfna hlutanum er ferningslaga með um 12 m hliðarlengd.

Reiknaðu út rúmmál þess hluta af Keopspíramídanum sem eftir er af honum um þessar mundir.



4.101 **a** Hvernig lýsirðu skúlptúrnum hér til hægri sem píramída?

b Reiknaðu með slumpreikningi hve margir metrar af járnstöngum voru notaðir í verkið.

c Reiknaðu með slumpreikningi rúmmál tjalds sem er eins í laginu og hefur sömu mál og skúlptúrinn á myndinni.

Yfirborðsflatarmál og rúmmál kúlu

Kúla er það þrívíða form sem hefur stærst rúmmál miðað við yfirborðsflatarmálið.

Yfirborðsflatarmál kúlu með geislann r er gefið með formúlunni:

$$Y = 4\pi r^2$$

Rúmmál kúlu með geislann *r* er

$$R = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Til að útskýra þessar formúlur þarf þá tegund stærðfræði sem kallast heildareikningur. Hann er ekki tekinn fyrir í unglingabekkjum en þú getur samt sem áður notað formúlurnar.

Sýnidæmi 22

Hvort af eftirfarandi hefur stærra rúmmál og yfirborðsflatarmál: tíu boltar, hver með 5 cm geisla eða einn stór bolti með 15 cm geisla?

Tillaga að lausn

Tíu boltar, hver með 5 cm geisla hefur rúmmálið

$$R = 10 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{10 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 125}{3} \approx \underline{5236 \text{ cm}^3}$$

Yfirborðsflatarmálið er: $Y = 10 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \approx \underline{3140 \text{ cm}^2}$

Einn bolti með 15 cm geisla hefur eftirfarandi rúmmál og yfirborðsflatarmál:

$$R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = \underline{14\,137 \text{ cm}^3}$$

$$Y = 4 \cdot \pi \cdot 15^2 = \underline{2837 \text{ cm}^2}$$

Stóri boltinn hefur aðeins minna yfirborðsflatarmál og miklu stærra rúmmál en litlu boltarnir tíu.

4.102 **a** Hve margir boltar með 5 cm geisla hafa samtals jafn mikið yfirborðsflatarmál og einn bolti með 15 cm geisla?

b Hve margir boltar með 5 cm geisla hafa samtals jafn stórt rúmmál og einn bolti með 15 cm geisla?

4.103 Í leikfimissal eru margar tegundir af boltum. Finndu körfubolta, blakbolta, fótbolta, brennibolta og tennisbolta. Þú skalt vinna þetta verkefni með bekkjarfélaga þínum. Notið málband eða band og metrakvarða.

Mælið ummál, reiknið út geisla og þar næst rúmmál og yfirborðsflatarmál boltanna.

4.104 Boltarnir á myndinni eru misstórir.
Tveir minnstu boltarnir hafa þvermálið 12 cm og 16 cm.

a Reiknaðu yfirborðsflatarmál og rúmmál litlu boltanna tveggja.

b Boltarnir eru 2 mm á þykkt. Hve margir lítrar af lofti eru í hvorum bolta?

c Geisli þriggja stærstu boltanna stækkar um 10% með hverri stærð. Hvað eykst þá yfirborðsflatarmálið og rúmmálið um mörg prósent?

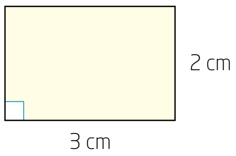
d Geisli þriggja stærstu boltanna stækkar um 10% með hverri stærð. Boltarnir eru 2 mm á þykkt. Hvað eykst þá rúmmál loftsins í þessum boltum um mörg prósent?

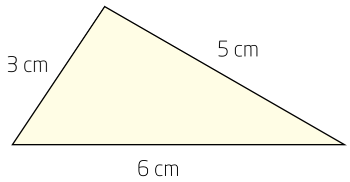
4.105 Í verslanamiðstöð á að útbúa 15 m^2 boltaherbergi. Í því á að vera hátt lag af plastboltum. Kassi með 100 boltum hefur málin 40 cm · 40 cm · 32 cm.

a Hve marga bolta þarf að kaupa til að fylla út í rúmmálið sem ákveðið hefur verið?

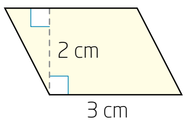
b Hve mikið plast, sem er 1 mm á þykkt, þarf til að búa til alla þessa bolta ef þeir eru holir að innan?

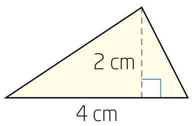
Í stuttu máli

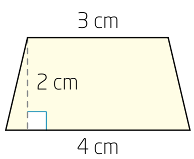
<table>
<tr><th>Þú átt að geta</th><th>Dæmi</th><th>Tillögur að lausnum</th></tr>
<tr>
<td>mælt og reiknað út ummál þekktra rúmfræðiforma</td>
<td>a Finndu ummál rétthyrningsins.


b Finndu ummál þríhyrningsins.

</td>
<td>a $U = 2 \cdot l + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot 3\text{ cm} + 2 \cdot 2\text{ cm}$
$= \underline{\underline{10\text{ cm}}}$

b Ummál = summa hliðanna
$U = 3\text{ cm} + 5\text{ cm} + 6\text{ cm}$
$= \underline{\underline{14\text{ cm}}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>mælt og reiknað út flatarmál þekktra rúmfræðiforma:

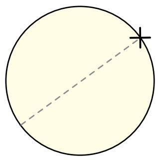
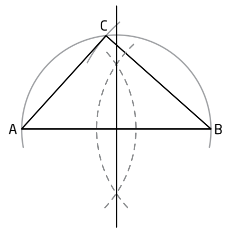
fernings
rétthyrnings
samsíðungs
þríhyrnings
trapisu</td>
<td>a Finndu flatarmál samsíðungsins.


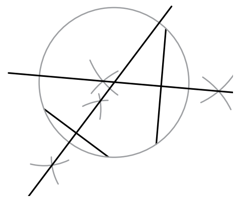
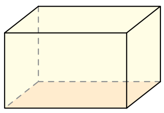
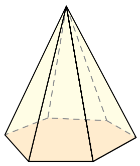
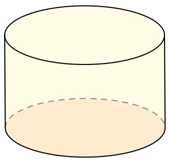
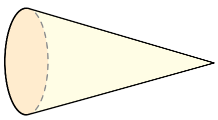
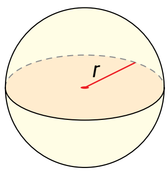
b Finndu flatarmál þríhyrningsins.


c Finndu flatarmál trapisunnar.

</td>
<td>a $F = 3\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$

b $F = \dfrac{4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2$

c $F = \dfrac{(a + b) \cdot h}{2}$
$= \dfrac{(4\text{ cm} + 3\text{ cm}) \cdot 2\text{ cm}}{2}$
$= \underline{\underline{7\text{ cm}^2}}$</td>
</tr>
</table>

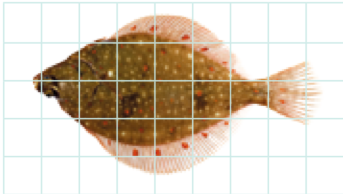
Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
fundið námundargildi fastans pí	Teiknaðu hring, mældu ummálið og þvermálið og reiknaðu út hlutfallið $U : þ$.	Ummálið mældist 11,3 cm. Þvermálið mældist 3,6 cm. $U : þ = 11{,}3 : 3{,}6 \approx 3{,}14$ $\underline{\underline{\pi \approx 3{,}14}}$ 
reiknað út ummál og flatarmál hrings	**a** Finndu ummál hrings með 2 cm geisla. **b** Finndu flatarmál hrings með 5 m geisla. **c** Finndu þvermál hrings með 10 m ummál.	**a** $U = \pi d = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2$ cm $= \underline{\underline{12{,}56 \text{ cm}}}$ **b** $F = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 5 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = \underline{\underline{78{,}5 \text{ m}^2}}$ **c** $þ = \frac{U}{\pi} = 10 \text{ m} : 3{,}14 \approx \underline{\underline{3{,}2 \text{ m}}}$
teiknað rétthyrnda þríhyrninga þegar langhliðin er þekkt	Í þríhyrningnum ABC er $\angle C = 90°$, AB = 4 cm og BC = 3 cm. Teiknaðu þríhyrninginn.	1 Merkti AB = 4 cm 2 Teiknaði miðþverilinn á AB og fann miðpunktinn. 3 Teiknaði hálfhring milli A og B. 4 Merkti punkt á hringboganum í 3 cm fjarlægð frá B og fann þannig C. 
teiknað snertla hrings	Hvað þýðir það að lína snertir hring?	Þegar lína snertir hring nemur hún við hringbogann í einum og aðeins einum punkti. Snertill er alltaf hornréttur á geisla. Snertillinn er fyrir utan hringinn.

Þú átt að geta	**Dæmi**	**Tillögur að lausnum**
notað rúmfræðiteikningu til að finna miðju hrings	Teiknaðu hring með því að nota lok jógúrtdósar. Finndu miðju hringsins.	Teiknaði hringinn. Teiknaði tvo strengi sem eru ekki samsíða. Teiknaði miðþveril strengjanna og fann skurðpunkt þeirra. 
borið kennsl á og lýst réttum strendingi, píramída, keilu, sívalningi og kúlu	Hvað kallast formin og úr hvaða flötum eru þau mynduð? **a**  **b**  **c**  **d**  **e** 	**a** Réttur ferstrendingur – búinn til úr sex rétthyrningum **b** Sexstrendur píramídi – búinn til úr sexhyrningi og sex jafnarma þríhyrningum sem mynda hliðarnar **c** Sívalningur – búinn til úr tveimur hringjum og einum rétthyrningi **d** Keila – búin til úr hring og hringgeira **e** Allir punktar á yfirborði kúlu eru jafn langt frá miðju kúlunnar

Þú átt að geta	**Dæmi**	**Tillögur að lausnum**
mælt og reiknað út yfirborðsflatarmál og rúmmál þrívíðra forma	Hvernig getur þú reiknað út yfirborðsflatarmál og rúmmál þrívíðra forma?	Yfirborðsflatarmálið er summa flatarmála allra marghyrninganna, hringjanna eða hringgeiranna sem formið er búið til úr. Kúla er sérstakt form. Þar er yfirborðsflatarmálið $4\pi r^2$ og rúmmálið er $\frac{4}{3}\pi r^3$ Rúmmál réttra strendinga er flatarmál grunnflatarins margfaldað með hæðinni. Ef form endar í topppunkti er rúmmálið einn þriðji af grunnfleti sinnum hæð.
reiknað með ýmsum rúmmálseiningum	Hver eru tengslin milli rúmmálseininga og lítra?	$0{,}001 \text{ m}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1\ l$ $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
mælt og reiknað út yfirborðsflatarmál og rúmmál þrívíðra forma	Botn mjólkurfernu er 7 cm · 7 cm að stærð. Það er 1 *l* af mjólk í fernunni. Hve hátt upp nær mjólkin? 	$1\ l = 1 \text{ dm}^3$ 7 cm = 0,7 dm Látum h vera hæð mjólkurinnar. Rúmmálið er flatarmál grunnflatar sinnum hæð. Rúmmál mjólkurinnar er: $0{,}7 \text{ dm} \cdot 0{,}7 \text{ dm} \cdot h = 1 \text{ dm}^3$ $h = \frac{1}{0{,}7 \cdot 0{,}7} = \underline{2{,}04}$ Mjólkin nær aðeins hærra en 2,0 dm = 20 cm upp eftir fernunni.
	Baunadós er sívalningslaga. Þvermálið er 6,5 cm og hæðin er 6,5 cm. Dósin er alveg full af baunum. Hvert er rúmmál baunanna? 	Rúmmál er flatarmál grunnflatarins sinnum hæð. Grunnflöturinn er hringur með flatarmálið πr^2 þar sem geislinn er *r*. Geislinn er helmingurinn af þvermálinu. $R = \pi \cdot \left(\frac{6{,}5}{2}\right)^2 \cdot 6{,}5 = \underline{215{,}7}$ Rúmmálið er um það bil $216 \text{ cm}^3 \approx 2$ dl

Bættu þig!

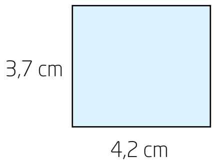
Flatarmál og ummál



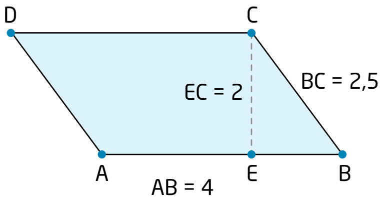
4.106 Rauðspretta er fiskur sem lifir á sandbotni. Notaðu rúðunetið til að giska á hve stóran flöt á botninum fiskurinn þekur. Það eru 3 cm milli línanna í rúðunetinu.

4.107 Reiknaðu ummál og flatarmál myndanna.

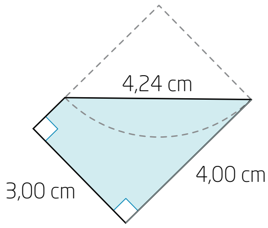
a



b

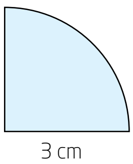


c

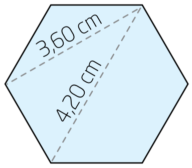


4.108 Reiknaðu ummál og flatarmál myndanna.

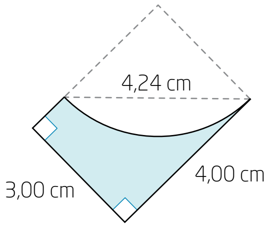
a



b

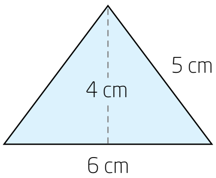


c

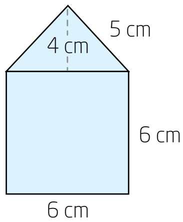


4.109 Reiknaðu ummál og flatarmál myndanna.

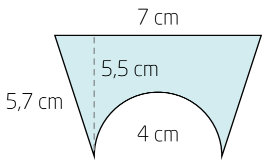
a



b



c



Rúmfræði hrings

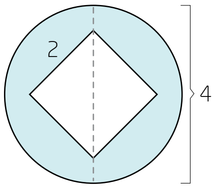
4.110 Reiknaðu ummál og flatarmál

a hrings með þvermál = 15 m

b hálfhrings með geisla = 4 m

c hringgeira sem er 80° og geisla = 3,5 m

4.111 Reiknaðu flatarmál bláa svæðisins.



4.112 Textinn hér á eftir lýsir hvernig merkingar hjólbarða eru gefnar upp.

> Hjólbarðamerkingar eru til dæmis skrifaðar þannig: 225/50 R17.
> 225 táknar breiddina í millimetrum; þetta dæmi táknar því 225 millimetra breiðan hjólbarða.
> Talan 50 á eftir skástrikinu gefur upp hæð hjólbarðans í prósentum af breiddinni. Því hærri sem þessi tala er því hærri er hjólbarðinn upp frá felgunni eða frá jörðu og upp að felgunni. Í þessu dæmi er hæðin 225/2 = 112,5 millimetrar.
> Síðasta talan 17 í þessu dæmi segir til um hve margar tommur þvermál felgunnar er sem hjólbarðinn passar á. Ein tomma er 25,4 mm.

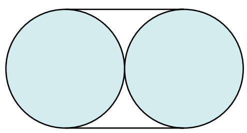
a Notaðu upplýsingarnar í rammanum til að reikna út þvermál hjólbarðans.

b Hvert er ummál hjólbarðans?

c Hve mörgum sinnum snýst hjólbarðinn um sjálfan sig á einni mínútu ef meðalhraðinn er 50 km/klst.?

4.113 Geisli hringanna á myndinni er 1 dm. Hringirnir snerta hvor annan í einum punkti.

Reiknaðu út flatarmál hvíta svæðisins.



4.114 Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem ∠B = 90°, AC = 7 cm og BC = 5 cm. Finndu tvær mismunandi aðferðir til að teikna þríhyrninginn.

4.115 Teiknaðu hring með 3 cm geisla. Merktu punktinn P á hringferilinn og dragðu snertil hringsins í P.

4.116 Á kort yfir garð hefur verið teiknaður hringlaga gosbrunnur. Á kortinu er þvermál gosbrunnsins 5 cm. Í 8 cm fjarlægð frá gosbrunninum, á framlengingu geislans er búið að merkja styttu. Leggja á gangstíg frá styttunni þannig að hann snerti hring sem er 1 cm frá gosbrunninum.

Gerðu samsvarandi kort og teiknaðu á kortið gangstíginn sem ætlunin er að leggja.

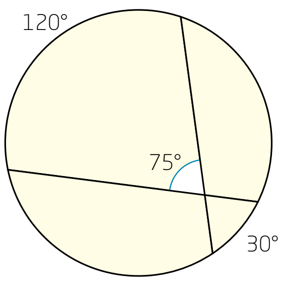
4.117 Teiknaðu þríhyrninginn ABC.

a Teiknaðu bæði innritaðan hring í þríhyrninginn og umritaðan hring um hann.

b Í þríhyrningnum DEF hafa innritaði hringurinn og umritaði hringurinn sama miðpunkt. Hvað getur þú þá sagt um þríhyrninginn?

4.118 Miðjuhorn í hring er 120°. Hver stórt er ferilhornið sem myndar sama boga?

4.119 Finndu hringlaga hlut, til dæmis pottlok eða glas. Teiknaðu ummálið og finndu miðju hringsins með teikningu.



4.120 Myndin til vinstri sýnir hring og tvo strengi sem skerast fyrir utan miðju hringsins.

a Skoðaðu gráður hringboganna og hornanna á myndinni.
Hvaða tengsl eru milli talnanna?

b Notaðu rúmfræðiforrit og teiknaðu hring og tvo strengi sem skerast fyrir utan miðju hans. Mældu bogana í gráðum (þú getur mælt samsvarandi miðjuhorn) og stærð hornanna milli strengjanna eins og á myndinni.

c Dragðu endapunkta strengjanna til þannig að hornin og bogarnir breytist. Kannaðu hvort uppgötvun þín í a-lið eigi enn við.

d Skrifaðu setningu um hornin milli tveggja strengja sem skerast inni í hring.

e Hver er niðurstaðan ef svo vill til að strengirnir skerist í miðju hringsins?

Þrívíð rúmfræðiform

4.121 Viftur í tjaldvagna eru gerðar til að fjarlægja raka. Þær ganga fyrir sólarrafhlöðum og eru í laginu eins og píramídar til að fá sem mesta sól úr öllum áttum.

Hversu stórt er yfirborðsflatarmál slíkrar viftu þar sem grunnflöturinn er 710 mm · 710 mm og hæðin er 380 mm?

4.122 Vatnsturninn í Svaneke á Borgundarhólmi í Danmörku er í laginu eins og píramídi með þríhyrningslaga botnfleti.

Þríhyrningurinn í grunnfletinum hefur 5,5 m grunnlínu og 4,7 m hæð. Hæð vatnsturnsins sjálfs er 22 m.

Hve marga lítra af vatni inniheldur turninn þegar hann er fullur?

4.123 Fyrr á tímum voru kramarhús algeng þegar smáhlutir voru keyptir. Vöffluform fyrir ís eru oft svona í laginu.

Hversu stórt yfirborðsflatarmál hefur kramarhús sem gert er úr hringgeira með 25 cm geisla og 40° horni?

4.124 Nína er að verða 15 ára og vinkonurnar ætla að koma henni á óvart með veislu.

Þær búa til skemmtilega keilulaga hatta handa öllum. Hattarnir eru úr hringgeirum sem eru 220° og hafa geislann 8 cm.

a Hve stórt flatarmál þurfa þær að skreyta ef þær ætla að skreyta einn hatt handa hverjum gestanna?

b Vinkonurnar skreyttu hattana með pallíettum og það tók tíu mínútur að skreyta 20 cm^2 af hverjum hatti.

Hve langan tíma þurftu vinkonurnar til að skreyta alla hattana ef þær voru sex talsins og unnu þetta allar á sama tíma?

4.125 Stína kaupir „kínahatt" þegar hún er í fríi í Shanghai. Hliðarbrún hattsins er 30 cm og hann er 50 cm víður.

Hvað er yfirborðsflatarmál hattsins?

4.126 Í tómstundabúðinni er hægt að kaupa pappakeilur í mismunandi stærðum.

Reiknaðu út rúmmál og yfirborðsflatarmál hinna mismunandi keilna.

Hæð	Þvermál
10 cm	5,5 cm
12 cm	7 cm
15 cm	8 cm
30 cm	15 cm

4.127 Þrír boltar passa nákvæmlega hver ofan á annan í sívalningslaga boxi. Boltarnir passa nákvæmlega inn í sívalninginn. Geisli boltanna er 3 cm.

a Finndu yfirborðsflatarmál og rúmmál sívalningsins.

b Hvað fylla boltarnir út í mörg prósent af rúmmálinu?

c Hve mikið vatn rúmar boxið þegar boltarnir eru í því?

4.128 Eldfjall nokkurt er í laginu eins og keila.

Af öryggisástæðum er ekki leyfilegt að byggja hús í hlíðum eldfjallsins. Geisli fjallsins er 3,5 km og fjallshlíðin er 3,8 km á lengd.

Hversu stórt flatarmál kringum eldfjallið er lokað fyrir íbúðabyggingum?

4.129 Kassi er í laginu eins og réttur strendingur. Flatarmál hliðarflatanna er 96 cm^2, 252 cm^2 og 168 cm^2.

a Hvaða mál geta verið á strendingnum (lengd, breidd og hæð)?

b Hve margir lítrar af hrísgrjónum komast fyrir í strendingnum?

Þjálfaðu hugann

4.130 Stafli með appelsínum myndar píramída með ferningslaga grunnfleti sem í eru 5 · 5 appelsínur. Hver appelsína fyrir ofan þennan grunnflöt hvílir í gróp sem fjórar appelsínur mynda undir henni. Efsta lagið er ein appelsína. Þegar þú gerir útreikningana hér á eftir skaltu reikna með því að allar appelsínurnar séu kúlulaga með 4,5 cm geisla.

a Teiknaðu mynd af appelsínunum.
Hve margar appelsínur eru í píramídanum?

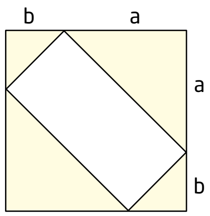
b Finndu heildarrúmmál appelsínanna.

c Koma á appelsínupíramídanum fyrir í píramídalagaðri öskju þannig að þær passi alveg inn í hana. Jafnvel þótt hvert lag „sökkvi ofurlítið niður“ getur þú reiknað með því að hvert lag sé jafn þykkt og ein appelsína. Hvaða mál þarf askjan að hafa? Teiknaðu mynd.

d Reiknaðu út rúmmál öskjunnar og finndu hve mörg prósent af rúmmálinu eru ekki appelsínur.

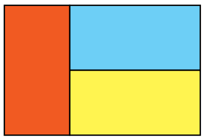
4.131 Rétthyrningnum á myndinni til hægri er komið þannig fyrir að hornin skipta hliðinni í ferningnum í hlutfallinu a : b = 2 : 1.

Hvað nær rétthyrningurinn yfir stóran hluta af flatarmáli ferningsins?



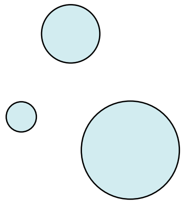
4.132 Teiknaðu jafnhliða þríhyrning og reglulegan sexhyrning sem hafa jafn stórt ummál. Finndu hlutfallið milli flatarmáls sexhyrningsins og flatarmáls þríhyrningsins.

4.133 Þremur rétthyrningum í sömu stærð og með sömu lögun er raðað saman í einn stóran rétthyrning, sjá myndina til hægri. Flatarmál stóra rétthyrningsins er 168 cm^2.



Finndu flatarmál fernings sem hefur sama ummál og stóri rétthyrningurinn.

4.134 Grafískur hönnuður ætlar að búa til lógó handa fyrirtæki nokkru. Lógóið á að vera úr fjórum hringjum en þrír þeirra eiga að vera staðsettir eins og myndin sýnir. Þar að auki á að vera fjórði hringurinn sem snertir alla hina þrjá hringinn.



Hve mörg mismunandi lógó er hægt að búa til út frá þessari kröfu? Gerðu skissu af hverri lausn.

5 Líkur og talningarfræði

Líkindareikningur fjallar um að geta séð fyrir atburði og taka nauðsynlegt mið af þeim til að forðast óhöpp og slys. Verðbréfaviðskipti, jarðfræði, veðurfræði og lyfjafræði eru dæmi um greinar þar sem nytsamlegt er og mikilvægt að geta reiknað út líkur.

Stærðfræðiorð

líkur
talningarfræði
hagstæður
útkomumengi
jafnar líkur
háður
óháður
líkindatré
krosstafla
mengi
Vennmynd
sammengi
sniðmengi
fyllimengi

?

Þú átt 30 kr. í vasanum.

Á hve marga vegu geturðu búið þessa upphæð til með mismunandi myntum?

Við getum einnig haft gagn af að meta líkur í spilum og við ýmsar aðstæður í daglegu lífi. Líkindareikningur felst ekki í að spá um framtíðina heldur í því að meta áhættu.

Einfaldar líkur

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út líkur við einfaldar hversdagslegar aðstæður
- skrá líkur með almennum brotum, tugabrotum og prósentum
- sjá mismuninn á jöfnum líkum og ójöfnum líkum

Áður hefur þú lært mikið um tölfræði. Tölfræði felst í að fá yfirlit yfir talnagögn. Líkindareikningur líkist tölfræði mjög mikið en í líkindareikningi eru gögn og útreikningar notaðir til að finna út hversu líklegt er að eitthvað gerist.

5.1 Tveir og tveir nemendur ræða saman um eftirfarandi atriði, síðan öll bekkjardeildin í heild.

a Við hvaða aðstæður hugsið þið um hvort eitthvað muni gerast?

b Nefnið að minnsta kosti þrjár atvinnugreinar þar sem þið teljið mikilvægt að geta séð atburði fyrir.

c Hvað haldið þið að orðið „áhætta“ þýði?

d Fólk segir að líkurnar á rigningu á morgun séu 70%. Hvað þýðir það og á hverju byggist það?

5.2 Hver nemendanna hefur rétt fyrir sér?
Ræðið saman um hvaða fullyrðing er rétt þegar lukkuhjólinu hér fyrir neðan er snúið.

Meistaraheili

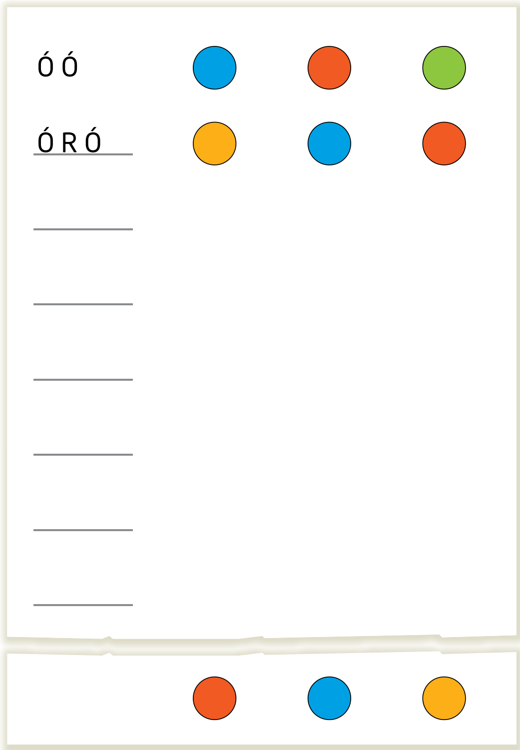
Spilið er fyrir tvo og tvo nemendur.

Þið þurfið

- pappír
- fjóra mismunandi litblýanta

Aðferð

1. Annar leikmaðurinn býr til dulkóða með því að lita þrjá hringi í þremur mismunandi litum. Dulkóðann þarf að fela fyrir hinum.
2. Hinn leikmaðurinn giskar á hvaða litir eru á hringjunum þremur og litar þá efst á blaði.
3. Svarið, sem hann fær, er þannig að ef litur er réttur og á réttum stað fær nemandinn eitt R. Réttur litur á röngum stað gefur Ó.
4. Þannig heldur þetta áfram þar til nemandinn fær svarið R-R-R.
5. Skipt er um hlutverk.



Markmiðið er að finna litadulkóðann í sem fæstum tilraunum.

Afbrigði 1

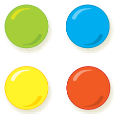
Spilið víkkað út þannig að hringirnir verði fjórir og sex mögulegir litir. Svörin má einnig gefa þannig að andstæðingurinn viti ekki hvaða litur eða hvaða staðsetning er rétt.

Afbrigði 2

Nota skal fjórar–sex tölur í staðinn fyrir liti.

Fræðilegar líkur

Þegar sagt er að eitthvað sé fræðilegt er átt við að það sé hugsanlegt eða útreiknanlegt án þess að það sé framkvæmt í reynd.



Á spássíunni sérðu fjóra spilapeninga, gulan, bláan, grænan og rauðan. Hugsaðu þér að þú sért með bundið fyrir augu og eigir að prófa að draga bláa spilapeninginn. Þú hefur fjóra mögulega liti til að velja úr. Það þýðir að einn dráttur hefur fjórar mögulegar útkomur eða niðurstöður. Í þessu tilviki er ein þeirra hagstæð fyrir þig.

Við getum tilgreint líkurnar sem almennt brot. Þar sem einn af fjórum möguleikum fullnægir óskinni um bláan spilapening eru líkurnar á atburðinum „blár“ þessar:

$$P\,(\text{blár}) = \frac{\text{hagstæðar útkomur}}{\text{mögulegar útkomur}} = \frac{1}{4}$$

Bókstafurinn P táknar líkur og er dreginn af enska orðinu „probability“.
Í sviganum er skrifaður sá atburður sem við reiknum líkurnar á.

Útkoma er möguleg niðurstaða úr ákveðnum viðburði.

Mögulegar **útkomur** eru allar útkomur eða valmöguleikar sem koma til greina í ákveðnum viðburði.

Hagstæðar útkomur eru þær útkomur sem reikna skal líkurnar á.

Atburður er mengi af útkomum sem uppfylla tiltekin skilyrði.

$$\text{Líkur } (P) = \frac{\text{hagstæðar útkomur}}{\text{mögulegar útkomur}}$$

Sýnidæmi 1

María á öskju með fimm brjóstsykurmolum, tveimur gulum og þremur rauðum. Hún tekur einn mola blindandi úr öskjunni. Hverjar eru líkurnar á að hún taki gulan mola?

Útskýrðu hver atburðurinn er og hverjar mögulegar útkomur tilraunarinnar eru.

Tillaga að lausn

Mögulegar útkomur eru gulir og rauðir molar. Atburðurinn, sem spurt er um líkurnar á, er gulur moli.

Líkurnar á „gulum“: $P\,(\text{gulur}) = \frac{\text{hagstæðar útkomur}}{\text{mögulegar útkomur}} = \frac{2}{5}$

Líkurnar á að María fái glulan mola eru $\frac{2}{5}$

Sýnidæmi 2

Allan tíndi átta sveppi en veit ekki að tveir þeirra eru eitraðir. Hverjar eru líkurnar á að hann borði eitraðan svepp ef hann fær sér einn af sveppunum átta?

Mundu að stytta alltaf brotin í svari.

Tillaga að lausn

Líkurnar á eitruðum svepp: $P\,(\text{eitraður}) = \frac{\text{hagstæðar útkomur}}{\text{mögulegar útkomur}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Líkurnar á að Allan fái eitraðan svepp eru $\frac{1}{4}$

Orðið „hagstæður“ er bundið þeim möguleika sem spurt er um. Það merkir raunverulega ekki hvort möguleikinn er hagstæður eða hentugur fyrir þann sem spyr. Þótt spurt sé eftir einhverju neikvæðu er orðið „hagstæður“ samt sem áður notað.

5.3 Finndu líkurnar

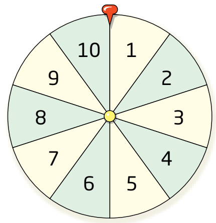
a á að fá þorsk þegar þú kastar krónupeningi

b á að fá fjarka þegar þú kastar upp teningi

c á að fá slétta tölu þegar þú kastar upp teningi

d á að fá lauf ef þú dregur spil úr venjulegum spilastokki sem í eru 52 spil

e á að fá annaðhvort 7 eða 8 á lukkuhjóli með tíu jafn stórum hringgeirum sem eru tölusettir 1-10?



5.4 Á fótboltaæfingu eru fimm leikmenn í rauðum peysum, átta í bláum peysum og þrír í svörtum. Einn leikmannanna er í marki.

a Hverjar eru líkurnar á að markmaðurinn sé í rauðri peysu?

b Hverjar eru líkurnar á að markmaðurinn sé í blárri eða svartri peysu?

5.5 Í bekkjardeild með 28 nemendum á að velja bekkjarfulltrúa með því að draga nafn eins nemanda.

a Hverjar eru líkurnar á að nafn Lísu verði dregið?

Í bekkjardeildinni eru 16 stelpur og 12 strákar.

b Hverjar eru líkurnar á að bekkjarfulltrúinn verði strákur?

5.6 Á skólaballi voru dregnir út 5 happdrættisvinningar úr seldum miðum á ballið. Á ballið komu 150 nemendur.

a Hverjar eru líkurnar á að fá vinning?

Þar að auki voru dregin út tvö gjafabréf meðal þeirra 50 fyrstu sem komu.

b Hverjar eru líkurnar á að einn af þessum 50 nemendum fái gjafabréf?

5.7 Í kökuhappdrætti voru 300 happdrættismiðar og 10 kökur.

a Hverjar voru líkurnar á að vinna köku í happdrættinu?

b Þegar 50 happdrættismiðar höfðu verið seldir höfðu þrír heppnir unnið eina köku hver. Hverjar voru líkurnar á að vinna köku eftir þetta?

c Þegar 50 happdrættismiðar voru eftir reiknaði einn viðskiptavinurinn það út að líkurnar á að vinna köku væru $\frac{1}{25}$.
Hve margar kökur voru þá eftir?

5.8 Í poka eru sjö kúlur. Þú átt að draga blindandi eina kúlu úr pokanum. Ræddu við bekkjarfélaga þinn um fullyrðingarnar hér á eftir. Hver er þín skoðun?

A
Það eru $\frac{1}{4}$ líkur á að draga hvíta kúlu.

B
Það eru 14% líkur á að draga græna kúlu.

C
Það eru jafn miklar líkur á að draga svarta kúlu og að draga annaðhvort bláa eða hvíta kúlu.

D
Það eru yfir 70% líkur á að draga ekki hvíta kúlu.

5.9 Í poka eru níu kúlur, tvær rauðar, fjórar bláar og þrjár gular.

a Finndu líkurnar á að þú dragir rauða kúlu.

b Finndu líkurnar á að þú dragir bláa eða gula kúlu.

c Finndu líkurnar á að þú dragir ekki bláa kúlu.

Líkur skráðar sem almenn brot, tugabrot og prósent

Fram að þessu hafa líkur verið skráðar sem almenn brot en við vitum frá fyrri tíð að almenn brot má bæði skrifa sem tugabrot og sem prósent. Algengt er að tákna líkur í prósentum. Þegar líkur á tveimur útkomum eru jafnar eru líkurnar $\frac{1}{2}$ eða 50 %.

Í daglegu tali er sagt að líkurnar á einhverju séu 50–50 eða „fifty-fifty“. Oft er notað orðið helmingslíkur.

Sýnidæmi 3

Allir leikmenn fótboltaliðs nokkurs selja happdrættismiða. Það eru seld 1000 númer með tölunum 1 til 1000. Númer vinningsmiða enda á tölunum 33, 66 eða 99. Hve miklar líkur eru á að vinna? Skrifaðu svörin sem almenn brot, tugabrot og prósent.

Tillaga að lausn

Það eru þrjú vinningsnúmer í hverju hundraði af miðum. Þá eru vinningsmiðarnir tífalt fleiri í 1000 miðum, það er að segja 30 (hagstæð) vinningsnúmer alls.

$$P(\text{vinningur}) = \frac{\text{hagstæð númer}}{\text{möguleg númer}} = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$$

Við getum skrifað almenna brotið sem tugabrot eða prósent þannig:

$$\frac{3}{100} = 3 : 100 = 0{,}03$$

$$0{,}03 = 0{,}03 \cdot 100\ \% = 3\ \%$$

Líkurnar á að vinna eru $\frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$.

5.10 Í leikfimistíma lét kennarinn nemendur velja milli fimm mismunandi æfinga. Taflan til hægri sýnir hve margir völdu hvaða æfingu. Skrifaðu svörin sem almennt brot, prósent og tugabrot.

a Hve miklar líkur eru á að Sölvi hafi valið styrktaræfingar?

b Hverjar eru líkurnar á að Sigrún hafi valið fimleika eða dans?

c Hverjar eru líkurnar á að Sonja hafi valið útiæfingar?

d Búðu til tvö verkefni um líkur út frá töflunni á spássíunni handa bekkjarfélaga þínum. Síðan skiptist þið á verkefnum og leysið verkefni hvor annars. Loks gangið þið úr skugga um hvort lausnirnar eru réttar og ræðið um þær.

Skokk utanhúss	5
Dansæfing innanhúss	3
Fimleikar innanhúss	6
Styrktaræfingar innanhúss	7
Hástökk utanhúss	5

5.11 Skráðu líkurnar hér á eftir sem almenn brot, prósent og tugabrot.

a Það eru 90% líkur á að það verði rigning á morgun.

b Líkurnar á að einhver nemandi í einni bekkjardeild taki skólabíl eru $\frac{2}{5}$.

c Það eru 80% líkur á því að Fjóla hafi svarað öllu rétt á prófinu.

d Líkurnar á að Pétur fari í bláa úlpu á morgnana eru $\frac{3}{4}$.

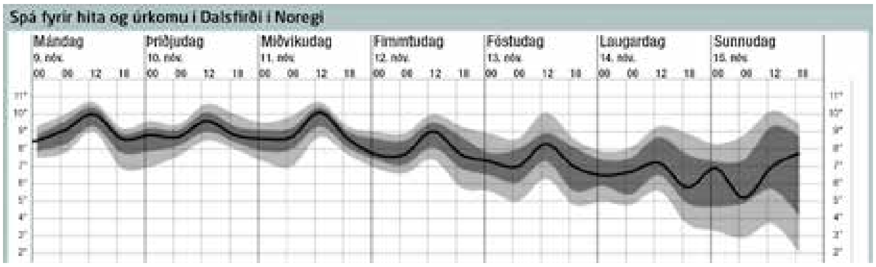
e Líkurnar á að taka brjóstsykur með jarðarberjabragði úr pokanum eru 0,2.

f Það eru 30% líkur á að bankinn hækki vextina.

5.12 Hallveig Fróðadóttir og Ingólfur Arnarson bjuggu á sínum tíma í Dalsfirði í Noregi. Þau reistu sér síðar bú í Reykjavík. Hér að neðan er spá fyrir hita og úrkomu í Dalsfirði.

Heildregna línan sýnir hitaspá (°C) og gráskyggða svæðið umhverfis línuna gefur til kynna hversu áreiðanleg spáin er. Því stærra sem gráa svæðið er, því meiri óvissa er í hitaspánni.

Hitastig:
Dökkgrár litur: 50% líkur
Ljósgrár litur: 30% líkur



a Hvaða daga er spáð um 10 stiga hita á hádegi?

b Hvaða dag er óvissan mest í hitaspánni sem gildir á hádegi?

c Hvenær verður kaldast?

d Hvenær eru um helmings líkur á að hitinn verði 7-9 stig

5.13 Báðir foreldrar Óla eru með húðsjúkdóminn psoriasis.

a Hvað merkir það að rannsóknir hafi sýnt að líkurnar á að Óli erfi sjúkdóminn séu 65-70%?

b Óli og systkini hans eru fimm talsins. Hve mörg þeirra munu að líkindum erfa sjúkdóminn? Útskýrðu hvers vegna.

5.14 Í landi nokkru er mæld hæð 25 000 lögreglumanna.

a Það eru 5% líkur á að lögreglumaður, sem valinn er af handahófi, sé 180 cm á hæð. Hve margir lögreglumenn eru að líkindum 180 cm á hæð?

b Það eru 3% líkur á að lögreglumaður, sem valinn er af handahófi, sé 172 cm á hæð. Hve margir lögreglumannanna eru að líkindum 172 cm á hæð?

c Skráðu líkurnar í a-lið og b-lið sem almenn brot og sem tugabrot.

5.15 Finndu líkurnar og skrifaðu þær sem almenn brot og sem tugabrot.

a Það eru 99% líkur á að fyrirliði fótboltafélagsins leiki með öðru liði á næsta leiktímabili.

b Ef maður lendir í snjóflóði eru 90% líkur á að maður lifi af fyrstu 15 mínúturnar en þegar liðnar eru 45 mínútur eru 25% líkur á að maður sé á lífi.

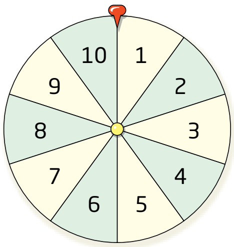
5.16 Hver nemendanna hér á eftir hefur rétt fyrir sér? Ræddu fullyrðingarnar við bekkjarfélaga þinn og færðu rök fyrir þinni skoðun.

Jafnar eða ójafnar líkur

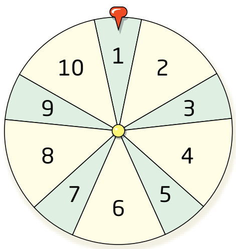
Þegar um fræðilegar líkur er að ræða eru oftast jafnar líkur á öllum útkomunum.

Jafnar líkur – allar útkomurnar hafa sömu líkur

A



B



Sýnidæmi 4

Í tívolíi eru tvö mismunandi lukkuhjól. Á báðum hjólunum eru númerin 1-10. Á hvoru hjólinu eru jafnar líkur og á hvoru þeirra eru ójafnar líkur?

Tillaga að lausn

Lukkuhjól A hefur jafnar líkur vegna þess að jafnar líkur eru á að fá allar tíu útkomurnar.

Lukkuhjól B hefur ójafnar líkur vegna þess að hringgeirarnir tíu eru misstórir og þess vegna eru ójafnar líkur á að fá útkomurnar tíu.

5.17 Ræddu fyrst við bekkjarfélaga þinn og síðan ræðir öll bekkjardeildin saman.

- Hvaða útkomur eru mögulegar í hverju tilviki?
- Eru jafnar eða ójafnar líkur á útkomunum? Rökstyðjið svörin.

a Þú kastar krónupeningi.

b Þú ferð yfir götu á gangbraut þar sem rautt ljós er í 60% af tímanum.

c Þú kastar teningi.

d Handboltaleikmaður á að taka vítakast.

e Þú átt að fara í flugvél en ert hrædd(ur) um að flugvélin hrapi.

5.18 Hvaða útkomur eru mögulegar í hverju tilviki? Eru jafnar eða ójafnar líkur á útkomunum?

a Þú kastar teningi og vilt fá slétta tölu.

b Þú ferð í leikinn „skæri, blað, steinn“.

c Þú átt að draga fyrstu töluna í happdrætti.

d Þú spilar fótbolta og vilt vinna.

5.19 Segðu til um hvort líkurnar eru jafnar eða ójafnar.

Þú hefur fjögur spjöld með tölunum 1 til 4. Þú átt að draga tvö spjöld og leggja tölurnar saman.

a Eru jafnar líkur á að fá summu sem er slétt tala og að fá summu sem er oddatala?

b Eru jafnar eða ójafnar líkur á útkomunum?

5.20 Búðu til spil þar sem jafnar líkur eru á útkomunum. Líkurnar á að fá slétta tölu og oddatölu eru jafnar þegar þú dregur spjöld eins og í verkefninu hér á undan.

5.21 Þú dregur kúlu úr poka þar sem eru eins kúlur en í mismunandi litum. Þú vilt draga rauða kúlu. Eru líkurnar jafnar eða ójafnar þegar í pokanum eru

a 2 bláar og 2 rauðar kúlur?

b 3 bláar, 3 rauðar og 3 grænar kúlur?

c 2 bláar, 2 rauðar og 3 gular kúlur?

5.22 Þú vilt draga rauða kúlu úr pokanum. Bættu við eða taktu burt einhverjar kúlur úr pokanum þannig að líkurnar verði jafnar. Lýstu því hvernig þú ferð að. Hverjar eru líkurnar á að draga rauða kúlu í hverju tilviki hér fyrir neðan þegar í pokanum eru

a 3 gular, 4 bláar og 5 rauðar kúlur?

b 13 grænar, 2 rauðar, 1 gul og 8 grænar kúlur?

c 4 bláar, 3 svartar, 6 rauðar, 2 grænar og 5 hvítar kúlur?

d 3 appelsínugular, 4 gular, 5 grænar, 6 hvítar, 8 bleikar og 4 rauðar kúlur?

e Ef þú breytir eins litlu og mögulegt er – hve margar kúlur eru í hverjum poka eftir að þú hefur bætt við eða fjarlægt kúlur í a-lið, b-lið, c-lið og d-lið?

5.23 Teiknaðu lukkuhjól með átta mismunandi litum sem uppfyllir þessi skilyrði:

a Á fyrsta lukkuhjólinu eru jafnar líkur.

b Á næsta lukkuhjóli eru ójafnar líkur.

c Þriðja lukkuhjólið hefur annað form en hjólið í a-lið en á því eru samt jafnar líkur.

Talningarfræði

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- segja til um útkomumengi tilraunar eða annars tilviks
- greina á milli óháðra og háðra útkoma
- reikna út fjölda mögulegra samsetninga
- skrá gögn í krosstöflur og í talningartré
- finna sammengi, sniðmengi og fyllimengi gagna

Í talningarfræði flokkum við gögn í mengi og reiknum út fjölda möguleika á að raða þeim saman. Slíkir röðunarmöguleikar kallast samsetningar.
Þegar reikna á út líkur þarf fyrst að fá yfirlit yfir hvaða útkomur eru mögulegar.

> Allar mögulegar útkomur úr tilraun eða öðrum viðburði kallast **útkomumengi**, *Ú*.

Sýnidæmi 5

Hvert er útkomumengi þessara tveggja tilrauna?

a Þú kastar teningi   **b** Þú kastar krónupeningi.

Tillaga að lausn

a *Ú* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}   **b** *Ú* = {þorskur, bergrisi}

Þetta er lesið þannig: *Ú* er jafnt og mengið þorskur, bergrisi

5.24 Finndu útkomumengin:

a Einkunnir á prófi

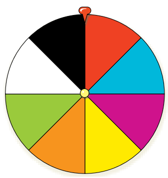
b Að kasta teiknibólu

c Blóðflokkur sjúklings

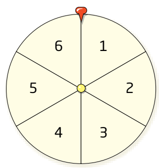
d Sýslan sem þú býrð í

5.25 Skoðaðu lukkuhjólin og finndu útkomumengin.

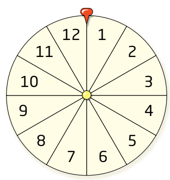
a



b



c



Ýmis verkefni

Að skipta jarðarberjum

Þið skuluð vinna saman í þriggja nemenda hópum.
Hvernig er hægt að skipta sjö jarðarberjum milli þriggja nemenda ef allir eiga að fá að minnsta kosti eitt?

Þið þurfið

- plastkubba til að tákna jarðarber
- pappír og blýant

Aðferð

1 Skiptið jarðarberjunum/plastkubbunum milli ykkar.
Skiptið þessum sjö jarðarberjum þannig að allir fái að minnsta kosti eitt jarðarber.

2 Búið til vel skipulagða töflu sem sýnir alla hina mismunandi möguleika á að skipta jarðarberjunum sjö.

Nemandi 1	Nemandi 2	Nemandi 3

3 Hvað getið þið fundið marga mismunandi möguleika?

4 Notið yfirlitið í töflunni ykkar.
Finnið líkurnar á að nemandi 1 fái fimm jarðarber.
Finnið líkurnar á að nemandi 2 fái bara eitt jarðarber.
Finnið líkurnar á að nemandi 3 fái meira en fjögur jarðarber.
Finnið líkurnar á að nemandi 1 og nemandi 2 fái samtals færri jarðarber en nemandi 3.
Finnið líkurnar á að nemandi 2 fái fleiri en tvö jarðarber.

5 Búið til ykkar eigin tvö verkefni um líkur út frá töflunni ykkar.
Skiptist síðan á verkefnum við annan nemendahóp.

Afbrigði

- Skiptið jarðarberjunum sjö á milli fleiri nemenda.
- Skiptið fleiri jarðarberjum.
- Finnið tengsl milli fjölda samsetninga eftir fjölda jarðarberja og fjölda nemenda.

Óháðar útkomur

Leikur 1	Leikur 2	Leikur 3
H	H	H
H	H	J
H	H	Ú
H	J	H
H	J	J
H	J	Ú
H	Ú	H
H	Ú	J
H	Ú	Ú
J	H	H
J	H	J
J	H	Ú
J	J	H
J	J	J
J	J	Ú
J	Ú	H
J	Ú	J
J	Ú	Ú
Ú	H	H
Ú	H	J
Ú	H	Ú
Ú	J	H
Ú	J	J
Ú	J	Ú
Ú	Ú	H
Ú	Ú	J
Ú	Ú	Ú

Dag nokkurn eru spilaðir þrír fótboltaleikir. Hver leikur hefur þrjár mögulegar útkomur: heimasigur, jafntefli, útisigur:

Útkomumengi = {H, J, Ú}

Niðurstaðan úr einum leik er ekki háð niðurstöðunni í hinum leikjunum. Til að fá heildaryfirlit yfir allar mögulegar útkomur úr leikjunum þremur má setja upp töflu þar sem möguleikunum er raðað eftir ákveðnu kerfi, sjá töfluna á spássíunni.

Við teljum og sjáum að mögulegar samsetningar eru 27 talsins.

Þótt fjöldi sé lítill geta samsetningarnar orðið mjög margar. Þess vegna þurfum við að geta reiknað út fjöldann í stað þess að þurfa alltaf að telja.

Við sjáum að fyrir hverja af útkomunum þremur í leik 1 eru þrjár útkomur mögulegar í leik 2. Þetta eru því $3 \cdot 3 = 9$ útkomur. Fyrir hverja þeirra eru aftur þrjár útkomur mögulegar í leik 3. Mögulegar útkomur alls í leikjunum þremur verða því $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Margfeldisreglan
Fjöldi mögulegra útkomna margra mismunandi viðburða er margfeldið af fjölda útkomna hvers viðburðar fyrir sig.

Sýnidæmi 6

Markús á fernar buxur og sex peysur. Á hve marga vegu getur hann raðað saman buxum og peysum?

Tillaga að lausn

Fjöldi samsetninga = $4 \cdot 6 = \underline{\underline{24}}$

5.26 Velja á eina stelpu og einn strák úr bekkjardeildinni þinni til að vinna verkefni.

Hvað er hægt að mynda mörg mismunandi pör?

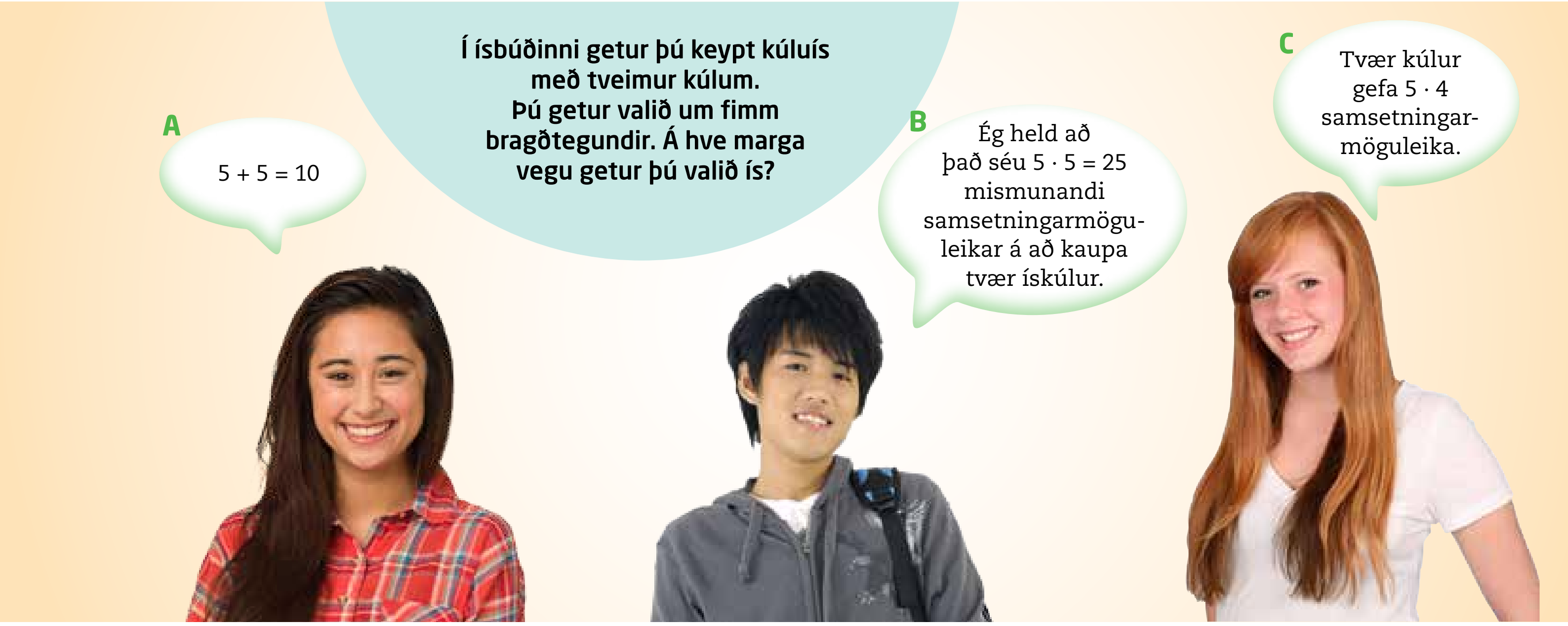
5.27 Fótboltaliðið nokkurt ætlar að velja sér búninga. Liðið getur valið um fimm liti á buxum og níu liti á peysum.

Hvað getur liðið valið um margar samsetningar á búningum?

5.28 Bekkjardeildin framkvæmir fjölvalsspurningakönnun með þremur óháðum spurningum. Fjórir svarmöguleikar eru við hverja spurningu. Aðeins eitt svar við hverri spurningu er rétt. Einn nemandi giskar á svörin við öllum spurningunum þremur.

Á hve marga mismunandi vegu getur þessi nemandi svarað spurningakönnuninni?

5.29 Hvaða fullyrðing heldur þú að sé rétt? Ræddu þetta verkefni við bekkjarfélaga þinn.



5.30 Finndu fjölda samsetningarmöguleika á pin-númeri fyrir bankakortið þitt.

- **a** Í því eru fjórir tölustafir valdir af handahófi frá 0 til 9.
- **b** Í því eru aðeins fjórir tölustafir hærri en 5.
- **c** Í því eru aðeins tölustafir sem eru sléttar tölur.

5.31 Finndu fjölda samsetningarmöguleika.

- **a** Hvað getur þú búið til margar þriggja stafa tölur með þremur mismunandi tölustöfum?
- **b** Hvað getur þú búið til margar fjögurra stafa tölur með fjórum mismunandi tölustöfum?
- **c** Hvað getur þú búið til margar fimm stafa tölur með fimm mismunandi tölustöfum?

Hluti A: Fyrstur í mark

Þið þurfið

- tvo teninga
- pappír og blýant
- eyðublað eins og það sem hér er sýnt

Aðferð

Þetta spil er fyrir tvo eða þrjá leikmenn.
Þeir kasta um hver á að byrja.
Þeir teikna eyðublað eins og sýnt er hér til hægri.

Hluti 1: Veljið til skiptis eina tölu í einu í neðstu línunni þar til búið er að velja allar tölurnar. Merkið með tákni eða lit hvaða leikmaður á hvaða tölu.

Hluti 2: Kastið tveimur teningum og reiknið út summu talnanna sem koma upp. Sá sem á töluna krossar í þann dálk. Leikmenn kasta teningunum til skiptis. Sá vinnur sem á töluna sem fyrst kemst að markalínunni.

Markalína

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ræðið saman

Er niðurstaðan alveg tilviljanakennd eða er hægt að nota vissa kænsku til að vinna?

Hluti B: Bingó

Þið þurfið

- bingóspjald með 4 · 4 reitum sem þið búið til

Kennarinn þarf

- tvo teninga með tölunum 1-6 eða 1-10

Aðferð

Allir búa til sitt eigið bingóspjald með 4 · 4 reitum. Skráið í alla reitina sennilegar tölur. Kennarinn kastar tveimur teningum og nefnir þær upphátt. Allir margfalda tölurnar í huganum og krossa yfir réttar tölur á bingóspjaldinu sínu.

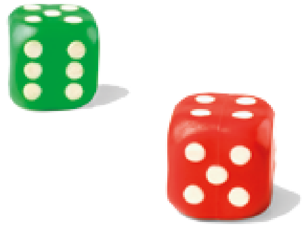
Ef teningurinn með tölunum 1-6 er notaður verða margfeldin tölur upp í 36. Ef um er að ræða tening með tölunum 1-10 verða margfeldin tölur upp í 100. Skrifa má sömu töluna á fleiri en einn stað á bingóspjaldinu. Sá vinnur sem er fyrstur að fá fjóra í röð.

Ræðið saman

Er niðurstaðan alveg tilviljanakennd eða er hægt að nota vissa kænsku til að vinna?

Afbrigði

Þú kastar tveimur teningum, grænum og rauðum. Ef þú færð 5 á græna teningnum og 2 á þeim rauða er hægt að sjá að það er önnur útkoma en 2 á græna teningnum og 5 á þeim rauða. Ef þú kastar tveimur hvítum teningum og færð 5 og 2 skiptir ekki máli hvor teningurinn sýnir hvaða tölu en mundu að það er samt sem áður hægt að fá 2 og 5 á tvo vegu.



Til að hafa yfirsýn yfir útkomur tveggja óháðra tilrauna má nota krosstöflu.

Krosstafla er notuð til að setja gögn skipulega fram.

Sýnidæmi 7

Kamilla saxar niður fjórar tegundir af grænmeti (agúrku, gulrót, papriku og blómkál) og býr til tvær tegundir af ídýfu (úr sýrðum rjóma og salsa). Búðu til krosstöflu sem sýnir alla möguleikana á að velja saman grænmeti og ídýfu.

Tillaga að lausn

Grænmeti / Ídýfa	Agúrka (A)	Gulrót (G)	Paprika (K)	Blómkál (B)
Sýrður rjómi (R)	AR	GR	KR	BR
Salsa (S)	AS	GS	KS	BS

5.32 Hve margar samsetningar úr mat og drykk er hægt að velja úr matseðlinum til hægri? Finndu og sýndu lausnina með krosstöflu.

Matur og drykkur

MATUR	DRYKKUR
Smurt brauð	Gos
Samloka	Safi
Baka	Kaffi
Salat	Te
Súpa	Vatn
Pottréttur	
Pasta	

5.33 Mjólkurbú nokkurt auglýsir samkeppni um tillögur um nýjar tegundir af jógúrt, þar sem sameina á eina ávaxtategund og eina berjategund. Mjólkurbúið fær tillögur um sjö nýjar ávaxtategundir og fimm nýjar berjategundir.

a Hve margar mismunandi nýjar jógúrttegundir koma til greina ef mjólkurbúið blandar saman einni ávaxtategund og einni berjategund?

b Lísa sendi fjórar tillögur í samkeppnina. Hve miklar líkur eru á að ein af hennar tillögum verði valin ef mjólkurbúið velur af handahófi eina samsetningu af ávöxtum og berjum?

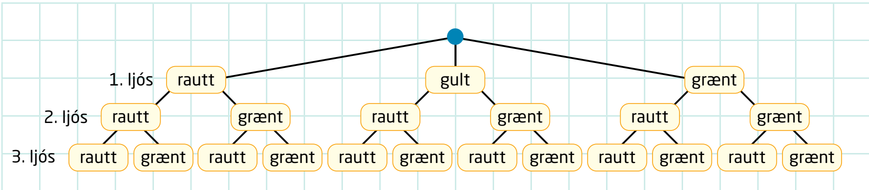
Þegar við þurfum að hafa yfirlit yfir útkomur úr fleiri en tveimur óháðum tilraunum eða öðrum viðburðum er ekki hægt að nota krosstöflu. Þá hentar talningartré betur.

Sýnidæmi 8

Á leið Silju í skólann eru þrjú umferðarljós. Eitt þeirra sýnir rautt, gult eða grænt ljós en hin tvö sýna rautt eða grænt ljós. Sýndu með talningartré hvaða möguleikar á ljósum geta verið á leið Silju í skólann.

Tillaga að lausn

Talningartré:

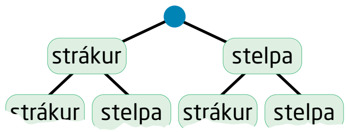


5.34 Á fjölvalsprófi færðu þrjár spurningar. Tvær þeirra eru já/nei-spurningar og ein spurning hefur þrjá svarmöguleika.

- **a** Á hve marga mismunandi vegu getur þú svarað þessum þremur spurningum?
- **b** Hve miklar líkur eru á að fá rétt svar við öllum þremur spurningunum ef þú giskar á öll svörin?
- **c** Sýndu alla útkomumöguleika fjölvalsprófsins með talningartré.

5.35 Á veitingahúsi nokkru er matseðill með fjórum mismunandi forréttum, þremur aðalréttum og tveimur ábætisréttum. Notaðu talningartré til að finna hve margar mismunandi þriggja rétta máltíðir veitingahúsið getur boðið upp á.

5.36 Í fjölskyldu einni eru nokkur börn.



- **a** Hve margir möguleikar eru á röðinni sem strákur og stelpa fæðast í ef börnin eru þrjú?
- **b** Hve miklar líkur eru á að röð barnanna verði strákur, strákur, stelpa?
- **c** Á hve marga vegu geta strákar og stelpur raðast í fjölskyldu með fimm börn?
- **d** Hve miklar líkur eru á að röð barnanna verði strákur, strákur, stelpa, stelpa, stelpa?
- **e** Á hve marga vegu geta strákar og stelpur raðast í fjölskyldu með sjö börn?
- **f** Hve miklar líkur eru á að röð barnanna verði strákur, strákur, stelpa, strákur, strákur, stelpa, strákur?

5.37 Lísa, afi hennar og amma ætla að fara í óvissuferð með bíl.

Þau komast að samkomulagi um að í hvert sinn sem þau koma að vegamótum skuli þau draga um hvert þau fari næst. Þau ákveða að aka um þrenn vegamót áður en þau koma að stað til að borða hádegisverð.

Á fyrstu vegamótunum var hægt að fara þrjár leiðir og á tveimur næstu vegamótunum var hægt að velja um tvær leiðir.

Búðu til talningartré og finndu fjölda staða þar sem þau geta borðað hádegisverð.

5.38 Í töflunni sérðu hvernig Íslendingar skiptast eftir blóðflokkum. Allir eru í einhverjum þessara fjögurra blóðflokka og þar að auki eru allir annaðhvort rhesus-plús eða rhesus-mínus.

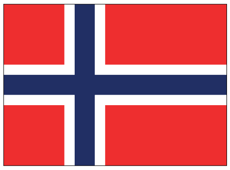
Blóðflokkur	Hlutfall
A	33%
0	54%
B	10,5%
AB	2,5%
Rhesus-plús	85%
Rhesus-mínus	15%

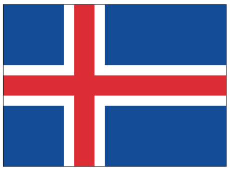
- **a** Hve margar mismunandi samsetningar blóðflokkanna eru til?
- **b** Hver er sjaldgæfasti blóðflokkurinn?
- **c** Tveir vinir velta vöngum yfir hvort þeir séu í sama blóðflokki.
  Hverjar eru líkurnar á að báðir séu í blóðflokki A eða að báðir séu í blóðflokki 0?

5.39 Ólöf ætlar að fermast. Hún getur valið milli tveggja kjóla, tveggja jakka og þriggja skópara.

Búðu til talningartré sem sýnir á hve marga mismunandi vegu Ólöf getur klæðst við ferminguna.

Háðar útkomur


Norski fáninn


Íslenski fáninn

Íslenska og norska fánanum svipar mjög saman. Báðir eru með tvöfaldan kross og litirnir eru rauður, hvítur og blár.

Nú skulum við finna út hve marga mismunandi fána með tvöföldum krossi er mögulegt að búa til með litunum þremur, rauðum, hvítum og bláum. Í þessu tilviki er val nr. 2 og val nr. 3 háð því hvað hefur verið valið á undan vegna þess að aðeins er hægt að nota hvern lit einu sinni.

Við byrjum innst, veljum milli þriggja lita og eigum þá tvo liti eftir.

Í miðjuna veljum við milli tveggja lita og eigum þá einn lit eftir.

Fjöldi útkomna = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Getur þú búið til skissu af öllum fánunum sex?

Sýnidæmi 9

Tvær konur koma inn í strætó þar sem eru sex laus sæti.
Á hve marga mismunandi vegu geta þær valið sæti í vagninum?

Tillaga að lausn

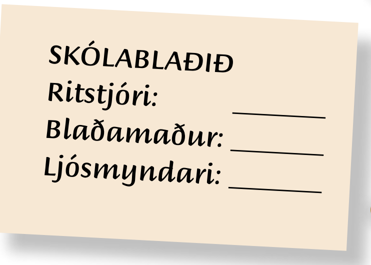
Konan, sem kemur inn í strætóinn á undan, getur valið um sex sæti og sest í eitt þeirra þannig að hin konan getur aðeins valið um fimm sæti.

$6 \cdot 5 = \underline{30}$

Konurnar geta valið um sæti á 30 mismunandi vegu.

5.40 Í skóla nokkrum á að velja þrjá nemendur til að vera ritstjóri, blaðamaður og ljósmyndari skólablaðsins. Umsækjendur eru þrír: Júlía, Inga og Kári.

Á hve marga vegu er hægt að skipta störfunum milli þessara þriggja nemenda?



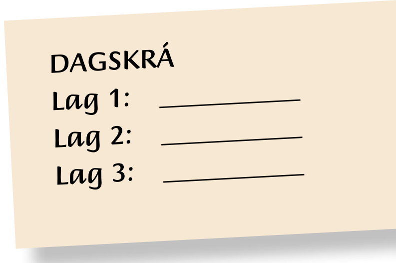
5.41 Pétur, Rúnar, Nói, Jóhannes og Elías keppa í kúluvarpi.
Hve margar mismunandi niðurstöður um röð keppendanna geta orðið úr kúluvarpinu?

5.42 Í nemendaráðinu á að velja nemendur í stjórn ráðsins. Í stjórninni sitja formaður, varaformaður, ritari, gjaldkeri og meðstjórnandi.
Í nemendaráðinu eru níu nemendur.
Hve margar mismunandi stjórnir er hægt að velja?

5.43 Í boðhlaupi eiga að vera sex mislangir áfangar. Á hve marga vegu er hægt að raða liðsmönnum niður á áfangana ef í liðinu eru

- **a** sex nemendur?
- **b** níu nemendur?
- **c** tólf nemendur?

5.44 Í tónmenntartímunum hefur bekkjarhljómsveitin æft átta lög fyrir foreldrakvöldið. Hljómsveitin hefur ekki tíma til að spila öll lögin og þarf að velja þrjú þeirra.
Í dagskrána þarf að skrá röð laganna sem á að spila.



- **a** Á hve marga mismunandi vegu getur hljómsveitin valið þrjú af lögunum átta í ákveðinni röð?
- **b** Hve miklar líkur eru á að eftirlætislag Maríu verði valið sem fyrsta lagið?
- **c** Hve miklar líkur eru á að eftirlætislag Maríu verði valið sem eitt af lögunum þremur?
- **d** Hve miklar líkur eru á að þrjú tiltekin lög verði valin í tilviljanakenndri röð?

5.45 Fimm vinir ætla í bíó. Þeir fá fimm miða hlið við hlið.
Á hve marga vegu geta vinirnir raðað sér í sætin?

5.46 Fjórir nemendur ætla að taka skólabílinn heim til sín.
Á hve marga vegu geta nemendurnir fjórir sest í skólabílnum þegar aðeins eru þrjú sæti laus í bílnum?

5.47 Í stólalyftunni á skíðasvæði nokkru er pláss fyrir fjóra í einu.
Sex stelpur eru á skíðum á svæðinu.

- **a** Á hve marga vegu geta stelpurnar sex komið sér fyrir í stólalyftunni?

Stelpurnar ákveða að prófa alla möguleikana þannig að þær sitji allar með mismunandi sessunautum í mismunandi sætum.

- **b** Stólalyftan er opin frá kl. 9:30 til kl. 15:30. Gerðu ráð fyrir að ferðin upp taki um það bil tíu mínútur og ferðin niður einnig um það bil tíu mínútur. Hve langur tími líður áður en stelpurnar hafa prófað alla samsetningarmöguleikana í stólalyftunni?

Ýmis verkefni

Í hvaða mengi eiga nemendur að vera?

Allir nemendur í bekkjardeildinni vinna saman að þessu verkefni og kennarinn stjórnar.

Þið þurfið

- tvö löng snæri (15-20 m), helst í mismunandi litum;
  í staðinn má teikna hringi með krít á stéttina
- pappír og blýant

Aðferð

1. Bindið saman endana á hvoru snæri þannig að þau myndi hvort um sig hring.
2. Leggið snærin á jörðina og myndið tvo hringi þannig að þeir skarist að hluta eins og í Vennmynd.
3. Byrjið með því að allir nemendurnir standi fyrir utan hringina.
4. Eftir hvert verkefni fara nemendur út úr hringjunum.
5. Teiknið mynd og skráið á hana niðurstöðurnar úr þremur verkefnanna.

Kennarinn segir hvað á að gera.
Eftir hvert verkefni ræðið þið saman um hvernig nemendurnir skiptust.
Hve margir standa í báðum hringjunum? Hve margir standa fyrir utan báða hringina?
Hvað táknar þetta í hverju tilviki?

	Í annan hringinn fara allir sem	**Í hinn hringinn fara allir sem**
1	borðuðu morgunmat	borðuðu ekki morgunmat
2	eru í bláum buxum	eiga systur
3	finnst gaman í dönsku	hafa komið til Danmerkur
4	eru með sítt hár	komu tímanlega í skólann í dag
5	fengu skyr í hádeginu	fengu ávexti í hádeginu
6	eru skotnir í einhverjum	eiga kærustu/kærasta
7	leika fótbolta	leika handbolta
8	eiga fjölskyldu sem á Toyota-bíl	eiga fjölskyldu sem á gráan bíl

Afbrigði

Nemendur koma með eigin tillögur til að skipta nemendum í mengi.

Vennmynd

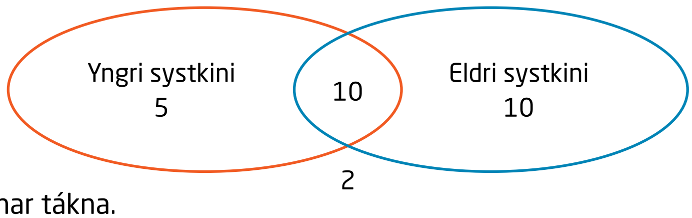
Vennmynd samanstendur af tveimur eða fleiri mengjahringjum. Hringirnir geta skarast. Hver mengjahringur inniheldur einhver stök sem hafa ákveðna eiginleika eða einkenni. Við notum Vennmynd til að flokka gögn og fá yfirlit yfir allar útkomur í útkomumengi.

Sýnidæmi 10

Bekkjardeild með 27 nemendum notar Vennmynd til að kanna hvaða nemendur eiga yngri og eldri systkini.

Niðurstaðan er sýnd í Vennmyndinni.

Útskýrðu hvað mismunandi hlutar Vennmyndarinnar tákna.



Tillaga að lausn

Fimm nemendur eiga einungis yngri systkini. Tíu nemendur eiga einungis eldri systkini. Tíu nemendur eiga bæði yngri og eldri systkini. Tveir nemendur eiga hvorki yngri né eldri systkini.

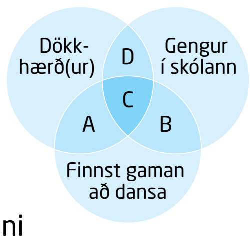
5.48 Í bekkjardeild með 26 nemendum æfa 12 nemendur handbolta og 15 nemendur fótbolta. Fimm nemendur æfa engar boltaíþróttir.

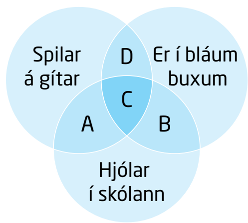
a Sýndu þetta í Vennmynd.

b Búðu til Vennmynd sem sýnir þá sem æfa handbolta og þá sem æfa fótbolta í þinni bekkjardeild eða þínum hópi.

c Útskýrðu fyrir bekkjarfélaga þínum hvað mismunandi hlutar Vennmyndarinnar tákna.

5.49 Útskýrðu hvað svæði mengjanna, sem skarast, A, B, C og D, tákna.





5.50 Staðsettu þig og tvo aðra í bekkjardeildinni í báðar Vennmyndirnar hér fyrir ofan.

Sýnidæmi 11

Í nemendaráðinu sitja þrjár stelpur, Silja, Ásta og Ramóna, og tveir strákar, Jón og Kristinn.

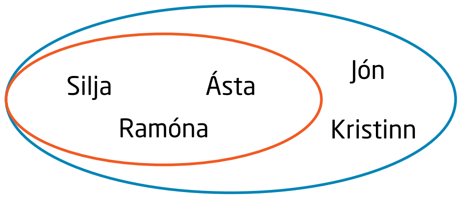
a Raðaðu nemendunum í mengjahringi þannig að allir í nemendaráðinu séu í einum hring og allar stelpurnar í öðrum.

b Útskýrðu hvers vegna annað mengið er hlutmengi í hinu en ekki öfugt.

Hlutmengi er hluti af heildarmenginu.

Tillaga að lausn

a

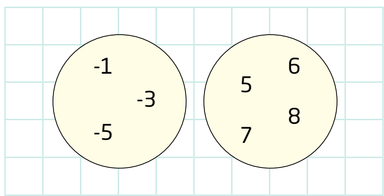


b *S* = {Silja, Ásta, Ramóna} er hlutmengi í *M* = {Silja, Ásta, Ramóna, Jón, Kristinn} vegna þess að allar stelpurnar eru meðlimir í nemendaráðinu. *M* er ekki hlutmengi í *S* vegna þess að í *M* eru einhverjir sem eru ekki í *S*.

Sýnidæmi 12

Skiptu *M* = {-5, 8, -3, 7, 5, 6, -1} í tvö hlutmengi, *A* og *B*, þannig að *A* innihaldi aðeins neikvæðar tölur og *B* aðeins jákvæðar tölur.

Tillaga að lausn



5.51 Af gæludýrunum Doppu, Mána, Max, Sófusi, Loppu og Klóru eru Doppa, Loppa og Klóra kettir.

a Skráðu gæludýrin í einn mengjahring og kettina í annan.

b Hvort mengið er hlutmengi í hinu?

5.52 Skiptu $T = \{1, 5, 2, 6, 15, 23, 78, 44, 77\}$ í tvö hlutmengi, *A* og *B*, þannig að í *A* séu aðeins sléttar tölur og í *B* aðeins oddatölur.

5.53 Myndaðu hóp með fjórum öðrum bekkjarfélögum.
Skiptu hópnum, sem eru fimm nemendur, í tvö hlutmengi, *A* og *B*, þannig að

a *A* innihaldi aðeins stráka og *B* aðeins stelpur.

b *A* innihaldi aðeins þá sem eru 160 cm á hæð og hærri og *B* þá sem eru lægri en 160 cm.

c *A* innihaldi þá sem eiga afmæli á fyrri helmingi ársins og *B* þá sem eiga afmæli á síðari helmingi ársins.

d *A* innihaldi aðeins þá sem ganga í skólann og *B* þá sem er ekið í skólannn.

e *A* innihaldi aðeins þá sem eru í gallabuxum og *B* þá sem eru í annars konar buxum.

f *A* innihaldi aðeins þá sem nota skónúmer lægra en 39 og *B* þá sem nota skónúmer 39 eða hærra.

g *A* innihaldi aðeins þá sem hafa símanúmer með tölustöfum þar sem summan er lægri en 31 og *B* þá sem hafa summuna 31 eða hærri í símanúmerinu sínu.

5.54 **a** Skráðu bókstafina frá A til O í einn mengjahring og sérhljóðana í annan.

b Skráðu alla bókstafina í skírnar- og eftirnafni þínu í einn mengjahring og samhljóðana í annan.

c Lýstu tengslunum milli mengjanna tveggja í a-lið.

d Sýndu fram á að annað mengið í b-lið er hlutmengi í hinu.

5.55 Búðu til Vennmynd.

a Skráðu heiti þriggja fjalla á Íslandi í vinstri mengjahringinn. Skráðu heiti fjalla á Íslandi sem eru hærri en 2110 metrar í hægri mengjahringinn.

b Skráðu heiti fimm borga, bæja eða kaupstaða á Íslandi í vinstri mengjahringinn. Skráðu heiti borga, bæja eða kaupstaða á Íslandi með meira en 200 þúsund íbúa í hægri mengjahringinn.

c Skráðu nöfn einhverra í bekkjardeild þinni í vinstri mengjahringinn. Skráðu nöfn einhverra sem eru 15 ára í hægri mengjahringinn.

Að finna sammengi, sniðmengi og fyllimengi

Við notum sammengi, sniðmengi og fyllimengi til að fá yfirlit yfir og geta flokkað stök í mengi. Skoðum nú mengi með unglingum þar sem sumir eru með trefil.

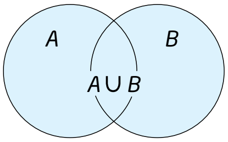
Stak í mengi er einn þeirra hluta sem tilheyra tilteknu mengi.

Við ætlum að skoða mismunandi mengi: Í A eru strákarnir og í B eru þeir sem eru með trefil.

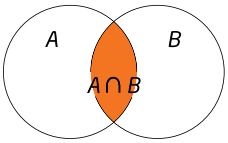
Þessi mengi má skrá þannig:
A = {strákarnir} og B = {allir sem eru með trefil}

Ef við eigum að finna sammengi, A ∪ B, og sniðmengi, A ∩ B, þurfum við að skoða hvað átt er við með sammengi og sniðmengi.

A∪B er lesið:
A sam B



A∩B er lesið:
A snið B



Sammengi tveggja mengja, A og B, er mengi allra staka sem eru í A eða B eða bæði í A og B. Táknið fyrir sammengi er ∪. Bláa svæðið á myndinni sýnir sammengi A og B.

Sniðmengi tveggja mengja, A og B, er mengi þeirra staka sem eru bæði í A og B. Táknið fyrir sniðmengi er ∩. Rauða svæðið sýnir sniðmengi A og B.

$A \cup B$ táknar öll stök sem eru annaðhvort í A eða B eða báðum mengjunum.
Hér merkir það strákana og alla krakkana sem eru með trefil.
A ∩ B táknar öll stök sem eru bæði í A og B. Hér merkir það að í sniðmenginu eru strákar með trefil .

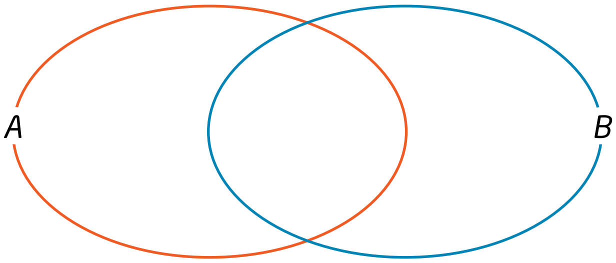
Stundum er ekkert stak í sniðmenginu. Þá er það tómamengið.
Táknið fyrir tómamengi er Ø.

5.56 Skiptu tölustöfunum í símanúmerinu 897 6543 í tvo hluta um miðjuna. Þá færðu mengin $A = \{9, 8, 7, 6\}$ og $B = \{6, 5, 4, 3\}$.

a Finndu $A \cup B$ í símanúmerinu hér fyrir ofan.

b Finndu $A \cap B$ í símanúmerinu hér fyrir ofan.

c Skiptu tölustöfunum í símanúmerinu þínu á sama hátt í tvo mengi, A og B. Finndu $A \cup B$ og $A \cap B$.



5.57 Dagsetningin 20.05.2014, skipt í tvö mengi, A og B, verður $A = \{2, 0, 0, 5\}$ og $B = \{2, 0, 1, 4.\}$

a Finndu $A \cup B$ í dagsetningunni hér fyrir ofan.

b Finndu $A \cap B$ í dagsetningunni hér fyrir ofan.

c Skiptu tölustöfunum í dagsetningu dagsins í dag ásamt ártalinu í tvö mengi, A og B. Finndu $A \cup B$ og $A \cap B$.

d Skiptu tölustöfunum í fæðingardegi þínum ásamt ártalinu í tvö mengi, A og B. Finndu $A \cup B$ og $A \cap B$.

Sýnidæmi 13

Í hvolpagoti eru sjö hvolpar, fjórar tíkur og þrír hundar. Tvær af tíkunum eru flekkóttar svo og einn af karlkyns hundunum en afgangurinn er brúnn.

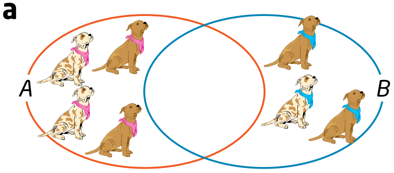
a Búðu til Vennmynd þar sem A er mengi tíkanna og B er mengi karlkyns hundanna.

b Búðu til Vennmynd þar sem A er mengi tíkanna og C er mengi gulra hvolpa.

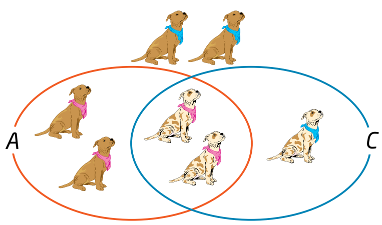
c Tilgreindu hvaða hvolpar eru í sniðmengi og í sammengi A og B annars vegar og í sniðmengi og sammengi A og C hins vegar.

Tillaga að lausn

a



b



c $A \cap B = \varnothing$
$A \cup B$ eru allir hvolparnir.
$A \cap C$ eru flekkóttu tíkurnar tvær.
$A \cup C$ eru tíkurnar og flekkótti hundurinn.

5.58 Hér eru þrjú mengi: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ og $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

a Búðu til Vennmynd sem sýnir tengslin milli mengjanna þriggja, *A*, *B* og *C*.

b Finndu sniðmengi og sammengi *A* og *B*.

c Finndu sniðmengi og sammengi *B* og *C*.

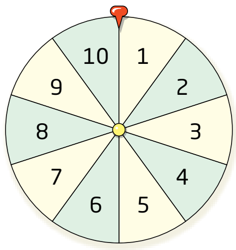
d Finndu sniðmengi og sammengi *A*, *B* og *C*.

5.59 Í unglingahópi eru 9 unglingar, 5 strákar og 4 stelpur. Tvær af stelpunum og fjórir drengjanna eru í gallabuxum, hinir eru í íþróttabuxum. *A* er mengi stelpna, *B* er mengi stráka og *C* er mengi þeirra sem eru í íþróttabuxum.

a Búðu til Vennmynd með mengjunum *A* og *B*.

b Búðu til Vennmynd með mengjunum *A* og *C*.

c Lýstu því hvaða nemendur eru í sniðmengi og sammengi mengjanna *A* og *C*.



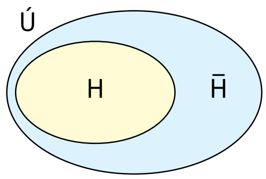
Skoðaðu lukkuhjólið. Útkomumengið er

$\acute{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Við vonumst til að fá frumtölu þegar við snúum hjólinu. Þá er mengi hagstæðra útkomna

$H = \{2, 3, 5, 7\}$

H er hlutmengi í *Ú*. Það má skrifa þannig: $H \subset \acute{U}$.
Þegar $H \subset \acute{U}$ er hægt að finna mismuninn á mengjunum *Ú* og *H*. Mismunurinn er mengi sem inniheldur allar tölurnar í *Ú* sem eru ekki frumtölur. Þetta mengi kallast fyllimengi *H* með tilliti til Ú. Við getum skrifað



$\acute{U} \backslash H = \bar{H} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

Þegar *H* og $\bar{H}$ eru fyllimengi hvort annars er sniðmengi þeirra tómamengið.

Þegar gula svæðið (sjá myndina til vinstri) er H er bláa svæðið fyllimengi *H* og táknað með $\bar{H}$.

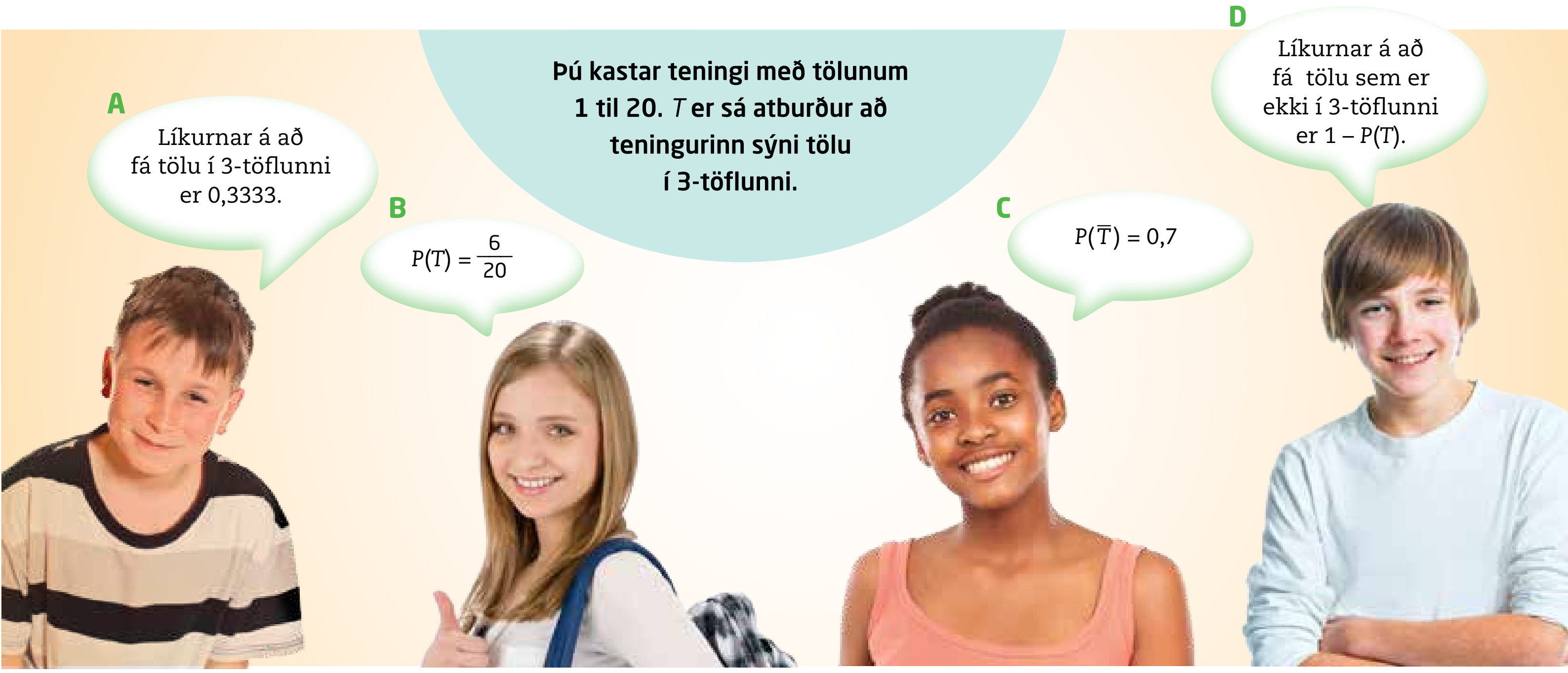
Táknið fyrir hlutmengi er $\subset$.

Ef H er hlutmengi í *Ú* er mismunurinn milli *Ú* og *H* fyllimengi *H*.
Ef $H \subset \acute{U}$ er $\acute{U} \backslash H = \bar{H}$.

5.60 Notaðu lukkuhjólið á blaðsíðunni á undan. Þú vinnur ef þú færð slétta tölu. Við köllum þann atburð V.

- **a** Hvert er útkomumengið?
- **b** Finndu líkurnar á að vinna, V.
- **c** Finndu fyllimengi atburðarins V, það er $\overline{V}$.

5.61 Hvaða nemandi hefur rétt fyrir sér? Rökræddu þetta við bekkjarfélaga þinn.



5.62 Í bekkjardeild nokkurri eru 25 nemendur. Níu þeirra læra þýsku, fjórir læra frönsku og 12 spænsku. Draga á út nemanda sem lærir þýsku.

- **a** Finndu útkomumengið.
- **b** Finndu líkurnar á að draga út nemenda sem lærir þýsku, $Þ$.
- **c** Finndu fyllimengi atburðarins $Þ$, það er $\overline{Þ}$.

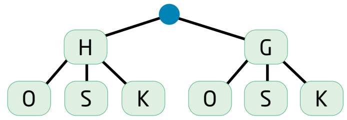
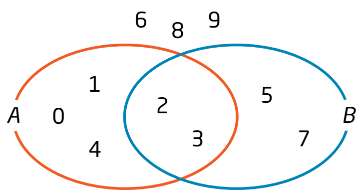
5.63 Það er dimmt í herberginu þínu og þú átt tíu svört, fjögur hvít og átta grá sokkapör. Þú ætlar að fara í svarta sokka en tekur sokkapar af handahófi úr sokkaskúffunni.

- **a** Hverjar eru líkurnar á að fá svart sokkapar, S?
- **b** Hverjar eru líkurnar á að fá ekki svart sokkapar, $\overline{S}$?
- **c** Finndu $S \cap \overline{S}$ og $S \cup \overline{S}$.

Í stuttu máli

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reiknað út líkur í einföldum verkefnum úr daglegu lífi	Hverjar eru líkurnar á að draga kóng úr spilastokki með 52 spilum?	$P\,(\text{kóngur}) = \dfrac{\text{hagstæðar útkomur}}{\text{mögulegar útkomur}} = \dfrac{4}{52} = \underline{\underline{\dfrac{1}{13}}}$
skráð líkur sem almennt brot, tugabrot og prósent	Í happdrætti eru 20 vinningsnúmer af 1000 happdrættismiðum. Skráðu vinningslíkurnar sem almennt brot, tugabrot og prósent.	$P\,(\text{vinningur}) = \dfrac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \dfrac{20}{1000} = \underline{\underline{\dfrac{1}{50} = 0{,}02 = 2\%}}$
áttað þig á mismuninum á jöfnum og ójöfnum líkum	Í brjóstsykurskál A eru tveir rauðir og þrír gulir molar. Í skál B eru þrír gulir og þrír rauðir molar. Í hvorri skálinni eru jafnar líkur á að draga hvorn litinn sem er?	Í skál A eru ekki jafnar líkur á að draga gulan mola og rauðan mola. Þess vegna eru ójafnar líkur á að draga gulan og rauðan mola úr skál A. Í skál B eru jafnar líkur á að draga gulan og að draga rauðan mola.
fundið útkomumengi úr tilraun eða öðrum viðburði	Hvert er útkomumengi eftirfarandi viðburða? **a** Þegar þú gengur yfir götuna á göngubraut með umferðarljósum. **b** Fótboltaleikur er í gangi. **c** Þú færð einkunn úr prófi.	**a** $\underline{\underline{\mathit{Ú} = \{\text{grænt, rautt}\}}}$ **b** $\underline{\underline{\mathit{Ú} = \{S, J, T\}}}$ **c** $\underline{\underline{\mathit{Ú} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}}$
greint á milli háðra og óháðra atburða	Útskýrðu hvort líkur á atburðunum eru jafnar eða ójafnar. **a** Að vinna tvisvar í röð í leiknum skæri, blað, steinn. **b** Að borða grænan hlaupmola úr poka tvisvar í röð.	**a** Atburðirnir eru óháðir. Líkurnar á að vinna í leiknum eru jafn miklar í hverri tilraun. **b** Atburðirnir eru háðir. Líkurnar á að fá grænan hlaupmola í annað skipti er háð því hvort þú fékkst grænan hlaupmola í fyrra skiptið.

<table>
<tr><th>Þú átt að geta</th><th>Dæmi</th><th>Tillögur að lausnum</th></tr>
<tr><td>reiknað út samsetningar-möguleika</td><td>Sylvía ætlar að velja sér fatnað til að fara í. Hún tekur fram tvennar buxur, fjórar peysur, þrjú skópör sem allt getur passað saman.
Um hve marga möguleika á fatnaði getur hún valið?</td><td>$2 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{24}$
Sylvía getur valið um 24 mismunandi möguleika á fatnaði.</td></tr>
<tr><td>raðað gögnum í krosstöflu og talningartré</td><td>Þú átt tvenns konar brauð, hvítt (H) og gróft (G), og þrenns konar álegg: ost (O), skinku (S) og kæfu (K).

Gerðu krosstöflu og talningartré sem sýna alla möguleikana á að velja álegg á brauð.</td><td><table><tr><th>Álegg / Brauð</th><th>Ostur (O)</th><th>Skinka (S)</th><th>Kæfa (K)</th></tr><tr><td>H</td><td>HO</td><td>HS</td><td>HK</td></tr><tr><td>G</td><td>GO</td><td>GS</td><td>GK</td></tr></table>
Krosstöflu má nota þegar valmöguleikar eru tveir.
Talningartré má nota þegar valmöguleikar eru fleiri.
</td></tr>
<tr><td>flokkað gögn í Vennmynd</td><td>Flokkaðu tölurnar í menginu U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} í Vennmynd þannig að mengið A innihaldi allar tölur < 5 og mengið B innihaldi allar frumtölur sem eru stök í U.</td><td></td></tr>
<tr><td>fundið sammengi, sniðmengi og fyllimengi gagnamengis</td><td>Sérstakur teningur er með tólf fleti, tölusetta með tölunum 1–12.
Leikmaður A veðjar á að upp komi oddatala þegar teningnum er kastað.
Leikmaður B veðjar á að það verði frumtala.
a Finndu sniðmengi og sammengi hlutmengjanna tveggja A og B.

b Finndu fyllimengi A.</td><td>a $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
$\underline{A \cdot B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}}$
$\underline{A \cdot B = \{3, 5, 7, 11\}}$

b $\underline{\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}}$</td></tr>
</table>

Bættu þig!

Einfaldar líkur

5.64 Í bekkjardeild nokkurri fá nemendur einkunnir eins og sýnt er í töflunni á kvarðanum 0 til 10.

Einkunn	Tíðni
1	2
2	5
3	8
4	6
5	7
6	1

a Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 8?

b Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 9?

c Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái einkunnina 6 eða 7?

d Hverjar eru líkurnar á að einhver nemandi í bekkjardeildinni fái ekki einkunnina 9 eða 10?

5.65 Það eru 70% líkur á rigningu einhvern daginn í apríl.
Hve marga daga er venjulega rigning í apríl?

5.66 Á landsleik milli Brasilíu og Noregs er stuðullinn fyrir heimasigur 1,22, stuðullinn fyrir jafntefli er 4,35 og fyrir útisigur 7,95.

a Hvað merkja þessir stuðlar?

b Hve mikið færðu greitt ef þú veðjar 2000 kr. á að það verði jafntefli?

5.67 Þú átt að draga einn bókstaf úr orðunum hér fyrir neðan. Eru jafnar líkur á að draga hvern bókstaf? Hvaða bókstafur á mestar líkur á að vera dreginn út úr hverju orði?

a klukkan **b** vídeóið **c** sendiferðabifreiðin

5.68 Hvert er útkomumengi viðburðanna hér á eftir? Eru líkurnar jafnar eða ójafnar?

a Þú átt að draga spil í ákveðnum lit úr spilastokki.

b Þú bíður eftir einkunn úr prófi.

c Þú átt að ganga úr skugga um augnlit persónu sem valin er af handahófi.

d Þú átt að snúa lukkuhjóli með 50 tölum.

Talningarfræði

5.69 Þú átt að skrifa ritgerð í náttúrufræði um ljóstillífun.

Þú hefur búið til 2 tillögur um titil, 3 mismunandi uppköst að texta og tekið 5 myndir til að útskýra textann betur.
Ritgerðin á að innihalda titil, texta og mynd.

a Teiknaðu talningartré sem sýnir hve margar mismunandi ritgerðir þú getur búið til úr tillögum þínum að titli, texta og mynd.

b Reiknaðu út fjölda mögulegra ritgerða. Athugaðu hvort niðurstaða þín í a-lið er rétt.

5.70 Ferðaskrifstofa nokkur setur saman spennandi ferðapakka fyrir ferðir til Suður-Ameríku.
Ferðaskrifstofan býður upp á sérhannaðar ferðir til tíu mismunandi landa: Brasilíu, Úrúgvæ, Paragvæ, Argentínu, Ekvador, Venesúela, Chile, Perú, Bólivíu og Kolumbíu.

a Hve margir möguleikar eru á að ferðast til tveggja þessara landa?

b Hve margir möguleikar eru á að ferðast til þriggja þessara landa?

5.71 Þú þarf að rækja fimm erindi á laugardegi, það er í apótekið, matvörubúð, klippingu, íþróttabúðina og bókabúðina.

Hve margir möguleikar eru á að raða þessum erindum niður?

5.72 Fréttatíma með 15 fréttum má setja saman á marga vegu.

Hve margir möguleikar eru á að raða fréttunum í þessum fréttatíma?

5.73 Emil á að hanna prjónahúfu og velja þrjá mismunandi liti á rendurnar. Hann getur valið úr fimm mismunandi litum.

Á hve marga vegu getur hann valið litina?

5.74 Á pitsustað er ostur og sósa á öllum pitsunum. Þar að auki er hægt að velja milli sex kjöttegunda (nautakjöts, kjúklings, skinku, beikons, pepperóní eða lambakjöts). Einnig er hægt að velja um fimm grænmetistegundir (papriku, lauk, sveppi, ananas og ólífur).

Notaðu krosstöflu og finndu út hve margar mismunandi pitsutegundir eru í boði á pitsustaðnum.

5.75 Hve margar mismunandi tónaraðir er hægt að búa til með þessum fimm tónum: C, D, E, F og G?

5.76 Hve margir möguleikar eru á röð hlaupara í mark í 60 metra hlaupi ef

a hlaupararnir eru þrír?

b hlaupararnir eru fimm?

c hlaupararnir eru tíu?

5.77 Í leikfimistíma ætlaði kennarinn að kenna nemendum að dansa. Hann ætlaði að mynda pör með strák og stelpu. Þennan dag voru átta stelpur og tíu strákar mættir.

a Hve mörg mismunandi pör gat kennarinn myndað?

b Rétt áður en tíminn hófst og áður en kennarinn hafði myndað pörin komu Jens og Fríða frá skólastjóranum.

Hvað var þá hægt að mynda mörg mismunandi pör?

c Hve miklar líkur eru á að Fríða og Jens fái að dansa saman?

5.78 Í bekkjardeild með 19 nemendum æfa átta nemendur frjálsar íþróttir og 13 nemendur æfa skíðaíþróttina. Fimm nemendur æfa engar skipulagðar íþróttir.

Sýndu þetta í Vennmynd.

Líkurnar á að barnið skrifi orðið „ha“ eða skrifi það ekki eru samtals 100%.

5.79 Ferðatölva nokkur er með 87 lykla.

a Hvaða líkur er á að lítið barn sem ýtir af handahófi á tvo lykla skrifi orðið „ha“ á tölvuna?

b Hvaða líkur eru á að barnið ýti á tvo lykla og skrifi ekki orðið „ha“?

5.80 Alls eru 26 nemendur á skólaferðalagi. Af þeim fara 14 nemendur í sund, 17 nemendur fara í veiði og þrír nemendur fara hvorki í sund né í veiði.

Sýndu þetta í Vennmynd.

Þjálfaðu hugann

5.81 Peningar geta verið myntir eða seðlar.

- **a** Ég á 12 krónur í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að þær samanstandi af einum tíkalli og tveimur krónupeningum?
- **b** Ég á 44 kr. í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að þær samanstandi af fjórum tíköllum og fjórum krónupeningum?
- **c** Ég á 66 kr. í vasanum. Hverjar eru líkurnar á að í vasanum séu að minnsta kosti þrír tíkallar?

5.82 Hverjar eru líkurnar á að leyninúmerið á ferðatöskunni þinni, sem í eru þrír tölustafir, sé spegiltala?

Spegiltala er tala eins og 131 eða 1221.

5.83 Hverjar eru líkurnar á að fjögurra stafa pin-númer á greiðslukortinu þínu innihaldi að minnsta kosti eina slétta tölu?

5.84 Hverjar eru líkurnar á að fjögurra stafa pin-númerið þitt sé spegiltala?

Orðskýringar

A	Skýringar
afsláttur	lækkun á vöruverði
atburður	í líkindareikningi: mengi af útkomum sem uppfyllir tiltekin skilyrði; dæmi: ef atburðurinn er: „upp kemur oddatala á teningi“ er atburðurinn mengið {1, 3, 5} eða safnið: 1, 3, 5
B	
biti	er tölustafur í tvíundakerfinu; biti getur verið annaðhvort 0 eða 1
botnpunktur	punktur á grafi sem hefur lægra fallgildi en allir punktarnir í grenndinni
breyta	stærð sem getur tekið breytileg gildi innan þess talnabils sem fall er skilgreint fyrir, tákn (oftast bókstafur) til að tákna ótiltekna stærð
bæti	hópur sem samanstendur af átta bitum
D	
daglína	180° lengdarbaugur í Kyrrahafinu sem aðskilur tvær dagsetningar
E	
eðlismassi	ákveðinn massi af efni deilt með rúmmáli efnisins
empírískt fall	fall þar sem fallgildin byggjast á tilraunum, mælingum, reynslu eða athugunum
F	
fall	regla sem sýnir tengslin milli tveggja stærða sem geta haft mismunandi gildi en eru háðar hvor annarri; önnur stærðin, oftast táknuð með x, er nefnd „óháð breyta“
fallgildi	talan sem fæst þegar reiknað er gildi fallstæðu fyrir ákveðið gildi á óháðu breytunni sem oft er nefnd x
fastaliður, fasti	fallgildið þegar óháða breytan x = 0. Í línulega fallinu y = ax + b er b fastaliðurinn
ferilhorn	horn með topppunkt á hringferli og arma sem eru annaðhvort báðir sniðlar hringsins eða annar armurinn sniðill og hinn snertill
ferill	mengi punkta í fleti sem má t.d. tákna með því að draga blýantsodd eftir blaði án þess að blýantinum sé lyft frá blaðinu
ferningsrót	talan sem margfölduð með sjálfri sér verður hin uppgefna tala; ferningsrótin af 16 er 4 vegna þess að 4 · 4 = 16
ferningstala	svarið þegar heil tala er margfölduð með sjálfri sér. Allar ferningstölur má skrifa sem veldi þar sem veldisvísirinn er 2
ferningur	ferhyrningur þar sem öll hornin eru 90° og allar hliðarnar jafn langar
flatarmál	stærð flatar sem rúmfræðileg mynd þekur
fyllimengi	ef mengið A er hlutmengi í menginu B inniheldur fyllimengi A með tilliti til B öll stök sem eru í B en ekki í A

G	
geiri	hluti af hringfleti sem afmarkast af tveimur geislum og boganum milli þeirra
geisli	strik frá miðju hrings að hringferlinum
gengi	gildi tiltekins gjaldmiðils gagnvart öðrum gjaldmiðli
gildistafla	sýnir gildi óháðu breytunnar x og samsvarandi fallgildi
gjaldmiðill	það sem greitt er með í viðskiptum; peningar sem ríki ákveður sem grunneiningu í viðskiptum
grunnlína	ein hlið marghyrnings; hæð marghyrnings er dregin hornrétt á grunnlínuna
H	
hagstæðar útkomur	fjöldi mögulegra útkomna sem ætlunin er að reikna líkurnar á
hallatala	breyting á y-gildi þegar x-gildið hækkar um eina einingu í línulega fallinu y = ax + b; talan a fyrir framan x-ið er hallatalan
háður atburður	þegar tiltekin útkoma viðburðar eða tilraunar er háð útkomu annars viðburðar/tilraunar eða annarra viðburða/tilrauna
heiti á hólfi/reit	heiti á hólfi eða reit í töflureikni; hólfið efst til vinstri hefur heitið A1; heiti á hólfi kallast einnig hólfatilvísun eða tilvísun í hólf
hjálparmynd	skissa af mynd sem mál eru skráð inn á, notuð til hjálpar í rúmfræðiteikningum og útreikningum
hlutfall	samanburður á tölum, oft táknað með : eða brotastriki, þ.e. ritað sem almennt brot; fjórar tölur eru sagðar vera í sama hlutfalli, ef t.d. 3 : 4 = 6 : 8
hlutfallstölur	x og y eru hlutfallstölur ef y/x er fasti
hlutmengi	hluti af öðru mengi
hnútur	mælieining fyrir hraða skipa og báta; einn hnútur er ein sjómíla á klst. (1 sjómíla = 1,852 km)
hornalína	strik milli tveggja horna í marghyrningi, þó ekki milli samliggjandi horna
hólfatilvísun	tilvísun í hólf (reit) í töflureikni; hólfið efst til vinstri hefur hólfatilvísunina A1, sjá einnig: heiti á hólfi
hraðalínurit	línurit sem sýnir tengslin milli vegalengdar og tíma þannig að hægt er að lesa meðalhraðann af línuritinu
hringur	allir punktar sem eru í ákveðinni fjarlægð frá sameiginlegum miðpunkti
hæð	hæð í þríhyrningi eða ferhyrningi er strik sem stendur hornrétt á grunnlínuna (eða á framlengingu hennar) og sýnir stystu fjarlægð frá grunnlínu að mótlægu horni eða samsíða línu

I	
innritaður hringur	allar hliðar þríhyrnings eru snertlar hringsins; miðja eða miðpunktur hringsins er skurðpunktur helmingalína horna þríhyrningsins (en helmingalína horns skiptir því í tvö jafn stór horn)
J	
jafnar líkur	þá eru sömu líkur á öllum mögulegum útkomum
K	
keila	þrívítt form sem samanstendur af grunnfleti sem er hringur og hliðarfleti sem er hringgeiri og vefst upp í topppunkt
krosstafla	tafla með línum og dálkum, notuð til að hafa yfirlit yfir tvo óháða viðburði eða tilraunir
kúla	er þrívítt form og allir punktar á yfirborði þess eru í sömu fjarlægð frá miðju
L	
langhlið	er lengsta hliðin í rétthyrndum þríhyrningi
lengdarbaugar	hugsaðar boglínur sem liggja frá Norðurpólnum til Suðurpólsins; þær skipta jörðinni í tímabelti
líkur	möguleikinn á að ákveðinn atburður eigi sér stað
línulegt fall	fallið er á forminu $f(x) = ax + b$ þar sem a og b eru fastar; grafið er bein lína
lota í tugabroti	síendurtekin runa tölustafa í óendanlegri aukastafarunu tugabrots
lotubundið tugabrot	tugabrot með lotu í aukastafarunu þess; allar ræðar tölur hafa endanleg eða lotubundin tugabrot
M	
margföldunarreglan	fjöldi mögulegra útkomna úr fleiri en einum viðburði eða tilraunar er margfeldið af fjölda mögulegra útkomna hvers einstaks viðburðar eða tilraunar
markverðir stafir	fjöldi tölustafa í tölu að frátöldum núllum til vinstri í tölunni
meðalhraði	vegalengd deilt með tíma
mengi	vel skilgreint safn hluta sem nefnast stök
mengjahringur	lokaður ferill í teikningu sem notaður er til að afmarka mengi
miðjuhorn	horn þar sem armarnir eru tveir geislar og topppunkturinn er í miðpunkti hringsins
miðstrengur	strengur í hring gegnum miðpunkt hringsins
mælieining	stærð sem notuð er til að tilgreina gildi einhvers sem hefur verið mælt
mælitala, mál	tala sem segir til um stærð safns eða hlutar
mælitæki	tæki sem hægt er að mæla eitthvað með

N	
námundargildi	það gildi sem tala tekur eftir að hún hefur verið námunduð
náttúrlegar tölur	allar heilar tölur sem eru stærri en 0
Ó	
óháðir atburðir	þegar útkoma atburðar er óháð því sem gerist í öðrum atburði eða atburðum
óháð tilvik	þegar útkoma í tilviki er óháð því sem gerist í öðru tilviki eða tilvikum
ójafnar líkur	þá eru ekki sömu líkur á öllum mögulegum útkomum; þetta er oft sýnt með líkindatré
óræðar tölur	allar tölur sem ekki er hægt að skrifa sem almenn brot; allar ferningsrætur, sem eru ekki heilar tölur, eru óræðar
P	
píramídi	þrívítt form sem samanstendur af grunnfleti sem er marghyrningur og þríhyrndum hliðarflötum sem koma saman í sameiginlegum topppunkti
prómill	hluti af 1000; þá er 1‰ jafnt og 1/1000; 1000‰ samsvara einum heilum
prósent	hluti af 100; 1% er jafnt og 1/100; 100% samsvara einum heilum
prósentustig	mismunurinn milli tveggja prósentutalna; er oft notað í skoðanakönnunum
punktarit	graf falls sem er aðeins skilgreint fyrir stök gildi þannig að ekki er hægt að draga feril eða línu milli punktanna
R	
rauntölur	allar tölur á talnalínunni
rétthyrningur	ferhyrningur þar sem öll hornin eru 90°
rúmfræðilegur staður	punktur eða punktamengi sem hafa ákveðna eiginleika; hringur og miðþverill eru dæmi um rúmfræðilega staði
rúmmál	stærð rýmis þrívíðs hlutar eða myndar
ræðar tölur	allar tölur sem skrifa má sem almenn brot
S	
sammengi	í sammengi tveggja mengja, A og B, eru öll stök sem eru samtals í A eða B eða báðum mengjum; táknið er $\cup$
samsíðungur	ferhyrningur þar sem tvær og tvær hliðar eru jafn langar og samsíða
SI-forskeyti	notuð til að búa til einingar sem hafa aðra stærð en grunneiningin í SI-kerfinu
SI-kerfið	alþjóðlegt einingakerfi sem byggt er á tugakerfinu og tugveldum
sívalningur	réttur sívalningur er þrívítt form sem samanstendur af botnfleti og toppfleti sem eru hringir og hliðarfleti sem er rétthyrningur
skammhlið	heiti á styttri hliðunum í rétthyrndum þríhyrningi

skipta tölu upp eftir sætum	að skipta tölu í einingar, tugi, hundruð o.s.frv. og skrifa hana sem summu þessara talna, það er sem summu heilla tugvelda, til dæmis: 358 = 300 + 50 + 8
slumpreikningur	að námunda tölur áður en þær eru notaðar í reikningi þannig að auðvelt sé að reikna í huganum
snertill	lína sem snertir feril einungis í einum punkti. Í hring er snertill alltaf hornrétt á geisla
snið	lýsing á stærð, formi eða tegund innihalds, notað í töflureikni; tölur má skrifa með margvíslegu sniði; rithátturinn 3400 og $3{,}4 \cdot 10^3$, eru tvö snið sömu tölu; 3,4E + 3 er aðeins notað í reiknivélum.
sniðmengi	sniðmengi mengjanna A og B er mengi allra staka sem eru bæði í A og B. Táknið er $\cap$
sniðill hrings	lína sem gengur gegnum hring og sker hringferilinn á tveimur stöðum
staðalform	tala er skrifuð á staðalformi þegar hún er skrifuð með tugabroti milli 1 og 10 og margfölduð með tugveldi
stafrænn	eining sem túlkar eða vistar upplýsingar sem skráðar eru með tveimur gildum, 0 („af“) og 1 („á“)
stak	hlutir sem mynda mengi kallast stök þess
strengur	strik sem liggur frá einum punkti til annars á hringferli
sætiskerfi	talnakerfi þar sem sætið, sem tölustafurinn er í, ræður gildi tölustafsins; tugakerfið er sætiskerfi
T	
talnabil	allar tölur á talnalínunni sem liggja milli tiltekinna tveggja talna
talnakerfi	kerfi þar sem mismunandi tákn og samsetningar þeirra tákna tölur og fjölda; tugakerfið og rómverskar tölur eru dæmi um ólík talnakerfi
talningarfræði	grein stærðfræðinnar sem fjallar um útreikning á fjölda möguleika
talningartré	framsetning til að sýna mismunandi samsetningarmöguleika tveggja eða fleiri viðburða eða tilrauna
teningstala	fæst þegar heil tala er margfölduð einu sinni með sjálfri sér og síðan aftur með sjálfri sér; allar teningstölur má skrifa sem veldi þar sem veldisvísirinn er 3
tilvísun í hólf	hólfatilvísun í töflureikni. Hólfið efst til vinstri hefur hólfatilvísunina A1, sjá einnig: heiti á hólfi
tímabelti	jörðinni er skipt í 24 megintímabelti
topppunktur	punktur á grafi sem hefur stærra fallgildi en allir punktarnir í grenndinni; einnig er talað um topppunkta þríhyrnings, píramída og keilu
trapisa	ferhyrningur með tvær samsíða hliðar

tugveldaritháttur (veldisvísaform)	staðalform; stafrænt form tölu sem skrifuð er sem tugabrot milli 1 og 10, þar næst er skráð bókstafurinn E og tala sem er veldisvísir tugveldisins sem um ræðir; talan 3,4E+3 er veldisvísaform tölunnar 3400
tvíundakerfi	í því eru aðeins notaðir tveir tölustafir, 0 og 1
U	
ummál	lengd strika eða ferils sem umlykur rúmfræðilega mynd eða form
umritaður hringur	umlykur marghyrning þannig að öll horn hans liggja á hringferlinum; í þríhyrningum er miðja umritaða hringsins í skurðpunkti miðþverla hliðanna
Ú	
útkoma	í líkindareikningi: möguleg niðurstaða einhvers viðburðar, gjörnings, tilviks eða tilraunar
útkomurúm	í líkindareikningi: allar mögulegar útkomur einhvers viðburðar, gjörnings, tilviks eða tilraunar
V	
Vennmynd	mengjamynd þar sem mengi eru teiknuð sem svæði afmörkuð af lokuðum ferlum, notuð til að lýsa innbyrðis afstöðu mengja og aðgerða sem verka á þau; hver lokaður ferill inniheldur eitthvað sem hefur tiltekna eiginleika
Y	
yfirborðsflatarmál	summa flatarmála allra flata í þrívíðu formi eða mynd
Þ	
þvermál	lengd miðstrengs í hring

TIL NEMANDA

Þessi bók er eign skólans þíns og þú hefur hana að láni. Bækur eru dýrar og því mikilvægt að farið sé vel með þær. Gættu þess vel að skrifa ekki í þessa bók.

Skóli			Bók nr.	
			Tekin í notkun	
Nemandi/bekkur	Útlán: (dags.)	Ástand	Skil: (dags.)	Ástand

1) Nafn nemanda skal greinilega skrifað í línurnar hér að ofan.
2) Ástandi bókar við útlán og skil skal lýst þannig:
   N: ný bók, G: gott, S: sæmilegt, L: lélegt.

SKALI 2B

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Skali býður upp á innihaldsríka og lifandi stærðfræðikennslu.
Nemendur öðlast bæði skilning og færni með því að vera virkir og leitandi þegar þeir vinna við stærðfræði. Nemendur og kennarar nota *Skala* til að lesa stærðfræði, *vinna* verkefni, *rökræða* lausnaleiðir og fást við stærðfræðilegar áskoranir á rannsakandi og skapandi hátt. *Skali* vekur áhuga nemenda með því að tengja stærðfræði við daglegt líf og bjóða upp á fjölbreytilega kennslu.

Í *Skala* er lögð áhersla á

- hið faglega innihald, rökrétta uppbyggingu námsefnisins og framvindu námsins
- skýr og nákvæm markmið
- hagnýt dæmi og verkefni
- aðlögun námsefnisins að þörfum allra nemenda í sameiginlegu námssamfélagi þeirra
- nákvæmar leiðbeiningar og stuðning við kennara sem nýtist áður en kennsla hefst, meðan á henni stendur og eftir að henni lýkur

Skali 2 samanstendur af tveimur nemendabókum, tveimur æfingaheftum og tveimur kennarabókum. Kennarabækurnar eru gefnar út á Skalavefnum og þar er auk þess að finna verkefnahefti, lausnir og annað fylgiefni með flokknum.

Höfundar:
Grete Normann Tofteberg
Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen
Bjørnar Alseth

MENNTAMÁLASTOFNUN
7379