Stærðfræði 6

8tíu

Guðbjörg Pálsdóttir – Guðný Helga Gunnarsdóttir

NÁMSGAGNASTOFNUN

Til nemenda

Námsefnisflokkurinn *8–tíu* er ætlaður nemendum í 8.–10. bekk. Grunnbókin *8–tíu 6* skiptist í níu meginkafla. Í hverjum kafla er fjallað um tiltekna efnisþætti stærðfræðinnar. Lögð er áhersla á að skoða tengsl efnisþátta og hvernig nálgast má stærðfræði á fjölbreyttan hátt.

Miklu skiptir í stærðfræðinámi að ná valdi á stærðfræðilegum vinnubrögðum svo sem að rannsaka og leita að samhengi, finna mögulegar lausnir og rökstyðja þær. Oft reynir það á úthald og þrautseigju. Gott getur verið að vinna saman að lausn verkefna.

Þú þarft að fá yfirsýn yfir þá stærðfræði sem þér er ætlað að hafa náð tökum á við lok grunnskóla þannig að þú getir sett þér raunhæf markmið með námi þínu. Námsefninu er ætlað það hlutverk að styðja þig í náminu.

Gangi þér vel,
höfundar

8–tíu

Stærðfræði 6

ISBN 978-9979-0-1254-2

Myndir á bls. 96 og 101 a.n.t.h. eru fengnar af vefnum Wikimedia Commons

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2008
Önnur prentun 2008
Námsgagnastofnun
Reykjavík

Umbrot og prentvinnsla: Oddi ehf.

Hákon Sverrisson, Jónína Vala Kristinsdóttir, Kristín Bjarnadóttir, Steinunn Sigurbergsdóttir og Þórdís Guðjónsdóttir lásu yfir handrit og veittu góð ráð við vinnslu efnisins. Þeim og öðrum sem aðstoðuðu við gerð þessa efnis eru færðar bestu þakkir.

Stærðfræði 6

ÁTTA 10

EFNISYFIRLIT

Tölfræði

Notkun tölfræði verður sífellt meira áberandi í fjölmiðlum og almennt í málflutningi fólks. Gagnlegt er því að hafa gott vald á tölfræði til að geta tekið þátt í umræðum í lýðræðissamfélagi.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Getir safnað tölfræðilegum upplýsingum, flokkað þær og valið framsetningu á niðurstöðum.*
- *Þekkir og skiljir algeng hugtök sem notuð eru til að lýsa gagnasöfnum, svo sem tíðni, hlutfallstíðni, meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi.*
- *Kynnist notkun gagnagrunna og töflureikna við úrvinnslu og framsetningu gagna.*
- *Getir ályktað og tjáð þig um tölfræðilegar upplýsingar og metið ályktanir sem dregnar eru af slíkum gögnum.*

1 Úr ræðu stjórnmálamanns:

„Í könnuninni kemur fram að 37% kvenna og 30% karla nota bókasöfn reglulega. Þar kemur því fram að nær 70% þjóðarinnar nota bókasöfn reglulega og því er mikilvægt að hlúa að þeim.“

Hvaða galli er í röksemdafærslu stjórnmálamannsins?

2 Úr frétt í dagblaði:

„Vextir af húsnæðislánum voru lægstir 4,15% en eru nú almennt komnir í 6,2%. Þeir hafa því hækkað meira en 2% á stuttum tíma …“

Hvaða galli er á ályktun fréttamannsins?

3 Kannað var verð á eins gallabuxum í þremur verslunum.

a Skoðaðu myndirnar af gallabuxunum og áætlaðu flatarmál þeirra.

b Á hvern hátt er myndritið villandi?

Prósentur eru mikið notaðar til að sýna tölfræðilegar niðurstöður. Stundum er farið rangt með upplýsingar eins og dæmi 1–3 sýna. Því þarf að vanda vel til kannana, bæði undirbúning, framsetningu og úrvinnslu gagna. Ýmsar leiðir hafa verið þróaðar til að einfalda söfnun upplýsinga og gera úrvinnslu og framsetningu gagna skýrari. Gott er að nota töflureikni við að skrá upplýsingar og vinna úr þeim.

Við öflun upplýsinga eru oft framkvæmdar kannanir og spurningalistar lagðir fyrir. Nauðsynlegt er að undirbúa kannanir vel og þá þarf að huga að ákveðnum atriðum.

- Setja fram spurningar sem leita á svara við.
- Ákveða hvaða gögnum þarf að safna.
- Ákveða hvar og hvernig á að safna gögnum.

Í flestum tilvikum þarf að nota úrtak því of tímafrekt er að spyrja alla. Stundum er þýðið svo lítið að hægt er afla upplýsinga um alla og í öðrum tilvikum liggja upplýsingar fyrir í gagnagrunnum sem þá þarf að vinna úr.

Heildarhópurinn er þýðið og þeir sem valið er að spyrja eru úrtakið.

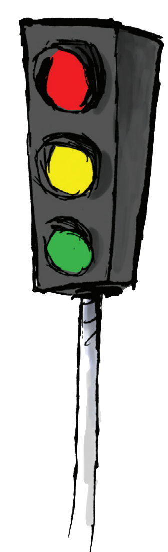
4 Veldu eina spurningu og gerðu grein fyrir hvernig þú gætir framkvæmt könnun til að leita svara við henni.

- Hve stórt hlutfall 17–20 ára ökumanna hefur verið tekið fyrir of hraðan akstur?
- Eiga fleiri strákar en stelpur á aldrinum 17–20 ára bíl?
- Hve marga kílómetra aka 17–20 ára ökumenn að meðaltali á viku?
- Hver eru algengustu tjónin í umferðinni sem aldurshópurinn 17–20 ára veldur?

5 Nokkrir krakkar ákváðu að afla upplýsinga um hve stórt hlutfall ökumanna í sveitarfélagi þeirra fer yfir gatnamót á rauðu ljósi.

- Jón ákveður að skrá hve margir fara yfir á rauðu ljósi á einum degi á gatnamótum í nágrenni skólans.
- Gunnar ákveður að spyrja ökumenn á bílastæði við stóra verslunarmiðstöð.
- Selma ákveður að athuga hve margir hafa verið teknir fyrir þetta umferðarlagabrot í síðustu viku.
- Tryggvi ákveður að athuga fjögur fjölförnustu gatnamótin á álagstímum, á morgnana og síðdegis.

Hverjir eru kostir og gallar við hverja leið?



Vandasamt er að búa til góða spurningalista. Æskilegt er að forprófa slíka lista. Nokkur mikilvæg atriði sem hafa þarf í huga eru:

- *Gera ráð fyrir öllum mögulegum svörum.*
- *Gefa fyrirmæli um hvernig eigi að svara spurningunum.*
- *Forðast spurningar sem fólk á erfitt með eða vill ekki svara.*
- *Orða spurningar þannig að skoðun þín komi ekki fram.*
- *Hafa spurningar skýrar og hnitmiðaðar.*
- *Hafa spurningalistann eins stuttan og mögulegt er.*

6 a Helga ákvað að kanna akstursvenjur 17–20 ára ökumanna.

Hver er aldur þinn?	☐ 17	☐ 18	☐ 19	☐ 20
Ert þú með bílpróf?	☐ Já		☐ Nei	

Hún bjó til spurningalista. Hér eru tvær fyrstu spurningarnar. Bættu 3–4 góðum spurningum við spurningar Helgu.

Berðu listann þinn saman við lista nokkurra félaga þinna. Veljið bestu spurningarnar og búið til einn góðan spurningalista.

b Hvar gæti verið skynsamlegt að leggja þennan spurningalista fyrir til að fá sem raunsæjastar niðurstöður?

7 Í 10. SJ komu fram ólíkar spurningar. Flokkaðu þær í góðar og vondar spurningar eftir því hvernig þú telur að þær gætu nýst til að afla gagna um akstursvenjur.

Ekurðu oft of hratt?

Hefur þú lent í árekstri?

Hve lengi hefur þú haft bílpróf?

Hefur þú valdið tjóni í umferðinni á síðastliðnum 6 mánuðum?

Hefur þú einhvern tímann ekið of hratt?

Hve langa vegalengd ekur þú að meðaltali á viku?
☐ 10 km ☐ 50 km ☐ 100 km ☐ 200 km ☐ 250 km

Ekur þú bíl til og frá vinnu/skóla?
☐ alla virka daga ☐ 2–3 daga í viku ☐ sjaldnar en einu sinni í viku ☐ aldrei

Nákvæm skráning er mikilvæg þegar gerðar eru kannanir. Oft eru hönnuð eyðublöð til að skrá og flokka svör.

Tíminn er meira en 6 mánuðir en minna eða jafnt og 9 mánuðir.

Hve langur tími leið frá því þú hófst ökunám og þar til þú laukst því?		
Tími í mánuðum	**Skráning**	**Tíðni**
$0 < t \leq 3$		
$3 < t \leq 6$		
$6 < t \leq 9$		
$9 < t \leq 12$		
$12 < t \leq 15$		
$t > 15$		

8 Þú vilt gera könnun á umferðarlagabrotum. Þú vilt kanna hvort viðmælendur þínir hafa brotið af sér í umferðinni á síðustu 12 mánuðum. Ef svo er vilt þú fá upplýsingar um tegund brots. Þú vilt einnig fá upplýsingar um aldur og kyn viðmælanda. Hannaðu eyðublað sem auðvelt er að merkja á um leið og spurt er.

9 Þú hyggst kanna viðhorf fólks til þess að lágmarksaldur til ökuprófs verði hækkaður úr 17 árum í 18 ár.

a Hvaða fleiri upplýsinga væri æskilegt að afla?

b Hannaðu eyðublað sem nota mætti við söfnun upplýsinga.

c Hvað þarf að hafa í huga við gerð eyðublaðs?

10 Þegar upplýsingum er safnað þarf að huga vel að vali úrtaks ef ekki er hægt að spyrja alla eða nýta gögn sem hugsanlega eru til einhvers staðar.

a Hvers konar úrtak væri gott að velja til að fá sem áreiðanlegastar upplýsingar með könnununum í verkefnunum hér fyrir ofan?

b Væri í einhverju af þessum tilvikum hægt að afla gagna á annan hátt en með því spyrja tiltekið úrtak?

11 Fréttavefur setur fram spurningu dagsins á hverjum degi. Hve mikið mark telur þú að taka megi á niðurstöðum kannana af þessu tagi?

Ertu fylgjandi 10 ára skólaskyldu á Íslandi?

Í könnunum er oft verið að safna upplýsingum sem síðan eru flokkaðar á ýmsa vegu, til dæmis eftir kyni eða aldri. Hentugt getur verið að skrá slíkar upplýsingar í töflur. Upplýsingar í töflunum hér fyrir neðan koma frá tryggingarfélögum.

Algengustu atvik sem leiða til tjóns hjá ökumönnum á aldrinum 17–20 ára

Árið 2006	Aftanákeyrsla	Ekið aftur á bak	Forgangur ekki virtur	Ekið á kyrrstætt ökutæki	Annað	Alls
Karlar	616	498	169	425	417	2125
Konur	353	296	84	244	250	1228
Alls	969	794	253	669	667	

Úr töflunni er hægt að lesa bæði skiptingu eftir kynjum og einnig eftir atviki sem leiðir til tjóns.

12 Notaðu upplýsingarnir í töflunni.
Sýndu í prósentum hvernig tjónin skiptast milli karla og kvenna.

Árið 2006	Aftaná-keyrsla	Ekið aftur á bak	Forgangur ekki virtur	Ekið á kyrrstætt ökutæki	Annað
Karlar	63,6%				
Konur					
Alls	100%				

heild · prósenta = hluti

969 · prósenta = 616

$\frac{616}{969} = 0{,}6357 \approx 63{,}6\ \%$

13 a Notaðu upplýsingarnar í töflunni og sýndu hver er hlutfallsleg skipting brotanna hjá körlum annars vegar og hjá konum hins vegar.

Árið 2006	Aftanákeyrsla
Karlar	29%
Konur	

b Hvaða ályktanir má draga út frá þeim upplýsingum sem fram koma í töflunum?

c Hvaða upplýsingar bætast við þegar upplýsingarnar eru settar fram í prósentum miðað við að nota fjöldatölur?

Algengustu atvik sem leiða til tjóns hjá öllum ökumönnum

Árið 2006	Aftanákeyrsla	Ekið aftur á bak	Forgangur ekki virtur	Ekið á kyrrstætt ökutæki	Annað	Alls
	3793	5972	1542	3971	3826	19 104

14 Notaðu upplýsingarnar úr töflunni og berðu þær saman við tjón ungra ökumanna. Er einhver tegund tjóna algengari hjá ungum ökumönnum en ökumönnum almennt?

15 Finndu þrjú dæmi um töluleg gögn sem tengjast akstri og umferðarmálum þar sem gögnin eru:

a stök gildi

b samfelldar breytur

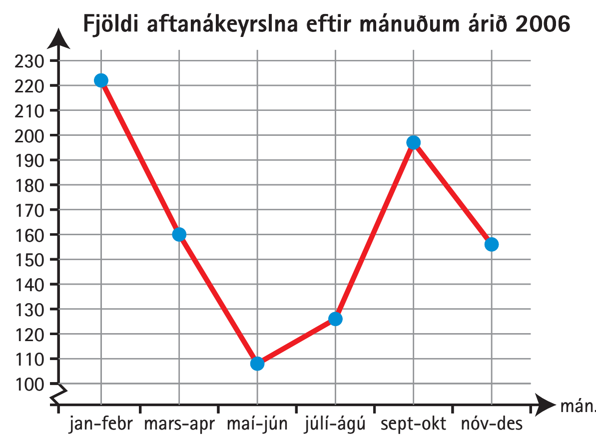
> Töluleg gögn eru ýmist **stök gildi** eða **samfelldar breytur**. Stök gildi eru fundin með talningu, til dæmis þegar talinn er fjöldi þeirra sem valda mismunandi tjónum í umferðinni. Samfelldar breytur geta tekið hvaða gildi sem er á tilteknu bili og eru yfirleitt skráning á mælingu, til dæmis mæling á bensíneyðslu bíls.

16 **a** Sýndu með súluriti skiptingu atvika sem leiða til tjóna hjá 17–20 ára ökumönnum og túlkaðu niðurstöður.

b Sýndu með skífuriti skiptingu atvika sem leiða til tjóna hjá 17–20 ára ökumönnum og túlkaðu niðurstöður.

c Draga myndritin athygli að sömu þáttum?

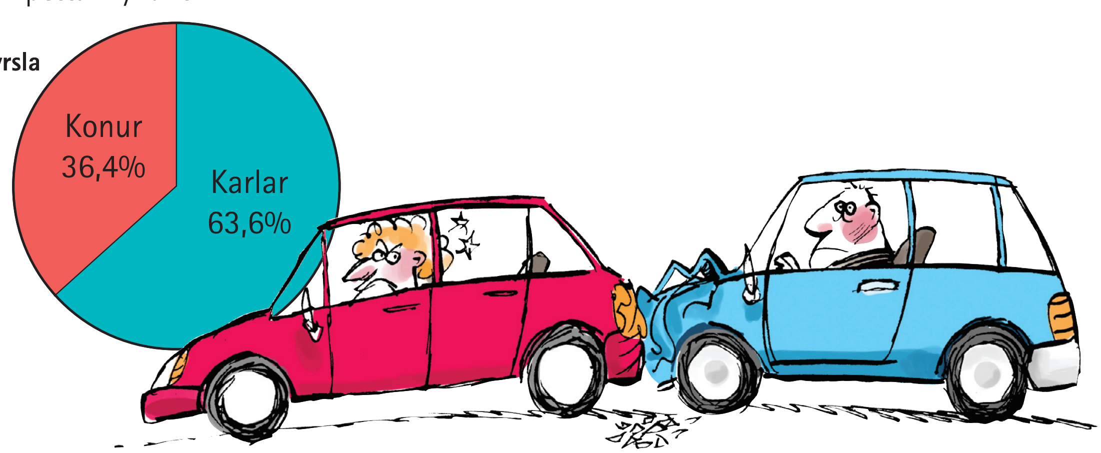
17 Hvað segir þetta myndrit?



> Þegar töluleg gögn eru byggð á talningu má setja þau fram sem myndrit, til dæmis sem:
>
> - Súlurit.
> - Skífurit sem sýnir hlutfallslega skiptingu.
> - Línurit ef gögnin ná yfir tiltekinn tíma.

18 Hvað segir þetta myndrit?

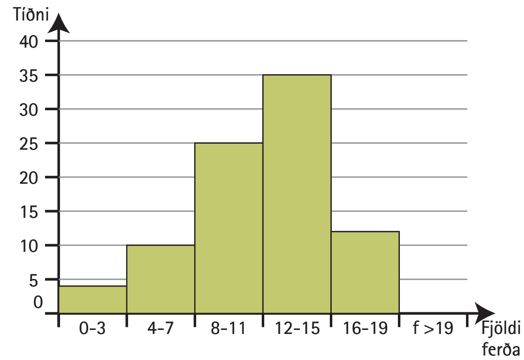
Aftanákeyrsla



Þegar töluleg gögn eru umfangsmikil eða samfelldar breytur má draga niðurstöður saman með því að flokka gögnin í flokka sem ná yfir jafnstór bil. Hentugt getur verið að skrá fjölda í hverjum flokki í tíðnitöflu og nota síðan stuðlarit til að birta niðurstöður myndrænt.

Farþegar á leið S11 voru spurðir eftirfarandi spurningar: Hve oft í viku tekur þú strætó?

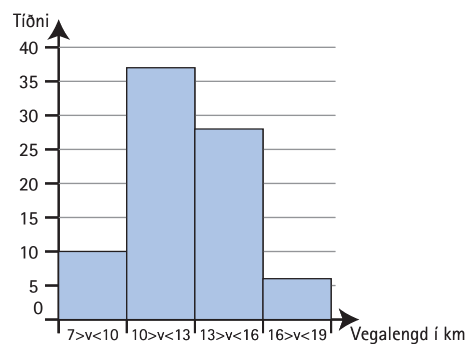
Fjöldi ferða	Skráning	Tíðni	Samanlögð tíðni
0 – 3	IIII	4	4
4 – 7	𝍸 𝍸	10	14
8 – 11	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	25	39
12 – 15	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	35	74
16 – 19	𝍸 𝍸 II	12	86
f > 19		0	86



Í bílablaði var listi yfir hve langt bílar kæmust á einum lítra af bensíni. Gunnar flokkaði upplýsingarnar og skráði í töflu.

Vegalengd í km	Skráning	Tíðni	Samanlögð tíðni
$7 \leq v < 10$	𝍸 𝍸	10	10
$10 \leq v < 13$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	37	47
$13 \leq v < 16$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	28	75
$16 \leq v < 19$	𝍸 I	6	81

7 km eru minna eða jafnt og vegalengdin (v) sem er minna en 10 km.



19 Lestu úr töflum og myndritum hér fyrir ofan.

a Hve margir tóku þátt í könnuninni um tíðni strætóferða?

b Hve margir bílar voru á listanum í bílablaðinu?

c Hve margir taka strætó sjaldnar en 12 sinnum í viku?

d Hve margir bílar komast styttra en 16 kílómetra á einum lítra af bensíni?

e Hve löng bil eru notuð í tíðnitöflunni um bensínnotkun?

f Á hvaða bili voru niðurstöður á athugunum á bensínnotkun?

g Hve stór hluti farþega á leið S11 tekur strætó oftar en sjö sinnum í viku?

h Hvað þykir þér athyglisverðast við niðurstöður þessara kannana?

Tíðnitaflan sýnir fjölda tjóna og fjölda slasaðra á einu ári miðað við tíma sólarhrings bæði hjá öllum ökumönnum og 17–20 ára ökumönnum.

	Allir		17–20 ára	
klukka	**fjöldi tjóna**	**fjöldi slasaðra**	**fjöldi tjóna**	**fjöldi slasaðra**
0–0:59	145	48	109	48
1–1:59	109	72	60	57
2–2:59	66	12	27	0
3–3:59	57	27	39	27
4–4:59	30	0	3	0
5–5:59	45	30	21	12
6–6:59	72	9	9	0
7–7:59	314	39	45	6
8–8:59	766	57	118	18
9–9:59	546	54	78	12
10–10:59	610	36	48	3
11–11:59	748	124	60	21
12–12:59	1 047	106	124	6
13–13:59	1 101	181	151	33
14–14:59	1 156	157	148	18
15–15:59	1 168	151	151	21
16–16:59	1 421	235	266	72
17–17:59	1 291	208	205	60
18–18:59	957	208	172	33
19–19:59	561	91	145	39
20–20:59	525	75	127	33
21–21:59	428	57	145	18
22–22:59	380	130	136	42
23–23:59	199	21	66	15

20 a Hvernig finnst þér eðlilegast að skipta sólarhringnum í sex tímabil ef draga á fram álagstíma í umferðinni?

b Settu niðurstöður tíðnitöflunnar í sex flokka sem ná yfir jafnlangan tíma.

c Búðu til stuðlarit fyrir hvern hóp fyrir sig sem sýnir fjölda tjóna. Berðu saman fjölda tjóna eftir því hvenær sólarhrings þau verða.

d Búðu einnig til stuðlarit og berðu saman fjölda slasaðra.

21 a Finndu hlutfall milli fjölda slasaðra og fjölda tjóna hjá báðum hópum í hverjum flokki.

b Á hvaða tímabili sólarhrings slasast hlutfallslega flestir? Er munur á milli ungra ökumanna og allra ökumanna?

Hlutfallstíðni segir til um hve stórt hlutfall viðkomandi tíðni er af heildarfjöldanum.
Hlutfallstíðni má sýna bæði sem hlutfall og prósentu.

Hve oft í viku tekur þú strætó?

Fjöldi ferða	Tíðni	Hlutfallstíðni	
		Hlutfall	Prósenta
0 – 3	4	$\frac{4}{86}$	4,6 %
4 – 7	10		
8 – 11	25		
12 – 15	35		
16 – 19	12		
∑	86		

22 Notaðu upplýsingarnar í töflunni.

a Skráðu hlutfallstíðni sem hlutfall og prósentu.

b Hvaða kosti hefur það að gefa upplýsingar um hlutfallstíðni fremur en tíðni?

c Hver er hlutfallstíðni farþega sem nota strætó sjaldnar en 12 sinnum í viku?

Hve langt komast bílar á 1 lítra af bensíni?

Vegalengd í km	Skráning	Tíðni	Samanlögð tíðni	Hlutfallstíðni	Samanlögð hlutfallstíðni
$7 \leq v < 10$	𝍸 𝍸	10			12,3 %
$10 \leq v < 13$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	37	47	45,7 %	58 %
$13 \leq v < 16$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	28	75		
$16 \leq v < 19$	𝍸 I	6			100 %

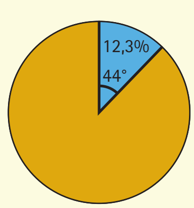
23 Notaðu upplýsingarnar í töflunni.

a Finndu samanlagða tíðni, hlutfallstíðni og samanlagða hlutfallstíðni.

b Hvaða kosti hefur það að setja inn í töfluna dálka fyrir samanlagða tíðni og samanlagða hlutfallstíðni?

c Hve stórt hlutfall bíla kemst styttra en 16 kílómetra á einum lítra af bensíni?

d Teiknaðu prósentureit sem sýnir hlutfallstíðni og samanlagða hlutfallstíðni.

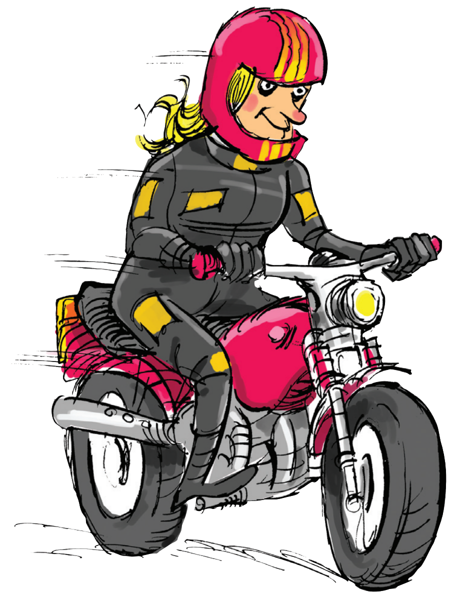


Nota má upplýsingar um hlutfallstíðni til að teikna skífurit.
Hringur er 360°.
12,3% af 360° eru 44°.
Geiri sem sýnir hlutfall þeirra bíla sem komast $7 \leq$ km <10 á því að vera 44°.

24 Búðu til skífurit sem sýna hlutfallstíðni úr dæmum 22 og 23.

Tíðnitaflan sýnir niðurstöður hraðamælinga kl. 8–9 að morgni fyrir utan skóla þar sem hámarkshraði er 30 km/klst.

Hraði í km/klst.	Skráning	Tíðni
$0 < v \leq 10$	~~IIII~~ I	6
$10 < v \leq 20$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
$20 < v \leq 30$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	43
$30 < v \leq 40$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	32
$40 < v \leq 50$	IIII	4



25 Notaðu töfluna.

a Finndu hlutfallstíðni og samanlagða hlutfallstíðni.

b Hve stórt hlutfall ökumanna ók á löglegum hraða?

c Hve stórt hlutfall ökumanna ók á 40 km hraða eða meira?

d Hve stórt hlutfall ökumanna ók yfir löglegum hraða?

e Búðu til stuðlarit sem sýnir hlutfallstíðni.

f Búðu til skífurit sem sýnir hlutfallstíðni.

g Þú ætlar að nota myndrit til að vekja athygli á því hve stórt hlutfall ökumanna ekur yfir hámarkshraða fyrir framan skólann. Hvort myndir þú nota stuðlarit eða skífurit? Rökstyddu svar þitt.

26

Niðurstöður hraðamælinga í eina klukkustund á þjóðvegi 1

66	75	88	41	97	104	94	93	83	88	72	87	78	76	88	81	90	90	77	99	101	67	45	
77	100	99	87	86	73	86	88	77	54	69	79	59	67	89	85	56	85	91	91	68	90	59	90
90	92	93	77	82	99	109	99	66	79	88	59	93	93	94	95	67	90	90	96	98	97	58	87
59	87	87	77	85	86	75	89	89	87	89	89	53	92	49	92	92	87	92	100	100	102	78	
99	93	87	87	86	94	93	67	89	88	83	59	92	90	90	101	100	49	59	88	89	91	92	

Búðu til stuðlarit þar sem notuð er hlutfallstíðni. Á stuðlaritinu á að vera hægt að sjá hve stórt hlutfall ökumanna ók yfir hámarkshraða og einnig hve stórt hlutfall var 10 km eða meira yfir hámarkshraða. Byrjaðu á að búa til tíðnitöflu.

Hraði	Skráning	Tíðni	Hlutfallstíðni
$40 < v \leq 50$			
$50 < v \leq 60$			

Ökumenn sem teknir eru fyrir of hraðan akstur fá bæði refsipunkta og sektir. Upplýsingar um refsipunkta og sektir má finna á vef Umferðarstofu http://www.us.is/ .

Meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi eru allt hugtök sem notuð eru til að lýsa **miðsækni**. Reynt er að finna eitt talnagildi sem getur verið dæmigert fyrir gagnasafnið. Það fer eftir því hvert gagnasafnið er og tilganginum með gagnaöfluninni hvaða hugtak hentar best.

27 Starfsfólk í fyrirtæki nokkru tók þátt í átakinu: *Hjólað í vinnuna.* Tölurnar sýna hve langt hver starfsmaður hjólaði daglega.

2,3 km 8,9 km 4,2 km 6,1 km
0,9 km 15,6 km 8 km 1,4 km

a Hve langt hjólar starfsfólkið að meðaltali á dag?

b Hve marga kílómetra hjólar starfsfólkið samtals á viku?

Meðaltal er fundið með því að leggja saman öll gildin og deila með fjölda þeirra.

28 Í skoðanakönnun var spurt:
Hvenær telur þú að heimila ætti ungu fólki að taka ökupróf?

Aldur í árum	Tíðni	Margfeldi
15	7	105
16	25	
17	73	
18	60	
19	3	
Σ	168	

a Finndu meðaltal úr niðurstöðum könnunarinnar.

b Benda niðurstöður til að fólk vilji breyta ökuprófsaldri?

Meðaltal gagnasafns sem sett er fram í tíðnitöflu er fundið með því að margfalda saman gildi og tíðni þess. Meðaltalið er fundið með því að leggja saman margfeldin og deila í summuna með samanlagðri tíðni.

29 **a** Finndu meðaltal úr niðurstöðum könnunarinnar.

b Innan hvaða flokks er meðaltalið?

Hve langt komast bílar á 1 lítra af bensíni?

Vegalengd í km	Tíðni	Miðja	Margfeldi
$7 \leq v < 10$	10	8,5	85
$10 \leq v < 13$	37		
$13 \leq v < 16$	28		
$16 \leq v < 19$	6		
Σ	81		

Þegar finna á meðaltal gagna sem hafa verið flokkuð er fundin miðja í hverjum flokki og hún margfölduð með tíðninni.

30 Í Útbæ tóku 15 manns bílpróf árið 2007. Meðalaldur þeirra var 18,8 ár.
Í Innbæ tóku 215 manns bílpróf árið 2007. Meðalaldur þeirra var 17,5 ár.

Ef finna á meðalaldur þeirra sem tók bílpróf í þessum tveimur bæjum er ekki hægt að leggja tölurnar saman og deila með tveimur þar sem mismikill fjöldi liggur að baki þeim. Fyrst þarf að finna samanlagðan aldur á hvorum stað fyrir sig. Þær niðurstöður eru lagðar saman og deilt í summuna með heildarfjölda þeirra sem tóku bílpróf í bæjunum tveimur.

Hver er meðalaldur þeirra sem tóku bílpróf í Útbæ og Innbæ árið 2007?

31 Í Innbæ var haldin keppni fyrir unga ökumenn. Hver keppandi þurfti að leysa fjórar þrautir.

Þrautirnar vógu mismikið við útreikning á stigafjölda keppenda.

Ökubraut 40%
Bakkað í stæði 15%
Skipt um hjólbarða 20%
Umferðarmerki 25%

Reiknaðu heildarstigafjölda hvers keppanda út frá vægi þrautanna.

	Eva	Atli	Snær	Margét
Ökubraut	8	5	9	9
Bakkað í stæði	7	7	9	6
Skipt um hjólbarða	9	10	5	7
Umferðarmerki	4	10	7	9

Miðgildi er sú tala sem lendir í miðjunni þegar gildum er raðað í röð eftir stærð frá þeirri lægstu til þeirra hæstu. Ef tvær tölur lenda í miðjunni er fundið meðaltal þeirra tveggja.

Ökuprófsaldur í Útbæ árið 2007														
17	17	17	17	17	17	17	17	17	18	18	18	18	18	39

32 Hvert er miðgildi fyrir ökuprófsaldur í Útbæ árið 2007?

Ökuprófsaldur í Útbæ árið 2006													
17	17	17	17	17	17	17	18	18	19	22	25	29	46

33 a Hvert er miðgildi fyrir ökuprófsaldur í Útbæ árið 2006?

b Hver var meðalaldur þeirra sem tóku ökupróf í Útbæ árið 2006?

c Hver var meðalaldur allra þeirra sem tóku ökupróf í Útbæ árin 2006 og 2007?

Tíðasta gildi er það gildi sem kemur oftast fyrir í gagnasafninu.
Í Útbæ kom það oftast fyrir að ökuprófsaldur væri 17 ár árið 2007.
Þegar unnið er með nafnbreytu verður miðsækni eingöngu lýst með tíðasta gildi.
Fyrir kemur að gagnasafn hafi ekkert tíðasta gildi, t.d. ef hvert gildi kemur bara fyrir einu sinni, og einnig getur safn haft fleiri en eitt tíðasta gildi ef mörg gildi koma fyrir jafnoft.

34 Meðaltal ökuprófsaldurs í Útbæ árið 2007 var 18,8 ár, miðgildi 17 ár og tíðasta gildi 17 ár.

a Hvaða hugtak finnst þér best að nota sem dæmigert gildi fyrir gagnasafnið?

b Hvaða viðbótarupplýsingar færðu um ökuprófsaldur árið 2007 í Útbæ með því að skoða öll gildin þrjú, meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi?

35 a Í Innbæ starfa fimm ökukennarar. Taflan sýnir fjölda nemenda þeirra árið 2007. Finndu tíðasta gildi.

b Hvernig væri hægt að nota hugtökin meðaltal og miðgildi til að lýsa upplýsingum í töflunni?

Ökukennarar	Fjöldi prófnemenda
Arnaldur	16
Ásdís	82
Erna	5
Sveinn	78
Sigurður	49

36 Í laufritinu eru skráðar niðurstöður hraðamælinga í eina klukkustund á vegi þar sem leyfilegur hámarkshraði er 60 km/klst.

Tugir	Einingar
km	km
4	2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7
5	1, 2, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9
6	0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 8, 9
7	1, 5, 7, 9

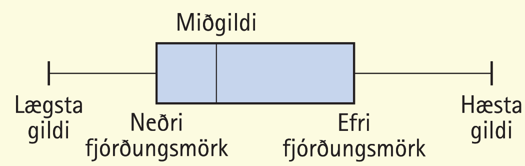
a Finndu meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi.

b Hvaða miðsæknihugtak er þægilegt að finna þegar upplýsingar eru skráðar í laufrit?

c Hvert var hæsta gildið? En það lægsta?

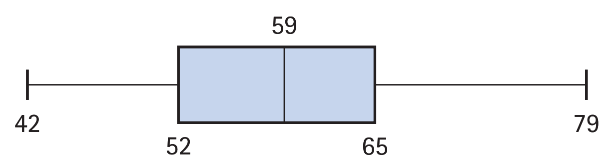
d Hver var dreifingin?

Við gerð rammarits er gögnum fyrst raðað eftir stærð. Oft hentar vel að nota laufrit til þess. Næst er fundið miðgildi með því að finna hvaða tala er í miðju gagnasafnsins. Fjórðungsmörk, sem eru miðgildi í hvorum helmingi, eru mörkuð og dreginn rammi um 50% gildanna. Að lokum eru merkt inn hæsta og lægsta gildi.



37 Niðurstöður hraðamælinganna í eina klukkustund á vegi þar sem leyfilegur hámarkshraði er 60 km/klst. má sýna með rammariti.

Lestu úr rammaritinu.



a Hvert er miðgildið?

b Hver eru efri fjórðungsmörk?

c Hver eru neðri fjórðungsmörk?

d Hve mörg prósent gagnanna eru innan rammans?

38 Niðurstöður hraðamælinga í eina klukkustund fyrir framan grunnskóla þar sem leyfilegur hámarkshraði er 30 km/klst.

23	45	30	33	27	10	51	42	31	28	27	28	25
32	19	28	25	30	30	30	25	28	33	37	42	

Skráðu niðurstöðurnar í laufrit og rammarit.
Hvað má lesa úr þessum niðurstöðum?

39 Oft er því haldið fram að ungir ökumenn brjóti oftar af sér í umferðinni en aðrir. Skráður var aldur 50 ökumanna sem staðnir voru að því að aka yfir á rauðu ljósi.

25	38	42	17	19	37	82	72	63	71	45	43	45
42	32	33	36	37	74	52	73	67	26	18	27	21
42	51	56	33	35	47	35	34	26	34	18	25	
28	45	43	64	71	62	45	34	35	29	56	24	

Skráðu niðurstöðurnar í laufrit og rammarit.
Hvað má lesa úr þessum niðurstöðum?

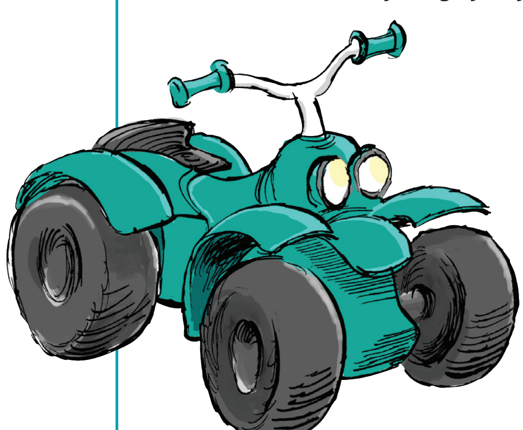
HÓPVERKEFNI

40 Framkvæmið tölfræðilega rannsókn á einu viðfangsefni. Hér eru gefin þrjú dæmi sem þið getið valið að skoða nánar. Þið getið líka valið ykkur viðfangsefni og aflað eigin gagna. Setjið fram rannsóknarspurningu sem leita má svara við með viðeigandi gögnum, setja niðurstöður fram á myndrænan hátt og nota miðsæknihugtök þar sem það á við. Skrifið skýrslu um niðurstöður rannsóknar ykkar. Gerið einnig grein fyrir hvernig þið unnuð verkið.

1 Niðurstöður hraðamælinga í eina klukkustund á þjóðvegi 1.

66	75	88	41	97	104	94	93	83	88	72	87	78
76	88	81	90	90	77	99	101	67	45	77	100	99
87	86	73	86	88	77	54	69	79	59	67	89	85
56	85	91	91	68	90	59	90	90	92	93	77	82
99	109	99	66	79	88	59	93	93	94	95	67	90
90	96	98	97	58	87	59	87	87	77	85	86	75
89	89	87	89	89	53	92	49	92	92	87	92	100
100	102	78	99	93	87	87	86	94	93	67	89	88
83	59	92	90	90	101	100	49	59	88	89	91	92

2 Skrásett vélhjól og fjórhjól í árslok 1986–2005.



Ár	Vélhjól	Fjórhjól	Ár	Vélhjól	Fjórhjól
1986	862	11	1996	1950	320
1987	917	806	1997	2047	347
1988	973	819	1998	1906	346
1989	1073	827	1999	2084	387
1990	1535	707	2000	2278	453
1991	1691	592	2001	2444	551
1992	1806	515	2002	2557	697
1993	1780	408	2003	2747	1076
1994	1825	336	2004	3105	1597
1995	1881	323	2005	4183	2528

3 Athugun á vikulegum akstri 17 ára ökumanna í Innbæ.
Mælt var í kílómetrum.

40	41	13	24	127	25	67	24	15	8	0,7	23	23
14	27	32	75	109	83	62	12	76	53	98	59	
75	49	96	159	127	58	97	95	84	73	63	86	

Algebra og jöfnur

Með jöfnum má skrá upplýsingar um stærðir og samband þeirra. Þegar leysa á jöfnur getur verið gott að styðjast við myndræna framsetningu og lýsingu á sambandinu í orðum.

Markmið þessa kafla eru að þú:

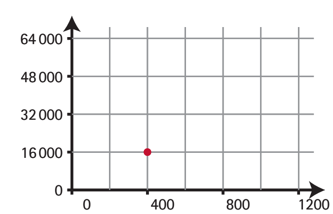
- *Þekkir leiðir til að sýna samband stærða með orðum, jöfnum, með því að setja gildi í töflur og teikna gröf.*
- *Þekkir einkenni á jöfnu beinnar línu og getir fundið hallatölu beinnar línu og skurðpunkta hennar við ása hnitakerfisins.*
- *Getir leyst saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.*
- *Þekkir einkenni á annars stigs jöfnum og hafir kynnst því hvernig leysa má annars stigs jöfnur með þáttun.*
- *Getir þáttað og margfaldað saman liðastærðir.*

1 Hópur nemenda tekur að sér að planta trjám til fjáröflunar fyrir skólaferð. Nemendur fá greiddar 40 krónur fyrir hverja plöntu sem plantað er.

a Settu upp töflu þar sem fram kemur hve mikið nemendur fá fyrir að planta 400, 800, 1200, 1600, 2000 plöntum.

x	400	800	1200
y	16 000		

b Búðu til graf sem sýnir hve mikið nemendur fá fyrir að planta allt að 2000 plöntum.



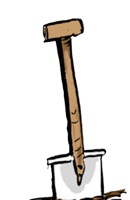
c Settu fram jöfnu sem lýsir sambandinu milli fjölda plantna (x) og þeirrar upphæðar (y) sem nemendur fá í sinn hlut.

2 Notaðu töfluna, grafið eða jöfnuna í dæmi 1 til að finna út hve háa upphæð hópurinn fær ef hann plantar

a 800 plöntum **b** 1000 plöntum **c** 1680 plöntum **d** 2000 plöntum

e Gerðu grein fyrir hvaða leið þú valdir í hverju tilviki.

3 Styrktaraðili greiðir 50 kr. fyrir hverja plöntu og 8000 kr. fyrir flutning þeirra á gróðursetningarstað.
Sýndu með töflu eða grafi kostnað styrktaraðilans fyrir allt að 2000 plöntur.



4 *a* Notaðu tölurnar í gildistöflunni til að teikna graf.

b Lýstu sambandi talnanna með orðum.

c Settu fram jöfnu sem lýsir sambandi talnanna.

d Finndu dæmi úr daglegu lífi sem lýsa mætti með þessu sambandi.

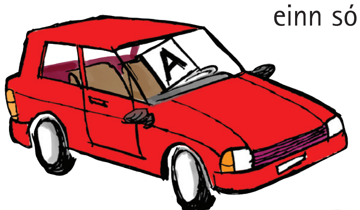
x	y
0	20
10	60
20	100
30	140
40	

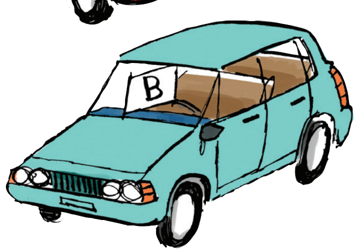
5 $y = 45x + 3000$

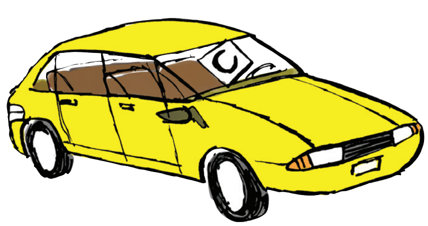
a Settu samband stærðanna fram með gildistöflu, grafi og orðum. Láttu x taka gildin 100, 200, 300, …

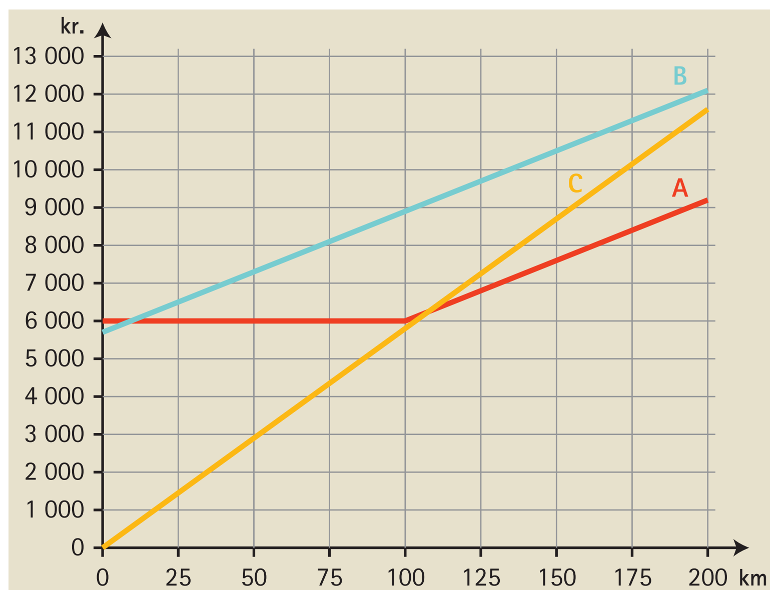
b Finndu dæmi úr daglegu lífi sem lýsa mætti með þessu sambandi.

6 Bílaleiga býður upp á þrjá valkosti við leigu lítilla fólksbíla. Miðað er við leigu í einn sólarhring. Valkostunum þremur er lýst á myndinni.









a Hvað kostar að leigja bíl miðað við valkost A ef aka á 150 km?

b Hvað kostar að leigja bíl miðað við valkost C ef aka á 50 km?

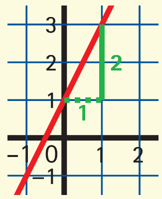
c Hve langt má aka samkvæmt valkosti B fyrir 10 000 krónur?

d Hvaða valkostur er ódýrastur ef aka á minna en 100 km á dag?

e Í hvaða tilvikum skiptir ekki máli hvort valinn er valkostur A eða C?

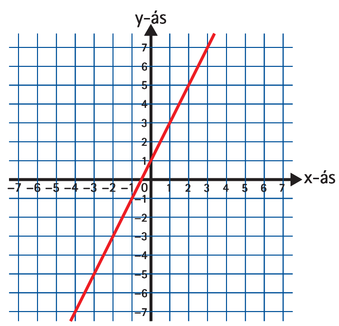
f Í hvaða tilvikum skiptir ekki máli hvort valinn er valkostur B eða C?

g Í hvaða tilvikum skiptir ekki máli hvort valinn er valkostur A eða B?

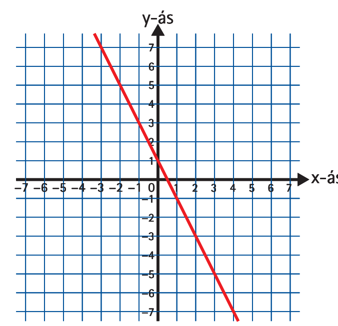


Hallatala fyrir beina línu er sú tala sem lýsir breytingu á y-gildi þegar x-gildið hækkar um 1.

7 a Í hvaða punkti sker línan y-ásinn?
b Hvaða gildi hefur y ef x = 2?
c Hvaða gildi hefur y ef x = 3?
d Hve mikið hækkar y ef x hækkar um 1?

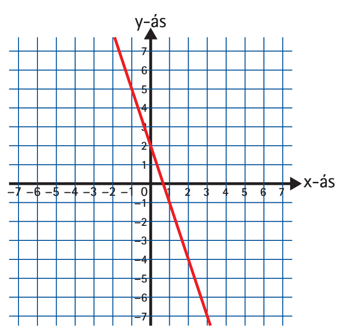


8 a Í hvaða punkti sker línan y-ásinn?
b Hvaða gildi hefur y ef x = 2?
c Hvaða gildi hefur y ef x = 3?
d Hve mikið lækkar y ef x hækkar um 1?

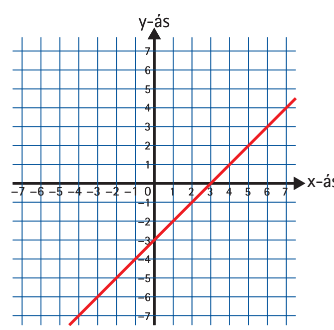


9 Hver er hallatala þessara lína og hver er skurðpunktur þeirra við y-ás?

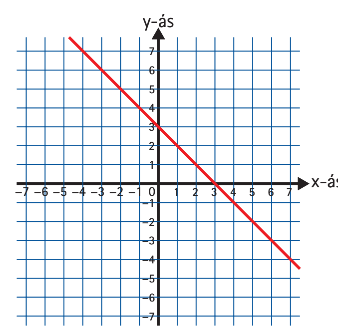
a



b

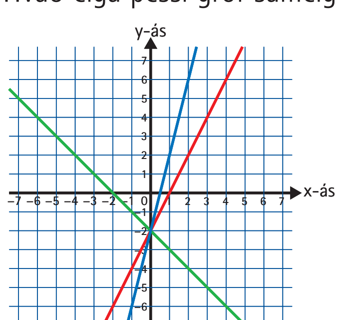


c

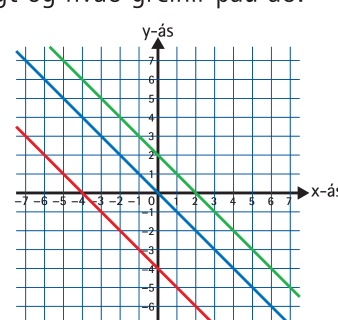


10 Hvað eiga þessi gröf sameiginlegt og hvað greinir þau að?

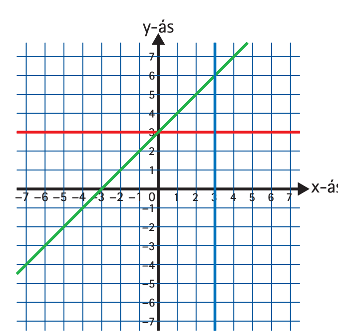
a



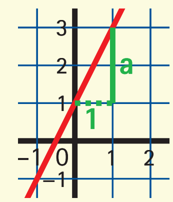
b



c

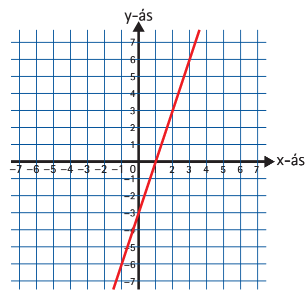


Jafna beinnar línu hefur formið $y = ax + b$ þar sem
a er hallatalan og $(0,b)$ er skurðpunktur hennar við y-ás.
Stærðirnar a og b eru tilteknar tölur en x og y eru breytur.

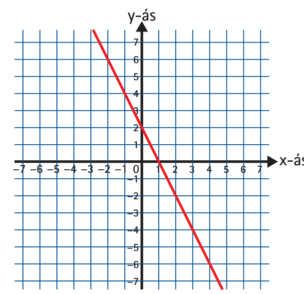


11 Skráðu jöfnu hvers grafs.

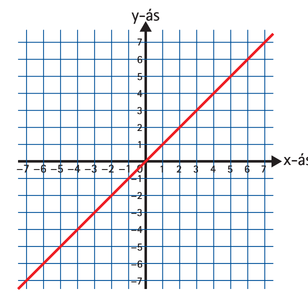
a



b



c



12 Teiknaðu línuna og skráðu jöfnuna.

a Bein lína sker y-ás í punktinum (0,2) og hallatala hennar er 1.

b Bein lína sker y-ás í punktinum (0,2) og hallatala hennar er –2.

c Bein lína sker y-ás í punktinum (0,–1) og hallatala hennar er –3.

13 Punktarnir liggja á beinni línu. Teiknaðu línuna í hnitakerfi og finndu jöfnu hennar.

a A(2,–2) og B(6,2)

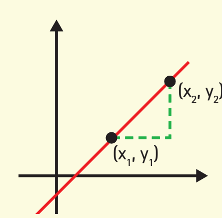
b A(4,4) og B(–4,0)

c A(3,5) og B(5,–1)

d A(–3,5) og B(6,2)

Hægt er að reikna út hallatölu beinnar línu ef tveir punktar á henni eru þekktir.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



14 Reiknaðu hallatölu beinnar línu sem hefur punktana

a A(1,3) og B(2,7)

b A(–2,4) og B(2,–4)

c A(1,6) og B(–1,–2)

d A(0,3) og B(5,3)

e A(2,5) og B(–1,–2,5)

f A(–2, 8) og B(1,2)

Þegar reiknuð hefur verið hallatala beinnar línu út frá tveimur þekktum punktum má finna skurðpunkt hennar við y-ás með því að setja hnit annars punktsins og hallatöluna inn í jöfnu beinnar línu. $y = ax + b$

Punktarnir A(3,6) og B(5,2) liggja á beinu línunni m.

Hallatala línunnar m er $\frac{2-6}{5-3} = -2$.

Dæmi: Notaður er punkturinn A(3,6) og hallatalan – 2.

$6 = -2 \cdot 3 + b$

$6 = -6 + b$

$12 = b$

Hér hafa punkturinn og hallatalan verið sett inn í jöfnu beinnar línu.

Jafna línunnar m er því $y = -2x + 12$.

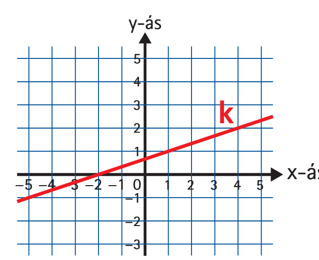
Skurðpunktur við y-ás er (0,12)

Ekki er alltaf hægt að lesa skurðpunkta og hallatölu af grafi af nægilegri nákvæmni.

Nota má hvaða punkt sem er á beinni línu ásamt hallatölu hennar til að finna skurðpunkt línunnar við y-ás.

15 a Í skýringunum hér að ofan var skurðpunktur línunnar m við y-ás reiknaður með því að nota punktinn A(2,5). Reiknaðu skurðpunkt línunnar m við y-ás með því að nota punktinn B(5,1). Færðu sama skurðpunktinn?

b Er punkturinn (–1,9) á línunni m?



16 Finndu tvo punkta á línunni **k**. Reiknaðu hallatölu línunnar og skurðpunkt hennar við y-ás.

17 Settu fram jöfnur fyrir beinu línurnar í dæmi 14.

a A(1,3) og B(2,7)
b A(–2,4) og B(2,–4)
c A(1,6) og B(–1,–2)
d A(0,3) og B(5,3)
e A(2,5) og B(–1,–2,5)
f A(–2,8) og B(1,2)
g Skráðu hvenær hallatalan er jákvæð neikvæð núll

18 a Er hallatala línu sem liggur í gegnum punktana A(1,5) og B (3,2) jákvæð, neikvæð eða núll? Skoðaðu x-gildi og y-gildi punktanna og ályktaðu út frá því.

b Reiknaðu hallatöluna og berðu niðurstöður saman við ályktanir þínar.

19 a Hvað kosta fjögur vasaljós og eitt par af stígvélum?

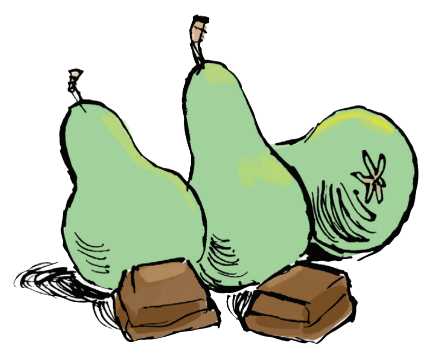
b Hve miklu munar á verði á vasaljósi og stígvélum?

c Hve mikið kostar eitt vasaljós? En eitt par af stígvélum?

20 a 2 súkkulaðistykki og 3 perur kosta samtals 290 kr. Finndu fjögur til fimm dæmi um verð á hvorri tegund.
Skráðu svör þín í töflu.

Verð	
Súkkulaðistykki	**Perur**
70	50

b Skráðu niðurstöður í töflunni inn í hnitakerfi með því að setja verð á súkkulaðistykki á y-ás og verð á peru á x-ás.
Nú hefur þú skráð punkta sem sýna dæmi um verð þannig að skilyrðum um heildarverðið 290 krónur og fjölda sé fullnægt.



c Skráðu punkta í sama hnitakerfi sem uppfylla skilyrðið: Súkkulaðistykki er 30 krónum ódýrara en pera.

d Til eru margar lausnir ef aðeins þarf að uppfylla annað skilyrðið eins og gert var í b- og c-lið. Ef uppfylla þarf bæði skilyrðin er aðeins til ein lausn og hana má lesa úr hnitakerfinu. Hver er hún?

e Skráðu jöfnu þar sem x táknar verð á súkkulaði og y táknar verð á peru og heildarverðið er 290 krónur.

f Skráðu jöfnu sem lýsir því sambandi að súkkulaðistykki (x) kosti 30 krónum minna en pera (y).

21 Magdalena rekur veitingastað í París. Hún reiknar út verð á hverri pöntun. Herbert hefur pantað þrjá bolla af kaffi og kökusneið. Reikningur hans hljóðar upp á 13 evrur. Hann langar að vita hvað kaffibollinn kostar. Magdalena gefur honum vísbendingu: Kaffibollinn kostar einni evru minna en kökusneiðin. Herbert ákveður að leita að lausn með því að setja fram tvær jöfnur og teikna gröf þeirra í hnitakerfi.

a Settu fram jöfnu fyrir þrjá kaffibolla (x) og eina kökusneið (y) sem kosta 13 evrur.

b Settu fram jöfnu fyrir verðmismun á kaffibolla (x) og kökusneið (y).

c Teiknaðu gröf jafnanna úr a- og b-lið í hnitakerfi.

d Hver eru hnit punktsins þar sem gröf jafnanna skerast?

e Hvað segir skurðpunkturinn um verð á kaffibolla?

22 Búðu til gildistöflu fyrir jöfnurnar og teiknaðu graf þeirra.

a $x - 2y = 10$ **c** $x = 3y + 2$ **e** $3x - 2y = 23$

b $2x + 3y = 6$ **d** $x + 5y = 26$ **f** $2x - 3y = 23$

23 Teiknaðu gröf jafnanna í hnitakerfi.
Hvaða x-gildi er lausn fyrir báðar jöfnurnar? G = Q

a $x + y = 10$, $2x - y = 8$

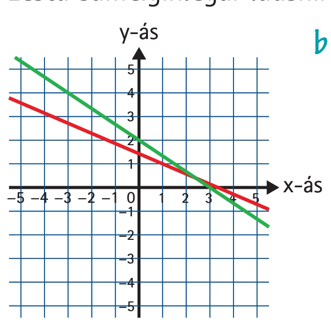
b $3x + 2y = 27$, $2x - 2y = 3$

c $2x + 3y = 21$, $4x + y = 17$

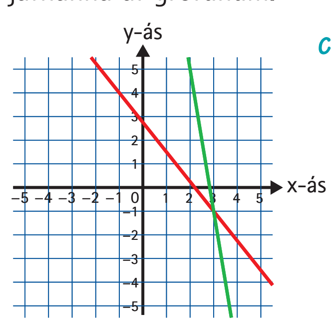
Oft er talað um að leysa saman tvær jöfnur þegar leitað er að sameiginlegum lausnum jafnanna. Þá er verið að finna þau gildi óþekktu stærðanna sem eru lausn fyrir báðar jöfnurnar, þ.e. hvenær þær eru jafngildar.

24 Lestu sameiginlegar lausnir jafnanna af gröfunum.

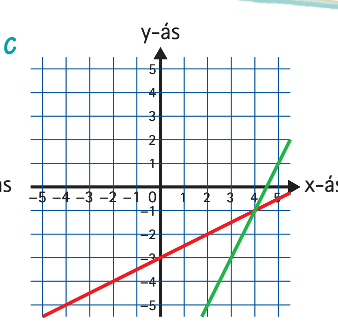
a



b



c



Seinlegt getur verið að teikna af nákvæmni graf jafna í hnitakerfi og er gott að þekkja fleiri leiðir til að leysa saman jöfnur. Hér á eftir verða kynntar tvær aðrar leiðir til að leysa saman tvær jöfnur og reikna út hnit skurðpunkta grafa, þ.e. með innsetningu og með samlagningu.

Innsetningu má nota þegar leysa á saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.

$2x - 7y = 10$ $y - 3x = 4$

Þá er byrjað á að umskrá aðra hvora jöfnuna þannig að önnur óþekkta stærðin sé einangruð.

$$y - 3x = 4$$
$$y = 4 + 3x$$

Fram er komin stæða sem hefur sama gildi og y og því má setja hana í stað y í hinni jöfnunni. Jafnan hefur aðeins eina óþekkta stærð.

$$2x - 7(4 + 3x) = 10$$
$$2x - 28 - 21x = 10$$
$$-19x = 38$$
$$x = -2$$

Finna má y-gildi með því að setja x-gildið -2 inn í aðra hvora jöfnuna.

$$y = 4 + 3 \cdot (-2)$$
$$y = -2$$

$$2 \cdot (-2) - 7y = 10$$
$$-4 - 7y = 10$$
$$-7y = 14$$
$$y = -2$$

Skurðpunktur grafa jafnanna er því $(-2, -2)$. Gott er að setja lausnargildin inn í báðar jöfnurnar og athuga hvort rétt er reiknað.

25 Í skýringunum hér að ofan er sagt frá hvernig leysa má saman tvær jöfnur með innsetningu og finna skurðpunkt grafa þeirra. Þar er sýnidæmi. Teiknaðu gröf jafnanna í sýnidæminu og finndu skurðpunkt þeirra. Færðu sömu niðurstöðu?

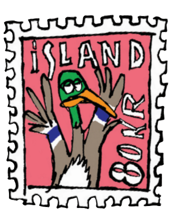
26 Notaðu innsetningu til að leysa saman jöfnurnar. Finndu nákvæmt gildi á hnitum skurðpunkta grafanna.

a $x - y = 3$
$2x + y = 12$

b $2x - 3y = 7$
$2x + y = 11$

c $y - 2x = 9$
$x - 2y = 6$

d $3x + 2y = 20$
$3y = x - 25$



27 Hver eru hnit skurðpunkta grafanna?

a $x - y = 2$
$x + y = 36$

b $2y + x = 1$
$x = 3y - 1$

c $3x = 1 + 2y$
$3y = 6x$

d $3(x - 4) - y = 14$
$2(y - 5) + x = 1$

28 Leystu dæmin með því að setja upp tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.

a Bogi keypti tvær tegundir af frímerkjum, alls 35 frímerki. Önnur tegundin kostaði 80 kr. og hin 60 kr. Alls kostuðu frímerkin 2480 kr. Hve mörg frímerki keypti hann af hvorri gerð?

b Hafdís keypti alls 1,2 kg af hnetum og súkkulaðirúsínum og greiddi fyrir það 679 kr. Eitt kg af hnetum kostar 490 kr. og eitt kg af súkkulaðirúsínum kostar 620 kr. Hve mikið keypti hún af hvorri gerð?

Ef tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum hafa sama stuðul við aðra hvora óþekktu stærðina í báðum jöfnunum en ekki sama formerki má leggja þær saman og fá út jöfnu með aðeins einni óþekktri stærð.

Ef jöfnurnar eru lagðar saman fæst

$$
\begin{array}{rr}
 & x + 2y = 25 \\
+ & x - 2y = 5 \\
\hline
 & 2x = 30 \\
 & x = 15
\end{array}
$$

Lengja má aðra eða báðar jöfnurnar til þess að breyta stuðlum og/eða formerkjum þannig að önnur óþekkta stærðin hverfi við samlagningu jafnanna.

$3x + 2y = 14$

$x + 5y = 22$ (jafnan margfölduð með -3)

Ef jöfnurnar eru lagðar saman fæst

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x + 2y = 14 \\
+ & -3x - 15y = -66 \\
\hline
 & -13y = -52 \\
 & y = 4
\end{array}
$$

29 Leystu saman tvær jöfnur með því að nota samlagningu og lengingu ef þarf. Finndu nákvæmt gildi á hnitum skurðpunkta grafanna.

a $x - y = 3$
$2x + y = 12$

b $2x - 3y = 7$
$2x + y = 11$

c $y - 2x = 9$
$x - 2y = 6$

d $3x + 2y = 20$
$3y = x - 25$

e Færðu sömu svör og í dæmi 26?

30 Hver eru hnit skurðpunkta grafa jafnanna?

a $2x + 3y = 13$
$3x - y = 3$

b $3x + 6y = 69$
$5x - 2y = 7$

c $2x + 4y = 16$
$3x - 2y = 4$

d $2x + 6y = 35$
$x + 5y = 24{,}5$

31 Leystu dæmin með því að setja upp tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.

a Summa tveggja talna er 105 og mismunur þeirra er 39. Hverjar eru tölurnar?

b Summa tveggja talna er 9 og mismunur þeirra er 14. Hverjar eru tölurnar?

c Mismunur tveggja talna er 11. Ef hærri talan er margfölduð með 3 og lægri talan lögð við hana verður summan 65. Hverjar eru tölurnar?

d Summa tveggja talna þegar önnur (x) hefur verið margfölduð með 3 og hin (y) með 2 er 1. Summa þessara sömu talna þegar önnur (x) hefur verið margfölduð með 2 og hin (y) með 4 er –10.

32 Þú hefur nú kynnst þremur leiðum við að leysa saman tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum, það er með teikningu, innsetningu eða samlagningu. Leystu þessar jöfnur saman með öllum þremur leiðunum. Berðu lausnirnar saman og greindu frá hver þeirra þér finnst henta best í hverju tilviki fyrir sig.

a $6x + 2y = 10$
$3x + 5y = 13$

b $y - 2x = -1$
$y + 3x = 9$

33 a Saumastofa saumar svefnpoka og kerrupoka úr sama efni. Nota þarf 5 metra af efninu til að sauma svefnpoka en 2 metra til að sauma kerrupoka. Á lager eru 60 metrar af efninu. Búðu til jöfnu sem nota má til að skoða hvernig skipta má framleiðslunni þannig að allt efnið nýtist.

b Það tekur 15 mínútur að sauma svefnpoka en 18 mínútur að sauma kerrupoka. Starfsmaður er við sauma 360 mínútur á dag. Búðu til jöfnu sem sýnir hvernig skipta má tímanum milli þess að sauma svefnpoka og kerrupoka.

c Leystu jöfnurnar saman.

d Lausnin sýnir hvernig nýta má vinnustundirnar best við framleiðsluna. Hvernig er hentugast að skipta framleiðslunni miðað við 60 metra af efninu og 360 mínútna vinnutíma milli framleiðslu á svefnpokum og kerrupokum?

34 Leystu jöfnurnar saman með þeirri aðferð sem þér finnst henta best.

a $10x - 8y = -6$
$4x - y = 2$

b $x = y + 3$
$x - 10 = 3(y - 10)$

c $x = y + 5$
$8y + 6x = 184$

d $3x - 2y = -35$
$7x + 4y = 44$

e $5x + y = 21$
$7x + 2y = 33$

f $3(x - 2y) = -\frac{3}{2}$
$5y + 4x = 11$

35 Gefðu dæmi um tvær jöfnur sem þér þætti best að leysa saman með

a teikningu

b innsetningu

c samlagningu

36 Búðu til orðadæmi sem gott væri að leysa með því að setja upp tvær jöfnur og leysa þær saman. Þú gætir látið dæmið fjalla um peningaeign þar sem gefinn væri fjöldi peninga og upphæð sem samsett væri úr tveimur gerðum af peningum, t.d. 50 króna peningum og 100 króna peningum.

Þú hefur áður fengist við margföldun og þáttun liðastærða. Þegar liðastærð er margfölduð þarf að gæta þess að hver liður sé margfaldaður fyrir sig.

$3(2x + 5) = 6x + 15$ $\quad\quad$ $2x(x^2 + 3y + 4) = 2x^3 + 6xy + 8x$

$(x + 2)(2x - 3) = 2x^2 - 3x + 4x - 6 = 2x^2 + x - 6$

Þegar liðastærð er þáttuð er verið að finna þá þætti sem liðastærðin er margfölduð upp úr.

$2x + 6 = 2(x + 3)$ $\quad\quad$ $3x^2 + 9y + 12 = 3(x^2 + 3y + 4)$

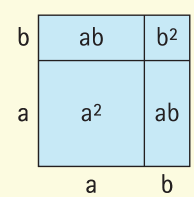
$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$ $\quad\quad$ $2b^2 - 32 = 2(b^2 - 16) = 2(x - 4)(x + 4)$

Manstu þessar reglur? Þær geta komið sér vel þegar margfalda á eða þátta liðastærðir.

$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

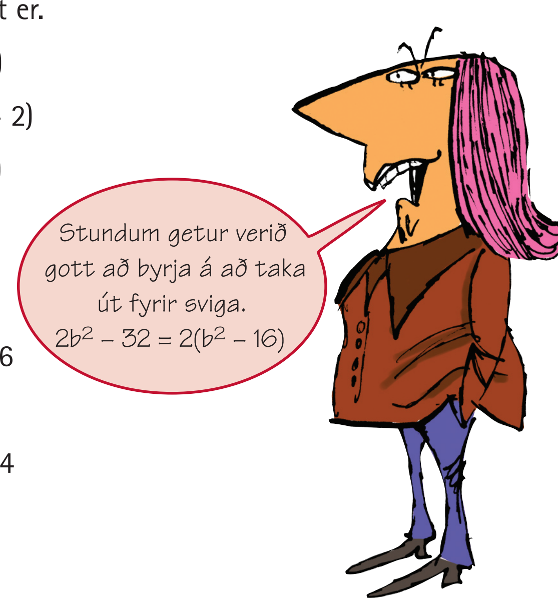
$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



37 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $4(y^2 + 1)$
b $x(x - 3)$
c $a(a^2 + 2b + 2)$
d $2x(x + 5y + 3)$
e $(x + 2)(x + 1)$
f $(b - 3)(b + 2)$
g $(5 + y)(y - 4)$
h $(x + 3)(x + 3)$
i $(x + 5)(x - 5)$
j $(3b + 5)(2b - 2)$
k $(3 + a)(3 - a)$
l $(t - 7)(t + 7)$



38 Þáttaðu liðastærðirnar.

a $6a + 24$
b $15 - 45x$
c $4x - 12xy$
d $4t^2 + 32y^2$
e $2x^2 + 4$
f $7x^3 - 14x^2$
g $5a^2b + 15a$
h $b^2 - 16$
i $x^2 - 12x + 36$
j $4r^4s - 8r^2$
k $x^2 + 16x + 64$
l $81 - k^2$

39 Þáttaðu liðastærðirnar.

a $2b^2 - 18$
b $3a^2 + 30a + 75$
c $2x^2 + 32x + 128$
d $3x^2 - 36x + 108$
e $4c^2 - 24c + 36$
f $c^3 + 6c^2 + 9c$

40 Ljúktu við að þátta þessar stæður.

a $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(\square + \square)$

b $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(\square + \square)$

c $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(\square - \square)$

d $x^2 + x - 12 = (x + 4)(\square - \square)$

41 Margfaldaðu og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(x + 2)(x + 4)$

b $(x + 2)(x - 4)$

c $(x - 2)(x + 4)$

d $(x - 2)(x - 4)$

e $(x + 1)(x + 6)$

f $(x + 1)(x - 6)$

g $(x - 1)(x + 6)$

h $(x - 1)(x - 6)$

i Kemur þú auga á einhverja reglu?
Lýstu henni með eigin orðum.

42 Þáttaðu þessar liðastærðir.

a $x^2 + 6x + 5$

b $k^2 + 6k + 8$

c $x^2 + 4x - 5$

d $m^2 + 2m - 8$

e $x^2 - 7x + 10$

f $y^2 - 3y - 10$

g $a^2 - a - 20$

h $x^2 - 2x - 8$

i $a^2 - 5a - 36$

j $y^2 - 7y - 170$

k $b^2 + 4b - 21$

l $y^2 + 2y - 35$

43 Hvaða stærðir vantar?

a $y^2 - 24y + 144 = (y - \square)(\square - 12)$

b $c^2 + \square + 6 = (\square + \square)(\square + 6)$

c $\square - 2x - 48 = (x + \square)(\square - 8)$

d $2a^2 + 13a + 15 = (2a + \square)(\square + 5)$

e $9b^2 - 64 = (3b + \square)(\square - \square)$

f $16x^2 - 8x + \square = (4x - \square)(\square - 1)$

44 a Hliðarlengd fernings er $x + 3$. Hvert er flatarmál hans?

b Flatarmál fernings er $a^2 - 4a + 4$. Hver er hliðarlengd hans?

45 a Flatarmál rétthyrnings er $b^2 - 16$. Hverjar gætu verið hliðarlengdir hans?

b Hliðarlengdir rétthyrnings eru $9 + m$ og $m - 9$. Hvert er flatarmál hans?

HÓPVERKEFNI

46 Notið fíngert rúðunet, t.d. millímetrapappír, grafískan vasareikni og eða tölvuforrit til að teikna gröf og rannsaka gröf. Gerið grein fyrir niðurstöðum ykkar með því að útbúa einhvers konar kynningu, t.d. á veggspjöldum eða skyggnum.

Gott er að setja upp gildistöflu og finna nokkra punkta á hverju grafi með aðstoð hennar áður en grafið er teiknað.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

- Teiknið graf jöfnunnar $y = x$
- Búið til nýjar jöfnur þar sem 1, 2, 3, 4 og −1, −2, −3 og −4 er bætt við x. Dæmi: $y = x + 2$
- Teiknið gröf jafnanna.
- Tilgreinið skurðpunkta grafanna við y-ás.

- Teiknið graf jöfnunnar $y = x^2$
- Búið til nýjar jöfnur þar sem 1, 2, 3, 4 og −1, −2, −3 og −4 er bætt við x^2. Dæmi: $y = x^2 + 2$
- Teiknið gröf jafnanna.
- Tilgreinið skurðpunkta grafanna við y-ás.

- Teiknið graf jöfnunnar $y = x$
- Skoðið hvað gerist þegar settur er inn jákvæður og neikvæður stuðull við x.
- Dæmi $y = 3x$, $y = -2x$
- Hvað gerist ef stuðullinn við x er brot?

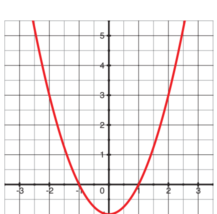
- Teiknið graf jöfnunnar $y = x^2$
- Skoðið hvað gerist þegar settur er inn jákvæður og neikvæður stuðull við x^2.
- Dæmi $y = 3x^2$, $y = -2x^2$
- Hvað gerist ef stuðullinn við x er brot?

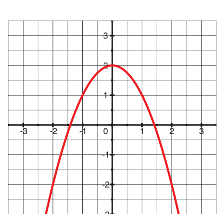
Jöfnur sem rita má á forminu $y = ax+b$ eru kallaðar fyrsta stigs jöfnur. $a \neq 0$
Jöfnur sem rita má á forminu $y = ax^2 + bx + c$ eru kallaðar annars stigs jöfnur. $a \neq 0$
Stig jöfnu vísar til veldisvísis í jöfnunni og er miðað við hæsta stig á einstökum lið í henni.

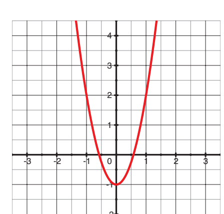
47 Hvað einkennir fyrsta stigs jöfnur? Hvað einkennir annars stigs jöfnur?

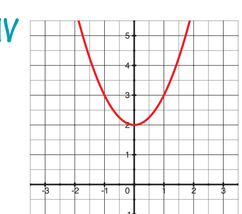
48 Paraðu saman jöfnu og graf.

a $y = x^2 + 2$ **b** $y = x^2 - 1$ **c** $y = -x^2 + 2$ **d** $y = 3x^2 - 1$

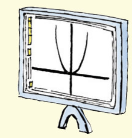
I


II


III


IV


Graf annars stigs jöfnu á forminu $y = ax^2 + bx + c$ kallast **fleygbogi**. *Grafið er annaðhvort uppsveigt ∪ eða niðursveigt ∩ og hefur því annaðhvort topppunkt eða botnpunkt.*



49 Skoðaðu gröf annars stigs jafnanna í dæmi 47.

- *a* Hver þeirra voru uppsveigð og hver niðursveigð?
- *b* Hvernig má lesa það úr jöfnunni hvort grafið er uppsveigt eða niðursveigt?
- *c* Finndu topp- og botnpunkta grafanna.

Öll gröfin í dæmi 47 eru samhverf um y-ásinn. Því er auðvelt að finna botn- eða topppunkt þeirra.

50 *a* Teiknaðu graf jöfnunnar í hnitakerfi. $y = x^2 - 4x + 4$

- *b* Hvar sker grafið y-ásinn? Hvert er gildi x?
- *c* Finndu annað gildi fyrir x þar sem y-gildið er það sama. Skráðu hnit punktsins.
- *d* Finndu botnpunkt grafsins.
- *e* Grafið er samhverft um lóðrétta línu sem liggur í gegnum botnpunktinn. Hver er jafna samhverfuássins?

Finndu y gildi fyrir x frá -5 til 5.

Gott er að nota tölvuforrit.

51 *a* Teiknaðu graf jöfnunnar $y = x^2 - 4x + 6$ í hnitakerfi.

- *b* Grafið sker y-ásinn í punktinum A (0,6). Finndu annað gildi fyrir x þar sem y-gildið er 6. Skráðu hnit punktsins og merktu hann B.
- *c* Dragðu línu í gegnum punktana A og B. Hver er jafna þessarar línu?
- *d* Skráðu botnpunkt grafsins og teiknaðu samhverfuás þess. Hvar skerast samhverfuásinn og línustrikið AB?
- *e* Hver er miðpunktur línustriksins AB og jafna samhverfuássins?

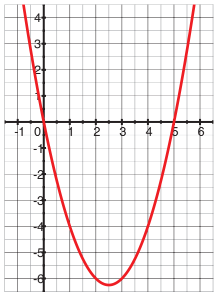
$y = x(x - 4) + 6$
Með því að taka x út fyrir sviga má sjá að y = 6 þegar x = 0 og x = 4.
Samhverfuásinn sker línustrikið milli punktanna (0,6) og (4,6) í miðju þess.

52 *a* Teiknaðu graf jöfnunnar í hnitakerfi. $y = -x^2 - 4x + 2$

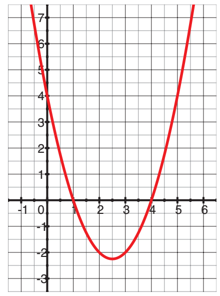
- *b* Finndu botn- eða topppunkt grafsins og teiknaðu samhverfuás þess.

53 Myndirnar sýna gröf nokkurra annars stigs jafna. Finndu skurðpunkta við x-ásinn.

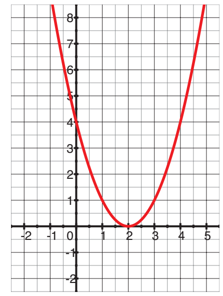
a $x^2 - 5x = y$



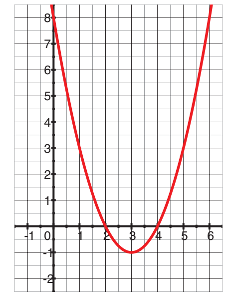
b $x^2 - 5x + 4 = y$



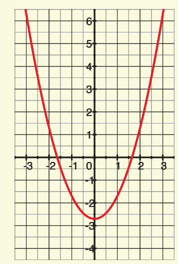
c $x^2 - 4x + 4 = y$



d $x^2 - 6x + 8 = y$



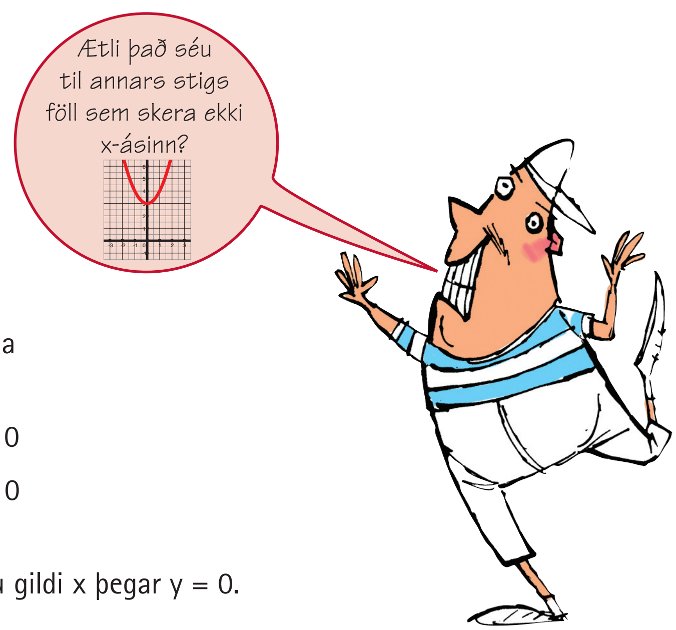
Þegar búið er að teikna gröf má oft lesa skurðpunkta þeirra við ása hnitakerfisins af grafinu þó ekki sé alltaf hægt að finna nákvæmt svar.
Þegar graf sker x-ásinn er y-gildi þess núll. Þegar finna á skurðpunkt við x-ás er því verið að finna lausn á jöfnu grafsins þegar $y = 0$. Þetta er kallað að finna **núllstöð** (stöðvar) grafsins.



54 Öll gröfin í dæmi 52 hafa núllstöðvar.

a Hver þeirra hafa einungis eina núllstöð?

b Hver þeirra hafa tvær núllstöðvar?



55 Oft má finna núllstöðvar með þáttun. Leystu jöfnurnar með þáttun og berðu niðurstöður þínar saman við skurðpunktana sem þú last af gröfunum í dæmi 53.

a $x^2 - 5x = 0$

b $x^2 - 5x + 4 = 0$

c $x^2 - 4x + 4 = 0$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

56 Skoðaðu þessar annars stigs jöfnur. Finndu gildi x þegar $y = 0$. Skráðu núllstöðvar grafanna.

a $y = x^2 - 2x + 1$

b $y = x^2 - 5x + 6$

c $y = x^2 - 8x$

d $y = x^2 - 3x + 5$

e $y = 2x^2 - 6x$

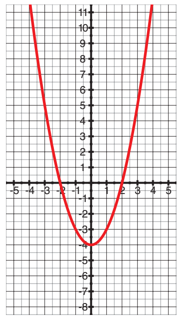
f $y = x^2 - 7x - 8$

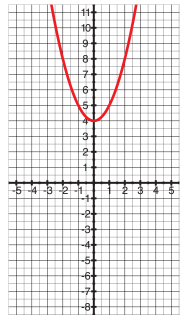
g $y = x^2 + 4x$

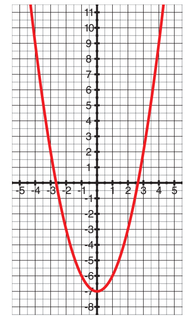
h $y = x^2 + 4x + 4$

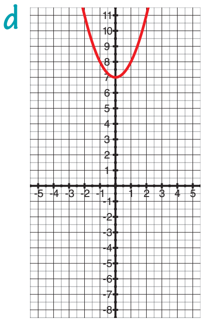
i $y = 3x^2 + 6x$

57 Hafa þessi gröf núllstöðvar?

a 

b 

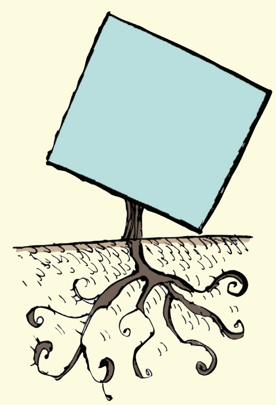
c 

d 

58 Er til lausn á þessum jöfnum? Berðu lausnirnar saman við gröfin í dæmi 56. Finndu núllstöðvar þar sem það er hægt.

a $x^2 - 4 = 0$ b $x^2 + 4 = 0$ c $x^2 - 7 = 0$ d $x^2 + 7 = 0$

Í sumum tilvikum má leysa annars stigs jöfnur með því að finna ferningsrót eins og sjá má í dæmunum hér fyrir ofan. Það á eingöngu við um einfaldar annars stigs jöfnur. Hafa þarf í huga að ekki er hægt að draga ferningsrót af neikvæðum tölum og því er ekki alltaf hægt að finna lausn.



59 Finndu gildi x í þessum jöfnum þegar $y = 0$.

a $y = x^2 - 49$ d $y = 6x^2 - 24$ g $y = 2x^2 - 50$

b $y = x^2 - 25$ e $y = 3x^2 + 18$ h $y = 2x^2 - 18$

c $y = x^2 - 5$ f $y = x^2 + 12$ i $y = x^2 - 144$

Þú hefur nú kynnst því hvernig leysa má nokkrar einfaldar gerðir af annars stigs jöfnum með því að teikna gröf þeirra og finna þannig skurðpunkta þeirra við x-ás (núllstöðvar). Ekki er alltaf hægt að finna nákvæmar lausnir þegar þannig er farið að. Þú hefur líka kynnst því að sumar annars stigs jöfnur má leysa með því að þátta þær eða finna ferningsrót. Til eru flóknari gerðir af annars stigs jöfnum og tímafrekt getur reynst að reyna að leysa sumar þeirra.

Leystu dæmin með því að setja upp jöfnur.

60 Jón er 53 árum yngri en amma hans. Samanlagður aldur þeirra er 81 ár. Hver er aldur þeirra?

61 Í verslun kosta allir hlutir annaðhvort 500 eða 800 krónur.

a Kristín kaupir alls 8 hluti og borgar fyrir þá 4900 krónur. Hve marga hluti í hvorum verðflokki kaupir hún?

b Halla greiðir 23 100 kr fyrir 42 hluti. Hve marga hluti kaupir hún á 500 krónur?

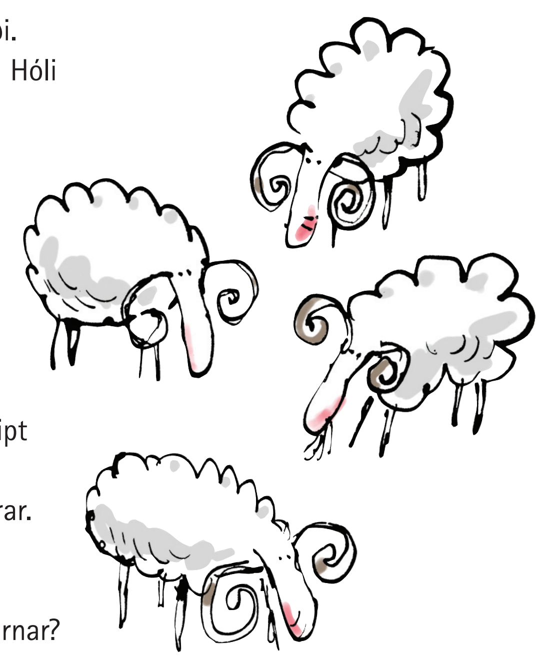
62 Sunna er 12 árum eldri en Eyþór. Ef deilt er í aldur Sunnu með fjórum fæst aldur Eyþórs. Hver er aldur þeirra?

63 Skiptu 2,8 milljónum króna á milli Þórhildar, Tryggva og Dóru þannig að hlutur Þórhildar sé fjórfaldur hlutur Tryggva en Dóra fái 100 þúsund krónum meira en Þórhildur.

Kílóverð	
Rúsínur	1300 kr.
Hnetur	800 kr.

64 Hreggviður blandar saman súkkulaðirúsínum og hnetum. Verð á blöndunni er 1000 krónur fyrir hvert kíló. Alls býr hann til 100 kg af blöndunni. Hve mörg kíló af súkkulaðirúsínum eru í blöndunni?

65 Fjöldi kinda á Hóli er sjöfaldur fjöldi kindanna á Skarði. Ef bóndinn á Skarði keypti 342 kindur af bóndanum á Hóli ættu þeir jafnmargar kindur. Hve margar kindur eru á hvoru búi?



66 Bóndinn á Hóli reisir skemmu fyrir heyrúllur og tæki sem er 529 fermetrar að flatarmáli. Grunnflötur skemmunnar er ferningslaga. Hverjar eru hliðarlengdir skemmunnar?

67 Bóndinn á Skarði reisir 2814 fermetra reiðhöll sem skipt er upp í tvö samliggjandi rétthyrnd æfingasvæði. Annað svæðið er ferningslaga en hitt er 1050 fermetrar. Finndu breidd reiðhallarinnar. Hver er lengd hennar?

68 Summa fimm oddatalna í röð er 385. Hverjar eru tölurnar?

Rökhugsun

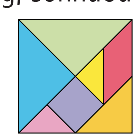
Röksemdafærsla er einn af hornsteinum stærðfræðinnar og fleiri vísindagreinar leggja mikla áherslu á röksemdafærslu. Í öllu lífi okkar er gagnlegt að beita rökhugsun við lausn ýmissa viðfangsefna.

Markmið með þessum kafla eru að þú:

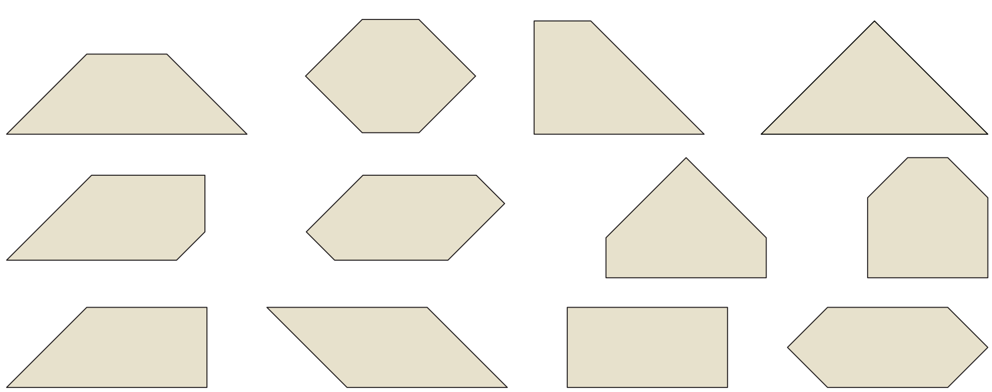
- *Náir valdi á að setja fram skýra röksemdafærslu í mæltu máli og rituðu.*
- *Getir leitt rök út frá gefnum forsendum og metið gildi rökleiðslu.*
- *Beitir ólíkum aðferðum við lausnir þrauta, getir lýst þeim og rökstutt niðurstöður.*
- *Vitir hvernig nota má mótdæmi til að afsanna tilgátur.*
- *Getir sett fram og skilið fullyrðingar og metið sanngildi þeirra.*

1 Ásdís er með blað sem hefur hliðarlengdirnar 13 · 18 cm. Hvernig getur hún nýtt sér blaðið til þess að mæla nákvæmlega 8 cm?

2 Tveir kínverskir stærðfræðingar, Fu Wang og Chuan-Hsiung, sönnuðu að aðeins væri hægt að búa til 13 ólíka úthyrnda marghyrninga með tangramsbútunum sjö.
Búðu til tangram úr ferningi eins og sýnt er á myndinni.



Hve mörg af formunum getur þú búið til? Teiknaðu formin og sýndu hvernig raða megi tangramsbútum í þau.



Lausnir þrauta krefjast rökhugsunar. Þegar lausnir eru útskýrðar þarf líka að beita skýrri röksemdafærslu svo skilja megi hvernig niðurstaða fékkst. Stærðfræðingurinn George Polya (1887–1985) rannsakaði hvaða skref þyrfti að fara við lausnir þrauta. Hann taldi að í hverju lausnaferli fælust fjögur þrep.

- Að skilja í hverju þrautin felst og þær upplýsingar sem gefnar eru.
- Að ákvarða hvaða leið fara á við lausn.
- Að framkvæma lausnaleið.
- Að meta lausnina.

Við lausnir þrauta getur verið gott að búa til töflu og prófa sig áfram í leit að svörum.

3 Í reiðhjólaverslun eru seld bæði tvíhjól og þríhjól. Þórdís taldi 27 reiðhjólahnakka og 60 dekk. Hve mörg tvíhjól eru til í versluninni?

Tvíhjól	Þríhjól	Hnakkar	Dekk
10	17	27	71
17	10	27	64
18	9	27	

4 Guðný á 57 kjúklinga og svín. Samtals hafa dýr hennar 164 fætur. Hve marga kjúklinga á Guðný?

Kjúklingar	Svín	Dýr	Fætur

5 Eggert er með 23 smápeninga í vasanum. Um er að ræða 50 kr. peninga, 10 kr. peninga og 5 kr. peninga. Samtals er hann með 370 kr. Hvaða 23 smápeningar eru í vasa Eggerts?

Mynt	Fjöldi	Upphæð
50	3	150
10	10	100
5	10	50
Samtals	23	300

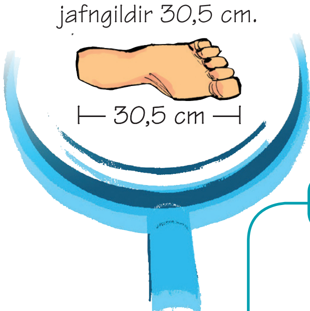
Oft má fara fleiri en eina leið til að finna lausn á rökþrautum.
Leystu þrautirnar og gerðu grein fyrir hvaða leið þú fórst.

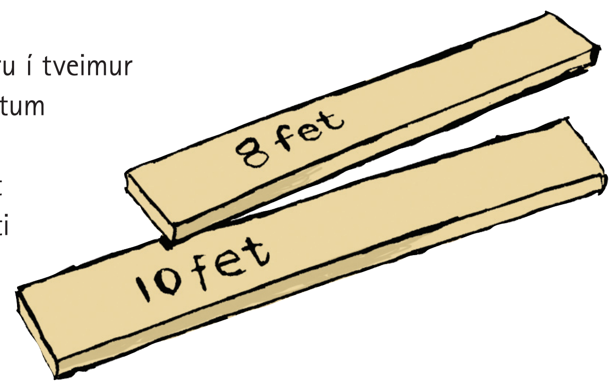
6 Magnea, Hermann og Sigurbjörn búa í samliggjandi húsum. Hermann býr í miðjunni og Magnea í húsinu með lægsta húsnúmerið. Mismunurinn á númerum húsanna er 2 og summa þeirra er 339. Hvert er húsnúmer Sigurbjörns?

7 Á *Hótel hamingju* eru herbergisnúmer eins milli hæða, þ.e. herbergi 214 er beint fyrir ofan 114 og beint fyrir neðan 314. Alvin, Blædís og Sölvi eru í herbergjum hvert fyrir ofan annað og er Blædís í miðjunni. Summa herbergisnúmera þeirra er 963. Númer hvað er herbergi Blædísar?

8 Timbur er selt í borðum sem eru í tveimur mismunandi lengdum, þ.e. 8 fetum og 10 fetum. Simbi keypti 90 borð sem voru samtals 844 fet að lengd. Hve mörg borð keypti hann af hvorri lengd?

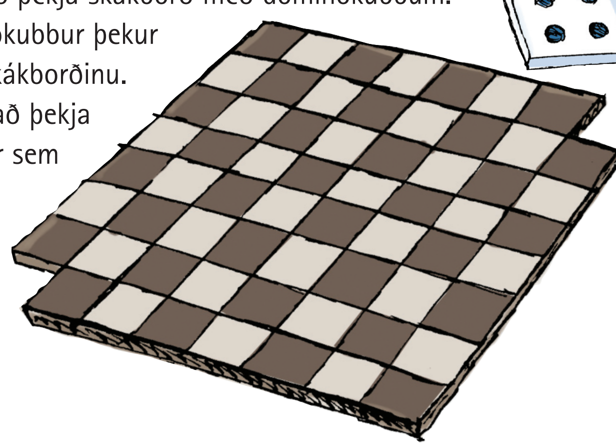
Mælieiningin fet er notuð víða um heim. Eitt fet jafngildir 30,5 cm.





HÓPVERKEFNI

9 a Auðvelt er að þekja skákborð með dómínókubbum. Hver dómínókubbur þekur tvo reiti á skákborðinu. En er hægt að þekja skákborð þar sem báðir hvítu hornreitirnir hafa verið fjarlægðir?



b Hve margir ferningar eru á skákborði? (Vísbending: Það eru 64 litlir ferningar)

Við lausnir þrauta er mikilvægt að skoða vel hvaða upplýsingar eru gefnar og að hverju er leitað. Oft þarf fyrst að vinna úr upplýsingum og því getur verið gott að vinna í þrepum. Veldu fjórar af þrautunum (10–16) og leystu þær.

10 Gefnar eru eftirfarandi upplýsingar. Annar liður í talnarunu er 11 og sá fimmti er 23. Sami mismunur er milli liða.

- **a** Hverjir eru fyrsti, þriðji, fjórði og sjötti liður talnarununnar?
- **b** Hvaða regla gildir í þessari talnarunu?
- **c** Hver er hundraðasti liður talnarununnar?

11 Friðrik og Jón byrja að lesa skáldsögu sama dag. Friðrik les átta blaðsíður á dag en Jón fimm. Á hvaða blaðsíðu er Jón ef Friðrik er á blaðsíðu 72?

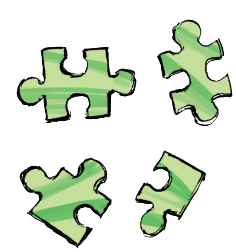
12 Helga keypti fisk, franskar kartöflur og salat í mötuneytinu og fékk 70 krónur til baka af 500 krónum. Mismunur á milli verðs á fiski og verðs á frönskum var sá sami og verðið á salatinu. Hve mikið kostaði fiskurinn?

13 Kjartan keypti kjötbollur, soðnar kartöflur og rauðkál í mötuneytinu. Hann fékk 260 krónur til baka af 1000 krónum. Mismunurinn á verði á kjötbollum og kartöflum var sá sami og verðið á rauðkáli. Hve mikið kostuðu kjötbollurnar?

14 Hvað kostar hver tegund grænmetis á tilboðinu?

15 Freyja, Magnea og Hjalti áttu hvert um sig 700 krónur. Freyja keypti súkkulaðistykki og lakkríspoka og átti þá 170 krónur eftir. Magnea keypti súkkulaðistykki og hnetupoka og átti þá 210 krónur eftir. Hjalti keypti lakkríspoka og hnetupoka og átti þá 180 krónur eftir. Hve mikið kosta þrjú súkkulaðistykki, fjórir lakkríspokar og tveir hnetupokar?

16 Rétthyrningslaga púsluspili er skipt í búta sem eru 2 · 2 cm. Þeir eru tengdir saman með næstum hringlaga formi í miðju hliðar sem passar inn í samsvarandi form á öðrum bút. Úthliðar eru sléttar. Hve mörg tengi eru í púsluspili sem er 8 · 10 cm á stærð?



Talnagátur eru vinsælt viðfangsefni sem nota má til að þjálfa rökhugsun. Oft reynir þó líka á þekkingu á þeim stærðfræðihugtökum sem notuð eru til að gefa nákvæma lýsingu á hvaða tölu er um að ræða.

17

Margfeldi af 53

a Margfeldið er þriggja stafa oddatala. Margfeldið er sama talan jafnvel þótt tölunni sé snúið 180°.

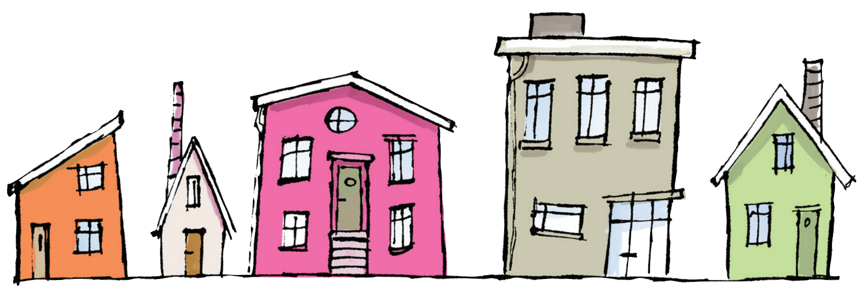
b Margfeldið er þriggja stafa oddatala. Þegar tölunni er snúið um 180° verður hún að sléttri tölu sem er líka margfeldi af 53.

18

Ferningstala

a Talan er þriggja stafa. Ferningsrót tölunnar er frumtala. Ef þú víxlar tveimur síðustu tölustöfum tölunnar er hún líka ferningstala.

b Um er að ræða þriggja stafa ferningstölu. Hún er spegiltala. Summa tölustafa hennar er frumtala.



19 Fimm hús standa hlið við hlið. Húsnúmer þeirra eru tveggja stafa oddatölur. Fjórða húsið er eina húsið sem hefur frumtölu sem húsnúmer. Hvaða númer hefur húsið í miðjunni?

20 Fimm hús standa hlið við hlið. Þau hafa húsnúmer sem eru þriggja stafa sléttar tölur og hæsta númerið er teningstala. Næstlægsta húsnúmerið er þríhyrningstala. Hvaða númer hefur húsið í miðjunni?

21 Eiríkur, Haraldur og Páll skrifuðu allir niður aldur sinn og lögðu saman. Útkoman var 45 ár. Þeir sneru síðan allir núverandi aldri sínum um 180° og þá var summan 183. Haraldur er tveimur árum eldri en Páll og aldur Eiríks er sá sami hvort sem hann er lesinn ofan frá eða neðan frá. Hve gamall er Páll?

Í þrautum koma fram vísbendingar sem raða þarf saman. Stundum er hentugt að nota útilokunaraðferð.

22 Faxi, Gráni, Rökkvi og Sleipnir taka þátt í kapphlaupi.

- Gráni kemur síðastur í mark.
- Rökkvi kemur fyrr í mark en Faxi en seinna en Sleipnir.

Í hvaða röð komu keppendur í mark?

23 Thelma, Lóa og Massý spila saman í knattspyrnuliði. Stöður þeirra eru varnarmaður, sóknarmaður og markmaður. Notaðu eftirfarandi upplýsingar til að segja til um hver spilar hvaða stöðu.

- Thelma og markmaðurinn keyptu ís handa Massý.
- Thelma er ekki varnarmaður.

24 a Ég tók mynd af nokkrum vinum mínum í veislu. Sex af þeim voru að borða snakk, átta voru með drykk og fimm með samloku. Sumir voru með eina gerð og aðrir með tvær. Hver er minnsti mögulegi fjöldi gesta í veislunni?

b Vinir hittust til að rifja upp gömul kynni. Helmingur þeirra var strákar og fjórðungur af öllum vinunum var eldri en Anna. Anna var þriðja elsta stelpan og það voru níu strákar yngri en hún. Hver er minnsti mögulegur fjöldi í vinahópnum?

25 a Í veislu var helmingur gestanna karlar. Karlar með slaufu eru þremur færri en konur í svörtum kjól. Það eru þrjú pör þar sem karlinn er með slaufu og konan er í svörtum kjól. Að minnsta kosti sex konur eru ekki í svörtum kjól. Hver er lágmarksfjöldi gesta?

b Í lestarvagni er helmingur farþega með ferðatösku. Þeir sem eru með bakpoka eru þremur fleiri en þeir sem eru með tölvu. Ég er í vagninum og er með tölvu. Tveir þeirra sem eru með ferðatösku eru líka með bakpoka. Enginn er með allt þetta þrennt eða bakpoka og tölvu. Hver er lágmarksfjöldi farþega?

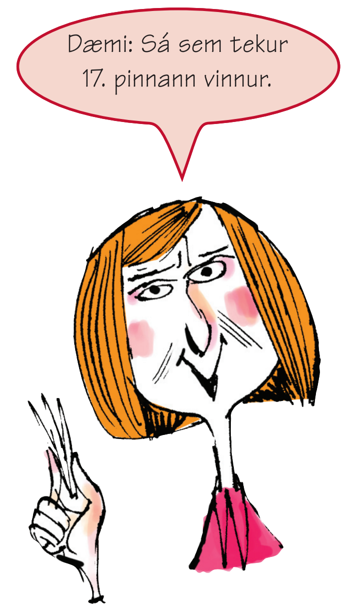
NIM er spil sem byggist á því að þátttakendur fjarlægja pinna eftir ákveðnum reglum og sá vinnur sem tekur síðasta pinnann. Það er sett fram á ýmsa vegu. Ein leiðin er spilið *Frá 20*. Það er spil fyrir tvo og eru lagðir 20 pinnar á borð. Þátttakendur skiptast á að taka einn eða tvo pinna. Sá sem tekur síðasta pinnann vinnur.

26 **a** Spilið *Frá 20* nokkrum sinnum og reynið að glöggva ykkur á hvaða leiðir eru vænlegastar til sigurs.

b Skráið hjá ykkur nokkrar fullyrðingar um hvernig má tryggja sigur eða forða sér frá tapi.

c Skoðið fullyrðingar frá tveimur félögum ykkar og metið hvort þær eru sannar eða ósannar.

d Ræðið við félaga ykkar um sanngildi fullyrðinga ykkar allra. Skráið þær sem þið metið sannar.



27 NIM má líka spila í vasareikni. Í spilinu *Til 21* eru notaðir takkarnir 1 2 og +. Þátttakendur skiptast á að bæta einum eða tveimur við summuna í vasareikninum. Sá sem fær 21 vinnur. Prófið spilið og setjið fram fullyrðingar sem þið metið sannar um hvaða leið má fara til að tryggja sigur.

28 Prófið fleiri afbrigði af NIM í vasareikni og setjið fram sannar fullyrðingar um sigurleiðir.

Frá 21
Notaðir eru takkarnir
1 2 og −
Þátttakendur skiptast á að draga 1 eða 2 frá.
Sá vinnur sem fær 0 á vasareikninn.

Til 73
Notaðir eru takkarnir
3 5 7 og +
Þátttakendur skiptast á að bæta við 3, 5 og 7.
Sá vinnur sem fær 73 á vasareikninn.

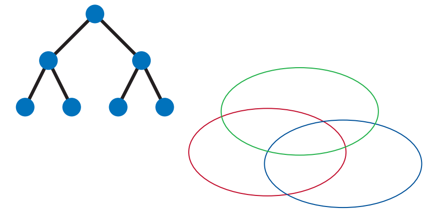
Frá 73
Notaðir eru takkarnir
3 5 7 og −
Þátttakendur skiptast á að draga 3, 5 og 7 frá.
Sá vinnur sem fær 0 á vasareikninn.

29 Nýttu vísbendingarnar til að svara spurningunum.

a 6 strik jafngilda 3 krossum.
5 krossar jafngilda 15 punktum.
Hve mörg strik jafngilda 240 punktum?

b 2 strik jafngilda 3 bréfaklemmum.
4 bréfaklemmur jafngilda 5 þvottaklemmum.
3 þvottaklemmur jafngilda 4 þvingum.
Hve mörg strik jafngilda 600 þvingum?

Gagnlegt getur verið að nota teikningar og talningatré til að skrá upplýsingar og átta sig betur á sambandi þeirra. Mengjamyndir er gott að nota þegar skoðaðir eru hópar hvort sem þeir skarast eða ekki. Prófaðu að nýta þér myndir við lausn dæmanna.



30 Hrefna á 60 m af girðingarefni sem hún ætlar að nota í girðingu fyrir hross sín. Ekki má vera lengra á milli girðingastaura en 6 m.

a Hve marga girðingastaura þarf ef girðingin er bein lína?

b Hve marga staura þarf ef girða á umhverfis rétthyrndan flöt? Gefðu nokkur dæmi. Hvað þarf að hafa í huga við ákvörðun á hliðarlengdum ef nota á sem fæsta staura?

31 a Á borðtennismóti eru 29 þátttakendur. Sterkasti spilarinn situr hjá í fyrstu umferð. Um er að ræða útsláttarkeppni þannig að sá sem tapar einum leik er úr keppni. Hve marga leiki þarf að spila til að ákveða sigurvegara?

b Hve marga leiki þarf að spila ef þátttakendur eru 129?

32 Smiður á þrjá stóra kassa. Inni í hverjum stórum kassa eru tveir minni verkfærakassar. Í hverjum verkfærakassa eru fimm litlar öskjur. Hve mörg eru ílátin?

33 Nemendur í 10 A standa í hring með jöfnu millibili. Nemandi númer 7 stendur beint á móti nemanda númer 17. Hve margir nemendur eru í bekknum?

34 Í félagsmiðstöð er boðið upp á þrjú námskeið, í pólsku, dansi og golfi. Í pólsku eru 37 unglingar og eru 10 þeirra auk þess bæði í golfi og dansi. Í dansi eru 45 unglingar og er þriðjungur þeirra á einu námskeiði í viðbót, þ.e. golfi. Í golfi er 31 unglingur. Hve margir unglingar eru þátttakendur á námskeiðum í félagsmiðstöðinni?

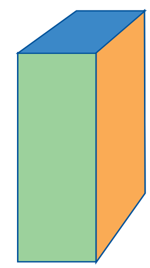
35 a Í skóla nokkrum eru 1200 nemendur. Fjöldi stelpna í skólanum er 580. Þriðjungur nemenda kemur í skólann með strætó. 462 strákar fara ekki með strætó í skólann. Hve margar stelpur nota strætó til að fara í skólann?

b Í verksmiðju vinna 2000 manns og eru konur 1150. Tveir fimmtu starfsfólksins koma í vinnu í strætó. 595 karlar nota ekki strætó. Hve margar konur nota strætó til að fara í vinnu?

Oft eru settar fram tilgátur á grundvelli nokkurra dæma. Stundum er hægt að afsanna tilgátu með því að finna mótdæmi þar sem tilgátan stenst ekki.

36 Skoðaðu tilgáturnar og finndu mótdæmi sem nota má til að afsanna þær.

- **a** Summa tveggja sléttra talna er alltaf deilanleg með fjórum.
- **b** Fyrst $0^2 = 0$ og $1^2 = 1$ má álykta að tala í öðru veldi sé jöfn sjálfri sér.
- **c** Nóg er að þekkja tvo liði í talnarunu, til dæmis 3 og 6, því þá er augljóst að um talnarununa 3, 6, 9, 12, … er að ræða.
- **d** $n^{50} > 2^n$ fyrir $n = 1, 2, 3, \ldots, 50$.
- **e** Allar trapisur hafa fjögur horn og hægt er að finna hornastærð allra hornanna ef stærð tveggja þeirra er þekkt.
- **f** Reikna má flatarmál ferhyrnings með því að margfalda grunnlínu hans með hæð hans.
- **g** Margfeldi tveggja talna er alltaf hærra en stærri talan.
- **h** Ef ferstrendingur hefur stærra rúmmál en annar ferstrendingur hefur hann líka stærra yfirborðsflatarmál.



37 Settu fram röksemdafærslu fyrir hverja fullyrðingu sem sýnir að hún er sönn.

a Ef summa tveggja talna er hærri en 10 þá hlýtur að minnsta kosti önnur þeirra að vera hærri en 5.

b Ef summa tveggja talna er hærri en 18 þá hlýtur að minnsta kosti önnur þeirra að vera hærri en 9.

c Ef margfeldi tveggja jákvæðra talna er hærra en 81 þá hlýtur að minnsta kosti annar þátturinn að vera hærri en 9.

38 Gerðu athugasemdir við röksemdafærslurnar.

- **a** Í jafnhliða þríhyrningi er hvert horn 60° og í rétthyrndum þríhyrningi er stærsta hornið 90°. Hvert horn í þríhyrningi hlýtur alltaf að vera minna eða jafnt og 90°.
- **b** Öllum ferhyrningum má skipta í tvo þríhyrninga. Þríhyrningar hafa því alltaf minna flatarmál en ferhyrningar.
- **c** Þegar lagðar eru saman tvær tölur verður summan alltaf hærri en báðar tölurnar. Þetta gildir fyrir allar náttúrlegar tölur og þær eru óendanlega margar. Þess vegna hlýtur þetta að gilda um allar tölur.
- **d** Allar tölur ganga upp í 60. Sjáðu $\boxed{60 : 1 = 60}$ $\boxed{60 : 2 = 30}$ $\boxed{60 : 3 = 20}$ $\boxed{60 : 4 = 15}$ o.s.frv.

39 Rökstyddu þessa fullyrðingu: **Það er ekki til tala sem er stærsta tala í heimi.**

Fullyrðing er alltaf annaðhvort sönn eða ósönn. Hún getur aldrei verið hvort tveggja. Ef ekki er hægt að meta sanngildi setningar með óyggjandi hætti er hún ekki fullyrðing. Dæmi um fullyrðingu eru:

Sannar fullyrðingar: 24. desember er aðfangadagur jóla.
$2 + 3 = 5$

Ósannar fullyrðingar: Hornasumma þríhyrnings er 200°.
Kópavogur er höfuðborg Íslands.

40 Búðu til tvær sannar og tvær ósannar fullyrðingar.

Samsetta fullyrðingu er hægt að mynda úr tveimiur fullyrðingum með samtengingunum **og** og **eða**. Til þess að samsett fullyrðing með samtengingunni **og** geti verið sönn þurfa báðar fullyrðingar að vera sannar. En ef notuð er samtengingin **eða** verður samsetta fullyrðingin sönn ef önnur eða báðar fullyrðingarnar eru sannar. Þetta getur verið gott að skoða með því að setja upp sanngildistöflur.

Samsett fullyrðing: Það snjóar **og** skíðasvæðið er opið.

Það snjóar	Skíðasvæðið er opið	Það snjóar og skíðasvæðið er opið
satt	satt	satt
satt	ósatt	ósatt
ósatt	satt	ósatt
ósatt	ósatt	ósatt

Samsett fullyrðing: Það snjóar **eða** skíðasvæðið er opið.

Það snjóar	Skíðasvæðið er opið	Það snjóar eða skíðasvæðið er opið
satt	satt	satt
satt	ósatt	satt
ósatt	satt	satt
ósatt	ósatt	ósatt

41 Útskýrðu muninn á merkingu eftirfarandi samsettra fullyrðinga.
- Það snjóar og skíðasvæðið er opið.
- Það snjóar eða skíðasvæðið er opið.

42 Gerðu sanngildistöflu fyrir eftirfarandi fullyrðingar.
- Sólin skín og sundlaugin er opin.
- Sólin skín eða sundlaugin er opin.

43 Búðu til samsettar fullyrðingar með samtengingunum **og** og **eða**.
a Það rignir. Viktor tekur strætó. **b** Tónlist hljómar. Freyja dansar.

Orsakasamhengi er oft sett fram með samtengingunum **ef** og **þá**.
Leiða má orsakasamhengi af fullyrðingum.
Fullyrðing: Allir jafnhliða þríhyrningar hafa hvöss horn.
Orsakasamhengi: Ef þríhyrningur er jafnhliða þá hefur hann hvöss horn.

44 Skráðu fullyrðingarnar með því að nota samtenginguna **ef … þá.**

a Öll form sem eru ferningar eru rétthyrningar.

b Allar heilar tölur eru rauntölur.

c Marghyrningar sem hafa nákvæmlega þrjár hliðar eru þríhyrningar.

d Það rignir aðeins ef það er skýjað.

Orsakasamhengi er ekki gagnvirkt. Það er ekki hægt að snúa setningunni:
Ef þríhyrningur er jafnhliða þá hefur hann hvöss horn við og segja:
Ef þríhyrningur hefur hvöss horn er hann jafnhliða.

45 **Ef ég vinn í happdrætti þá býð ég þér út að borða.**

Ef ég stend við loforð mitt er fullyrðingin sönn. Fullyrðingin er skilyrt því að ég standi við loforð mitt.

- Ég vinn í happdrætti; ég býð þér út að borða.
- Ég vinn í happdrætti; ég býð þér ekki út að borða.
- Ég vinn ekki í happdrætti; ég býð þér út að borða.
- Ég vinn ekki í happdrætti; ég býð þér ekki út að borða.

Í hvaða tilfelli stend ég ekki við loforð mitt?

46 **Ef sundlaugin er opin þá fer ég í sund.**

Í hvaða tilfelli er samsetta fullyrðingin ósönn?

- Sundlaugin er opin; ég fer í sund.
- Sundlaugin er opin; ég fer ekki í sund.
- Sundlaugin er ekki opin; ég fer í sund.
- Sundlaugin er ekki opin; ég fer ekki í sund.

47 Íris setur fram sanna fullyrðingu:
Ef það rignir þá fer ég í bíó.
Fylgir það röklega að ef það rignir ekki fari Íris ekki í bíó?

Rökleiðsla telst gild ef niðurstaða fylgir ófrávíkjanlega gefnum forsendum.

Forsendur:	Allar konur eru dauðlegar.
	Jóna er kona.
Niðurstaða:	Jóna er dauðleg.

HÓPVERKEFNI

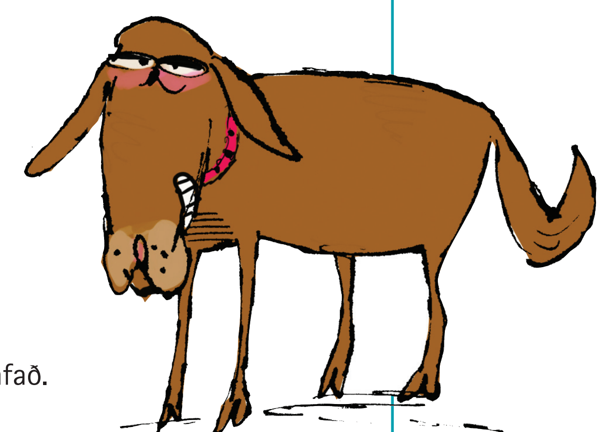
48 Ræðið hvort rökleiðslan er gild.

a Allir ferningar eru ferhyrningar.
Allir ferhyrningar eru marghyrningar.
Allir ferningar eru marghyrningar.

b Hundar hafa fjóra fætur.
Hundar eru spendýr.
Spendýr hafa fjóra fætur.

c Unglingum finnst stærðfræði skemmtileg.
Fólki sem finnst stærðfræði skemmtileg er gáfað.
Unglingar eru skemmtilegir.

d Unglingum finnst stærðfræði skemmtileg.
Fólk sem finnst stærðfræði skemmtileg er gáfað.
Unglingar eru gáfaðir.



Í veislu voru 100 manns sem annaðhvort voru Íslendingar eða Svíar. Eftirfarandi upplýsingar liggja fyrir:

a Að minnsta kosti einn veislugestanna var Íslendingur.

b Gefið er að sama við hvaða tvo veislugesti er rætt þá er alltaf annar þeirra Svíi.

Er hægt að ákvarða út frá þessum upplýsingum hve margir gestanna voru Svíar og hve margir Íslendingar? Ef svo er, hve margir voru af hvoru þjóðerni? Ef ekki, hvers vegna er ekki hægt að segja til um fjöldann?

Rauntölur

Tölum er skipað í talnamengi eftir einkennum þeirra. Góður skilningur á tölum og sambandi þeirra er öllum nauðsynlegur.

Markmið með þessum kafla eru að þú:

- *Þekkir mengi náttúrlegra talna, heilla talna, ræðra talna og rauntalna, tákn þeirra, N, Z, Q og R, og skiljir samsvörun milli punkta á línu og rauntalna.*
- *Náir góðu valdi á röðun og meðferð ræðra talna.*
- *Vitir af tilvist rauntalna sem eru ekki ræðar, svo sem $\sqrt{2}$ og π, og hafir kynnst óbeinni sönnun á því að $\sqrt{2}$ er óræð tala.*
- *Vitir að nálgast má óræðar tölur með fleiri og fleiri aukastöfum.*
- *Þekkir skilgreiningu á tölugildi og helstu reiknireglur um það.*

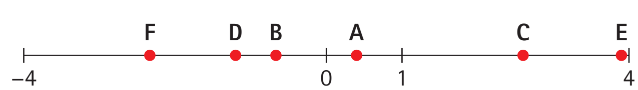
Tölur má flokka og rannsaka á margvíslegan hátt. Tölur hafa ólíka eiginleika og eru notaðar í mismunandi tilgangi.

1 Hvaða eiginleika hefur talan 29 sem talan 27 hefur ekki?

2 Hvað eiga þessar tölur sameiginlegt? Finndu tvo eiginleika í hverjum lið a-d.

a 36 | 64 | 144 **b** 21 | 30 | 102 **c** $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ **d** 10 | 20 | 50

3



Fyrir hvaða tölur standa bókstafirnir A, B, C, D, E og F?

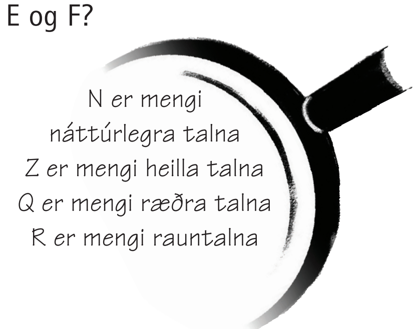
4 Tölur má skrá í talnamengi. Skráðu dæmi um þrjár tölur sem eru í

a N

b Z en ekki í N

c Q en ekki í Z

d R en ekki Q



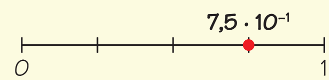
5 Skráðu á talnalínu.

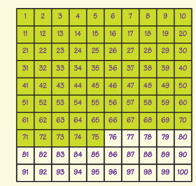
$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{4}$ 0,4 $\frac{6}{7}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{7}{4}$ 1,4 $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{5}$

Auðveldara er að bera saman stærðir og reikna út ef sama skráningarform er notað á þær. Því er oft verið að færa af einu formi á annað.
Sömu stærð má skrá á marga vegu.

Stærðina $\frac{3}{4}$ má skrá sem

$0{,}75$ $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $2\cdot\frac{3}{8}$ 75%





6 Skráðu stærðina 0,375 á fimm ólíka vegu.

7 Skráðu almennu brotin sem tugabrot.

a $\frac{2}{5}$ **c** $\frac{4}{25}$ **e** $\frac{3}{8}$ **g** $\frac{2}{3}$

b $\frac{7}{5}$ **d** $\frac{7}{50}$ **f** $\frac{42}{250}$ **h** $\frac{5}{6}$

8 Skráðu tugabrotin sem almenn brot. Fullstyttu brotin.

a 0,9 **c** $0{,}\overline{3}$ **d** 0,05 **f** 3,2

b 0,99 **d** 0,25 **e** 0,052 **g** 4,067

Þegar tala er skráð á staðalformi er hún rituð sem margfeldi af tölum frá 1 til 10 og veldi af 10.

$3{,}04 \cdot 10^3$ er staðalform tölunnar 3040 og
$3{,}04 \cdot 10^{-5}$ er staðalform tölunnar 0,0000304

9 Skráðu á staðalformi.

a 45 090 000 **c** 0,000034 **e** 67 000 000 **g** 3 895 000

b 679 000 000 **d** 0,0000000004 **f** 0,0000067 **h** 0,003895

10 Eru þessar stærðir heilar tölur eða tugabrot?

a $8{,}345 \cdot 10^2$ **b** $4{,}5 \cdot 10^8$ **c** $3{,}87 \cdot 10^{-6}$ **d** $4{,}97328 \cdot 10^{-2}$

11 Hefðir hafa skapast í notkun ólíkra skráningarforma. Gefðu dæmi um hvenær venja er að nota

a almenn brot **b** tugabrot **c** staðalform **d** prósentur

Í Átta-tíu 5, á blaðsíðum 29 og 30, er fjallað um óendanleg lotubundin tugabrot og kynnt leið til að breyta þeim í almenn brot.

12 Paraðu saman lotubundið tugabrot og almennt brot.

a $0{,}\overline{3}$	① $\frac{5}{3}$
b $0{,}\overline{1}$	② $\frac{11}{9}$
c $1{,}\overline{6}$	③ $\frac{1}{9}$
d $1{,}\overline{2}$	④ $\frac{1}{3}$

Lotubundin óendanleg tugabrot má skrá af nákvæmni með almennum brotum.

13 Skráðu lotubundnu óendanlegu tugabrotin sem almenn brot.

a $0{,}\overline{78}$ **b** $0{,}\overline{083}$ **c** $2{,}4\overline{2}$

Ýmsar leiðir eru farnar við að breyta almennum brotum í tugabrot. Endanleg tugabrot má skrá sem almenn brot með nefnara sem er veldi af tíu. Þegar breyta á almennu broti í tugabrot er því skynsamlegt að leita leiða til að lengja almenna brotið þannig að nefnarinn verði veldi af tíu. Ef það er ekki hægt er einungis hægt að skrá almenna brotið sem lotubundið óendanlegt tugabrot.

Hækkað er upp ef tölustafurinn er 5 eða hærri.

14 Námundaðu að heilli tölu.

a 0,0761 **b** 2,938 **c** –23,4567 **d** $2{,}34552 \cdot 10^3$

15 Námundaðu að tugabroti með tveimur aukastöfum.

a 75,826 **b** $0{,}\overline{8}$ **c** 1,9023 **d** –67,99945

16 Fylgdu eftirfarandi reglum.

Veldu einhverja náttúrlega tölu.
Ef talan er slétt deilir þú í hana með tveimur.
Ef um oddatölu er að ræða margfaldar þú hana með þremur og leggur einn við.
Endurtaktu ferlið. Takmarkinu er náð ef þú færð töluna 1.

Dæmi:
11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

Prófaðu nokkrar tölur og skráðu niður talnarunu hverrar tölu.
Berðu runurnar saman. Færðu alltaf einn að lokum?

Ræðar tölur geta verið bæði jákvæðar og neikvæðar. Við reikning með ræðum tölum þarf að huga að því hvort unnið er með jákvæðar eða neikvæðar tölur.

17 Skoðaðu fullyrðingarnar og leggðu mat á sanngildi þeirra.

a $a + c < b + c$ ef $a < b$ og $c > 0$

b $a - c < b - c$ ef $a < b$ og $c > 0$

c $a + c < b + c$ ef $a < b$ og $c < 0$

d $a - c < b - c$ ef $a < b$ og $c < 0$

e Skráðu fullyrðingarnar í a-d lið ef gildi $a = 2$, $b = 3$ og $c = \frac{1}{2}$ eða $-\frac{1}{2}$

18 Raðaðu eftir stærð.

$-\frac{3}{5}$ $-\frac{7}{8}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{7}$ $-\frac{3}{8}$ $-\frac{4}{5}$

19 Raðaðu eftir stærð.

$-0{,}75$ $-\frac{7}{9}$ $-\frac{7}{8}$ $-1{,}2$ $-\frac{9}{7}$ $-\frac{5}{8}$

20 Skráðu fimm tölur milli

a 2,3 og 2,312

b $-\frac{1}{4}$ og $-\frac{1}{5}$

c $-1{,}222$ og $-1{,}2$

d $\frac{5}{4}$ og 1,2

21 Reiknaðu.

a $2{,}3 \cdot (-4)$

b $(-4) \cdot 2{,}3$

c $(-2{,}3) \cdot 4$

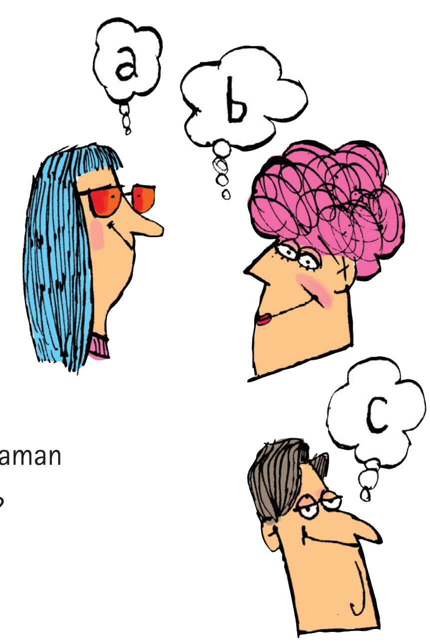
d $4 \cdot (-2{,}3)$

22 a Ég hugsa mér tölu. Ef ég margfalda hana með $\frac{1}{2}$ fæ ég -5 en ef ég margfalda hana með $-\frac{1}{2}$ fæ ég 5. Hver er talan?

b Ég hugsa mér tölu. Ef ég deili í hana með $\frac{5}{6}$ fæ ég 6 og ef ég margfalda hana með $\frac{6}{5}$ fæ ég líka 6. Hver er talan?

c Ég hugsa mér tölu. Ef ég margfalda hana með 0,45 fæ ég 18,9 og ef ég deili með henni í 18,9 fæ ég 0,45. Hver er talan?

d Nota má upplýsingarnar í a-c lið til að setja fram tvær jöfnur fyrir hvern lið. Skráðu jöfnurnar og útskýrðu samband þeirra.



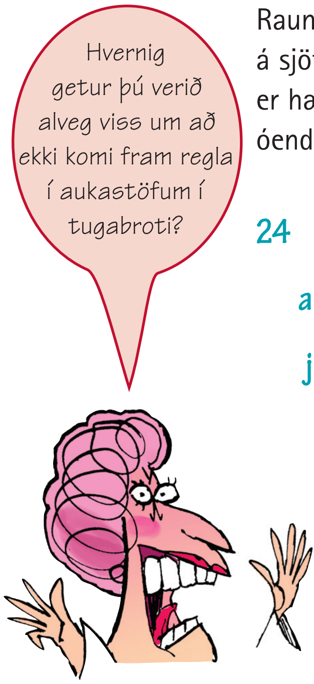
23 Hvort kemur fram oddatala eða slétt tala ef margfaldaðar eru saman

a tvær oddatölur?

b oddatala og slétt tala?

c slétt tala og oddatala?

d tvær sléttar tölur?



Rauntölur má flokka í ræðar tölur og óræðar tölur. Óræðar tölur voru uppgötvaðar á sjöttu öld f.Kr. af lærisveinum Pýþagórasar. Óræðar tölur eru þær tölur sem ekki er hægt að skrá sem almenn brot. Ef reynt er að skrá þær sem tugabrot koma fram óendanleg lotulaus tugabrot. Rætur margra heilla talna eru óræðar tölur.

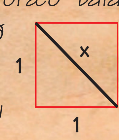
24 Skráðu ferningsrætur talnanna og námundaðu svarið að fjórum aukastöfum.

a 2 **b** 3 **c** 4 **d** 5 **e** 6 **f** 7 **g** 8 **h** 9 **i** 10

j Hvaða heilu tölur á bilinu 2 til 10 hafa ferningsrót sem er óræð tala?

Pýþagóringar höfðu þá meginhugmynd að allt væri tala. Í því fólst að lýsa mætti öllu með heilum tölum eða hlutfalli milli heilla talna (almennum brotum). Við rannsóknir sínar á lengd hornalínu í ferningi með hliðarlengdina 1 komust þeir að því að það stóðst ekki. Rannsóknirnar leiddu í ljós að ekki væri hægt að skrá hliðarlengdina með heilli tölu eða sem hlutfall heilla talna. Þar með spratt upp þörf fyrir stærra talnamengi, þ.e. mengi rauntalna sem auk ræðu talnanna fól í sér mengi óræðra talna.

Lítum nú á hvernig Pýþagóringar sönnuðu tilvist óræðu talnanna. Sýnum að í ferningi með hliðarlengdina 1 sé lengd hornalínunnar óræð tala, þ.e.a.s. tala sem ekki verður rituð sem hlutfall af tveimur heilum tölum.



Sönnun: *Með því að beita reglu (setningu) Pýþagórasar fæst jafnan* $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Gerum ráð fyrir að jafnan $x^2 = 2$ *hafi ræða lausn,* $x = \frac{k}{n}$ *þar sem k og n eru náttúrlegar tölur.*

Gerum einnig ráð fyrir að hlutfallið $\frac{k}{n}$ *sé óstyttanlegt því annars hefði mátt stytta það strax í upphafi.*

Höfum því $x^2 = (\frac{k}{n})^2 = 2$

Þar af leiðandi er $\frac{k^2}{n^2} = 2$

svo að $k^2 = 2n^2$

Þar sem k^2 *er margfeldi af 2 er hún slétt tala svo að k er einnig slétt tala (k getur ekki verið oddatala því oddatala í öðru veldi er oddatala). Þar af leiðandi er til náttúrleg tala p þannig að* $k = 2p$. *Fáum því* $2n^2 = k^2 = (2p^2) = 4p^2$ *eða* $n^2 = 2p^2$

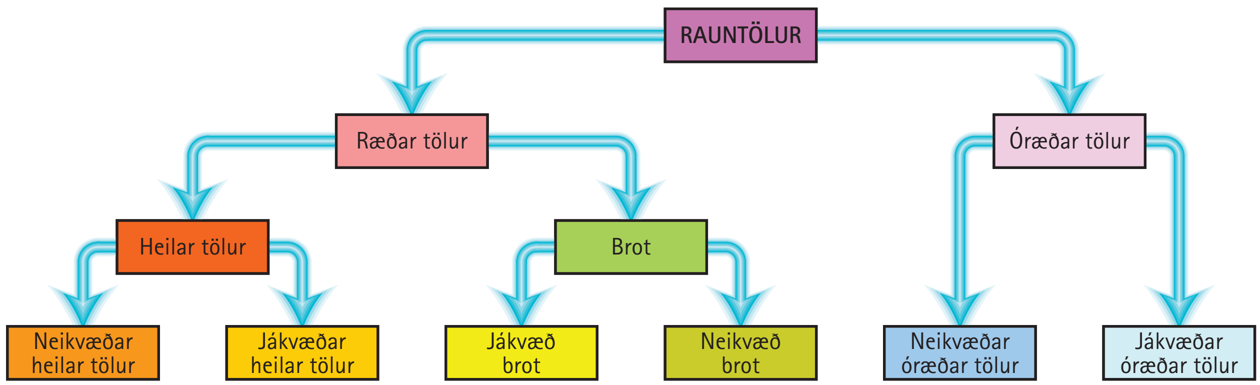
En þá er n^2 *slétt tala svo að n er jafnframt slétt.*

Þar með eru k og n báðar sléttar svo að hlutfallið $\frac{k}{n}$ *má stytta með 2. En það stangast á við að* $\frac{k}{n}$ *sé óstyttanlegt brot eins og gert var ráð fyrir í upphafi. Sú forsenda að* $x^2 = 2$ *hafi ræða lausn er því röng. Jafnan hefur því óræða lausn.*

Úr bókinni ***Og ég skal hreyfa jörðina***
Jón Þorvarðarson, 2005:116–117

25 Skoðaðu röksemdafærsluna í þessari sönnun. Hér er notuð óbein sönnun. Í henni felst að í upphafi er sett fram staðhæfing um að það sem sanna á sé ósatt.

Rauntölur eru allar þær tölur sem skrifa má sem endanleg eða óendanleg tugabrot. Mengi rauntalna hefur að geyma bæði ræðar og óræðar tölur.



Við reikning með óræðum tölum gilda sömu reiknireglur og við reikning með ræðum tölum. Oft er lítið hægt að einfalda og stundum er einungis hægt að skrá niðurstöðu með óræðum tölum. Dæmi:

$\sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$ $\quad 2 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2} \cdot \pi = \sqrt{2}\,\pi$ $\quad \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Þegar unnið er með ferningsrætur verður svarið stundum ræð tala.

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$ $\quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ $\quad \sqrt{36} - \sqrt{9} = 6 - 3 = 3$

Erfitt getur verið að skrá svar á einfaldan hátt. Þegar margfalda á saman ræða tölu og óræða er sjaldnast hægt að setja fram einfalt svar.

Ferningsrótina af x má skrá sem $x^{\frac{1}{2}}$ eða $\sqrt{x}$.

26 Einfaldaðu.

a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

b $\sqrt{3} \cdot (-2)$

c $6 : \sqrt{4}$

d $\pi \cdot 2^2$

e $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$

f $\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$

g $(\sqrt{x})^2 \cdot \sqrt{2}$

h $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}$

i $(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{4})^2$

j $\sqrt{2} + \sqrt{16}$

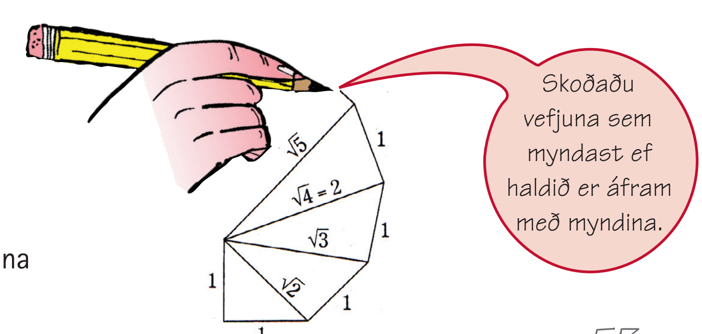
k $\sqrt{2} - \sqrt{4}$

l $\sqrt{25} : \pi$

27 a Hvaða lengdir á myndinni eru jafngildar ferningsrótinni af tveimur?

b Hvaða lengdir eru jafngildar ferningsrótinni af 3?

c Hvernig má teikna ferningsrætur talnanna 5, 6 og 7?

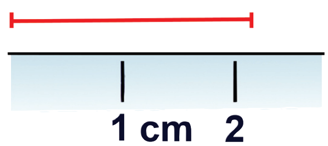


Til eru óendanlega margar heilar tölur og óendanlega mörg tugabrot. Þeim má raða í röð eftir stærð. Tugabrot hafa þann eiginleika að alltaf má búa til nýtt tugabrot á milli hverra tveggja tugabrota.

28 Skráðu 3 tugabrot á talnalínu sem liggja á milli

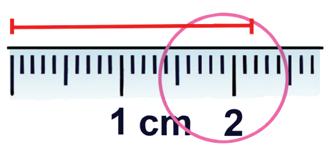
a 23,498 og 23,499	**d** 7 og 7,01	**g** −0,24 og −0,239
b 0,034 og 0,043	**e** −23,499 og −23,498	**h** −7,01 og 7
c 0,21 og 0,217	**f** −0,052 og −0,051	**i** −7,01 og −7

29

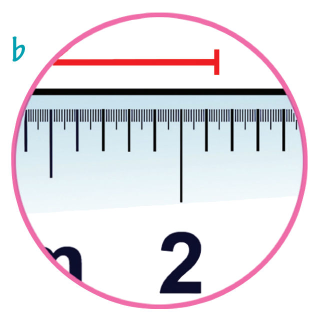


Lengd rauða striksins má lesa sem 2 cm eða 2,1 cm eftir því hvaða nákvæmni er beitt. Ef myndin væri stækkuð meira mætti lesa lengd striksins með enn þá meiri nákvæmni. Lestu lengd striksins af nákvæmni.

a

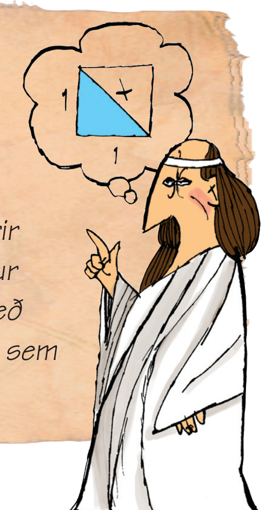


b



Óræðu tölunum var í upphafi lýst sem rúmfræðilegum stærðum. Þannig var stærðinni $\sqrt{2}$ lýst sem hornalínu í ferningi með hliðarlengdina 1.

Það var ekki fyrr en á 19. öld að stærðfræðingunum Cantor og Dedekind tókst að lýsa óræðum tölum án rúmfræði og þá fengu þær loksins viðurkenningu sem sjálfstæðar tölur. Áður hafði þó verið sett fram tákn fyrir ferningsrót $\sqrt{\ }$ og var þá t.d. ferningsrótin af 2 táknuð $\sqrt{2}$ og slíkur ritháttur notaður í reikningi. $\sqrt{2}$ var þó oft útskýrð sem lengd á hornalínu fernings með flatarmálið 1 eða hliðarlengd í ferningi með flatarmálið 2. Einnig má lýsa $\sqrt{2}$ sem tugabroti með óendanlegan fjölda aukastafa.



Á talnalínu má skrá öll endanleg og óendanleg lotubundin tugabrot. Sama er hve þétt tölum er raðað, alltaf verða eftir punktar á talnalínunni sem ekki samsvara einni tiltekinni ræðri tölu. Þeir punktar standa fyrir óræðu tölurnar.

Oft eru ræðar tölur notaðar sem námundun að óræðum tölum. Nákvæmnin vex eftir því sem notuð eru tugabrot með fleiri aukastöfum. Tugabrot með mörgum aukastöfum er oft einfaldara að skrifa sem almenn brot.

Engin ræð tala er jafngild ferningsrótinni af 2. Við reikning með stærðinni $\sqrt{2}$ er oft notuð námundun og fer það eftir aðstæðum hve mikla nákvæmni þarf að nota.

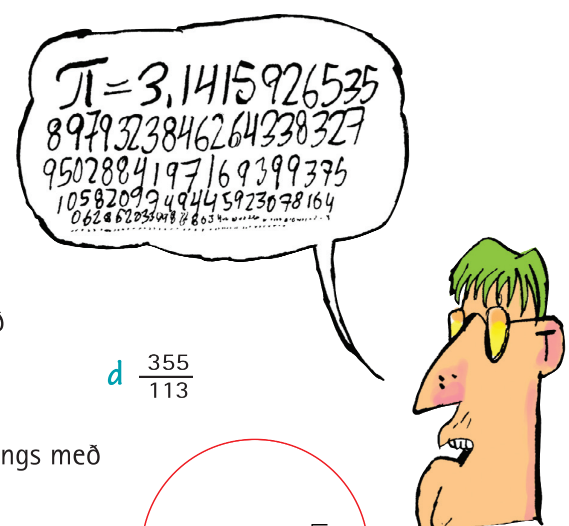
- $\sqrt{2}$ hlýtur að liggja á milli 1 og 2 því $\sqrt{1} = 1$ og $\sqrt{4} = 2$. Ef notaður er vasareiknir sem gefur tíu stafi kemur fram tugabrotið 1,414213562.
- Ef talan 1,5 er notuð í stað $\sqrt{2}$ er skekkjan metin um 6%. Þau skekkjumörk koma fram ef fundið er hlutfallið milli 1,5 og $\sqrt{2}$ og það námundað að 106%.

  $\frac{1,5}{\sqrt{2}} \approx 1,060660172\ldots$

30 Reiknaðu skekkju ef óræða talan $\sqrt{2}$ er námunduð að

a 1,4 **b** $\frac{17}{12}$ **c** $\frac{41}{29}$

Ein þekktasta óræða talan er π. Hún kemur við sögu í margvíslegum útreikningum þegar unnið er með stærðir hringa. Það skiptir því oft máli að fá fram nokkuð nákvæma skráningu á henni. Vasareiknirinn gefur upp tugabrotið 3,141592654. Ef notuð er námundunin 3 er skekkjan nálægt 4,7%.

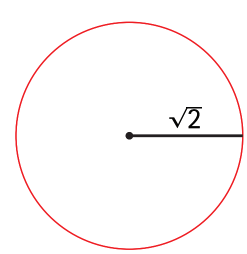


31 Reiknaðu skekkju ef óræða talan π er námunduð að

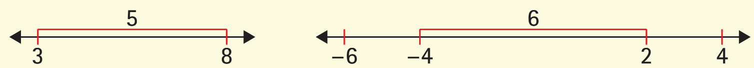
a 3,2 **b** $\frac{22}{7}$ **c** $\frac{223}{71}$ **d** $\frac{355}{113}$

32 Reiknaðu skekkju ef finna á ummál og flatarmál hrings með geislann $\sqrt{2}$ og stærðir eru námundaðar að

a 1,4 og 3,1 **b** $\frac{17}{12}$ og $\frac{22}{7}$ **c** $\frac{41}{29}$ og $\frac{223}{71}$



Gott getur verið að nota talnalínu til að teikna upp mynd af rauntölum. Þannig verður auðvelt að kanna samband þeirra. Allar rauntölur má skrá sem punkt á talnalínu út frá fjarlægð frá viðmiðunarpunkti. Fjarlægð milli punkta má því finna með frádrætti. Fjarlægð er alltaf jákvæð tala.



33 Skráðu fjarlægðina milli punktanna á talnalínunum.

a 4 og 10 c $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{4}$ e $5{,}8$ og $20{,}3$ g $-\frac{2}{5}$ og $-\frac{1}{10}$

b -3 og -1 d $-0{,}7$ og $0{,}7$ f -7 og $-1{,}3$ h -3 og $-2\frac{5}{6}$

34 Teiknaðu talnalínu og merktu inn á hana punktinn A = -1,2. Merktu punkta á talnalínuna með eftirfarandi fjarlægð frá A.

a 3   b 5,1   c 0,5   d 2,8

Fjarlægð rauntölu frá núllpunkti á talnalínu er **tölugildi** *hennar. Segja má að tölugildi tölu sé stærð tölunnar óháð formerki. Tölugildi er táknað með* **tákninu | |**

$|5| = 5$ $|-7| = 7$ $|0{,}8| = 0{,}8$ $|-0{,}8| = 0{,}8$

35 Skráðu tölugildi

a $|-2|$ b $|-3^3|$ c $|2 - 1{,}3|$ d $|-5 \cdot 4|$

36 Hvaða gildi getur óþekkta stærðin x tekið?

a $|x| = 4$ c $|x| = 0{,}2$ e $|x| = \pi$

b $|x| = 6$ d $|x| = 0$ f $|x| = \sqrt{3}$

37 Fjarlægðin C milli punktanna A og B á talnalínu er A – B ef B < A og B – A ef A < B. Skráðu nokkur dæmi um það.

38 Hver er fjarlægðin milli punktanna A og B á talnalínu?

a $A = 2$ og $B = 0{,}7$ c $A = 3^3$ og $B = (-3)^3$

b $A = 0$ og $B = -\pi$ d $A = -\sqrt{25}$ og $B = 7$

39 Reiknaðu gildi eftirfarandi stæðna ef $x = -1$ og $y = 3$

a $|x - y|$ **c** $|y| - |x|$ **e** $2|y - x^2|$ **g** $|2y - 2x^2|$

b $|y^2|$ **d** $|3x - 2y|$ **f** $|y| + |-y|$ **h** $2|-y + x|$

40 Leystu jöfnurnar.

a $x + |2| = 8$ **b** $-x + |4 - 8| = |6|$ **c** $|2{,}3 - 5{,}3| + 2x = -x + 4$

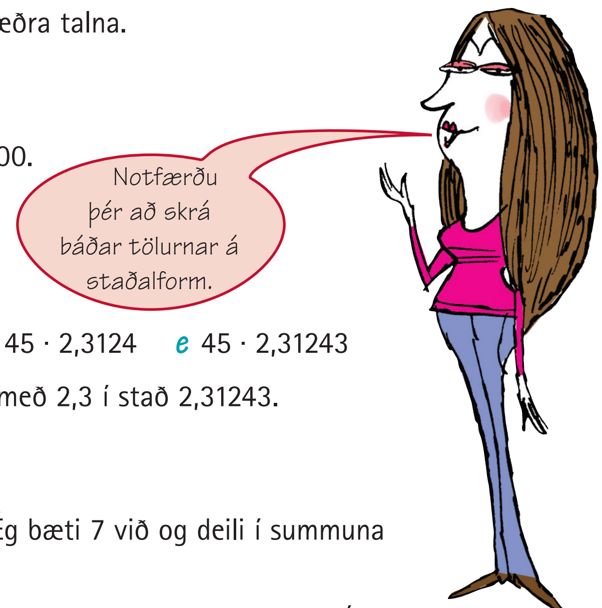
41 Í þessum kafla hafa rauntölur verið skoðaðar út frá ýmsum sjónarhornum. Greindu frá þeim talnamengjum sem mynda mengi rauntalna.

42 a Skráðu þrjú neikvæð tugabrot sem eru í mengi ræðra talna.

b Skráðu þrjár óræðar tölur.

43 a Margfaldaðu saman $450\,000\,000\,000 \cdot 5\,000\,000$.

b Deildu með 5 000 000 í 450 000 000 000.



44 Reiknaðu.

a $45 \cdot 2{,}3$ **b** $45 \cdot 2{,}31$ **c** $45 \cdot 2{,}312$ **d** $45 \cdot 2{,}3124$ **e** $45 \cdot 2{,}31243$

e Finndu skekkju í prósentum ef 45 er margfaldað með 2,3 í stað 2,31243.

45 Hver er talan?

a Ég hugsa mér tölu og margfalda hana með $\sqrt{2}$. Ég bæti 7 við og deili í summuna með 3. Útkoman verður 3.

b Ég hugsa mér tölu og deili í hana með $\frac{1}{2}$. Ég dreg 4 frá og margfalda með π. Ég finn síðan $\frac{3}{4}$ af útkomunni og fæ þá 9π.

c Ég hugsa mér tölu og bæti við hana tölugildinu af -14. Ég margfalda með 3π og deili með $(\sqrt{3})^2$. Útkoman er π.

46 Paraðu saman stæðu og gildi hennar ef $a = 5$ og $b = \sqrt{5}$.

a $2a + b^2$ **b** $\sqrt{a} + b$ **c** $a^4 \cdot b^2$ **d** $4a + 4b$

① $4(5 + \sqrt{5})$ ② 15 ③ $2\sqrt{5}$ ④ 5^5

Horn

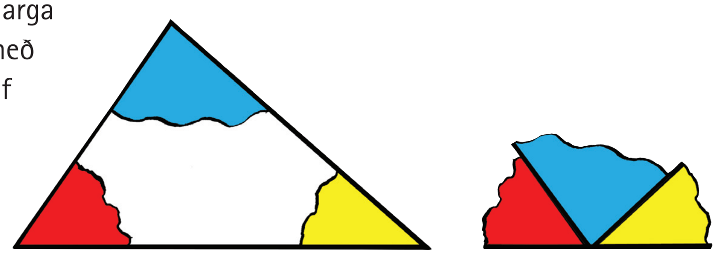
Þekking á hornum, hornasummu og hlutföllum milli hliðarlengda í marghyrningum getur komið sér vel við lausn á ýmsum stærðfræðilegum viðfangsefnum. Góð þekking á þríhyrningum og eiginleikum þeirra myndar grunn sem má byggja á.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Þekkir algeng hugtök og lögmál sem snerta þríhyrninga, s.s hornasummu og hvenær tveir þríhyrningar eru eins (sams konar).*
- *Getir fundið hornastærðir út frá gefnum forsendum.*
- *Getir beitt reglu um hornasummu þríhyrninga til að finna hornasummu marghyrninga.*
- *Kynnist ýmsum forsendum sem notaðar eru við rúmfræðilegar sannanir og röksemdafærslu.*
- *Kunnir skil á einslögun hyrninga og tengslum við hlutföll.*
- *Getir beitt setningu Pýþagórasar.*
- *Getir teiknað línu samsíða tiltekinni línu í gegnum punkt utan við hana.*

Hornasumma þríhyrnings er 180°. Komast má að því með því að mæla horn í nokkrum þríhyrningum og leggja hornastærðirnar saman. Svarið ætti að vera um það bil 180 gráður ef mælt hefur verið af nokkurri nákvæmni.

Með því að teikna nokkuð marga þríhyrninga, merkja hornin með litum eða strikum, rífa þau af og raða þeim saman þannig að þau mynda beina línu (180° horn) má einnig sýna fram á þetta.

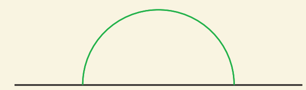


Athuganir sem þessar verða til þess að maður fer að trúa því að þetta eigi við um alla þríhyrninga. En er öruggt að þetta eigi við ef þríhyrningurinn er t.d. með grunnlínu sem er 1 km eða ef grunnlína þríhyrningsins er 0,5 mm?

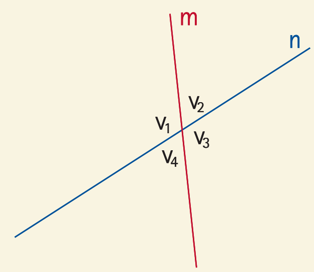
Til þess að geta verið viss um að regla gildi er ekki nóg að sýna fram á það með fjölmörgum dæmum heldur þarf að setja fram sönnun. Þegar sett er fram sönnun er yfirleitt gengið út frá ákveðnum forsendum.

Til þess að sanna regluna um hornasummu þríhyrnings þarf að nota eftirfarandi forsendur.

Bein lína er 180 gráður.



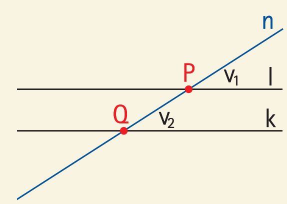
Topphorn eru jafn stór.



Sönnun á því að topphorn séu jafn stór er að finna á blaðsíðu 86 í Átta-10, 4.

Einslæg horn við samsíða línur eru jafn stór.

Með því að hliðra P í Q þannig að línan l falli í línuna k og hornið v1 í hornið v2 má sjá að hornin eru jafn stór.



Til þess að geta sannað regluna þarftu líka að geta teiknað línu samsíða annarri línu (l) í gegnum punkt utan við línuna.

Fyrst þarftu að teikna línu m í gegnum punktinn C sem er hornrétt á línuna l.

- Markaðu tvo punkta A og B á línuna l.
- Teiknaðu hring með miðju í A og geislann AC.
- Teiknaðu annan hring með miðju í B og geislann BC.
- Teiknaðu línuna m í gegnum skurðpunkta hringjanna.

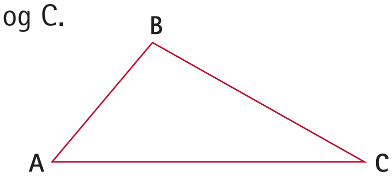
Nú þarftu að teikna línu sem er hornrétt á línuna m í punktinum C.

- Teiknaðu hring með miðju í C.
- Hringurinn sker línuna m í punktunum D og E.
- Teiknaðu hringi með miðju í D og E og geisla sem er lengri en línustrikið CE.
- Teiknaðu línuna n í gegnum skurðpunkta hringanna.

Línan n á að vera samsíða línunni l ef rétt er teiknað.

Nú hefur þú þær forsendur sem þarf til að sanna að hornasumma í þríhyrningi sé 180°.

1
- Teiknaðu þríhyrning og merktu horn hans A, B og C.
- Teiknaðu línu n sem liggur í gegnum hornpunktinn B og er samsíða hliðinni AC.
- Framlengdu hliðarnar AB og CB.
  Þá myndast þrjú ný horn ofan við línuna n. Merktu þau V_1, V_2, og V_3.



Á myndinni má sjá að summa hornastærðanna V_1, V_2, og V_3 er 180° þar sem þau mynda beina línu.

Þar sem línan n er samsíða hliðinni AC má sjá að hornið A og hornið V_3 eru einslæg horn við samsíða línur og þau eru því jafn stór.

Hornið B og V_2 eru topphorn og þau eru því jafn stór.
Hornið C og V_1 eru líka einslæg horn við samsíða línur svo þau eru einnig jafn stór.

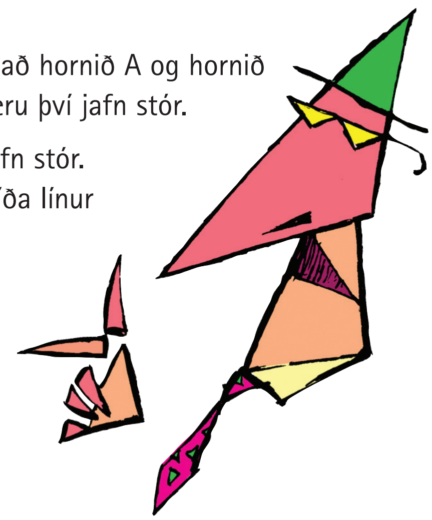
Við vitum því að

$\angle V_1 = \angle C$

$\angle V_2 = \angle B$

$\angle V_3 = \angle A$

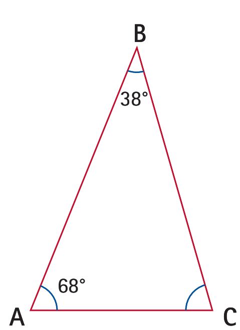
Við vitum líka að $\angle V_1 + \angle V_2 + \angle V_3 = 180°$.
Því hljóta $\angle A + \angle B + \angle C$ líka að vera 180°
sem var það sem við vildum sanna.



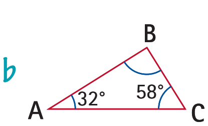
2 Skráðu með þínum eigin orðum við myndina sem þú teiknaðir í dæmi 1 hvernig þú nýtir þér forsendurnar sem gefnar eru á blaðsíðu 59 við gerð sönnunarinnar.

3 Finndu stærð óþekktu hornanna.

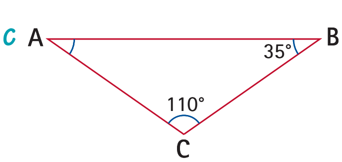
a



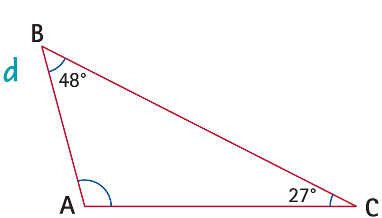
b



c

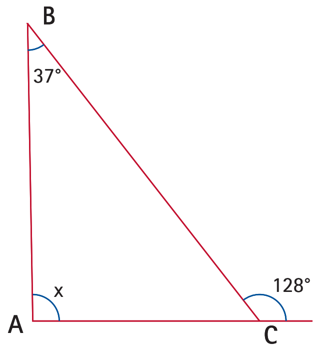


d

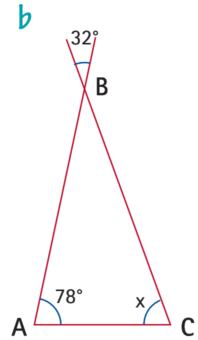


4 Finndu stærð óþekkta hornsins x. Lýstu hvernig þú ferð að.

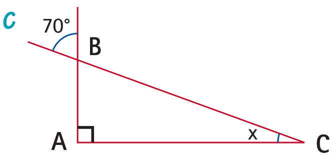
a



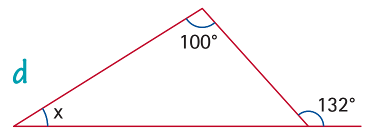
b



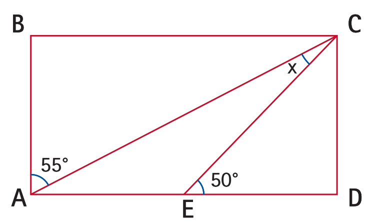
c

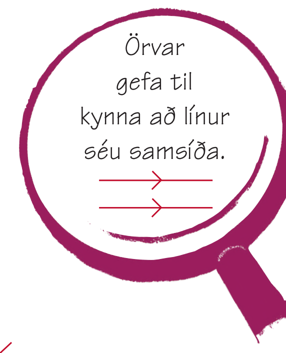


d

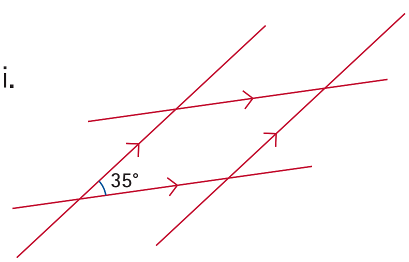


5 ABCD er rétthyrningur.
Finndu stærð óþekkta hornsins x.
Lýstu hvernig þú ferð að og hvaða forsendur þú notar við að finna stærð þess.



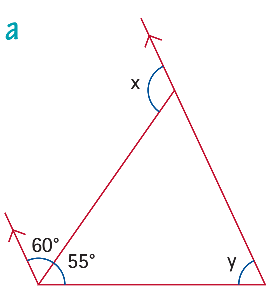


6 Finndu stærð allra hornanna á myndinni.
Lýstu þeim forsendum sem þú nýtir þér við að finna stærð þeirra.

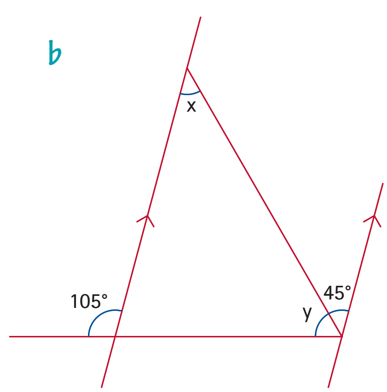


7 Finndu stærðir óþekktu hornanna x og y.

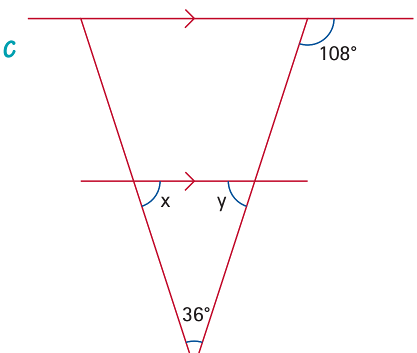
a



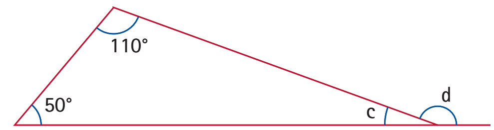
b



c



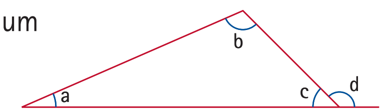
8 **a** Finndu stærð hornanna c og d.



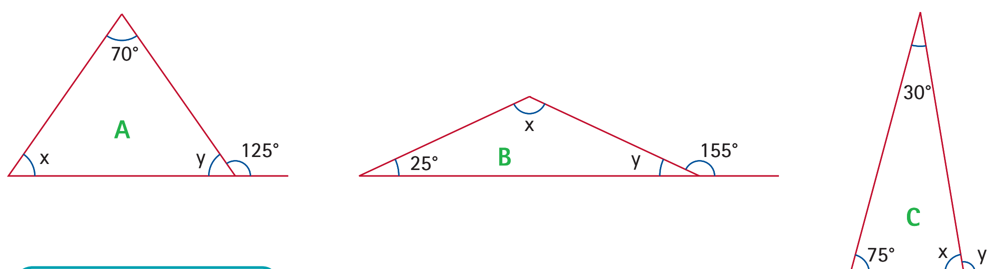
b Hver er samanlögð stærð þeirra?

c Berðu stærð hornsins d saman við stærð hornanna tveggja sem gefin eru í þríhyrningnum.

9 Sýndu fram á það með útskýringum og útreikningum að grannhorn tiltekins horns í þríhyrningi sé jafn stórt og summa hinna hornanna tveggja.



10 **a** Finndu stærðir óþekktu hornanna. **b** Hvað einkennir þessa þríhyrninga?



HÓPVERKEFNI

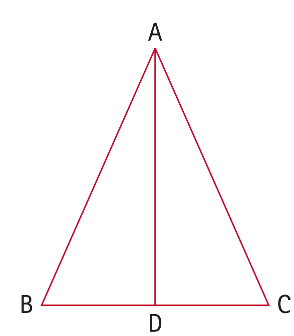
11 Hvað þurfið þið að vita til að geta ákvarðað hvort tveir þríhyrningar séu nákvæmlega eins (sams konar)?

Leitið svara við spurningunni með því að teikna nokkra þríhyrninga út frá sömu forsendum og athuga hvort þeir verða sams konar.

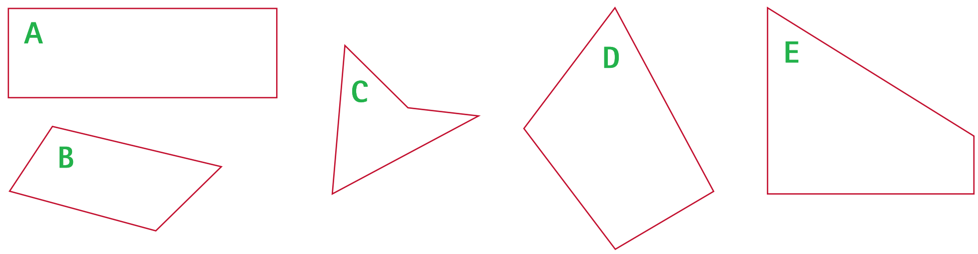
- Gefið ykkur þrjár mismunandi hliðarlengdir.
- Gefið ykkur tvær hliðarlengdir og hornið á milli þeirra.
- Gefið ykkur þrjú horn.
- Gefið ykkur tvö horn og hliðarlengdina á milli þeirra.

Hverjar eru niðurstöður ykkar?

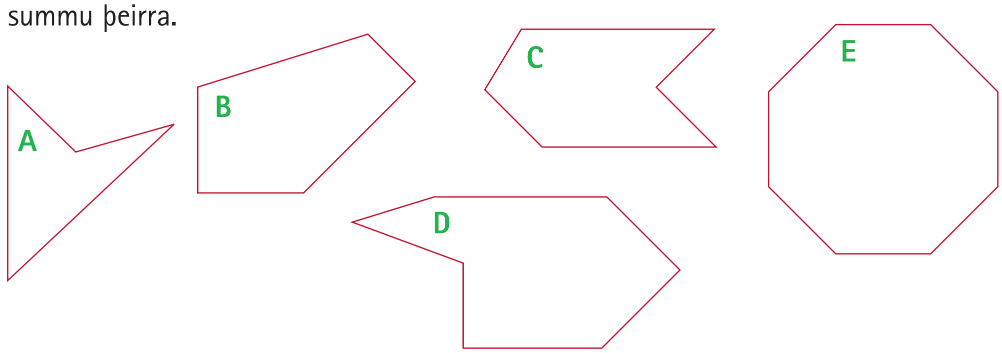
12 Skoðaðu þríhyrningana ABD og ACD.
Línan AD er helmingalína hornsins A og AB = AC.
Nýttu þessar upplýsingar til þess að sýna fram á að þríhyrningarnir ABD og ACD séu eins (sams konar) og þar með að hornin B og C séu jafn stór.



13 Hornasumma ferhyrninga er 360°. Hvernig getur þú nýtt þér að þú hefur sannað að hornasumma þríhyrnings sé 180° til að sýna fram á að hornasumma ferhyrninga sé alltaf 360°, burt séð frá því hvernig þeir eru í laginu?



14 Hver er hornasumma þessara hyrninga? Lýstu hvernig þú getur fundið hornasummu þeirra.



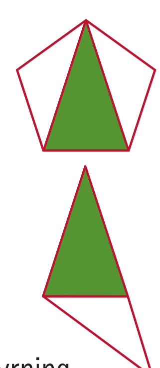
15 a Hver er hornasumma sjöhyrninga?

b Hver er hornasumma tólfhyrninga?

c Settu fram almenna reglu sem nota má til að finna hornasummu í hvaða marghyrningi sem er.

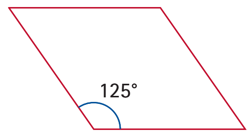
HÓPVERKEFNI

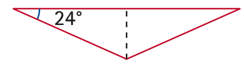
16 Hver er hornasumma fimmhyrnings?

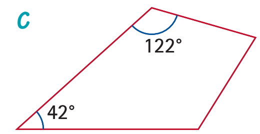


- Reglulegum fimmhyrningi hefur verið skipt í þrjá þríhyrninga með því að teikna tvær hornalínur eins og hér er sýnt. Finnið hornastærðir þríhyrninganna þriggja.
- Þríhyrningurinn í miðjunni og annar hinna eru lagðir saman eins og myndin sýnir og mynda þeir þríhyrning. Hverjar eru hornastærðir nýja þríhyrningsins?
- Kannið hvaða hyrninga þið getið búið til með því að raða þríhyrningunum þremur saman og finnið hornastærðir þeirra. Setjið niðurstöður ykkar á veggspjald og lýsið vel hvernig þið finnið stærðir allra horna.

17 Gerðu grein fyrir hvaða forsendur þarf að nota til að finna stærðir allra hornanna í þessum hyrningum.

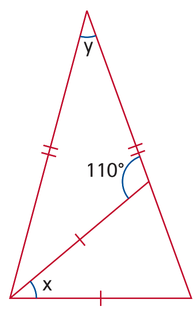
a


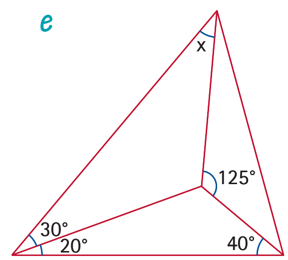
b


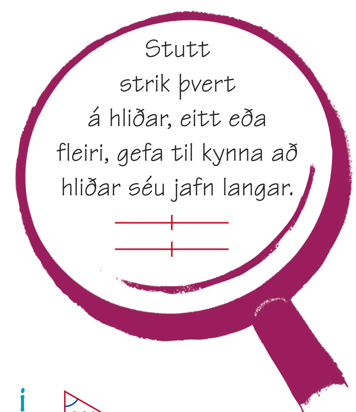
c


18 Finndu stærð óþekktu hornanna í þessum hyrningum. Gerðu grein fyrir hvernig þú ferð að og hvaða forsendur þú nýtir þér.

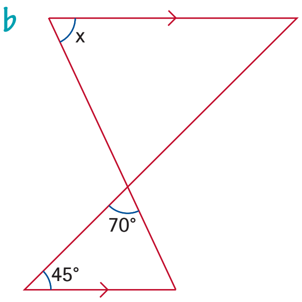
Hornasumma þríhyrnings er 180 gráður.

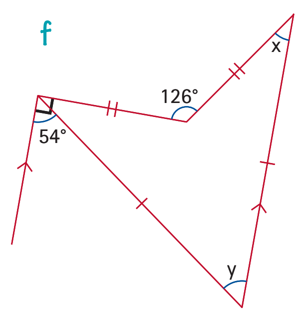
a


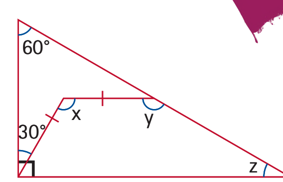
e




Bein lína er 180 gráður.

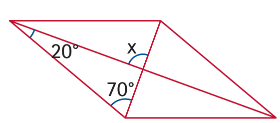
b


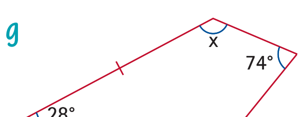
f


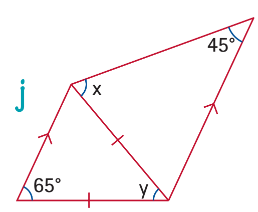
i


Topphorn eru jafn stór.

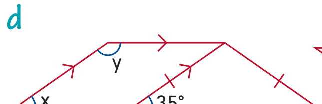
Einslæg horn við samsíða línur eru jafn stór.

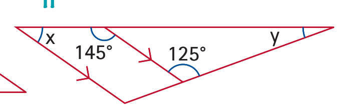
c


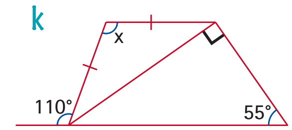
g


j


Tiltekið horn og grannhorn þess eru samtals 180 gráður.

d


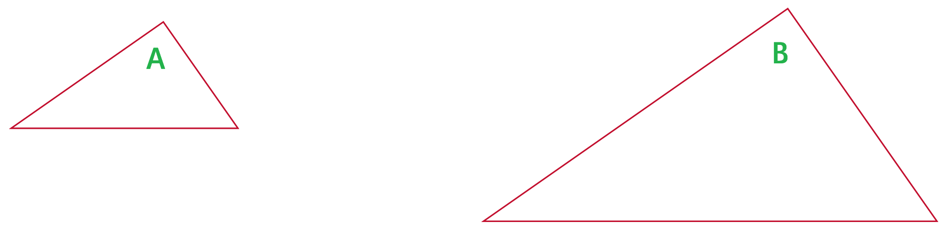
h


k


Grannhorn tiltekins horn í þríhyrningi er jafn stórt og summa hinna hornanna tveggja.

Í jafnarma þríhyrningi eru tvö hornanna jafn stór.

19 Þríhyrningurinn B er stækkuð mynd af þríhyrningnum A.

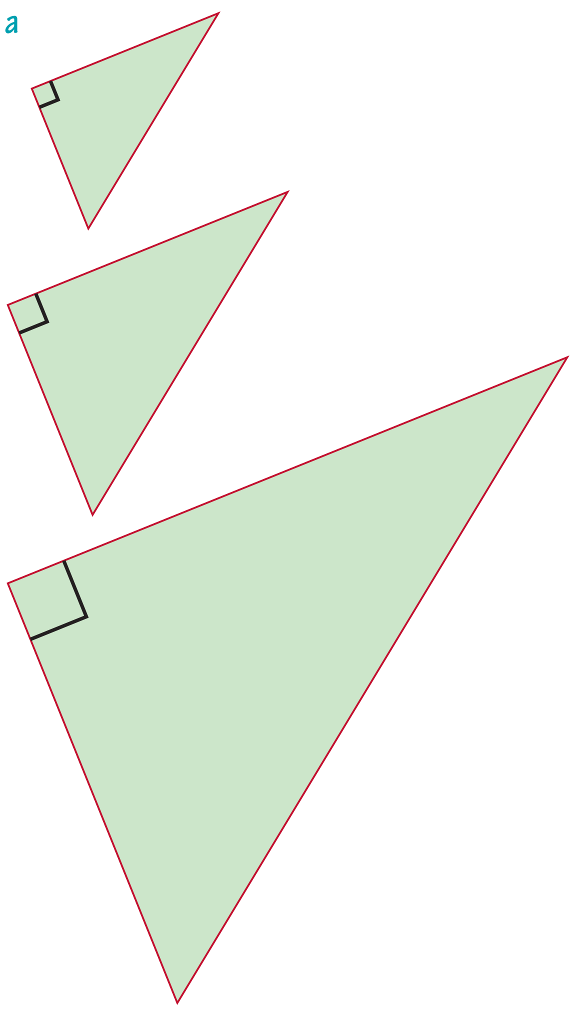


a Mældu hliðar þríhyrninganna og finndu með hvaða tölu þarf að margfalda hliðarlengdir A til að fá hliðarlengdir B. Talan sem margfaldað er með kallast margföldunarstuðull.

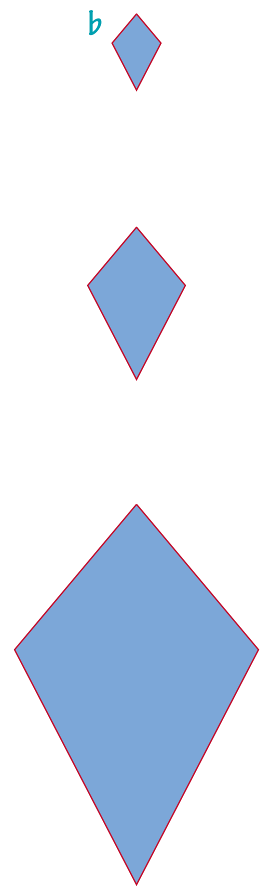
b Hvert er hlutfallið á milli einslægra hliða í A og B?

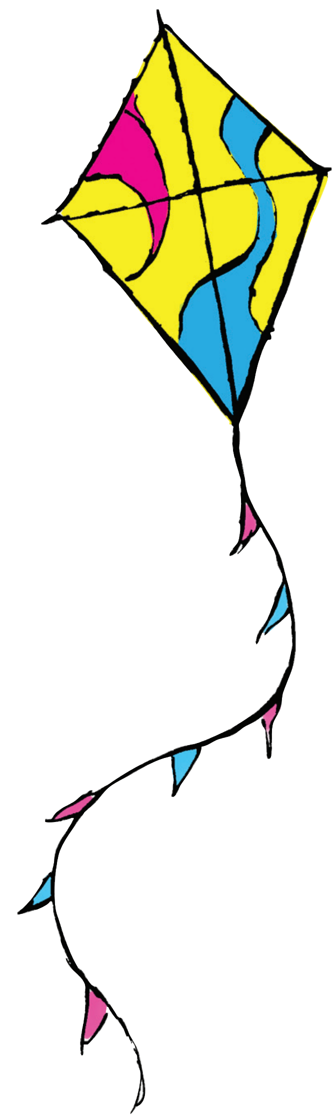
20 Skoðaðu þessar stækkanir. Finndu margföldunarstuðul og hlutfall milli einslægra hliða fyrir hverja þeirra.

a

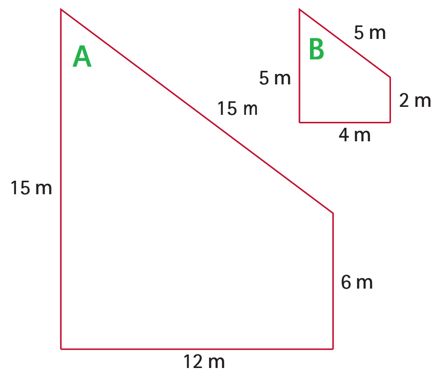


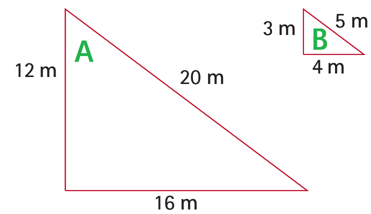
b





21 Hér er mynd B smækkuð mynd af mynd A.
Skoðaðu þessar smækkanir. Finndu margföldunarstuðul og hlutfall milli einslægra hliða.

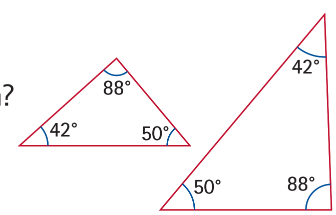




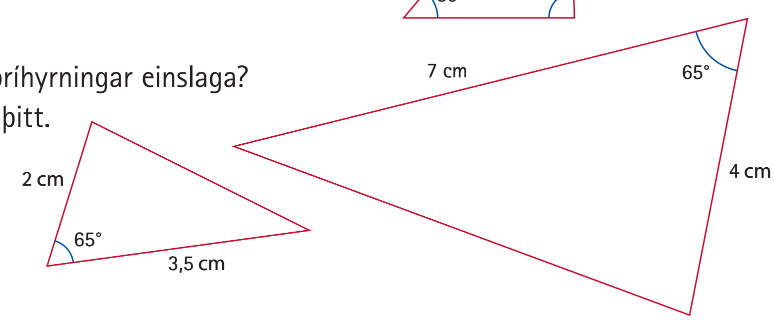
Marghyrningar eru einslaga ef einslæg horn eru jafn stór og ef hlutföll milli einslægra hliða eru jöfn.

22 Eru hyrningarnir í dæmum 21–23 einslaga? Rökstyddu svar þitt.

23 Eru þessir tveir þríhyrningar einslaga? Rökstyddu svar þitt.

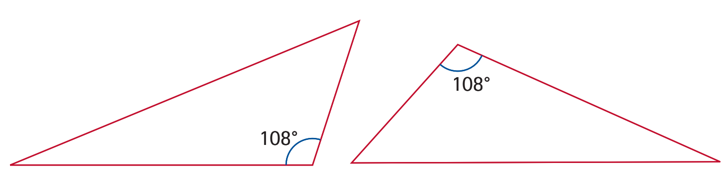


24 Eru þessi tveir þríhyrningar einslaga? Rökstyddu svar þitt.



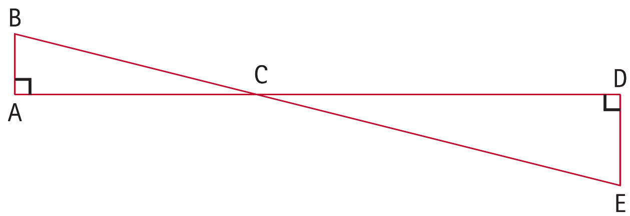
HÓPVERKEFNI

Gefið er að tveir þríhyrningar hafa eitt horn jafn stórt.

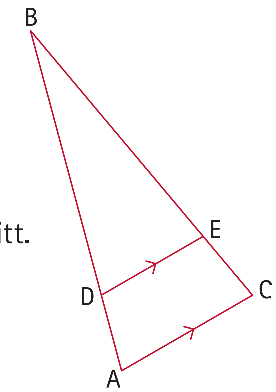


Kannið hvaða lágmarksupplýsingar aðrar þið þurfið að hafa til að geta sannreynt hvort þríhyrningarnir eru einslaga. Búið til kynningu þar sem þið gerið grein fyrir athugunum og niðurstöðum ykkar.

25 Eru þríhyrningarnir ABC og CDE einslaga? Rökstyddu svar þitt.

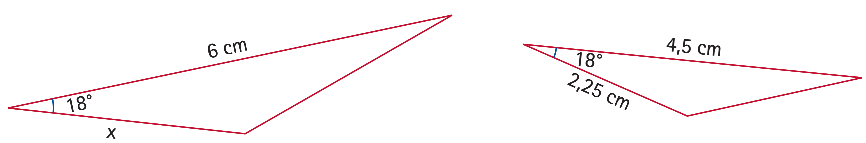


26 Eru þríhyrningarnir ABC og DBE einslaga? Rökstyddu svar þitt.

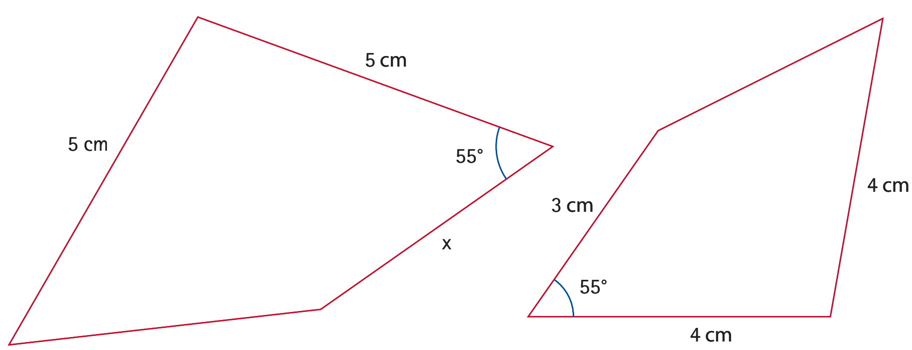


27 Hyrningarnir eru einslaga. Finndu óþekktu stærðina x.

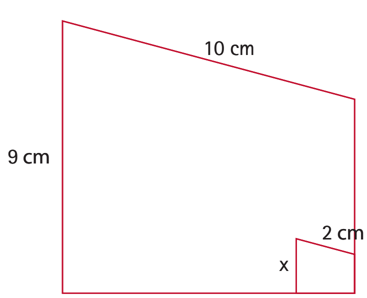
a



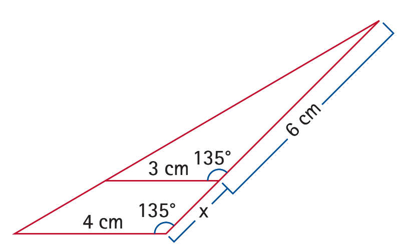
b



c



d



28 Rétthyrnt veggspjald sem er 50 · 70 cm er hengt upp á rétthyrnda töflu sem er 75 · 100 cm.

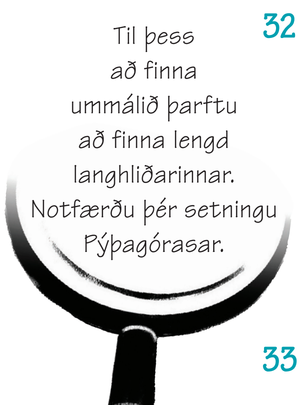
a Sýndu fram á að veggspjaldið og taflan séu ekki einslaga.

b Gefðu 2-3 dæmi um hvernig breyta má veggspjaldinu til þess að það verði einslaga töflunni.

29 Settur er 12 cm breiður svartur kantur utan um rétthyrnt veggspjald sem er 50 · 70 cm. Eru veggspjaldið og veggspjaldið með kanti einslaga? Rökstyddu svarið.

30 Maður sem er 175 cm á hæð stendur við hlið hárrar byggingar. Hann snýr baki í sólina. Skuggi mannsins er 2,89 m og skuggi byggingarinnar er 54,4 m. Hve há er byggingin?

31 Tré varpar frá sér 13,5 m löngum skugga. Girðing með 75 cm háum staurum stendur fyrir framan tréð í um það bil 11,5 metra fjarlægð frá því. Girðingarstaurarnir varpa frá sér skugga sem ná jafn langt og skuggi trésins. Hve hátt er tréð?



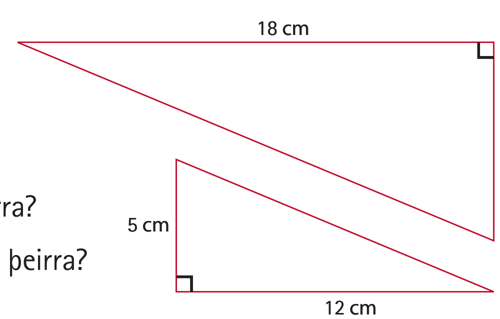
32 Þríhyrningarnir eru einslaga.

a Finndu óþekktu hliðarlengdina x.

b Finndu ummál þríhyrninganna.

c Hvert er hlutfallið milli ummáls þeirra?

d Hvert er hlutfallið á milli flatarmáls þeirra?

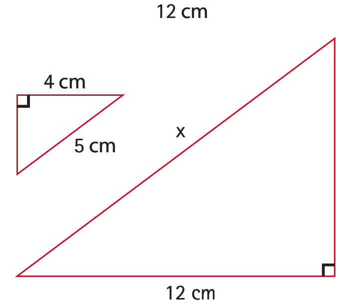


33 Rétthyrndu þríhyrningarnir eru einslaga.

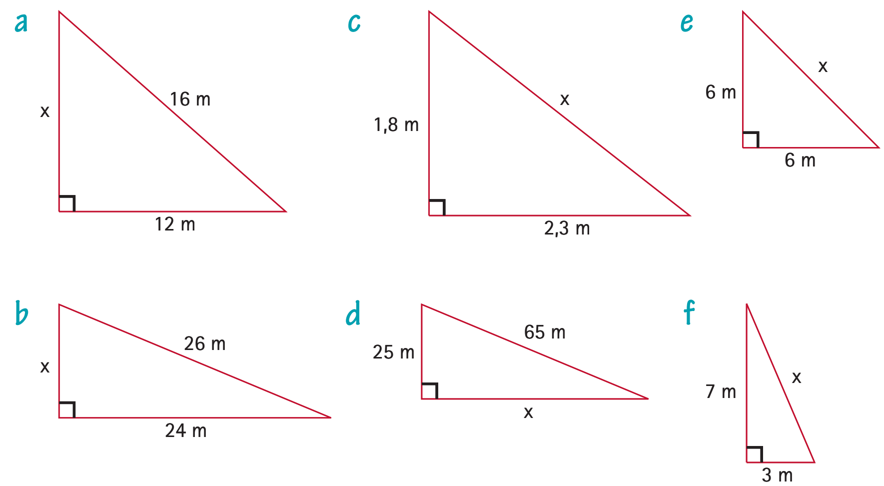
a Finndu ummál þríhyrninganna.
Lýstu því hvernig þú ferð að.

b Hvert er hlutfallið milli ummáls þeirra?

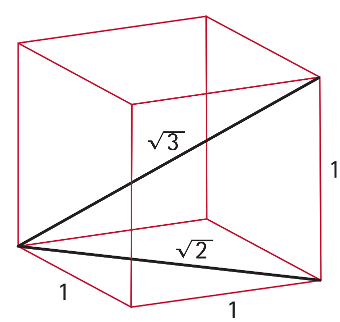
c Hvert er hlutfallið á milli flatarmáls þeirra?



34 Finndu lengd óþekktu hliðarinnar.



35 Í teningi með hliðarlengdina 1 er lengd hornalínu hliðarflatar $\sqrt{2}$ og lengd hornalínu teningsins er $\sqrt{3}$. Útskýrðu hvernig nota má setningu Pýþagórasar til finna þessar lengdir.

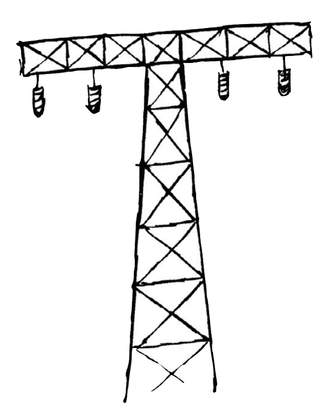


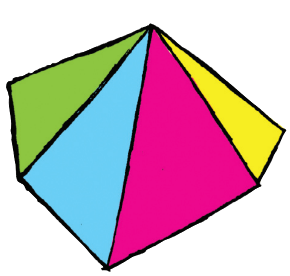
36 Herbergi er 8 m á lengd og 6 m á breidd og lofthæðin er 3 metrar.

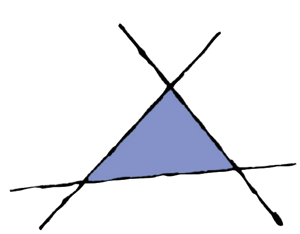
a Hver er lengd hornalínu gólfflatarins? **b** Hver er lengd hornalínu rýmisins alls?

37 Mældu lengd, breidd og hæð skólastofunnar eða einhvers annars rýmis sem er réttstrendingur. Finndu lengd hornalínu gólfflatar og lengd hornalínu rýmisins alls.

38 Skrifaðu ritgerð um þríhyrninga. Skoðaðu kaflann vel. Láttu koma fram í ritgerðinni mikilvæg hugtök um þríhyrninga og gerðu grein fyrir hvernig þú getur nýtt þekkingu þína á þríhyrningum og einkennum þeirra við að leysa ýmiss konar viðfangsefni.







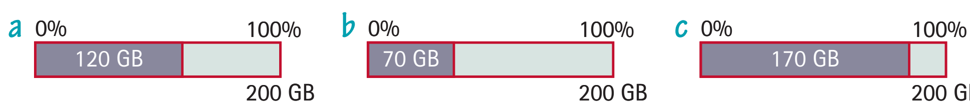
Prósentur

Prósentur eru notaðar mjög víða í daglegu lífi og starfi, til dæmis í verslunarrekstri, bankaviðskiptum, við launaútreikninga og úrvinnslu upplýsinga svo örfá dæmi séu tekin.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Vitir að prósent merkir hundraðshluta af heild.*
- *Öðlist færni í prósentureikningi sem algengur er í samfélaginu, svo sem vaxtareikningi og verslunarreikningi.*
- *Gerir þér grein fyrir að hækkun stærðar um ákveðna prósentu og síðan lækkun um sömu prósentu gefur ekki upphaflegu stærðina.*
- *Gerir þér grein fyrir muninum á prósentuhækkun og raunverulegri hækkun í tölum.*

1 Prósentureitirnir sýna hve stór hluti af geymslurými 200 GB harðs disks í tölvu er nýttur. Skráðu nýtinguna í prósentum.



2 a Á 250 GB hörðum diski eru 45% geymslurýmis nýtt. Hve mörg GB eru það?

b Á 250 GB hörðum diski eru 68% af geymslurýminu ónotuð. Hve mörg GB eru geymd á diskinum?

3 a Á tölvu Bergrósar eru 56 GB af gögnum. Ónýtt geymslurými á harða diskinum er 30%. Hve stór er harði diskurinn í tölvu Bergrósar?

b Hún stækkar harða diskinn og nú taka gögnin 28% af geymslurýminu. Hve stórt er geymslurýmið núna?

4 Helga stækkar harða diskinn í tölvunni sinni úr 60 GB í 200 GB. Um hve mörg prósent stækkar geymslurýmið?

5 Haukur á tölvu með 80 GB hörðum diski. Hann kaupir sér flakkara sem getur geymt 320 GB af gögnum. Um hve mörg prósent eykst geymslurýmið?

6 Í töflunni er það ýmist heildin, prósentan eða hlutinn sem er óþekkt.
Finndu óþekktu stærðina.

	a	b	c	d	e	f
Heild	1250 g		134 m	2 g	15 650 kr.	
Prósenta	8%	14%		0,6%		82%
Hluti		8,4 m	18,76 m		3083 kr.	41 000 kr.

7 Fituprósenta í kjöthakki er 8–10%. Hve mörg grömm af fitu eru í 600 g af hakki?

8 Í 180 g af jógúrt eru 11,2 g af fitu. Hver er fituprósentan?

9 Á vírrúllu voru 80 m. Búið er að nota 70% vírsins af rúllunni. Hve margir metrar eru eftir?

10 Jóhannes keypti reiðhjól með 18% afslætti. Hann greiddi 33 620 kr. fyrir hjólið. Hvert var verðið án afsláttar?

11 Á reikningi frá pípulagningamanni kemur fram að vinna og efni kosta 325 000 kr. Hann þarf að bæta 24,5% virðisaukaskatti ofan á reikninginn. Hve hár verður reikningurinn?

12 Íbúafjöldi í borg nokkurri var 255 000 í upphafi árs 2006. Íbúum fjölgaði um 0,6% á einu ári. Hver var íbúafjöldinn orðinn í upphafi árs 2007?

13 Gengi evru var 85,7 krónur í gær. Það hækkaði um 0,8% í dag. Hvert varð gengið?

14 Í skóla eru 430 nemendur. 27% þeirra eru á unglingastigi. 140 nemendur eru á miðstigi. Hve mörg prósent nemenda eru á yngsta stigi?

15 a Sólveig markvörður hafði varið 40% skota þegar staðan var 4–3 hennar liði í vil. Hve mörg skot hafði hún varið?

b Í hálfleik var staðan 9–15 og Sólveig hafði varið 17 skot. Hve mörg prósent skotanna hafði hún varið?

c Leikurinn fór 24–22. Í seinni hálfleik var skotið 18 sinnum á mark Sólveigar. Hve mörg prósent skotanna varði hún í leiknum?

TÓNLEIKAR

Salur **5900 kr.**

Stúka **4900 kr.**

10% afsláttur ef keyptir eru **10** miðar eða fleiri.
5% prósent aukaafsláttur ef **10** miðar eða fleiri eru keyptir mánuði fyrir tónleikadag.
Grunnskólanemendur fá **550 kr.** afslátt af venjulegu miðaverði.

16 Reiknið út verð á mann miðað við

a 8 manna hóp sem kaupir miða daginn fyrir tónleika.

b 8 manna hóp sem kaupir miða mánuði fyrir tónleika.

c 15 manna hóp sem kaupir miða daginn fyrir tónleika.

d 15 manna hóp sem kaupir miða mánuði fyrir tónleika.

e Hvenær myndi borga sig fyrir grunnskólanemendur að nýta sér hópafslátt og kaupa miða saman?

17 Tónleikasalurinn tekur 800 manns og stúkan 450 manns. Kostnaður við tónleikana er áætlaður 5 milljónir. Hve mörg prósent miða þarf að selja til að fá fyrir kostnaði ef allir miðar eru seldir á fullu verði? Sýndu nokkur dæmi um prósentuhlutfall af miðum í sal og stúku.

18 *a* Tveimur dögum fyrir tónleika höfðu selst 80% miða í sal og 30% miða í stúku. Hve margir miðar höfðu selst?

b Meðalverð fyrir seldan miða var 5200 krónur. Hve mörg prósent af kostnaði var miðasalan orðin?

c Þegar tónleikarnir byrjuðu var hlutfall seldra miða 85% í sal og 72% í stúku. Hve margir miðar höfðu selst?

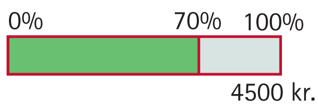
d Meðalverð fyrir seldan miða var þá 5250 krónur. Hvað var salan mörg prósent miðað við kostnað?

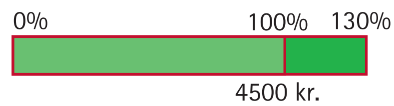
19 *a* 35% tónleikagesta keyptu miða á fullu verði. Hve margir voru þeir?

b 25% gesta keyptu miða á verði fyrir grunnskólanemendur. Hve margir voru þeir?

c 45% gesta keyptu miða með hópafslætti. Hve margir voru þeir?

d 25% miða höfðu selst mánuði fyrir tónleikana og voru 40% þeirra miðar í sal. Hve margir miðar voru það?





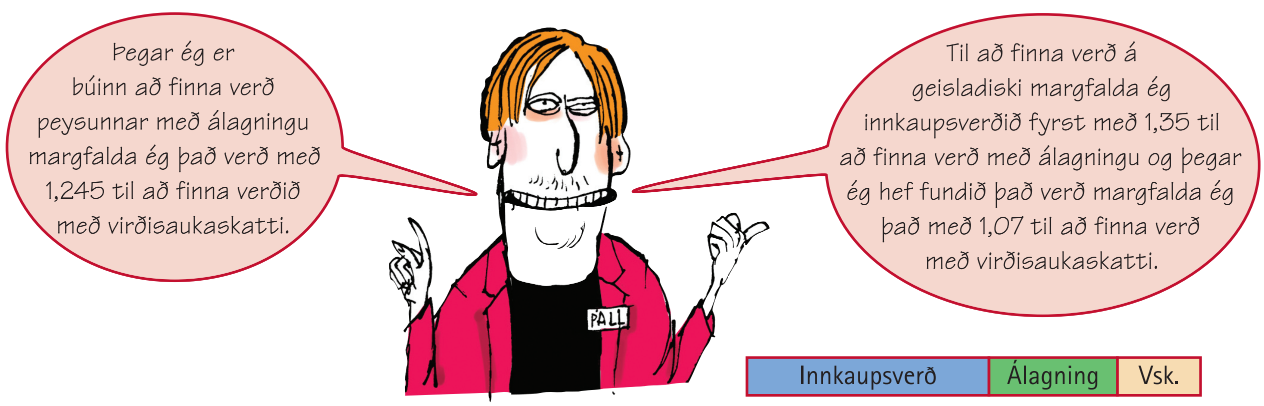
20 Þegar verði er breytt vegna afsláttar eða hækkunar á vöruverði má fara ýmsar leiðir til að finna nýtt verð.

a Hvernig myndir þú finna nýtt verð á peysu sem kostar 4500 kr. ef gefinn er 30% afsláttur?

b Hvernig myndir þú finna nýtt verð á peysu sem kostar 4500 kr. ef hækka á verðið um 30%?

VIRÐISAUKASKATTUR
Fatnaður 24,5%
Geisladiskar 7%

21 Páll rekur verslun sem selur fatnað og geisladiska. Þegar hann verðleggur vörur í versluninni þarf hann að taka mið af innkaupsverði, álagningu og virðisaukaskatti.



a Útskýrðu hvers vegna hann margfaldar með 1,245 til að finna verð á fatnaði með virðisaukaskatti og 1,07 til að finna verð á geisladiskum með virðisaukaskatti.

b Hve mörg prósent er álagning Páls á geisladiskum?

c Álagning á fatnað í verslun Páls er 55%. Hvernig telur þú að hann fari að við að reikna verð fatnaðar með álagningu?

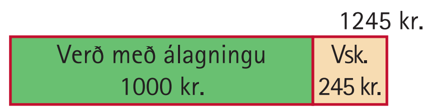
22 Páll þarf að verðleggja eftirtaldar vörur. Finndu verðið með álagningu og virðisaukaskatti.

Fatnaður	Innkaupsverð
Stuttermabolur	585 kr.
Langermabolur	799 kr.
Buxur	1 798 kr.
Ullarpeysa	1 250 kr.
Úlpur	3 890 kr.

Geisladiskar	Innkaupsverð
Sumarsmellir	999 kr.
Villtir tónar	1 299 kr.
Óperustjörnur	1 500 kr.
Krakkablús	482 kr.
Laugardagslögin	600 kr.

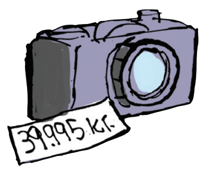
VIRÐISAUKA-SKATTUR 24,5%

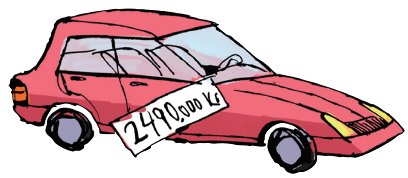
23



Verð vöru með 24,5% virðisaukaskatti er 1245 kr.
Hvað er virðisaukaskatturinn mörg prósent af heildarverði vörunnar?

24 Hve há upphæð er virðisaukaskatturinn af þessum vörum?





25 Hve há upphæð er virðisaukaskatturinn af þessum vörum?

VIRÐISAUKA-SKATTUR 7%

26 Verslunarstjóri segir að finna megi virðisaukaskattinn með því að margfalda verðið sem kaupandi greiðir með 0,0654. Hvernig má það vera þegar virðisaukaskatturinn er 7%?

27 Með hvaða tölu má margfalda heildarverð til að finna hvað 24,5% virðisaukaskattur er há upphæð?

28 Virðisaukaskattur á hótelgistingu var lækkaður úr 24,5% í 7% í mars 2007.
Hvað lækkaði hann um mörg prósentustig?
Hve mikil var lækkunin í prósentum?

29 Virðisaukaskattur á matvæli var lækkaður úr 14% í 7%
í mars 2007. Hvor hefur rétt fyrir sér? Rökstyddu svar þitt.

30 a Á hvaða ári fjölgaði Kópavogsbúum mest? Hve mikil var fjölgunin í prósentum á því ári?

b Finndu fólksfjölgun í prósentum á árunum 1997–2000, 2000–2003 og 2003–2006.

c Finndu fólksfjölgunina í prósentum fyrir hvert ár frá 1997 til 2006.

d Hver var meðalfólksfjölgun á ári?

Mannfjöldi í Kópavogi 31. desember á árunum 1997–2006

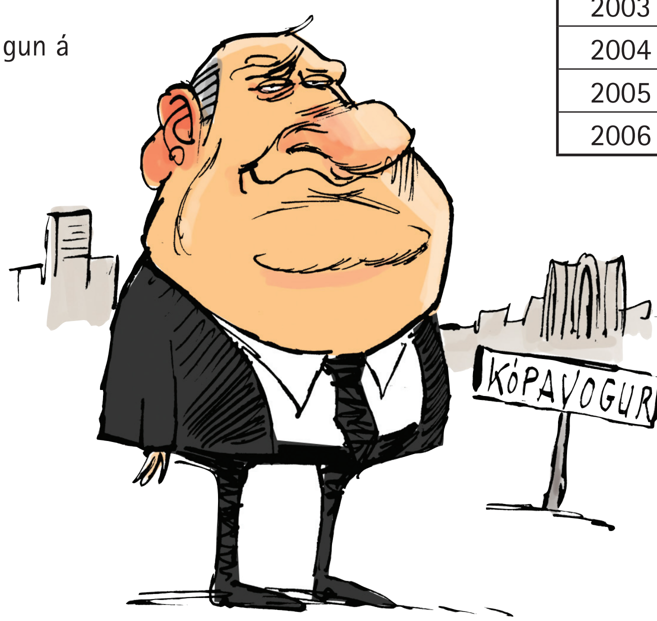
Ár	Fjöldi
1997	19 867
1998	21 508
1999	22 693
2000	23 647
2001	24 291
2002	25 016
2003	25 352
2004	25 803
2005	26 512
2006	27 525

31 Hvað hefði mátt búast við að margir íbúar Kópavogs væru margir 31.12. 2007

a ef miðað er við meðalfólksfjölgun á árunum 1997–2006?

b ef miðað er við fólksfjölgun árið 2006?

32 Hvað má búast við að íbúar í Kópavogi verði margir í árslok 2009 ef miðað er við meðal-fólksfjölgun áranna 1997–2006?



HÓPVERKEFNI

Skoðið þróun mannfjölda í ykkar eigin sveitarfélagi eða á landinu sem heild á þessu sama tímabili. Þið finnið nauðsynlegar upplýsingar á vef Hagstofu Íslands og/eða hjá sveitarfélaginu ykkar. Berið niðurstöður ykkar saman við mannfjöldaþróun í Kópavogi.

Mannfjöldi á jörðinni	
31. 12. 1997	5 862 584 631
31. 12. 2006	6 676 607 162

Hvað hefur jarðarbúum fjölgað um mörg prósent á þessum tíma?

Bankavextir eru reiknaðir í prósentum bæði á inneignum og útlánum. Vaxtaprósentur sem bankarnir gefa upp miðast við að upphæð sé á vöxtum í heilt ár. Ef upphæð er á vöxtum hluta úr ári þarf að finna hve langan tíma um er að ræða og hvað hann er stórt hlutfall úr árinu.

33 Finndu vexti eftir eitt ár ef 1 200 000 kr. eru í banka í eitt ár á

a 3% vöxtum **b** 7,5% vöxtum **c** 9% vöxtum **d** 11,3% vöxtum

34 Finndu hve stórt hlutfall úr bankaári eru

a 120 dagar **b** 270 dagar **c** 45 dagar **d** 225 dagar

Bankaár er 360 dagar og hver mánuður er 30 dagar.

35 Finndu hve háir vextir eru af 1 200 000 kr. ef ársvextir eru 12% og upphæðin er á vöxtum í

a 120 daga **b** 270 daga **c** 45 daga **d** 225 daga **e** eitt ár

36 Settu fram almenna reiknireglu sem nota má til að reikna vexti fyrir hluta úr ári.

37 Freyja leggur 250 000 kr. inn á bankareikning með 5% vöxtum í eitt ár.

a Hver háir verða vextirnir?

b Hver er innistæða hennar eftir eitt ár?

c Innistæðu eftir eitt ár ásamt 5% vöxtum má finna með því að margfalda upphæðina sem lögð var inn með 1,05. Útskýrðu það með því að sýna nokkur dæmi.

Bankar og lánastofnanir reikna vexti af innlánum einu sinni á ári. Þá er vöxtum bætt við inneign og ári síðar eru vextir reiknaðir af þeirri upphæð ef ekkert hefur verið lagt inn á reikninginn til viðbótar.

38 Finndu upphæð með vöxtum

a 85 000 kr. á 6% vöxtum í eitt ár.

b 155 000 kr. á 2,25% vöxtum í eitt ár.

c 999 000 kr. á 4,7% vöxtum í eitt og hálft ár.

d 7, 5 milljónir kr. á 8,1% vöxtum í 15 mánuði.

39 Brynhildur fær 50 000 kr. inneign í banka í skírnargjöf. Upphæðin ber 9% vexti.

a Hve há verður upphæðin orðin eftir eitt ár? En eftir tvö ár? En eftir fimm ár?

b Um hve mörg prósent hefur upphæðin hækkað á fimm árum?

Seinlegt er að reikna hækkun á bankainnistæðu ár fyrir ár ef um langan tíma er að ræða. Gott getur verið að nota töflureikni til að auðvelda sér útreikninga.

Tími		Upphæð með vöxtum
1 ár	75 000 · 1,09	81 750
2 ár	81 750 · 1,09	89 108
3 ár	89 108 · 1,09	97 128
4 ár	97 128 · 1,09	105 870
5 ár	105 870 · 1,09	115 398

Ef 75 000 kr. upphæð er á 9% vöxtum í banka í fimm ár má setja útreikninga upp í töflur eins og hér er sýnt. Gott er að nota töflureikni.

Tími	Upphaf 75 000 kr. Vextir 9%		Upphæð með vöxtum
1 ár	75 000 · 1,09	75 000 · 1,09	81 750
2 ár	75 000 · 1,09 ·1,09	75 000 · $1{,}09^2$	89 108
3 ár	75 000 · 1,09 · 1,09 · 1,09	75 000 · $1{,}09^3$	97 127
4 ár	75 000 · 1,09 ·1,09 · 1,09 · 1,09	75 000 · $1{,}09^4$	105 869
5 ár	75 000 · 1,09 ·1,09 · 1,09 · 1,09 ·1,09	75 000 · $1{,}09^5$	115 397
6 ár	75 000 · 1,09 ·1,09 · 1,09 · 1,09· 1,09 ·1,09	75 000 · $1{,}09^6$	125 783
7 ár			
8 ár			

40 Skoðaðu þessar tvær töflur og notaðu þær til þess að sýna fram á að finna megi hve há upphæð með 9% vöxtum verður eftir x ár með því að margfalda hana með $1{,}09^x$.

41 Finndu hvað 5 000 000 kr. verða orðnar að hárri upphæð með 4,5% vöxtum eftir

a 15 ár **b** 25 ár **c** 40 ár

d Um hve mörg prósent hefur upphæðin vaxið á 25 árum? En á 40 árum?

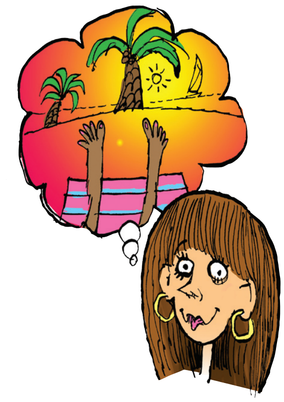
42 Bankavextir hækka um 0,7 **prósentustig** úr 4,5% í 5,2%. Um hve mörg **prósent** hækka vextirnir?

43 a Finndu hvað 5 000 000 kr. verða orðnar að hárri upphæð eftir 25 ár með 5,2% vöxtum.

b Um hve mörg prósent hefur upphæðin vaxið á 25 árum?

c Berðu saman niðurstöður þínar í dæmi 41 b og 43 b og greindu frá áhrifum breytinga á vaxtaprósentu.

44 Þórdís tekur 200 000 króna ferðalán sem hún borgar upp á 6 mánuðum með jöfnum greiðslum. Vextir eru 22,45%. Reiknaðu vaxtagreiðslur á hverjum gjalddaga.



Nr.	Gjalddagi	Eftirstöðvar	Afborgun	Vextir	Kostnaður	Greiðsla alls
1	30.11.2007	200 000			0	35 550
2	30.12.2007	168 192			0	35 550
3	30.1.2008	135 789			0	35 550
4	29.2.2008	102 779			0	35 506
5	30.3.2008	69 132			0	35 572
6	30.4.2008	34 896			0	35 549
Samtals		0	200 000	13 277	0	213 277

Skoðaðu fleiri dæmi um afborganir og greiðslubyrði. Aflaðu þér upplýsinga hjá bönkum, lánastofnunum og verslunum.

Prómill (‰) er $\frac{1}{10}$ hluti af prósentu eða $\frac{1}{1000}$ hluti af heild. Prómill eru oft notuð til að gefa upp styrkleika efna í efnablöndum þegar um lágt hlutfall efnanna er að ræða.

45 Skráðu sem tugabrot.

a 3‰ **b** 7‰ **c** 0,5‰ **d** 125‰

46 Finndu

a 3‰ af 1500 **b** 7‰ af 35 000 **c** 0,5‰ af 12 **d** 125‰ af 125

47 Í augnskolvökva eru 9 prómill af salti. Hve mikið salt er í 150 g af vökvanum?

48 Saltlausn er framleidd er úr 1250 g af vatni og 9,4 g af salti.

a Hve mörg prómill af salti verða í lausninni? **b** Hve mörg prósent eru það?

49 **a** Hve mörg prómill eru 0,25 ml af 75ml?

b Hve mörg prósent eru 0,25 ml af 75 ml?

50 Sýndu fram á að þú kunnir að nota prósentur í ýmsu samhengi. Gefðu dæmi um leiðir sem fara má við að finna:

a 7% afslátt
b 7% álagningu
c 7% hækkun
d 7% ársvexti
e 7% lækkun
f hækkun um 7 prósentustig
g 7% ársvexti í 5 ár

Algebra

Í algebru reynir á leikni í að setja fram stæður og einfalda þær. Það er líka þýðingarmikið að þekkja leiðir til að leysa jöfnur og geta nýtt jöfnur við lausn ýmissa verkefna í daglegu lífi.

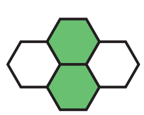
Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Getir lýst talna- og rúmfræðimynstrum í því skyni að segja til um framhaldið og finna almenna reglu.*
- *Þekkir dreifireglu, kunnir að margfalda upp úr svigum og þátta fyrsta og annars stigs margliður.*
- *Getir leyst fyrsta stigs jöfnur með einni óþekktri stærð.*
- *Kynnist því hvernig leysa má einfaldar annars stigs margliður með þáttun.*
- *Getir notað jöfnur til að leysa margvísleg viðfangsefni.*
- *Kunnir að leysa saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum.*

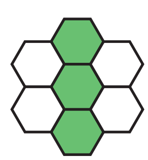
Algebra er oft notuð til að greina mynstur og lýsa þeim með almennum reglum.

HÓPVERKEFNI

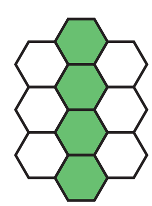
A ①



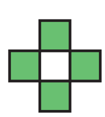
②



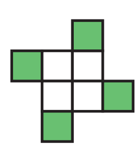
③



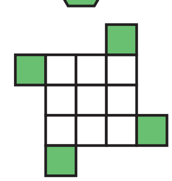
B ①



②



③



1 a Finnið hve margar grænar og hve margar hvítar flísar þarf að nota í myndum númer 8 og 12 í hvoru mynstri fyrir sig.

b Skráið almenna reglu sem nota má til að finna fjölda flísa í hvoru mynstri fyrir sig.

2 Skoðaðu þessa talnarunu 2, 5, 8, 11, 14, …

a Lýstu reglu sem má nota til að finna næstu tölur í talnarununni.

b Finndu næstu þrjár tölurnar í talnarununni.

c Finndu almenna reglu sem nota má til að finna hvaða tölu sem er í talnarununni.

Til að finna almenna reglu sem nota má við að finna hvaða tölu sem er í talnarununni er gott að skrá númer hverrar tölu í rununni og leita að samhengi milli númersins og tölunnar.

Nr.	1	2	3	4	5	6
	2	5	8	11	14	

3 Finndu þrjár næstu tölur í hverri runu og almenna reglu fyrir þessar talnarunur.

a 21, 27, 33, 39, 45, …

b 54, 62, 70, 78, 86, …

c 68, 61, 54, 47, 40, …

d –5, –14, –23, –32, –41, …

4 Hér eru nokkrar talnarunur. Fyrsta, önnur, þriðja og sjötta talan eru gefnar. Finndu fjórðu og fimmtu töluna í hverri runu og lýstu henni með orðum.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	2	5	10			37
d	0	1	3			15
c	2	5	11			47
d	25	16	9			0

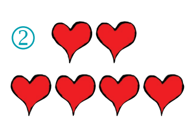
5 Skráðu fyrstu 6 tölurnar í talnarunum sem lýsa má á þennan hátt.

a Fyrsta talan er 2. Munurinn milli fyrstu og annarrar tölu er 2. Munurinn milli talnanna eykst alltaf um 2. Næst verður hann 4, þar næst 6 og svo framvegis.

b $n^2 + 7$ *c* $n(n + 1)$ *d* $2n^2 - 3$

e Einni af rununum í a- og b-lið má líka lýsa með þessu hjartamynstri. Hvaða runa er það?

①


②


③


6 Skoðaðu þessa talnarunu 3, 6, 11, 18, 27, … Hér er munurinn milli fyrstu og annarrar tölu og annarrar og þriðju tölu ekki sá sami.

a Skráðu muninn milli talnanna í talnarununni.

b Lýstu reglu sem má nota til að finna næstu tölur í talnarununni.

c Skráðu næstu þrjár tölur í talnarununni.

d Finndu almenna reglu fyrir þessa talnarunu.

Þegar stæður eru einfaldaðar þarf stundum að margfalda inn í sviga, fella niður sviga og þátta. Mikilvægt er að huga vel að svigum og formerkjum.

7 Einfaldaðu liðastærðirnar.

a $3x + 3 - 3x + 2 - 4x$
b $5 - 4a + 6a + a - 10$
c $y - 2x + 6x - 3y + 15$
d $2x + x - 4 + 5y - 8 + 4$
e $7 - 5 - 4y + 6 + 6y + 2x^2$
f $b + b + 4 + 7 + 4a^2 + a$
g $2y^2 + y + y + 7x - 3x^2$
h $a + a + a + 2a^2 + 2a + 2$

8 Einfaldaðu liðastærðirnar.

a $(2x + 5 - y) + (5x + 6 + 2y)$
b $(2x - 6) - (2 - y)$
c $(a - 2a^2) - (2 - 3a - a^3)$
d $(2x - 4) - (3x + 3) + (7x + 5)$
e $(-3y + 8) - (2x + 6x^2 + 6)$
f $(6 - 9x + 2x^2) - (4x - x^2 + 7)$
g $4y^2 - (3y^2 - 5y + 6) - 3y + 13$
h $7x^2 + 5y - (4x + y) - 3x^2$

9 Margfaldaðu inn í sviga.

a $4(2x + 3)$
b $3(2y + s)$
c $3(4x - 5y)$
d $a(3 - 2b)$
e $e(e - 5)$
f $-6(b + 4)$
g $-4(5 - y)$
h $-x(x - y)$
i $7(2 + 2a - b)$
j $b(b - 2x + 4)$

10 Margfaldaðu inn í sviga og skráðu stæðurnar á sem einfaldastan hátt.

a $3(4 + y) + 4(2 + y)$
b $2(10 + b) + (5 + b)$
c $4(x - 5) + 2(5 - x)$
d $6(a + 1) + 3(4 - 3)$
e $2(2m - 4) + (3 - 3m)$
f $4(8 - 2x) - (3x + 6)$
g $x(3 - x) - 2(x - 8)$
h $5(4a + 1) - (3a - 5)$
i $x(x + 4) - 4(x - 4)$

Þegar margfaldað er inn í sviga er dreifireglan notuð. $a(b + c) = ab + ac$
Einnig má nota regluna í hina áttina og taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga. Það er kallað að þátta.
Þá er liðastærð skráð sem margfeldi tveggja þátta. $ab + ac = a(b + c)$
Þáttun og margföldun inn í sviga eru því andhverfar aðgerðir.

11 Þáttaðu liðastærðirnar og prófaðu þáttunina með því að margfalda inn í svigann.

a $5x + 35$
b $7x^2 + 35x$
c $28 - 7a^2$
d $14xy - 21x$
e $17ab + 34b$
f $15x^2y + 18xy$
g $7y - 49xy$
h $16a^2b + 24ab^2$
i $9x^3 - 3x^2$
j $3x^2y + 12x + 27$
k $7a^3 + 14a^2 + 7a$
l $24a + 3b + 9c$

Þegar einfalda á flóknar stæður, svo sem stæður sem settar eru fram sem brot, má oft notfæra sér þáttun. Ef hægt er að þátta liðastærðir þannig að fram komi sameiginlegir þættir í teljara og nefnara má stytta þá út. Það getur einfaldað frekari útreikninga.

$$\frac{7ab}{21b} = \frac{\cancel{7} \cdot a \cdot \cancel{b}}{3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{b}} = \frac{a}{3} \qquad \frac{4 + 12x}{8} = \frac{\cancel{4}(1 + 3x)}{2 \cdot \cancel{4}} = \frac{1 + 3x}{2}$$

$$\frac{5x + 15}{7x + 21} = \frac{5\cancel{(x + 3)}}{7\cancel{(x + 3)}} = \frac{5}{7}$$

12 Einfaldaðu þessar stæður.

a $\frac{9ab^2}{3a}$ c $\frac{6xy^2}{18x^2y^2}$ e $\frac{7c + 21}{7}$ g $\frac{4b + 4}{5b + 5}$ i $\frac{4ax}{2ax + 4a}$

b $\frac{4x^2}{5x}$ d $\frac{17a^2}{51ab}$ f $\frac{8}{8x + 16}$ h $\frac{6x - 1}{2x - 1}$ j $\frac{3x + 5}{6x + 10}$

13 Paraðu saman ef hægt er.

❶ $-18x + 16y$
❷ $8 + 0{,}5x$
❸ $5x^2 - 20x$
❹ $0{,}8 - 3{,}2$
❺ $2x + 24$

a $4(8 + x)$
b $(16 + x) \cdot \frac{1}{2}$
c Bættu 12 við tölu og tvöfaldaðu hana síðan.
d $12x(7x + \frac{1}{3}y)$
e $3(x + 4) + 5(6 + x)$
f $5x(x - 4)$
g $-3x(-2x - 5y)$
h $2(3x + 2y) - 4(6x - 3y)$

❻ $6x^2 - 15xy$
❼ $6x^2 + 15xy$
❽ $84x^2 + 4xy$
❾ $8x + 42$
❿ $32 + 4x$

14 Hvaða stærð á að standa í skyggða reitnum?

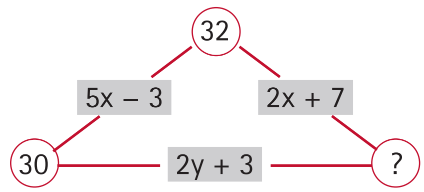
a $\frac{15x^2}{3xy} = \frac{\square}{y}$ b $\frac{21x^2}{3x^2 - 24x} = \frac{7x}{\square}$ c $\frac{8a - 8}{a^2 - a} = \frac{8}{\square}$ d $\frac{2b^2 - 8b}{16ab} = \frac{b - \square}{8a}$

15 Hefur stæðan verið einfölduð á réttan hátt? Rökstyddu svarið.

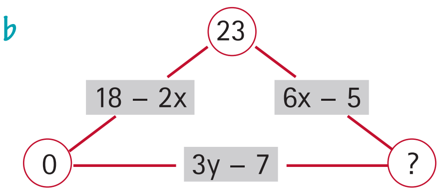
a $\frac{x^2 + 2x}{2x} = \frac{x + 2}{2}$ b $\frac{xy - 1}{y} = x - 1$ c $\frac{x + x^2}{2x^2} = \frac{x + 1}{2x}$

16 Stærðirnar í hringjunum má finna með því að leggja saman stæðurnar í aðliggjandi rétthyrningum. Finndu fyrst gildi x og svo y til að finna tölurnar sem vantar.

a

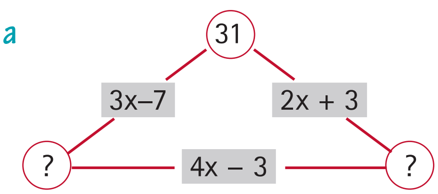


b

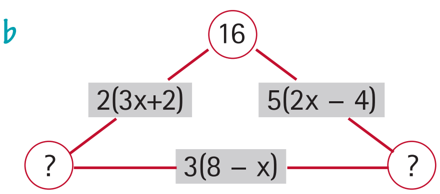


17 Finndu óþekktu stærðirnar í þessum þríhyrningum. Tölurnar í hringjunum eru fundnar með því að leggja saman stæður í aðliggjandi rétthyrningum.

a



b



18 Athugaðu þessar stæður.

A $3x - 7$ **B** $-2(5 - x)$ **C** $3(2x + 3)$

a Er hægt að finna gildi fyrir x sem gerir stæður A og B jafngildar?
b Er hægt að finna gildi fyrir x sem gerir stæður B og C jafngildar?
c Er hægt að finna gildi fyrir x sem gerir stæður A og C jafngildar?

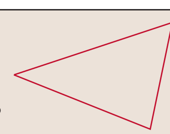
19 Settu upp jöfnu og leystu síðan dæmin.

a Lengd rétthyrnings er fimmföld breidd hans. Ummál hans er 48 cm. Hvert er flatarmál hans?

b Finndu þrjár samliggjandi heilar tölur þannig að summa tveggja lægri talnanna sé 34 hærri en hæsta talan.

c Fullorðin hjón eru samtals 154 ára. Eiginkonan er 6 árum eldri en eiginmaðurinn. Hve gömul eru þau?

d Hornið x er helmingur af horni y. Hornið z er $\frac{3}{4}$ af horni y. Hve stór eru horn þríhyrningsins?



e Móðir og dóttir eru samtals 45 ára. Eftir 7 ár verður móðirin þrefalt eldri en dóttirin er núna. Hve gamlar eru þær núna?

f Summa tveggja talna er 19. Minni talan er 4 lægri en sú stærri. Finndu tölurnar.

g Þú færð sömu niðurstöðu ef þú margfaldar tölu með 6 og bætir síðan 4 við hana og ef þú dregur töluna frá 12.

h Meðaltal þriggja talna er 18. Tvær af tölunum eru 10 og 20. Hver er þriðja talan?

20 Leystu þessar jöfnur. Skoðaðu þær vel áður en þú hefst handa og athugaðu hvort þú getur ekki leyst þær í huganum eða án mikilla útreikninga.

a $x - 6 = 24$
b $4x = 28$
c $\frac{x}{5} = 9$
d $\frac{x}{7} = 3$
e $5x - 2 = 28$
f $3y + 7 = 16$
g $\frac{x}{4} - 1 = 12$
h $4x - 5 = 15$
i $\frac{x}{4} + 2 = 10$
j $\frac{2x}{3} = 6$
k $\frac{1}{2}x = 4$
l $\frac{3x}{2} + 5 = 6$

Við lausn jafna er oft gott að byrja á því að einfalda stæður sína hvorum megin jafnaðarmerkisins. Þá eru dregnir saman líkir liðir, margfaldað inn í sviga, þáttað og stytt á striki eftir því hvað við á hverju sinni. Einnig þarf að einangra óþekktar stærðir öðrum megin jafnaðarmerkis og þekktar stærðir hinum megin. Ekki skiptir máli hvorum megin óþekktu stærðirnar eru.

21 Útskýrðu hvað það þýðir að:

a draga saman líka liði
b margfalda inn í sviga
c þátta
d stytta á striki

22 Leystu þessar jöfnur.

a $3x = 2x + 4$
b $2x + 4 = 3x$
c $3x + 6 = 5x$
d $3x - 6 = 5x$
e $6x = 3 + 5x$
f $2{,}5x = 1{,}5x + 9$
g $5x + 21 = 12x$
h $0{,}5x + 13 = 2{,}5x$
i $5x - 5 = 2x + 4$
j $5x - 4 = 4x + 3$
k $2x - 7 = 3 - 8x$
l $4x - 3 = 12 - x$

23 Leystu þessar jöfnur.

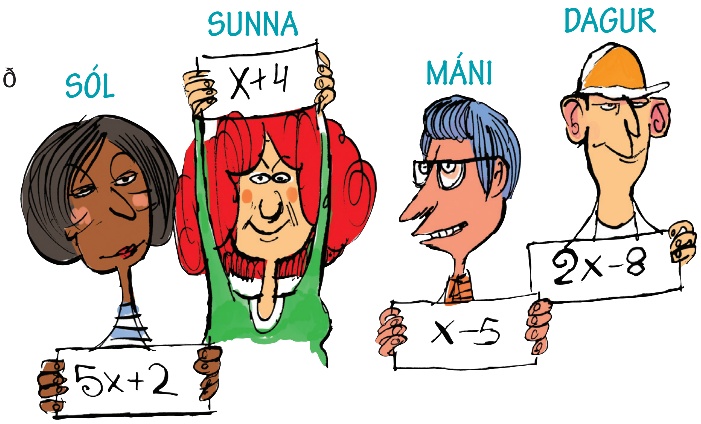
a $5(x + 3) = 25$
b $6(3y + 5) = 30$
c $6(7x - 1) = 36$
d $3(2b - 4) = 36$
e $\frac{1}{2}(x + 5) = 10$
f $2(3y - 2) = 20$
g $4(2a - 1) = 40$
h $-2(x + 4) = 10$
i $9x - 5 = 2(3x + 7)$
j $4(y - 2) = 3(2 - y)$
k $2(4x - 3) = 3x + 4$
l $3(6x - 5) = 5(x + 10)$

24 a Friðrik á tvo kexpakka og tvo poka með átta kexkökum í hvorum. Kristín á jafn margar kexkökur. Hún átti þrjá kexpakka en er búin að borða fjórar kexkökur. Hve margar kexkökur eru í einum pakka?

b Jónína á kassa sem í eru fjórir kexpakkar og einn poka með fimm kexkökum. Freyja á þrjá kexpakka og fimm poka með fjórum kexkökum í hverjum. Freyja á fimm kexkökum fleiri en Jónína. Hve margar kexkökur eru í hverjum kexpakka?

25 a Sól og Dagur athuga hvort þau geta fundið gildi fyrir x sem gerir stæðurnar þeirra jafngildar. Þau setja upp jöfnuna $5x + 2 = 2x - 8$. Leystu jöfnuna og finndu það gildi fyrir x sem gerir stæðurnar jafngildar.

b Sól og Sunna ákveða að reyna hvort þær geta gert sínar stæður jafngildar. Settu upp jöfnu og reyndu að leysa hana.



c Tvær af stæðum krakkanna geta aldrei orðið jafngildar. Gerðu grein fyrir hvaða stæður það eru og hvers vegna þær geta ekki orðið jafngildar.

26 Leystu jöfnurnar.

a $2(3x - 5) = 7x - 34$

b $5(2x + 7) = 3(4x - 5)$

c $2(1 - 7x) + 3x = 7 - (x - 5)$

d $4(1 - 3y) = -7(y + 2) - 2$

e $1 + (2x - 3) = x + 1$

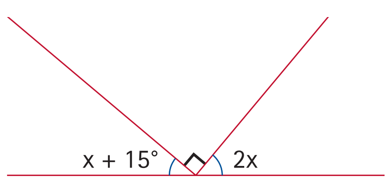
f $1 - 3(1 - 2t) = 0$

g $5a - 2(a - 4) + 1 = 0$

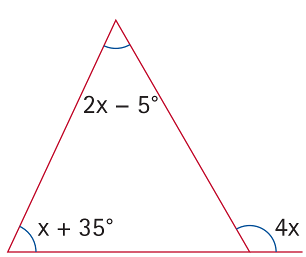
h $2(1 - 2y) - 3(2y - 3) = 1$

27 Finndu gildi x. Lýstu hvernig þú ferð að.

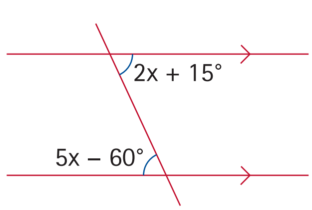
a



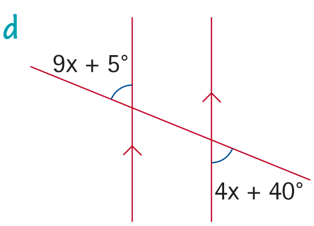
b



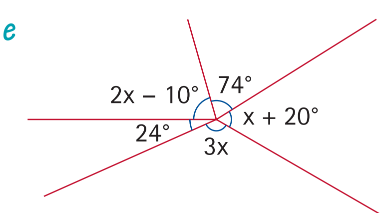
c



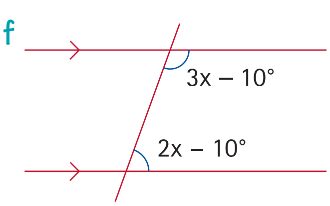
d



e



f



28 Finndu lægsta samnefnara þessara brota og leggðu þau svo saman.

a $\frac{x}{3}$ og $\frac{x}{2}$ b $\frac{3}{x}$ og $\frac{2}{y}$ c $\frac{3}{xy}$ og $\frac{2}{x}$ d $\frac{2}{4y}$ og $\frac{5}{2y}$

29 Reiknaðu.

a $\frac{2x}{3} + \frac{x}{3}$ c $\frac{2a}{5} - \frac{a}{3}$ e $\frac{x+2}{3} + \frac{2x}{2}$ g $\frac{a+2}{2b} - \frac{a}{b}$

b $\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ d $\frac{x}{4} + \frac{3x}{3}$ f $\frac{b-1}{b} + \frac{2b}{ab}$ h $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x}$

Margar leiðir má fara við að leysa jöfnur og gott er að hafa vald á nokkrum leiðum. Þá má velja heppilega leið hverju sinni. Þegar leysa á jöfnur með almennum brotum er gott að byrja á að finna samnefnara og margfalda síðan alla liði jöfnunnar með honum og stytta nefnarana út.
Dæmi:

$\frac{x}{2} - 9 = \frac{x}{8}$ *Minnsti samnefnari er 8.*

$8 \cdot \frac{x}{2} - 8 \cdot 9 = 8 \cdot \frac{x}{8}$ *Allir liðir jöfnunnar margfaldaðir með 8.*

$4x - 72 = x$ *Nefnarar styttast út.*

$3x = 72$

$x = 24$

Nefnari getur aldrei verið núll.
Það kemur fyrir í jöfnum með almennum brotum að gildið sem fundið er fyrir x sé ekki lausn jöfnu.
Dæmi:

$x = 0$ er ekki lausn ef í jöfnunni er liðurinn $\frac{5}{x}$

$x = 2$ er ekki lausn ef í jöfnunni er liðurinn $\frac{5}{x-2}$

30 Leystu þessar jöfnur.

a $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 2$ e $\frac{2x}{5} - \frac{x}{4} = 3$

b $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} = 9$ f $\frac{5a}{8} + \frac{a}{2} = 5$

c $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = 3$ g $1 + \frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{2}$

d $\frac{y}{5} + \frac{2y}{3} = 13$ h $1 - \frac{3(1-2t)}{4} = 0$

31 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{5}{x} - \frac{2}{x} = 2$ c $\frac{7}{2y} - \frac{5}{12} = \frac{1}{y}$ e $\frac{3}{2x} + \frac{3}{3x} = \frac{5}{2}$

b $\frac{1}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{8}{9}$ d $\frac{3}{2x} - \frac{3}{2} = -4$ f $\frac{3}{4y} + \frac{5}{8y} = \frac{1}{8}$

32 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25$

b $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 7$

c $\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{4} = 4$

d $\frac{x+5}{2} + \frac{x+2}{5} = 5$

e $\frac{x+5}{6} + \frac{x-2}{5} = 3$

f $\frac{x-2}{3} + \frac{x+4}{6} = 7$

33 Jöfnur með brotum koma oft fyrir þegar skipta á eignum. Ólöf, Hanna og Jóhanna fengu arf eftir gamlan frænda sinn. Í erfðaskránni stóð: Ólöf fær helming eigna minna, Hanna fær þriðjung og Jóhanna fær afganginn, 2,5 milljónir. Settu upp jöfnu og notaðu hana til að finna upphæð arfsins.

34 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{x+2}{5} = \frac{x-1}{4}$

b $\frac{2x+5}{3} = \frac{3x+4}{4}$

c $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

d $\frac{4}{x-1} = \frac{8}{x+3}$

e $\frac{x-5}{x-4} + \frac{x-3}{x-4} = 1$

f $\frac{8x-2}{4x-1} = \frac{4x+1}{2x-1}$

35 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{x}{5} \cdot \frac{3}{4} = 9$

b $\frac{3x}{8} \cdot \frac{2}{3} = 4$

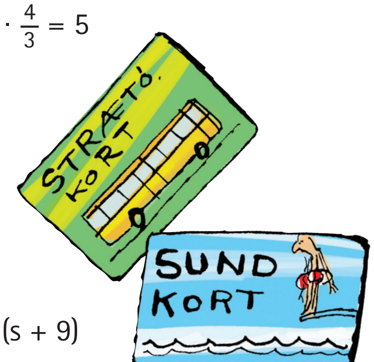
c $\frac{x}{4} : \frac{x}{2} = 2x$

d $\frac{5x}{2} : \frac{15}{8} = 12$

e $\frac{2(4x+7)}{4} : \frac{1}{2} = 23$

f $\frac{8x}{2(x+3)} \cdot \frac{4}{3} = 5$

36 Settu upp jöfnu og leystu dæmið. Rannveig notaði $\frac{1}{3}$ af peningum sínum í sundkort og $\frac{1}{4}$ af þeim í strætókort. Þá átti hún 5000 krónur eftir. Hve mikið átti hún í upphafi?



37 Breyttu margfeldi í liðastærð.

a $(t + 5)(t + 3)$

b $(k - 4)(k - 2)$

c $(2 + r)(r + 6)$

d $(m + 1)(3 - m)$

e $(h - 3)(h - 4)$

f $(4 - n)(5 - n)$

g $(3s + 4)(s + 9)$

h $(5f - 4)(2f + 6)$

i $(d + 3)(4d - 5)$

38 Paraðu saman margfeldi og liðastærð.

a $(x + 4)(x + 3)$

b $(y + 5)(y - 2)$

c $(x - 2)(x + 3)$

d $(y + 1)(y + 4)$

① $y^2 + 5y + 4$

② $x^2 + 7x + 12$

③ $x^2 + x - 6$

④ $y^2 + 3y - 10$

Ef margfaldaðar eru saman liðastærðirnar $(x + 2)(x + 4)$ fæst liðastærðin $x^2 + 6x + 8$.

Liðurinn x^2 kemur fram þegar margfaldað er $x \cdot x$.

Liðurinn $+ 6x$ kemur þegar margfaldað er $2 \cdot x + 4 \cdot x$.

Stuðullinn við x er +6.

Liðurinn +8 kemur fram þegar margfaldað er $2 \cdot 4$.

Liðastærðina $x^2 + 8x + 12$ má þátta og skrá sem margfeldi tveggja liðastærða.
Aðeins er um eitt x^2 að ræða svo fremst í hvorum sviga verður x.
Aftasti liðurinn er 12. Hann er margfeldi tveggja talna sem hafa summuna 8.
Margfeldið 12 má fá með:

$1 \cdot 12$	summan er 13
$2 \cdot 6$	summan er 8
$3 \cdot 4$	summan er 7

Liðastærðina $x^2 + 8x + 12$ má því þátta sem $(x + 2)(x + 6)$.

39 Búðu til liðastærð af gerðinni $x^2 - ax + b$ og þáttaðu hana með því að skrá hana sem margfeldi tveggja liðastærða. Fremst í hvorri liðastærð kemur x. Þar sem stuðullinn við x er neikvæður og aftasti liðurinn jákvæður hlýtur að vera frádráttur í báðum liðastærðunum. Einnig þarf að finna tvær tölur til að setja sem seinni lið í svigana. Summa þeirra er a og margfeldi þeirra er b.

40 Búðu til liðastærð af gerðinni $x^2 - ax - b$ og þáttaðu hana með því að skrá hana sem margfeldi tveggja liðastærða. Fremst í hvorri kemur x. Þar sem stuðullinn við x og aftasti liður eru báðir neikvæðir hlýtur að vera frádráttur í annarri liðastærðinni og samlagning í hinni. Einnig þarf að finna tvær tölur til að setja sem seinni lið. Summa þeirra er a og margfeldi þeirra er b.

41 Búðu til liðastærð af gerðinni $x^2 + ax - b$ og þáttaðu hana með því að skrá hana sem margfeldi tveggja liðastærða. Notfærðu þér að stuðullinn við x er jákvæður og aftasti liðurinn er neikvæður, því hlýtur að vera frádráttur í annarri liðastærðinni og samlagning í hinni. Þú veist líka að summa talnanna tveggja sem eru seinni liður sviganna er a og margfeldi þeirra er b.

42 Breyttu liðastærð í margfeldi.

a $t^2 + 5t + 6$
b $s^2 - 9s - 10$
c $u^2 + 8u - 48$
d $v^2 - 6v - 27$
e $x^2 - 7x - 18$
f $y^2 - 16y + 64$
g $t^2 - 10t + 24$
h $t^2 - 2t - 24$
i $y^2 - 3y - 18$

43 Skoðaðu einkenni liðastærðarinnar sem kemur fram þegar summa tveggja liða er hafin í annað veldi.

a $(x + 3)^2$ **b** $(4 + x)^2$ **c** $(x + 8)^2$ **d** $(x + 5)^2$

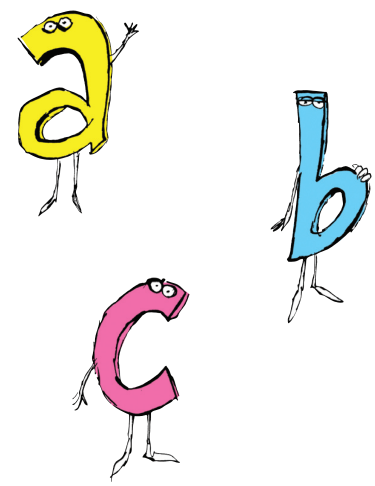
e Hvert er sambandið á milli stuðulsins við x og aftasta liðarins?

44 Skoðaðu einkenni liðastærðarinnar sem kemur fram þegar mismunur tveggja liða er hafinn í annað veldi.

a $(x - 5)^2$ **b** $(3 - x)^2$ **c** $(x - 4)^2$ **d** $(x - 10)^2$

e Hvert er sambandið á milli stuðulsins við x og aftasta liðarins?

45 Lýstu liðastærðinni sem kemur fram þegar margfölduð er saman summa og mismunur tveggja liða stærða. $(a + b)(a - b)$.



46 Summa hvaða tveggja liða hefur verið hafin í annað veldi?

a $x^2 + 4x + 4$ **b** $x^2 + 12x + 36$ **c** $x^2 + 24x + 144$

47 Mismunur hvaða tveggja liða hefur verið hafinn í annað veldi?

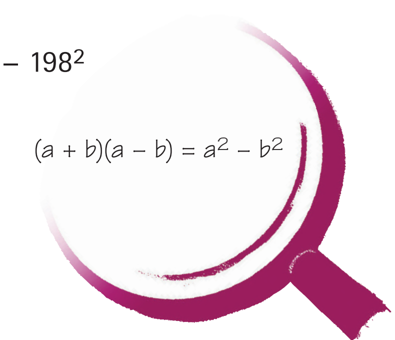
a $x^2 - 4x + 4$ **b** $49 - 14x + x^2$ **c** $x^2 - 20x + 100$

48 Við margföldun summu og mismunar tveggja stærða kemur fram liðastærð. Hvaða stærðir hafa verið margfaldaðar saman?

a $x^2 - 81$ **b** $64 - x^2$ **c** $4x^2 - 25$

49 Reiknaðu án þess að nota vasareikni.

a $50^2 - 48^2 = (50 - 48)(50 + 48)$ **b** $100^2 - 99^2$ **c** $200^2 - 198^2$



50 Breyttu liðastærð í margfeldi.

a $c^2 + 6c + 5$ **d** $r^2 + 15r + 50$ **g** $d^2 - 12d + 36$
b $c^2 - 9c - 22$ **e** $v^2 + 14v + 49$ **h** $t^2 - 121$
c $b^2 + 9b + 20$ **f** $k^2 + 7k + 6$ **i** $h^2 - 17h + 30$

51 Liðastærð er breytt í margfeldi með því að taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga eða með því að breyta henni í margfeldi tveggja liðastærða. Stundum er þáttað með því að gera hvoru tveggja. Þáttaðu eins og hægt er.

a $3x^2 + 18x + 15$ **c** $4k^2 - 32k + 60$ **e** $5x^2 - 30x + 25$
b $2y^2 + 36y + 162$ **d** $4m^2 - 324$ **f** $12a^2 - 24a - 288$

Þegar einfalda á stæður og leysa jöfnur getur komið sér vel að vera leikinn í að þátta og margfalda saman liðastærðir.

52 Einfaldaðu stæðurnar.

a $\frac{x+2}{x^2-4}$ b $\frac{x^2-9}{x+3}$ c $\frac{x^2-16}{4x+16}$ d $\frac{x^2-5x+4}{x-4}$

Þegar leysa á flóknar jöfnur með brotum er gott að byrja á að margfalda í gegnum þær með samnefnaranum. Gott getur verið að huga að hvernig þátta má samnefnarann.

$$\frac{7x+7}{2x-16} - 4 = \frac{3x-3}{x-8} \qquad \textit{Samnefnarinn er } 2(x-8)$$

$$\frac{7x+7}{2(x-8)} - 4 = \frac{3x-3}{x-8}$$

$$\frac{2(x-8)(7x+7)}{2(x-8)} - 4 \cdot 2(x-8) = \frac{2(x-8)(3x-3)}{x-8}$$

Nú má auðveldlega leysa jöfnuna.

$$7x + 7 - 8(x-8) = 2(3x-3)$$
$$7x + 7 - 8x + 64 = 6x - 6$$
$$-x + 71 = 6x - 6$$
$$-7x = -77$$
$$x = 11$$

53 Leystu jöfnurnar. Til að einfalda jöfnurnar er gott að margfalda báðar hliðar með samnefnaranum.

a $\frac{2}{3x+1} = \frac{3}{2x+1}$ c $\frac{5}{x+1} = \frac{2}{x+4}$ e $-2 = \frac{6}{1-x}$

b $\frac{y}{y+1} = \frac{2}{3}$ d $\frac{3}{y+1} = \frac{2}{y-1}$ f $\frac{a+2}{a+1} = \frac{a}{a-2}$

54 Leystu þessar jöfnur.

a $\frac{x}{2x-8} + \frac{16}{x^2-16} = \frac{1}{2}$ c $\frac{2y}{y^2-9} = \frac{3}{y-3}$ e $\frac{8}{x-3} - \frac{10}{x+3} = \frac{40}{x^2-9}$

b $\frac{3x}{5x+5} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{3}{5}$ d $3 - \frac{x+9}{2x-8} = \frac{x-3}{x-4}$ f $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16}$

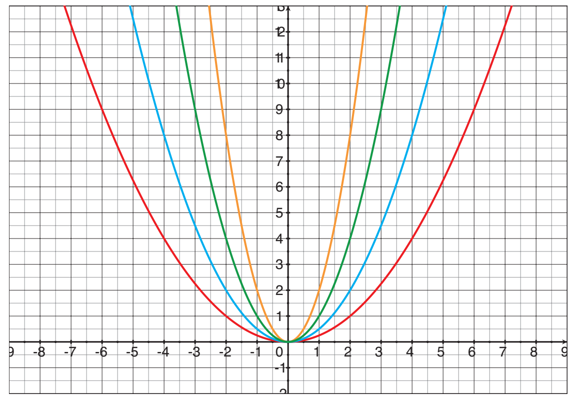
55 Tengdu saman jöfnu og graf.

a $y = x^2$

b $y = \frac{1}{2}x^2$

c $y = \frac{1}{4}x^2$

d $y = 2x^2$



Almennt er miðað við að grunnmengi sé rauntölur nema annað sé tekið fram.

HÓPVERKEFNI

56 Notið tölvuforrit eða grafískan vasareikni til að teikna gröf þessara jafna. Finnið botnpunkta grafanna og greinið frá hvort þau skera y-ásinn og þá í hvaða punkti. Kannið einnig hvort gröfin skera eða snerta x-ásinn.

Gröf annars stigs jafna kallast fleygbogar.

a $y = x^2$

b $y = x^2 + 2$

c $y = x^2 - 2$

d $y = (x + 2)^2$

e $y = (x - 2)^2$

f $y = (x + 3)^2$

g $y = (x - 3)^2$

h $y = (x + 2)^2 + 3$

i $y = (x - 2)^2 + 3$

j $y = (x + 2)^2 - 3$

k $y = (x - 2)^2 - 3$

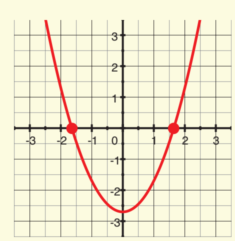
l $y = (x + 3)^2 + 2$

m $y = (x - 3)^2 - 2$

n $y = (x + 3)^2 + 2$

o $y = (x - 3)^2 - 2$

Þegar fleygbogi sker x-ásinn er y = 0. Núllstöðvar jöfnu eru x-gildin þegar fleygboginn sker y-ásinn, þ.e. þegar y = 0. Eins og þú hefur séð geta núllstöðvar verið ein, en þá snertir fleygboginn x-ásinn í einum punkti, tvær eða engin.



57 Reyndu að finna núllstöðvar þessara jafna með því að teikna gröf þeirra eða með því að prófa að setja tölurnar frá –7 til 7 inn í jöfnurnar.

a $x^2 + 6x = 0$

b $x^2 - 5x + 4 = 0$

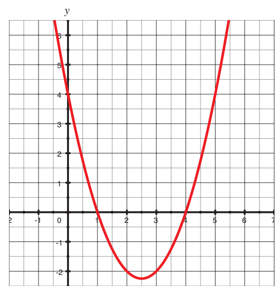
c $x^2 + 5x = 0$

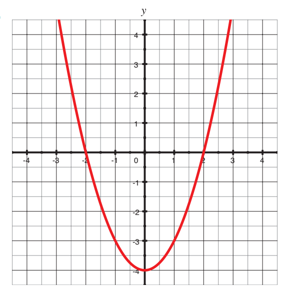
d $x^2 - 7x + 10 = 0$

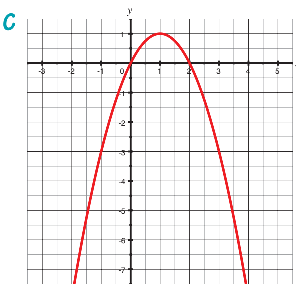
e $x^2 - 2x - 24 = 0$

f $x^2 + 2x - 35 = 0$

58 Með því að teikna graf jöfnunnar má oft lesa lausnirnar af grafinu með nokkurri nákvæmni. Finndu núllstöðvarnar.

a 

b 

c 

Ef margfeldi tveggja þátta er núll hlýtur að minnsta kosti annar þátturinn að vera núll.

59 Í sumum tilvikum má finna lausnir jöfnu með því að þátta eða með því að finna ferningsrót. Leystu jöfnurnar.

a $x^2 - 64 = 0$
b $x^2 - 49 = 0$
c $x^2 - 225 = 0$
d $x^2 - 144 = 0$
e $x^2 - 2{,}25 = 0$
f $x^2 - 0{,}49 = 0$
g $x^2 - 3x = 0$
h $x^2 + 2x = 0$
i $x^2 - 6x = 0$
j $x^2 + 12x = 0$
k $x^2 - 25x = 0$
l $x^2 + 25x = 0$

Lausnina má einnig skrá sem $x = \pm\sqrt{7}$.

60 Leystu þessar jöfnur með því að finna ferningsrót. Skráðu svarið með einum aukastaf ef þú notar vasareikni.

a $x^2 - 7 = 0$
b $x^2 - 15 = 0$
c $x^2 - 6 = 0$
d $x^2 - 24 = 0$
e $x^2 - 30 = 0$
f $x^2 - 125e = 0$

61 Leystu þessar annars stigs jöfnur með þáttun.

a $x^2 + 6x - 27 = 0$
b $x^2 - 16x + 63 = 0$
c $x^2 - 6x + 8 = 0$
d $x^2 + 3x - 40 = 0$
e $x^2 + 10x + 9 = 0$
f $x^2 + 6x + 5 = 0$
g $x^2 - 8x + 16 = 0$
h $x^2 - 8x + 12 = 0$
i $x^2 - 4x - 12 = 0$
j $x^2 - 2x - 35 = 0$
k $x^2 + 2x - 24 = 0$
l $x^2 + 3x - 4 = 0$

Ekki er alltaf jafn auðvelt að þátta stæður. Ef um er að ræða stæður þar sem aðeins er eitt x^2 má nota aðferð sem kölluð er að fylla í ferninginn. Hún byggist á því að auðvelt er að þátta stæður sem eru svokallaðar ferningsstærðir.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)(x + a) = (x + a)^2$$

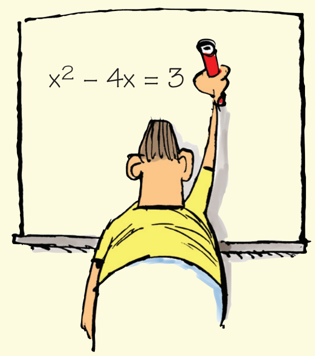
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)(x - a) = (x - a)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x + 3)^2$$

Við viljum leysa jöfnuna $x^2 - 4x - 3 = 0$.

Umrita má jöfnuna með því að bæta 3 við báðar hliðar hennar.



Við viljum gera vinstri hlið jöfnunnar að ferningsstærð. Við þurfum að finna tölu sem bæta má við $x^2 - 4x$ þannig að skrá megi stærðina sem $(x - a)^2$.

Af dæmunum hér fyrir ofan má sjá að stuðullinn við x er $2 \cdot a$ og því má finna a með því að deila í stuðulinn með tveimur. Liðurinn sem bæta á við er þá sú tala $(\frac{a}{2})$ í öðru veldi.

$$x^2 - 4x + (-\frac{4}{2})^2 = 3 + (-\frac{4}{2})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3 + 4$$

Nú má þátta vinstri hliðina.

$$x^2 - 4x + 4 = 7$$

$$(x - 2)^2 = 7$$

Finna má lausnina með því að finna ferningsrót af báðum hliðum jöfnunnar.

$$x - 2 = \pm\sqrt{7}$$

$x = 2 + \sqrt{7}$ og $x = 2 - \sqrt{7}$

62 Leystu þessar jöfnur með því að fylla í ferninginn.

a $x^2 + 8x + 14 = 0$

b $x^2 + 2x - 9 = 0$

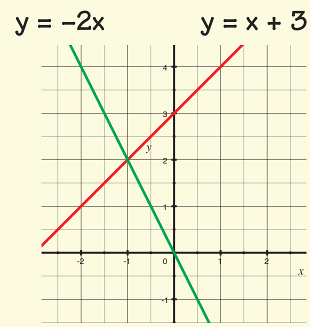
c $x^2 - 12x - 15 = 0$

d $x^2 - 2x - 5 = 0$

e $x^2 + 10x + 3 = 0$

f $x^2 + 5x - 20 = 0$

Ýmsar leiðir má fara við að leysa saman tvær fyrsta stigs jöfnur með tveimur óþekktum stærðum. Markmiðið er þá að finna hvaða gildi óþekktu stærðanna eru lausn fyrir báðar jöfnurnar. Í kaflanum Algebra og jöfnur fyrr í þessari bók er fjallað um þrjár leiðir, þ.e. með því að teikna gröf þeirra, með innsetningu og með samlagningu. Þessar leiðir má nýta eftir því sem hentar hverju sinni.



Lausn tveggja fyrsta stigs jafna með tveimur óþekktum stærðum má lesa af skurðpunkti grafa þeirra.

Lausn tveggja fyrsta stigs jafna með tveimur óþekktum stærðum má finna með innsetningu.

Dæmi: $2y + 4x = 20$

$y + x = 6$ *jafnan er umrituð* $y = 6 - x$

í stað y kemur $6 - x$

$$
\begin{aligned}
2(6 - x) + 4x &= 20\\
12 - 2x + 4x &= 20\\
12 + 2x &= 20\\
2x &= 8\\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Þá hlýtur y að taka gildið 2 því ef x gildið er sett inn í jöfnuna $y = 6 - x$, $y = 6 - 4$, $y = 2$

Lausn tveggja fyrsta stigs jafna með tveimur óþekktum stærðum má finna með samlagningu. Lengja má aðra eða báðar jöfnurnar til þess að breyta stuðlum og/eða formerkjum þannig að önnur óþekkta stærðin hverfi við samlagningu jafnanna.

Dæmi: $3x + y = 15$

$5x + 2y = 26$

Margfaldað er í gegnum jöfnuna $3x + y = 15$ með -2 til að fá hentugan stuðul á y.
Jafnan verður þá: $-6x - 2y = -30$.

$$
\begin{aligned}
-6x - 2y &= -30\\
+\quad 5x + 2y &= 26\\
\hline
-x &= -4
\end{aligned}
$$

$x = 4$ og $y = 3$ því ef x gildið er sett inn í aðra jöfnuna, t.d. $3 \cdot 4 + y = 15$ kemur fram að $y = 3$.

63 Leystu jöfnurnar saman á þrjá ólíka vegu. Greindu frá, í hverju dæmi, hvaða aðferð þér fannst henta best.

a $3x + 2y = 19$, $x + 3y = 25$

b $6y - x = -3$, $4y + x = 23$

c $6x + 5y = 37$, $y = 2x + 1$

d $x = 3y + 2$, $x + 5y = 26$

64 Leystu jöfnurnar saman með þeirri aðferð sem þér finnst henta best.

a $x + 2y = 22$
$4x + 3y = 53$

b $3x - 2y = -35$
$7x + 4y = 44$

c $4x - 8y = 4$
$5x + 2y = 17$

d $x = y + 5$
$4x - 5y = 15$

Leystu dæmin með því að setja upp tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum og leysa þær saman.

65 Ingibjörg á 2100 kr.
Hún á nokkra 50 króna peninga
og nokkra 100 króna peninga.
Peningarnir eru 32.
Hve marga peninga á hún af hvorri gerð?

66 Adda á 25 000 kr. í þúsund og fimm hundruð króna seðlum.
Seðlarnir eru 31. Hve marga seðla á hún af hvorri gerð?

67 Kjartan á 150 000 kr. í fimm þúsund og fimm hundruð króna seðlum. Fjöldi fimm hundruð króna seðlanna er tvöfaldur fjöldi fimm þúsund króna seðlanna. Hve marga seðla á hann af hvorri gerð?

68 Anna og Hulda safna perlum. Anna segir við Huldu: Ef þú gefur mér fimm perlur mun ég eiga tvisvar sinnum þann fjölda af perlum sem þú átt. Hulda segir þá: Ef þú gæfir mér fjórar perlur ættum við jafn margar perlur. Hve margar perlur eiga þær samtals?

69 Ágúst og Bergrós safna frímerkjum. Ágúst segir við Bergrósu: Ef þú gefur mér tíu frímerki mun ég eiga þrefaldan fjölda frímerkja miðað við þig. Bergrós segir: Ef þú gæfir mér 100 frímerki ættum við sama fjölda. Hve mörg frímerki eiga þau samtals?

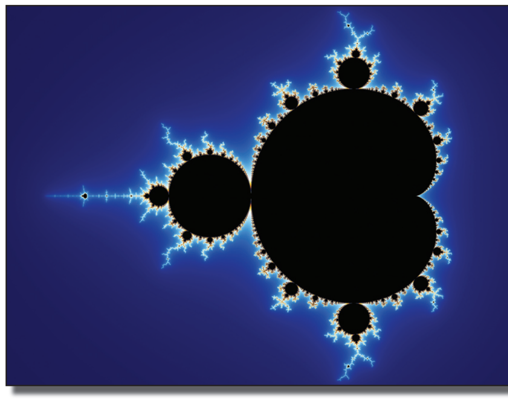
70 Úr hópi stelpna og stráka fara 15 stelpur. Þá er fjöldi stráka tvisvar sinnum fjöldi stelpna. Næst fara 45 strákar og er þá fjöldi stelpna fimm sinnum fjöldi stráka. Hve margir voru af hvoru kyni í hópnum í upphafi?

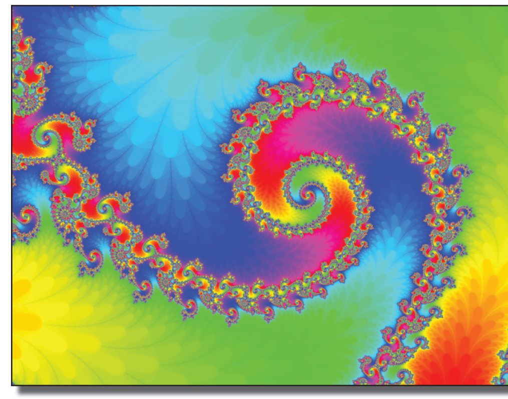
71 Ferningur og jafnhliða þríhyrningur hafa sama ummál. Hlið þríhyrningsins er 6 cm lengri en hlið ferningsins. Hverjar eru hliðarlengdir hyrninganna?

72 Reglulegur sexhyrningur og ferningur hafa sama ummál. Hlið sexhyrningsins er 3 cm styttri en hlið ferningins. Hverjar eru hliðarlengdir hyrninganna?

Brotalar

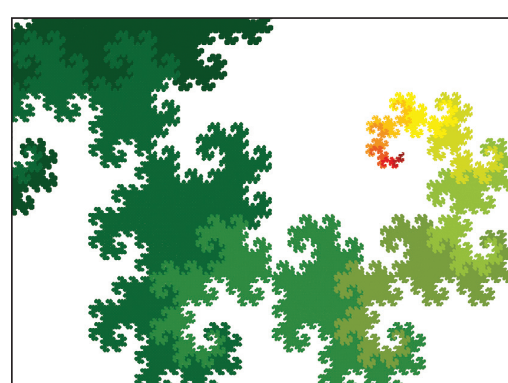
Þú hefur líkast til einhvern tímann rekist á myndir eins og þessar.





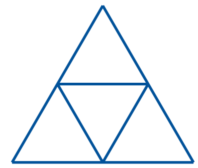
Er þetta eitthvað annað en bara sérkennilega litríkar myndir? Já, þetta eru brotalar. Brotalar eru stærðfræðilegt fyrirbrigði sem fjölmargir stærðfræðingar hafa fengist við að rannsaka á síðustu 100 árum. Einn af þeim var Benoit Mandelbrot (1924) og er brotalinn til vinstri kenndur við hann. Mandelbrot bjó til hugtakið *fractal* en orðið brotali er þýðing á því hugtaki. Hann sýndi fram á að brotalar birtast víða, bæði í stærðfræðinni og í náttúrunni, eins og í strandlengjum, skýjabólstrum eða trjágreinum. Það liggja flóknir útreikningar að baki þess að búa til brotala eins og þeirra sem eru á þessum myndum og eru þeir teiknaðir með tölvutækni. Þrátt fyrir að erfitt sé að skilja útreikningana er hægt að skilja þær grunnhugmyndir sem gerð brotala byggist á og suma þeirra er nokkuð einfalt að búa til.

Ímyndaðu þér að þú ætlir að mæla hluta af strandlengju með metrastiku. Strandlengjan hlykkjast út og inn og þú nærð ekki að mæla hana af mikilli nákvæmni. Ímyndaðu þér svo að þú farir næsta dag og mælir sama hluta af strandlengjunni með mælistiku sem er 10 cm. Strandlengjan virðist lengri og mælingin verður nákvæmari. Þriðja daginn mælir þú með mælistiku sem er 1 cm. Standlengjan mælist þá lengri og mælingin er enn nákvæmari. Stöðugt má gera betur og hugsa sér sífellt nákvæmari mælingu og strandlengjan virðist óendanlega löng.
Á þessari hugmynd byggjast brotalar.



1 Sierpiński-þríhyrningurinn er mjög þekktur brotali sem auðvelt er að búa til.

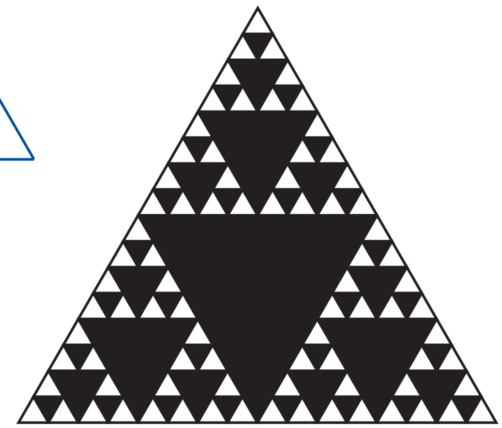
a Teiknaðu eins stóran jafnhliða þríhyrning og hægt er á A3 eða A2 pappír.



b Finndu miðpunkta hliðanna og tengdu þá saman eins og myndin sýnir.

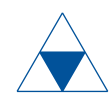
c Litaðu þríhyrninginn sem er í miðjunni.

d Haltu áfram á sama hátt, helmingaðu hliðarlengdir allra ólituðu þríhyrninganna og tengdu miðpunktana saman. Litaðu þríhyrninginn í miðjunni eins og áður og haltu áfram þar til þú ert kominn með það litla þríhyrninga að þú treystir þér ekki lengra.

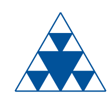


2 Farðu aftur yfir þau þrep sem þú fórst í gegnum til þess að búa til Sierpiński-brotalann.

a Skráðu hjá þér hve stór hluti þríhyrningsins er ekki litaður eftir fyrsta skref.



b Skráðu síðan hve stór hluti er ekki litaður eftir skref 2.



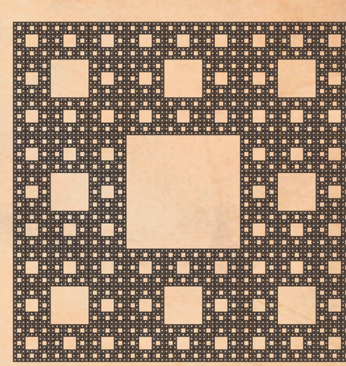
c Haltu áfram og skráðu stærð ólitaða hlutans eftir hvert skref.

d Hver verður stærð ólitaða hlutans eftir 8 skref? Reyndu að greina reglu þannig að þú getir á einfaldan hátt skráð hve stór hluti er ekki litaður eftir n skref.

Hægt er að halda áfram óendanlega lengi á þennan hátt og hugsa sér að ólitaði hlutinn verði sífellt minni og sá hluti sem er litaður verði sífellt stærri án þess þó að nokkurn tímann komi til þess að ólitaði hlutinn verði núll.

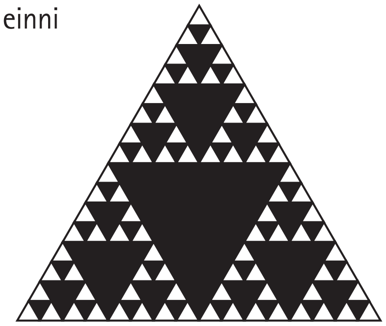
Reyndu að koma auga á fleiri áhugaverð mynstur í Sierpiński-þríhyrningnum og lýstu þeim með eigin orðum.

Wacław Franciszek Sierpiński *(1882–1969) var pólskur stærðfræðingur. Sierpiński-þríhyrningurinn er kenndur við hann en einnig eru til Sierpiński-teppi og Sierpiński-ferlar. Auk rannsókna á brotölum fékkst hann einnig við rannsóknir á fleiri sviðum svo sem mengjafræði. Hann birti yfir 700 greinar um rannsóknir sínar og skrifaði 50 bækur.*



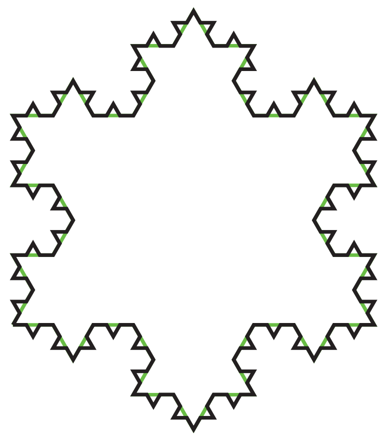
Eitt af því sem einkennir brotala er að þeir eru gerðir úr einni grunneiningu sem endurtekur sig í sífellt smærri mynd.

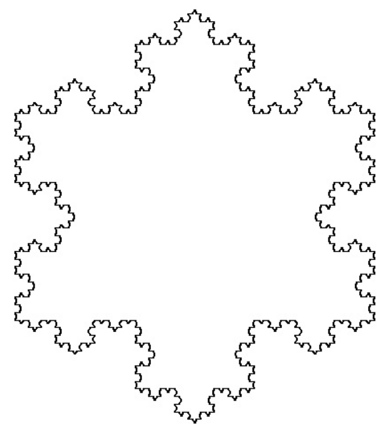
Þú getur séð þetta ef þú skoðar myndina af Sierpiński-þríhyrningnum.



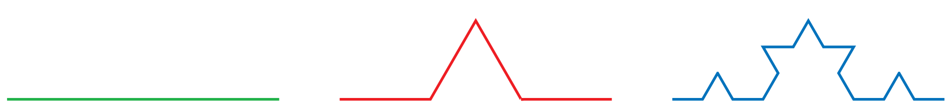
3 Hvernig myndir þú lýsa grunneiningunni í Sierpiński-þríhyrningnum?

4 Koch-snjóflygsan er þekktur brotali.



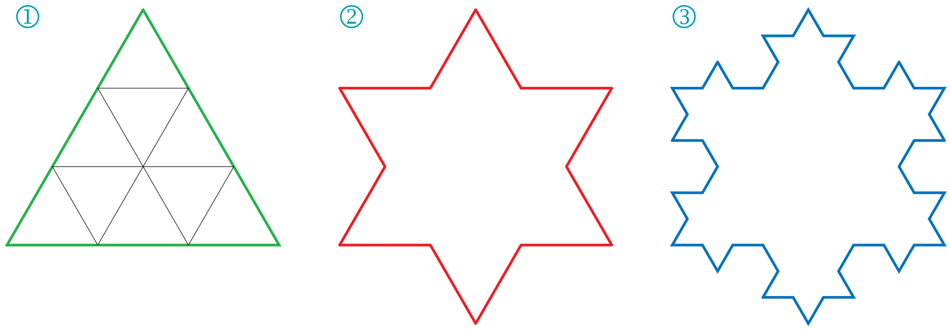


- Teiknaðu jafnhliða þríhyrning. Notaðu þríhyrningarúðunet til stuðnings. Gott er að hafa hliðarlengdir margfeldi af 3.
- Skiptu hverri hlið í þrjá jafna hluta.



- Teiknaðu jafnhliða þríhyrning út frá miðju hverrar hliðar með hliðarlengdir sem eru $\frac{1}{3}$ af hliðarlengd upphaflega þríhyrningsins.
- Þurrkaðu út grunnlínu litla þríhyrningsins.
- Hvaða form færðu?
- Haltu áfram á sama hátt með því að bæta nýjum þríhyrningum, en minni, við hverja hlið nýja formsins.
- Nú hefur þú búið til Koch-snjóflygsu.

5 Gerðu athugun á ummáli Koch-snjóflygsunnar. Byrjaðu með jafnhliða þríhyrning sem hefur ummálið 9 einingar.



a Hvert verður ummál myndar númer 2? En myndar númer 3?

b Kemurðu auga á reglu?

c Hvað er ummál myndar númer 2 mörgum sinnum ummál myndar númer 1?

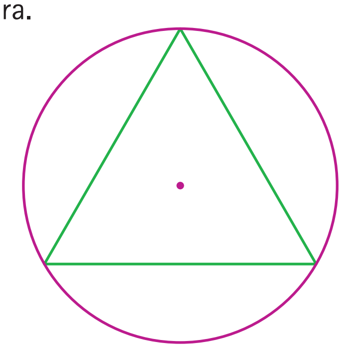
d Hvað er ummál myndar númer 3 mörgum sinnum ummál myndar númer 2?

e Hvert telur þú að verði ummál myndar númer 4?

f Hvað þarftu að breyta hliðum þríhyrningsins mörgum sinnum til að fá ummál sem er um það bil 90 einingar?

6 Ef haldið er áfram á þennan hátt verður ummálið sífellt lengra. En hvað gerist með flatarmálið?

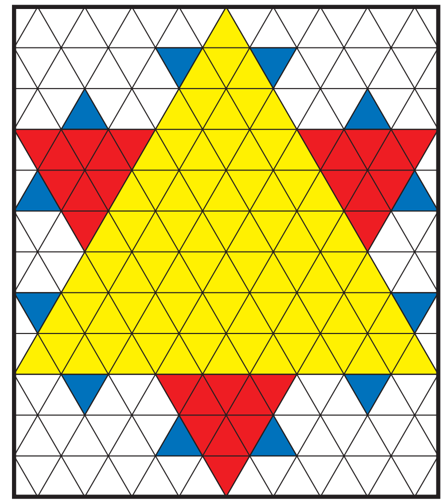
- Teiknaðu umritaðan hring upphaflega þríhyrningsins.
- Byrjaðu á því að teikna miðþveril á allar hliðar hans.
- Þar sem miðþverlarnir skerast er miðja umritaðs hrings.
- Hvert er samhengið á milli flatarmáls þessa hrings og flatarmáls snjóflygsunnar?



Niels Fabian Helge von Koch *(1870–1929) var sænskur stærðfræðingur. Koch-snjóflygsan er kennd við hann og talið er að hún hafi verið einn fyrsti brotalinn sem lýst var nákvæmlega á stærðfræðilegan hátt, það gerði Koch árið 1904. Annað meginframlag von Koch var á sviði talnafræðinnar en þar fékkst hann meðal annars við rannsóknir á frumtölum.*

7 Gerðu athugun á flatarmáli Koch-snjóflygsunnar.

Hér er upphaflegi þríhyrningurinn gulur. Það sem bætist við eftir fyrstu breytingu er rautt og það sem bætist við eftir þá aðra er blátt.



Búðu til töflu eins og þessa og skráðu flatarmálið eftir hverja breytingu.

Upphaflegi þríhyrningurinn er myndaður úr 81 litlum jafnhliða þríhyrningum.

Mynd	Flatarmál hvers þríhyrnings sem bætist við	Fjöldi þríhyrninga sem bætast við	Flatarmál sem bætist við	Heildar flatarmál
Upphaflegur þríhyrningur				81
Mynd 1	9	3		
Mynd 2	1	12		
Mynd 3	$\frac{1}{9}$			
Mynd 4				
Mynd 5				

a Hvað er flatarmál hvers þríhyrnings sem bætist við stór hluti af flatarmáli næstu myndar á undan?

b Haltu áfram með töfluna og reyndu að finna heildarflatarmálið eftir hverja breytingu.

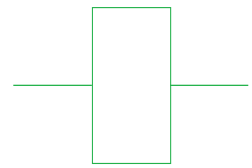
c Hvert verður flatarmál myndar nr. 6? Haltu áfram með töfluna og finndu flatarmál myndar nr. 10.

d Hvert er samband flatarmálsins og flatarmáls umritaðs hrings upphaflega þríhyrningsins?

Brotalar byggjast á því að eitthvert stef eða aðgerð er endurtekin aftur og aftur. Sérhvert nýtt stef er einslaga því fyrra en bara smærra. Brotalar eiga það sameiginlegt að hægt er að hugsa sér að halda áfram óendanlega lengi þó ekki sé hægt að framkvæma aðgerðina í raun og veru.

HÓPVERKEFNI

Hér eru hugmyndir að nokkrum gerðum brotala sem auðvelt er að búa til.
Veljið ykkur eitt af verkefnunum til að vinna í litlum hópi.
Síðasta verkefnið er tilvalið bekkjarverkefni.



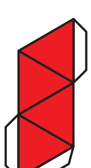
8
- Teiknið 18 cm strik á miðju rúðustrikaðs A4 blaðs.
- Skiptið því í þrjá hluta.
- Teiknið rétthyrning með hliðarlengdir 12 cm og 6 cm út frá miðstrikinu.
- Þurrkið út línuna í miðju rétthyrningsins.
- Nú er komin grunneining sem búin er til úr átta 6 cm löngum strikum.
- Haldið áfram á sama hátt, skiptið hverju striki í þrennt og teiknið rétthyrning út frá miðstrikinu. Þurrkið út strik í miðju rétthyrninganna eins og áður.
- Haldið áfram eins lengi og þið getið.

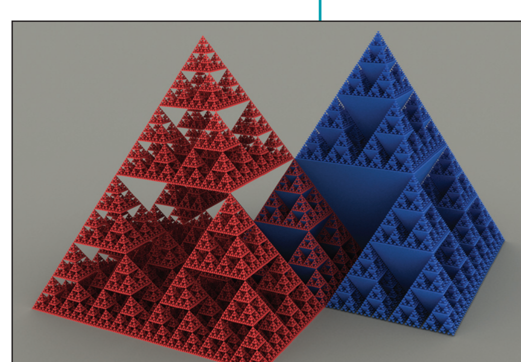
9
- Teiknið þríhyrning með hliðarlengdina 18 í þríhyrningsnet.
- Skiptið hverri hlið í þrjá hluta eins og gert var í Koch-snjóflygsunni.
- Teiknið þríhyrning út frá hverri hlið en látið hann ganga inn á við í stað út á við eins og gert var í Koch-snjóflygsunni.
- Haldið áfram eins lengi og þið getið.

10 Brotalar geta verið mjög einfaldir eins og þessi hérna. Lýsið því með orðum hvernig búa má hann til.

11 Hægt er að útfæra hugmyndina að baki Sierpiński-þríhyrningnum í þrívídd og búa til Sierpiński-píramída. Grunnform Sierpiński-píramídans er fjórflötungur.

Á eyðublaði er snið sem þið getið notað til að búa til fjórflötunga. Búið til í sameiningu eins stóran Sierpiński-píramída og þið getið. Byrjið á að búa til einn lítinn píramída sem getur verið eins konar grunneining í píramídanum ykkar og áætlið hve marga fjórflötunga þið þurfið að nota í stóran píramída.



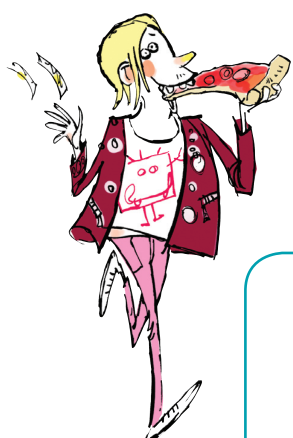


Unglingar og fjármál

Þú hefur líkast til þurft að taka ýmsar fjárhagslegar ákvarðanir varðandi þitt eigið líf. Þótt ýmislegt fleira en beinharðir útreikningar skipti máli er engu að síður þörf á að hafa gott vald á þeim og skilning á ýmsum hugtökum sem notuð eru í tengslum við fjármál.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Getir notað stærðfræði til að átta þig á fjármálum einstaklinga og heimila.*
- *Kunnir að nota töflureikni við útreikninga og úrvinnslu upplýsinga.*
- *Getir beitt stærðfræði við verkefni sem snerta samskipti þín við samfélagið svo sem stjórnvöld, fjármálastofnanir og atvinnulíf.*
- *Þjálfist í að beita prósentureikningi í ýmsu samhengi.*



HÓPVERKEFNI

1 Ræðið saman við hvaða aðstæður peningar og fjármál hafa áhrif á ákvarðanir sem taka þarf af:

a Þér sem einstaklingi
b Fjölskyldu
c Skóla
d Fyrirtæki
e Sveitarfélagi
f Alþingismönnum

2 Í hvað nota unglingar peninga?

a Reiknið út meðaleyðslu ykkar í hópnum á einni viku.

b Teljið þið að eyðsla ykkar sé svipuð að meðaltali á viku og hjá jafnöldrum ykkar?

c Gerið könnun þar sem þið kannið hvaðan unglingar fá peninga og hve miklu þeir eyða að meðaltali á viku. Þið þurfið að finna út:

- Hvort unglingar afla almennt tekna sjálfir eða hvort þeir fá peninga til daglegrar eyðslu hjá forráðamönnum sínum.
- Hvaðan peningar fyrir tómstundum, fatnaði, ferðalögum og fleiru koma.
- Upphæð vasapeninga og launakjör og vinnutíma þeirra sem afla tekna.

Berið fjárráð þess hóps sem þið könnuðuð saman við ykkar eigin fjárráð. Setjið niðurstöður ykkar fram á skýran hátt í texta og með myndritum.

Störf við verslun og þjónustu

Launatafla 1.09.2007	Mánaðarlaun	Tímakaup Dagvinna
Yngri en 14 ára	60 480 kr.	356 kr.
14 ára	90 720 kr.	534 kr.
15 ára	102 514 kr.	603 kr.
16 ára	119 940 kr.	706 kr.
17 ára	125 938 kr.	741 kr.
18 ára	133 494 kr.	785 kr.

Dagvinnutími er virka daga kl. 8–17.

Eftirvinna er greidd með 40% álagi á hvern tíma sem unninn er utan dagvinnu.

Yfirvinna er greidd fyrir hvern tíma sem unninn er umfram 170 tíma á mánuði.

Benedikt er 14 ára. Hann vinnur í gróðurhúsi hjá Jóni frænda sínum mánudaga og miðvikudaga kl. 15–18 og annan hvern laugardag kl. 9–12.

Vigdís er 15 ára. Hún vinnur á skyndibitastað fimmtudaga, föstudaga og laugardaga kl. 17–20.

Steinunn er 16 ára. Hún vinnur í byggingavöruverslun alla virka daga kl. 16–19 nema föstudaga og á laugardögum kl. 10–16.

september 2007

sun	mán	þri	mið	fim	fös	lau
26	27	28	29	30	31	1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	1	2	3	4	5	6

nóvember 2007

sun	mán	þri	mið	fim	fös	lau
28	29	30	31	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	1

3 Reiknaðu laun þeirra Benedikts, Vigdísar og Steinunnar í september 2007.

4 Þann 1. nóvember 2007 hækkuðu laun um 3%.

a Benedikt vann ekkert á laugardögum í nóvember. Hver voru laun hans fyrir nóvember?

b Vigdís varð 16 ára 18. nóvember. Hver voru laun hennar fyrir nóvember?

c Steinunn vann alla virka daga kl. 16–19 í nóvember sem og laugardaga kl. 10–16.
Hún fékk 2,5% launahækkun 1. október vegna þess að þá hafði hún unnið hjá fyrirtækinu í tvö og hálft ár. Hver voru laun hennar fyrir nóvember?

5 Skoðaðu launatöfluna.

a Um hve mörg prósent hækkuðu laun Benedikts þegar hann varð 14 ára?

b Gerðu grein fyrir um hve mörg prósent laun Benedikts munu hækka frá ári til árs fram til 18 ára aldurs ef gert er ráð fyrir að uppbygging launatöflunnar verði hin sama. Settu niðurstöður þínar fram í myndriti.

6 Magnús er 15 ára og vinnur á sumrin í verslun sem selur húsbúnað. Hér er launaseðill hans. Reiknaðu útborguð laun hans í júní. Notaðu launatöfluna á blaðsíðu 103. Gott er að vinna verkefni eins og þetta í töflureikni.

Launagreiðandi: **Borð og baukar**	Launatímabil: Júní 2007			
Nafn launþega: Magnús Magnússon	Kennitala: 020292-2929			
Dagvinna	100	@		
Yfirvinna		@		
Eftirvinna	60	@		
Heildarlaun				
Skattur 6%				
Stéttarfélagsgjald 0,7%				
Frádráttur alls				
Útborguð laun				
Orlofslaun 10,17%				

Lágmarksorlof er 24 virkir dagar, þ.e. tveir dagar á launum fyrir hvern unninn mánuð á orlofsárinu. Þeir sem eru í hlutavinnu fá orlofslaun sem eru 10,17% ofan á heildarlaun. Orlofslaun eru greidd út í maí.

Þeir sem eru undir 16 ára aldri borga 6% í skatt og greiða ekki í lífeyrissjóð. Frá og með því almanaksári sem launþegar verða 16 ára þurfa þeir að borga 35,72% af heildarlaunum í staðgreiðslu skatta. Þeir fá 32 150 kr. í staðgreiðsluafslátt á mánuði. Auk þessa þurfa þeir að greiða 4% í lífeyrissjóð þegar þeir hafa náð 16 ára aldri.

7 Þuríður, samstarfskona Magnúsar, vinnur alltaf á sömu tímum og hann. Þuríður varð 17 ára í apríl 2007.

a Hver eru útborguð laun hennar í júní 2007?

b Hve mikill munur er á útborguðum launum Þuríðar og Magnúsar fyrir júní 2007?

8 Staðgreiðsluafsláttur safnast upp í hverjum mánuði ef hann er ekki nýttur til fulls. Námsmenn sem hafa ekki unnið með skóla geta því notað ónýttan staðgreiðsluafslátt þegar þeir hefja sumarstörf. Hve miklar tekjur gæti 18 ára námsmaður haft í júní, júlí og ágúst án þess að þurfa að borga skatta?

9 Björn er 16 ára samstarfsmaður þeirra Magnúsar og Þuríðar. Hann vann ekkert með skóla og á því ónýttan persónuafslátt að upphæð 160 750 kr. þegar hann hefur störf 1. júní. Hann vinnur á sama tíma og þau Magnús og Þuríður.

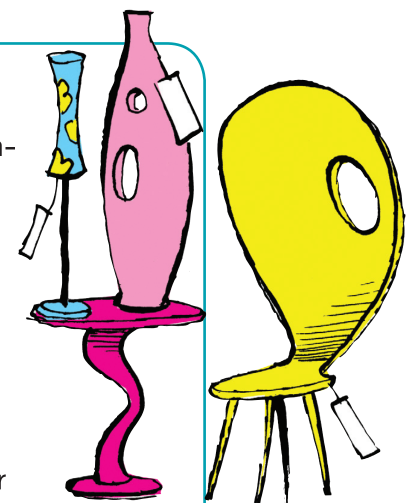
a Hver eru útborguð laun hans fyrir júní 2007?

b Hverju munar á útborguðum launum Björns og Magnúsar? En á útborguðum launum Björns og Þuríðar?

Ákveðnar reglur gilda um vinnu barna og unglinga sem atvinnurekendum ber að fara eftir. Þær snúast bæði um vinnutíma og eðli starfsins. Áhersla er lögð á að börn megi ekki vinna hættuleg störf eða með hættuleg efni og ekki bera of þungar byrðar.

	Börn 13–14 ára	**Börn 15 ára í skyldunámi**	**Unglingar 15–17 ára ekki í skyldunámi**
Á starfstíma skóla	2 klst. á dag 12 klst. á viku	2 klst. á dag 12 klst. á viku	8 klst. á dag 40 klst. á viku
Utan starfstíma skóla	7 klst. á dag 35 klst. á viku	8 klst. á dag 40 klst. á viku	8 klst. á dag 40 klst. á viku
Vinna bönnuð	kl. 20–6	kl. 20–6	kl. 22–6
Hvíld	14 klst. á sólarhring 2 dagar á viku	14 klst. á sólarhring 2 dagar á viku	12 klst. á sólarhring 2 dagar á viku

HÓPVERKEFNI



10 Verslunarstjóri í versluninni *Borði og baukum* þarf að skipuleggja vinnu nokkurra ungmenna sem ætla að vinna í versluninni. Verslunin er opin kl. 9–21 alla daga. Hann þarf að tryggja að það séu ætíð tvö ungmenni á vakt kl. 16–21 virka daga, allan daginn á laugardögum og sunnudögum.

- Lilja er 13 ára og vill vinna eins mikið og hún má eftir kl. 16.
- Magnús vill vinna á laugardögum og sunnudögum eins mikið og hann má.
- Þuríður er ekki í skóla og vill vinna fulla vinnu.
- Jörundur er 14 ára og vill vinna eins mikið og hann getur eftir kl. 18 mánudaga, miðvikudaga og föstudaga.
- Þóra er 16 ára og vill vinna eins mikið og hún getur eftir kl. 18 alla daga.

Setjið upp vaktatöflu og kannið hvort verslunarstjórinn getur mannað vaktirnar með þessum starfsmönnum. Ef ekki hve mörgum þyrfti hann að bæta við? Hver væri æskilegur aldur þeirra ef hann vill halda launakostnaði í skefjum?

Reiknið útborguð laun allra starfsmannanna í eina viku samkvæmt vaktatöflunni. Notið launatöfluna á blaðsíðu 103.

Launþegar hafa ákveðin réttindi og skyldur á vinnumarkaði. Kynnið ykkur reglur um ráðningarsamninga, laun í veikindum, orlof á yfirvinnu og fleira sem lýtur að þátttöku á vinnumarkaði. Á heimasíðum stéttarfélaga er hægt að finna mikið af gagnlegum upplýsingum sem og hjá samtökum atvinnurekenda.

Bankavextir eru almennt miðaðir við ár. Þegar talað er um 7% vexti er átt við ársvexti. Ef lagðar eru 100 000 kr. á reikning sem ber 7% vexti má finna upphæðina eftir ár með því að reikna:

$$100\,000 \cdot 1{,}07 = 107\,000 \text{ kr.}$$

Ef upphæðin er látin standa í ár í viðbót bætast 7% vextir við upphæðina.

$$107\,000 \cdot 1{,}07 = 114\,490 \text{ kr.}$$

Ef upphæðin er látin standa í tíu ár eru vextir reiknaðir af innstæðunni einu sinni á ári. Þá má finna upphæðina með því að reikna:

$$100\,000 \cdot 1{,}07^{10} = 196\,715 \text{ kr.}$$

Bankar bjóða upp á sparnaðarreikninga þar sem vextir eru reiknaðir mánaðarlega. Lagðar eru t.d. 5000 kr. inn fyrsta hvers mánaðar á reikning sem ber 7% vexti. Mánaðarlegir vextir eru því $\frac{7}{12} = 0{,}583\%$.
Stöðu á reikningnum um hver mánaðamót eftir að lagt hefur verið inn má finna með því að reikna:

Tími	**Innistæða**	**Samtals**
1. janúar	5000	5000 kr.
1. febrúar	$5000 \cdot 1{,}00583 + 5000$	10 029,15 kr.
1. mars	$5000 \cdot 1{,}00583^2 + 5000 \cdot 1{,}00583 + 5000$	15 058,47 kr.
1. apríl	$5000 \cdot 1{,}00583^3 + 5000 \cdot 1{,}00583^2 + 5000 \cdot 1{,}00583 + 5000$	20 176 kr.

Í árslok er gert upp þannig að upphæðirnar með vöxtum fyrir hvern mánuð eru lagðar saman og notaðar sem grunnur. Ef lagðar eru inn 5000 kr. á mánuði er upphæðin eftir 12 mánuði orðin 61 962 kr. Þrettánda mánuð sparnaðarins reiknast því vextir af 66 962 kr. og fjórtánda mánuðinn lítur reikningsdæmið svona út:

$$66\,962 \cdot 1{,}00583 + 5000 = 72\,352 \text{ kr.}$$

Þessi leið við vaxtaútreikninga krefst mikilla útreikninga en reiknivélar sem búið er að forrita gera það mögulegt að reikna fljótt vexti fyrir hvaða tíma sem er.

11 Benedikt ákveður að byrja að spara og leggja í banka 3000 kr. á mánuði af launum sínum. Banki hans býður upp á sparnaðarreikning sem gefur 11% ársvexti.

a Hve há er vaxtaprósentan á mánuði?

b Hver verður upphæðin orðin eftir 2 mánuði? En 4 mánuði? En 12 mánuði?

12 Steinunn á 250 000 kr. á bankareikningi sem gefur 12,5% ársvexti. Hún leggur mánaðarlega inn 5000 krónur. Finndu hver innistæðan verður eftir

a 2 mánuði   *b* 4 mánuði   *c* 8 mánuði

13 Magnús veltir fyrir sér hvort hann muni eiga fyrir skíðaferð ef hann sparar helming launa sinna sumarmánuðina þrjá og lætur upphæðina standa til 1. febrúar næsta ár. Banki hans býður upp á sparnaðarreikning sem gefur 10% vexti.

a Hve há gæti innistæða Magnúsar verið eftir 1. febrúar?

b Telur þú að það sé nægilega há upphæð fyrir skíðaferð í Alpana?

HÓPVERKEFNI

14 a Kannið kjör á innlánsreikningum í einum banka.

- Hvaða reikningar eru í boði?
- Greinið frá vaxtakjörum og skilmálum þeirra.
- Hvaða þættir skipta máli til að fá sem best kjör?

b Prófið að nota reiknivélar bankans til að skoða hve miklu munar eftir því hvort vextir eru 9% eða 11%. Skoðið líka muninn á að spara 5000 kr. á mánuði eða 10 000 kr.

c Hvaða innlánsreikningum mynduð þið mæla með fyrir þessa viðskiptavini? Skrifið stutta greinargerð þar sem þið rökstyðjið val ykkar.

Jón á 7 milljónir sem hann vill ávaxta og nota til húsnæðiskaupa eftir þrjú ár. Hann leggur fyrir 50 000 kr. á mánuði.

Gerður vinnur 25 milljónir í happdrætti. Hún vill geyma peninga og nota þá eftir fimm ár þegar hún verður 70 ára.

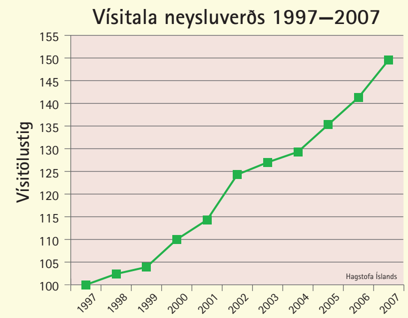
Margrét selur bílinn sinn og kaupir hjól í staðinn. Þá á hún 600 000 kr. sem hún vill leggja í banka og hafa sem varasjóð sem hún getur tekið úr með minna en tveggja vikna fyrirvara.

Hannes er 15 ára. Hann á 350 000 kr. sem hann vill ávaxta í banka í þrjú ár.

Til eru fleiri leiðir til að ávaxta peninga en að leggja þá í banka. Margir kaupa sér hlutabréf eða verðbréf. Miklar sveiflur eru oft á hlutabréfamörkuðum og því þarf kaupandi að vera tilbúinn að taka áhættu. Bankar og fjármálastofnanir gefa upplýsingar um gengi á hlutabréfum. Veldu þér nokkur fyrirtæki og skoðaðu hvernig þróun á gengi bréfa þeirra hefur verið.

Vísitölur eru notaðar til að mæla breytingar og þróun. Á tilteknum tíma er sett ákveðið viðmið við 100. Reglulega eftir það er þróun mæld og borin saman við 100.

Hagstofa Íslands fylgist með verðlagi og breytingum á því. Á heimasíðu Hagstofu Íslands er að finna mikið gagnasafn á því sviði. Notað er hugtakið vísitala neysluverðs þegar verið er að skoða verðlagsþróun á helstu neysluvörum fyrir heimili. Miðað er við verðlag í mars árið 1997 og að þá hafi vísitalan verið 100 stig.



15 Í mars 2007 var vísitala neysluverðs orðin 149,6 stig. Tölurnar í a–d lið sýna upphæð mánaðarlegrar neyslu heimilis í mars 1997. Hver væri upphæðin á verðlagi í mars 2007?

a 50 000 kr. c 150 000 kr.

b 75 000 kr. d 200 000 kr.

16 Verð á helstu neysluvörum skiptir miklu máli í heimilisrekstri. Tekjur heimila hafa einnig mikil áhrif á hve mikið er hægt að kaupa. Ef laun hækka meira en verð á neysluvörum verða rýmri fjárráð á heimilum. Hagstofa Íslands fylgist því líka með þróun launavísitölu. Launavísitala helstu launþegahópa var 130,4 stig á 1. ársfjórðungi 1997 og 159,8 stig á 4. ársfjórðungi 2006.

a Um hve mörg stig hækkaði launavísitalan 1997–2006?

b Um hve mörg prósent hækkaði launavísitalan 1997–2006?

c Um hve mörg prósent hækkaði vísitala neysluverðs 1997–2007?

d Má búast við að fjárráð heimila hafi almennt aukist á þessu tímabili?

Áhugavert er að skoða hvernig vísitala neysluverðs hefur þróast í mismunandi vöruflokkum.

Vísitala neysluverðs	Mars 2007
1 Búvörur án grænmetis	130,0
2 Grænmeti	101,0
3 Aðrar innlendar mat- og drykkjarvörur	130,4
4 Aðrar innlendar vörur	134,3
5 Innfluttar mat- og drykkjarvörur	119,1
6 Nýr bíll og varahlutir	129,8
7 Bensín	151,0
8 Innfluttar vörur aðrar	100,0
9 Áfengi og tóbak	160,8
10 Húsnæði	254,2
11 Opinber þjónusta	151,0
12 Önnur þjónusta	156,5

17 Skoðaðu töfluna.

a Hvaða liður hefur hækkað mest? Um hve mörg prósentustig hefur hann hækkað?

b Hvaða liður hefur hækkað minnst? Um hve mörg prósentustig hefur hann hækkað?

c Hefur verð lækkað á einhverjum lið?

Það sem vekur mesta athygli þegar taflan er skoðuð er hve mikið vísitala verðs á húsnæði hefur hækkað.

18 a Reiknaðu út frá upplýsingunum í töflunum hvort verðlag þessara vörutegunda hefur fylgt þróun vísitölu neysluverðs.

b Hvað hefðu vörurnar kostað 2007 ef verð þeirra hefði fylgt þróun vísitölu neysluverðs í sínum vöruflokki?

c Hvaða skýringar gætu verið á því að verð á einstökum vörutegundum fylgir ekki þróun vísitölu neysluverðs í þeim vöruflokki sem þær tilheyra?

Verð	1997	2007
Hrísgrjón (kg)	165	241
Rúgbrauð, seytt (kg)	275	582
Heill frosinn kjúklingur (kg)	600	457
Nýmjólk (l)	67	80
Gulrætur (kg)	303	281
Nærföt á karla	1376	3206
Þvottavél	65 243	66 306
Bíómiði á venjulega sýningu	550	900
Klipping barna	1214	2307
Þjóðleikhúsmiði	1700	2900

19 Skoðaðu línuritið.

a Hefur vísitala húsnæðiskostnaðar farið stighækkandi allt tímabilið?

b Er hægt að greina áberandi stökk milli ára?

c Um hve mörg prósent hefur vísitala húsnæðiskostnaðar hækkað frá 2005–2007?

d Hvert væri verð íbúðar árið 2007 sem kostaði 12 milljónir króna árið 1997 ef verðið hefði fylgt vísitölu húsnæðiskostnaðar?

Í neyslukönnun Hagstofu Íslands sem lögð var til grundvallar vísitölu neysluverðs í mars 1997 var neyslu skipt í tólf flokka. Þar var kannað hvernig innkaup heimila skiptast hlutfallslega milli flokkanna. Í töflunni hefur flokkunum verið fækkað. Saman er nú allur matar- og drykkjarkostnaður, bílakostnaður er tekinn í einn flokk sem og innkaup á ýmsum vörum.

Hlutfallsleg skipting neyslu eftir helstu vöruflokkum

		Mars 1997	Mars 2007
1	Matur og drykkjarvörur	17,1%	12,5%
2	Húsbúnaður, tæki, föt, gjafir, o.fl.	21,7%	18,1%
3	Nýr bíll og varahlutir, bensín	11,7%	13,6%
4	Áfengi og tóbak	3,1%	3,1%
5	Húsnæði	11,6%	24,1%
6	Opinber þjónusta	11,7%	6,9%
7	Önnur þjónusta	23,1%	21,7%
	Samtals	100%	100%

20 **a** Í hvaða flokki breytist hlutfallstalan mest?

b Hvaða flokkar hafa lægra hlutfall 2007 en 1997 og hverjir hafa hærra hlutfall?

c Berðu hlutfallstölur saman við hækkun á vísitölu neysluverðs.

21 Reiknaðu hve hárri peningaupphæð er eytt í hvern vöruflokk á heimilum sem haga neyslu sinni í samræmi við neyslukönnun Hagstofu Íslands.

a Fjölskyldan á Smávöllum notar 300 þúsund krónur mánaðarlega.

b Hjá fjölskyldunni á Toppvöllum er mánaðarleg eyðsla 120 þúsund krónur.

c Fjölskyldan á Miðvöllum eyðir um 1200 þúsund krónum í hverjum mánuði.

d Hvað er það sem búast má við að þeir sem hafa háar tekjur eyði hlutfallslega meira í en þeir sem hafa lágar tekjur?

HÓPVERKEFNI

22 Takið viðtöl við einstaklinga frá 4–5 heimilum. Biðjið þá að áætla hve stóran hluta af mánaðarlegri neyslu þeir noti í hvern af flokkunum sjö. Ræðið jafnframt við þá um hvort þeim finnist vera samræmi milli þróunar tekna og útgjalda á heimili þeirra. Dragið saman niðurstöður og berið þær saman.

HÓPVERKEFNI

23 Ýmislegt getur haft áhrif á efnahag einstaklinga og heimila. Stjórnvöld reyna oft að hafa áhrif á efnahag og neyslu með ýmiss konar aðgerðum. Hér eru dæmi um aðgerðir eða aðstæður sem geta haft áhrif á efnahag einstaklinga og heimila.

- Hækkun staðgreiðsluafsláttar skatta á mánuði úr 32 150 kr. í 42 864 kr.
- Lækkun virðisaukaskatts á matvæli, bækur og hljómdiska úr 14% í 7%.
- Hækkun vaxta af húsnæðislánum úr 4,1% í 6,9%.
- Hækkun launa um 3%.
- Afnám komugjalda á heilsugæslustöð fyrir börn.
- Frítt í strætó fyrir alla undir 18 ára og alla námsmenn.
- 5% hækkun á gengi íslensku krónunnar.
- Hátekjuskattur á einstaklinga sem hafa meira en 6 milljónir í árstekjur og hjón sem hafa meira en 10 milljónir.
- 5% skattur á gosdrykki og sælgæti.
- 5% skattur á lúxusvörur svo sem vélsleða, jeppa sem kosta meira en 10 milljónir og flatskjái sem eru yfir 60 tommur.
- 8% verðbólga.

Svarið spurningunum og rökstyðjið svör ykkar með því að taka nokkur dæmi.

- Hverjar af þessum aðgerðum teljið þið að hefðu mest jákvæð áhrif á fjárhag ykkar? En neikvæð?
- Hverjar af þessum aðgerðum teljið þið að hefðu mest jákvæð áhrif á fjárhag fjölskyldna?
- Hverjar teljið þið að myndu hafa neikvæð áhrif á fjárhag sveitarfélagsins sem þið búið í?
- Hverjar teljið þið að myndu hafa jákvæð áhrif á rekstur ríkisins í heild?
- Hvaða aðgerða teljið þið að mætti grípa til í þeim tilgangi að bæta fjárhag fátæks fólks á Íslandi?

Atriðisorð