Stærðfræði 5

8tíu

Guðbjörg Pálsdóttir – Guðný Helga Gunnarsdóttir

NÁMSGAGNASTOFNUN

Til nemenda

Námsefnisflokkurinn *8–tíu* er ætlaður nemendum í 8.–10. bekk. Grunnbókin *8–tíu 5* skiptist í átta meginkafla. Í hverjum kafla er fjallað um tiltekna efnisþætti stærðfræðinnar. Lögð er áhersla á að skoða tengsl efnisþátta og hvernig nálgast má stærðfræði á fjölbreyttan hátt.

Miklu skiptir í stærðfræðinámi að ná valdi á stærðfræðilegum vinnubrögðum svo sem að rannsaka og leita að samhengi, finna mögulegar lausnir og rökstyðja þær. Oft reynir það á úthald og þrautseigju. Gott getur verið að vinna saman að lausn verkefna.

Þú þarft að fá yfirsýn yfir þá stærðfræði sem þér er ætlað að hafa náð tökum á við lok grunnskóla þannig að þú getir sett þér raunhæf markmið með námi þínu. Námsefninu er ætlað það hlutverk að styðja þig í náminu.

Gangi þér vel,
höfundar

8–tíu

Stærðfræði 5

ISBN 978-9979-0-1218-4

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2007
2. útgáfa 2007
Önnur prentun 2008
Námsgagnastofnun
Reykjavík

Umbrot og prentvinnsla: Oddi hf.

Hákon Sverrisson, Helga Jónsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir, Kristín Bjarnadóttir, Steinunn Sigurbergsdóttir og Þórdís Guðjónsdóttir lásu yfir handrit og veittu góð ráð við vinnslu efnisins. Þeim og öðrum sem aðstoðuðu við gerð þessa efnis eru færðar bestu þakkir.

Stærðfræði 5

ÁTTA 10

EFNISYFIRLIT

Rúmfræði og algebra 4
Tölur og talnafræði 23
Líkur 39
Reikningur og algebra 51
Pýþagóras 67
Líkön 76
Algebra og jöfnur 90
Dulmálsfræði 106
Atriðisorð 112

Rúmfræði og algebra

Þegar fengist er við stærðfræði fléttast efnisþættir nær alltaf saman. Í þessum kafla eru skoðuð dæmi um hvernig beita má algebru við lausn margvíslegra rúmfræðilegra viðfangsefna.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Getir notað algebru til að tákna samband stærða í rúmfræði.*
- *Getir leyst rúmfræðileg viðfangsefni með því að setja upp og leysa jöfnur, svo sem að finna rúmmál píramída, keilu og kúlu.*
- *Þekkir og getir beitt setningu Pýþagórasar.*
- *Þekkir rétthyrnt hnitakerfi og pólhnitakerfi í sléttum fleti.*
- *Getir fundið hnitpunkta og fjarlægðir í rétthyrndu hnitakerfi.*
- *Þekkir bæði rúmfræðilega og algebrulega túlkun á hallatölu línu.*

HÓPVERKEFNI

1 Fyrirtæki miða oft við tiltekna lengd, breidd og hæð pakka þegar ákvarða á flutningsgjöld. Þar sem pakkar geta verið ólíkir í laginu er þetta ekki alltaf réttlátt viðmið. Fyrirtækið FÍF ákveður að leita leiða sem eru réttlátar en jafnframt einfaldar í framkvæmd. Fyrirtækið gerir kröfu um að allir pakkar séu krossbundnir. Upp kemur sú hugmynd að miða við lengd bands sem þarf til að krossbinda pakka. Þróunarstjóri fyrirtækisins tekur að sér að prófa þetta. Hann ákveður að skoða hve stóran réttstrending er hægt að krossbinda með 2 metra löngu bandi. Hann miðar við að 25 sentímetrar bætist síðan við til að hnýta bandið.

- Er mikill munur á rúmmáli réttstrendinga sem binda má um með 2 metra bandi? Sýnið að minnsta kosti 4–6 dæmi.
- Hver er stærsti réttstrendingur sem hægt er að krossbinda með 2 metra bandi?
- Finnst ykkur að þróunarstjórinn eigi að mæla með að þetta viðmið verði tekið upp? Rökstyðjið svar ykkar.

2 Réttstrendingur hefur rúmmálið 60 rúmsentímetrar. Finndu hæð réttstrendings ef

a lengdin er 10 cm
breiddin er 3 cm

b lengdin er 7,5 cm
breiddin er 2 cm

c lengdin er 8 cm
breiddin er 2,5 cm

Þegar reikna á rúmmál réttra strendinga er flatarmál grunnflatar margfaldað með hæð strendings. Þegar um er að ræða réttstrending er flatarmál grunnflatar fundið með því að margfalda lengd og breidd saman.

Almenna reiknireglan fyrir rúmmál réttstrendings gæti því litið þannig út: $R = G \cdot h$ eða $R = l \cdot b \cdot h$

3 Flatarmál grunnflatar réttstrendings er 24 fermetrar. Finndu hæð hans ef rúmmálið er

a 72 m^3 **b** 60 m^3 **c** 67,2 m^3 **d** 86,4 m^3

Við reikning notar fólk oft mismunandi leiðir. Skoðaðu leiðir Ásdísar og Ómars.

Ásdís: Mér finnst best að setja beint inn í almennu reiknireglunа um rúmmál réttstrendings þegar finna á hæð réttstrendings og flatarmál og rúmmál hans er gefið. Ég reiknaði a-lið í dæmi 3 með því að skrá:

$72 = 24 \cdot h$

$72 = 24h$ (einfaldaði eins og hægt var)

$3 = h$ (deildi með 24 báðum megin við jafnaðarmerkið)

Hæðin er 3 metrar.

Ómar: Mér finnst best að umskrifa reikniregluna fyrst þannig að óþekkta stærðin sé einangruð þegar ég reikna svona dæmi.

$R = G \cdot h$

$\frac{R}{G} = h$ (deildi með G báðum megin við jafnaðarmerkið)

Dæmi 3 a verður þá:

$\frac{72}{24} = 3$

Ég fæ sama svar, þ.e. að hæðin sé 3 metrar.

4 Umskráðu reiknireglu fyrir rúmmál réttstrendings eins og Ómar.

a Ef finna á flatarmál grunnflatar og vitað er hvert rúmmálið og hæðin er.

b Ef finna á lengd réttstrendingsins en breidd, hæð og rúmmál er þekkt.

5 Skráðar eru þekktar stærðir réttstrendinga. Finndu óþekktu stærðina.

a $R = 48\ cm^3$, $h = 3$ cm, $b = 4$ cm, $l = x$

b $h = 5$ cm, $b = 6$ cm, $l = x$, $R = 135\ cm^3$

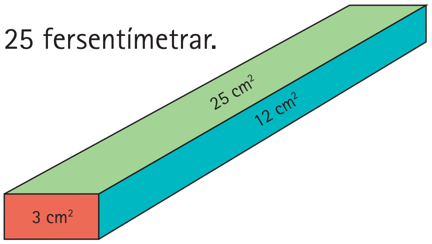
c $G = 25\ m^2$, $h = 4$ m, $R = x$

d $R = 170\ m^3$, $h = 2,5$ m, $G = x$

e $l = 3$ cm, $R = x$, $h = 7,2$ cm, $b = 18$ cm

f $G = 23,4\ cm^2$, $R = 131,04\ cm^3$, $h = x$

6 Flatarmál hliðarflata réttstrendings er 3, 12 og 25 fersentímetrar.

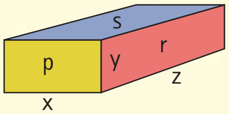


a Gefið er að stysta hliðarlengdin er 1,2 cm. Hverjar eru hinar hliðarlengdirnar?

b Hvert er rúmmál réttstrendingsins?

c Hvaða tölu færðu ef þú margfaldar saman flatarmál hliðarflatanna? Hvert er samband þeirrar tölu og rúmmálsins?

Flatarmál hliðarflata er skráð p, r og s.
Flatarmál hliðarflatarins p má skrá sem $x \cdot y$,
hliðarflatarins r sem $y \cdot z$ og hliðarflatarins s sem $z \cdot x$.



Margfeldi hliðarflatanna má því setja fram með tveimur jafngildum stæðum.

$p \cdot r \cdot s = x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot x$

$prs = x^2y^2z^2$

$prs = (xyz)^2$

7 a Þegar finna á rúmmál réttstrendinga getur verið gott að nýta samband milli margfeldis flatarmáls hliðarflata og margfeldis hliðarlengda. Lýstu þessu sambandi með eigin orðum.

b Hvernig má nýta þetta samband við útreikning á rúmmáli réttstrendinga?

8 Finndu rúmmál réttstrendinganna.

a Flatarmál hliðarflata er 4 m^2, 16 m^2, 9 m^2.

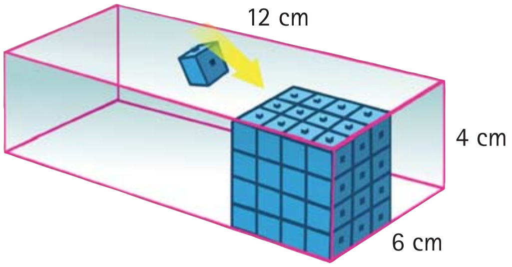
b Flatarmál hliðarflata er 4 m^2, 1,6 m^2, 25 m^2.

c Flatarmál hliðarflata er 0,8 m^2, 8 m^2, 0,9 m^2.

9 Réttstrendingur er 4 cm á hæð, 6 cm á breidd og 12 cm á lengd.

a Finndu rúmmál hans.

b Búðu til tvo eins réttstrendinga sem komast ofan í réttstrendinginn. Hve stórir geta þeir verið?



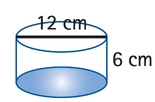
c Hve stór er minnsti réttstrendingurinn, gerður úr einingarkubbum, sem er þannig að ekki er pláss fyrir tvo slíka ofan í þeim stóra?

10 Sívalningar eru réttir strendingar með hring sem botnflöt.

a Finndu rúmmál dósanna.

b Hve stóran réttstrendan kassa þarf utan um hverja dós?

11 a Finndu rúmmál sívalningsins.

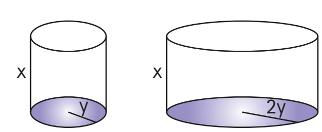


b Hvert gæti verið þvermál og hæð dósar með rúmmál sem er helmingur af rúmmáli sívalningsins?

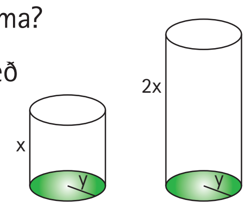
c Hvert gæti verið þvermál og hæð dósar sem hefur tvöfalt rúmmál á við sívalninginn?

d Hvert gæti verið þvermál og hæð dósar með rúmmál sem er 150% af rúmmáli sívalningsins?

12 a Hve mikið eykst rúmmál sívalnings ef lengdin á geisla hringsins er tvöfölduð en hæðin er sú sama?



b Hve mikið eykst rúmmál sívalnings ef hæð er tvöfölduð en geisli er óbreyttur?

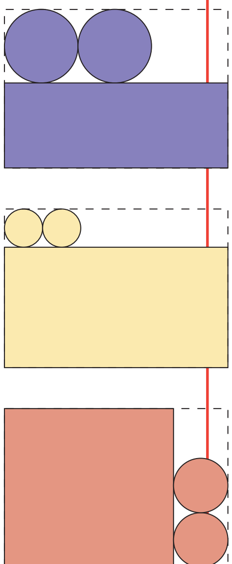


13 Skráðar eru þekktar stærðir sívalninga. Finndu óþekktu stærðina. G er flatarmál grunnflatar, R er rúmmál sívalnings, r er geisli hrings, h er hæð sívalnings.

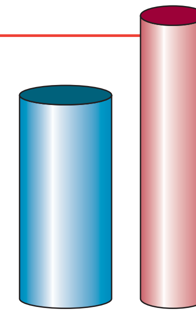
a $G = 12{,}6\ cm^2$
$R = 100{,}8\ cm^3$
$h = x$

b $r = 1{,}6\ m$
$h = 5{,}2\ m$
$R = x$

c $h = 2{,}5\ m$
$R = 45{,}25\ m^3$
$G = x$



HÓPVERKEFNI



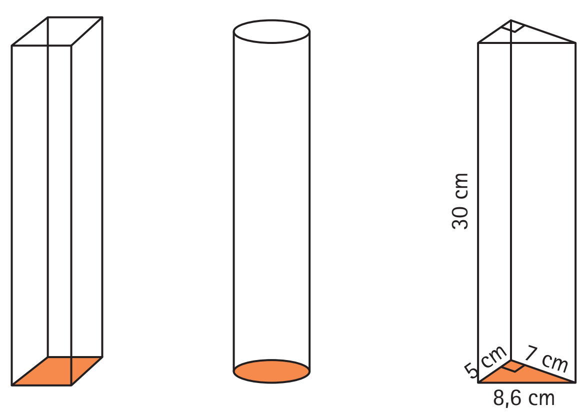
14 Búa má til misstóra sívalninga úr A4 blaði.
Þegar búa á til úr A4 blaði sívalninga með hringjum á báðum endum eru möguleikarnir fjölmargir.
Nota þarf tvo hringi og rétthyrning.

Notið eitt blað í A4 stærð og búið til lokaðan sívalning með mesta mögulega rúmmálið. Gerið nokkrar tilraunir.

- Skráið geisla, þvermál, hæð og rúmmál sívalninganna.
- Hve stór er stærsti sívalningurinn ykkar?
- Berið niðurstöður saman við niðurstöður félaga ykkar.
- Hvað skiptir mestu máli? Er það stærð hringsins eða hvort notuð er lengd eða breidd rétthyrningsins utan um hringina eða eitthvað allt annað?

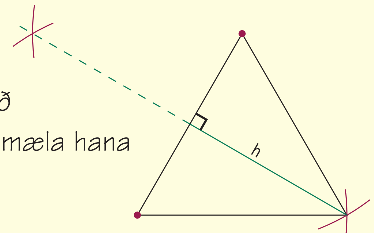
HÓPVERKEFNI

15 Búið til úr A4 blöðum réttstrending, sívalning og réttan þrístrending með rétthyrndan þríhyrning sem grunnflöt. Miðið við að hæðin sé 30 cm. Hvaða form hefur mest rúmmál?

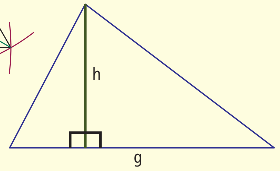


Hvaða form hefur mesta rúmmálið ef breidd A4 blaðsins er notuð sem hæð? Miðið við að botnflötur þrístrendingsins geti þá verið rétthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdir skammhliða 8 cm og 9,5 cm og langhliðina 12,5 cm.

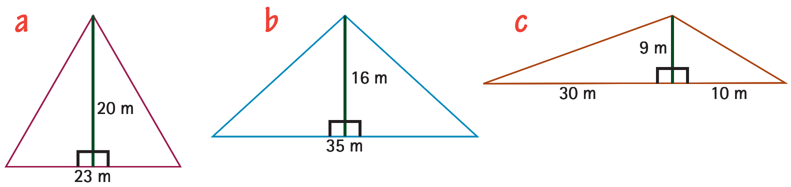
Ef finna á rúmmál þrístrendings þar sem grunnflöturinn er jafnhliða þríhyrningur þarf að byrja á því að finna hæð (h) þríhyrningsins og mæla hana til að hægt sé að finna flatarmál grunnflatar.



Þegar teiknuð er hæð í þríhyrning er honum um leið skipt í tvo rétthyrnda þríhyrninga. Í rétthyrndum þríhyrningum er önnur skammhliðin hæð og hin grunnlína. Finna má flatarmál með því að reikna flatarmál hvors þríhyrnings fyrir sig eða með því að margfalda saman grunnlínu og hæð og deila með tveimur.



16 Finndu flatarmál þríhyrninganna bæði með því að leggja saman flatarmál rétthyrndu þríhyrninganna og með því að reikna beint flatarmál stóra þríhyrningsins.



17

a Settu fram stæðu fyrir flatarmál þríhyrningsins.

b Settu fram stæðu fyrir flatarmál þríhyrninganna.

c Stæðurnar sem þú settir fram eru jafngildar. Settu fram jöfnu og einfaldaðu hana.

d Lýstu þessum tveimur leiðum til að finna flatarmál jafnarma þríhyrninga.

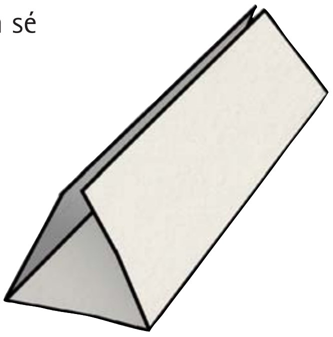
18 A4 blað er brotið í þrístrending þannig að botnflöturinn sé jafnhliða þríhyrningur.

a Hverjar verða hliðarlengdir þríhyrningsins?

b Mældu hæð þríhyrningsins.

c Finndu flatarmál þríhyrningsins.

d Hvert er rúmmál þrístrendingsins?



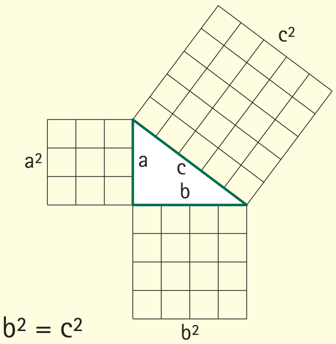
19 Teiknaðu þríhyrning með hliðar sem eru 4 cm og 8 cm og hornið á milli þeirra 70°. Finndu hæð og flatarmál þríhyrningsins.

Hæð í rétthyrndum þríhyrningi má finna með hjálp algebru. Stærðfræðingurinn Pýþagóras setti fram setningu um samband hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningum.

Í bókinni ***Síðasta setning Fermat*** er setningin orðuð svona:

> *Í rétthyrndum þríhyrningi er ferningurinn á langhliðinni jafn summu ferninganna á skammhliðunum.*

Singh. 2006:47.

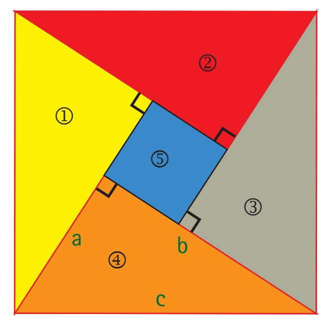


$a^2 + b^2 = c^2$

Setning Pýþagórasar: $a^2 + b^2 = c^2$

20 Margar leiðir hafa verið notaðar til að sýna fram á þetta samband milli hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi. Ein þeirra er að nota raðspil.

a Þú þarft fjóra rétthyrnda þríhyrninga og einn ferning. Númeraðu þríhyrningana og gefðu hliðum þeirra nöfn eins og myndin sýnir.



b Raðaðu formunum fimm í ferning eins og sýnt er á myndinni. Langhliðar þríhyrninganna mynda hliðar ferningsins. Hliðarlengd ferningsins er því c. Hvert er flatarmál ferningsins?

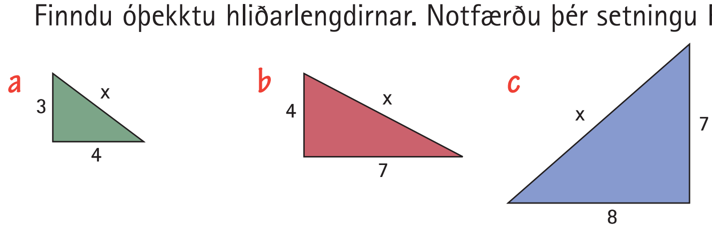
c Raðaðu formunum nú þannig að fram komi tveir ferningar, annar með hliðarlengdina a og hinn með hliðarlengdina b. Athugaðu að ferningarnir eru fastir saman.

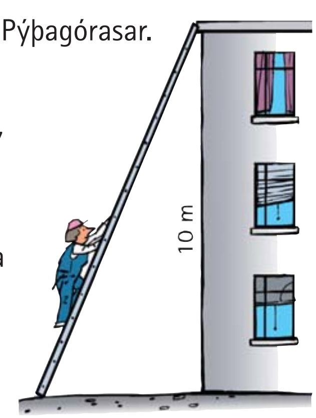
d Skráðu flatarmál hvors fernings fyrir sig.

e Hvert er þá flatarmál beggja ferninganna?

f Hvernig sannar þetta raðspil setningu Pýþagórasar um samband hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi?

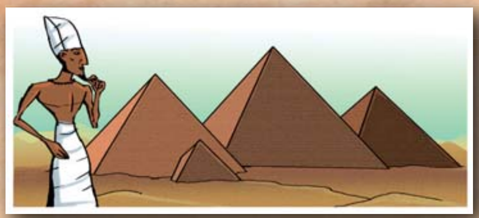
21 Finndu óþekktu hliðarlengdirnar. Notfærðu þér setningu Pýþagórasar.





22 Jói þarf að mála þakið á húsinu sínu. Hann þarf að leigja stiga og þeir fást í nokkrum lengdum.

a Hvernig má nota setningu Pýþagórasar til að finna hve háan stiga Jói þarf að leigja?



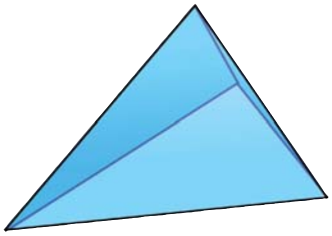
Píramídarnir í Giza í Egyptalandi eru sögufræg mannvirki sem enn þann dag í dag laða til sín fjölda ferðamanna. Sá stærsti þeirra, Píramídinn mikli eða Khufu-píramídinn, var lengi talinn eitt af stærstu mannvirkjum í heimi. Hann hefur verið kallaður eitt af sjö undrum veraldar. Þau voru helstu afrek mannsins í byggingar- og höggmyndalist á gríska menningarsvæðinu fyrir 2000 árum. Píramídarnir eru það eina sem enn stendur. Talið er Píramídinn mikli hafi verið reistur um 2600 árum fyrir okkar tímatal. Hann er byggður úr kalksteini og er álitið að í hann hafi þurft meira en tvær milljónir steina sem hver um sig er talinn hafa vegið frá tveimur tonnum og upp í 150 tonn. Píramídarnir voru reistir sem grafhýsi fyrir faraóana, konunga Egyptalands. Talið er að í Egyptalandi séu á milli 80 og 110 píramídar en þá mátti finna víðar til forna, m.a. í Frakklandi, á Ítalíu, í Grikklandi og Kína. Á seinni árum hafa verið reistar ýmsar byggingar með píramídalögun, einna þekktust þeirra er líklega píramídinn fyrir framan Louvre-safnið í París.

23 a Rissaðu upp mynd sem sýnir úr hvaða formum píramídarnir í Giza eru búnir til.

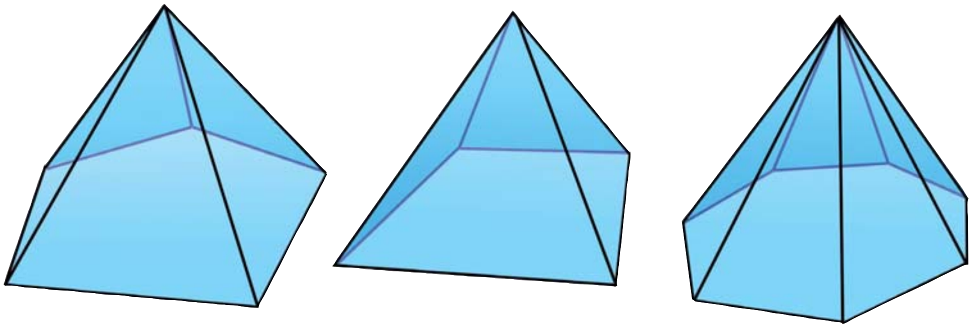
b Lýstu því hvernig finna má yfirborðsflatarmál slíkra píramída.

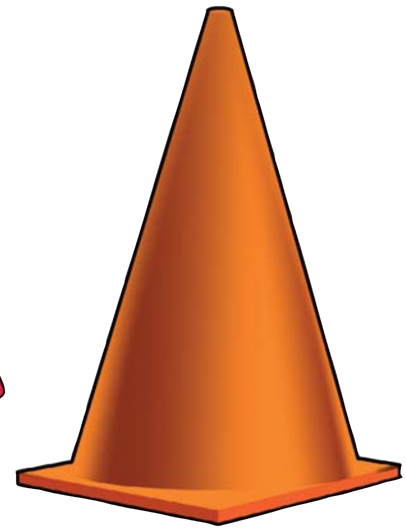
24 a Skoðaðu þennan píramída. Að hvaða leyti er hann frábrugðinn píramídunum hér að ofan?

b Hvernig má finna yfirborðsflatarmál hans?



25 Hér sérðu myndir af fleiri píramídum. Skráðu skilgreiningu á píramída sem getur átt við öll þessi form.





26 Þetta form er kallað keila.

a Lýstu því hvernig formið er búið til.

b Rissaðu upp mynd sem sýnir þau form sem mynda yfirborð keilu.

c Útskýrðu hvernig finna má yfirborðsflatarmál keilu.

27 Berðu saman keilu og píramída. Hvað eiga formin sameiginlegt og hvað greinir þau að?

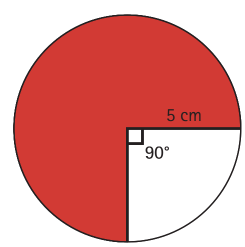
28 Litaði flöturinn myndar hliðarflöt keilu.

a Finndu flatarmál hliðarflatarins.

b Hvert verður ummál grunnflatar keilunnar?

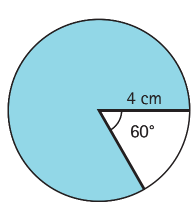
c Hvert verður flatarmál grunnflatarins?

d Hvert er yfirborðsflatarmál keilunnar?

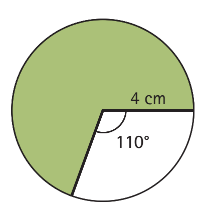


29 Lituðu fletirnir sýna hliðarfleti keilna. Hvert verður yfirborðsflatarmál keilnanna?

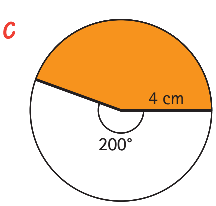
a



b



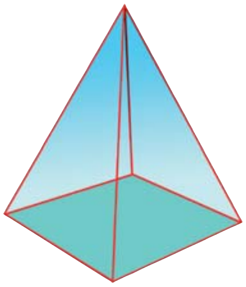
c

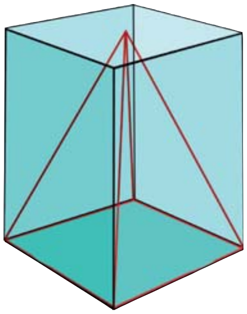


30 Ummál grunnflatar keilu er um það bil 38 cm. Yfirborð keilunnar er myndað úr hring með 8 cm langan geisla. Hringgeirinn sem fjarlægður er úr hringnum afmarkast af geislanum og 90° horni út frá miðju hringsins. Hvert er yfirborðsflatarmál keilunnar?

31 a Hvert er rúmmál réttstrendingsins?

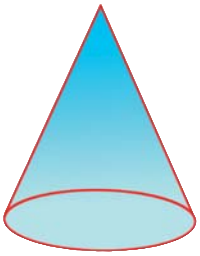
b Rúmmál píramídans er greinilega minna en rúmmál réttstrendingsins. Hvað telur þú að rúmmál píramídans sé stór hluti af rúmmáli réttstrendingsins? Rökstyddu svar þitt.

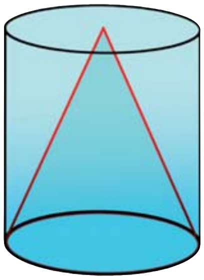




32 a Hvert er rúmmál sívalningsins?

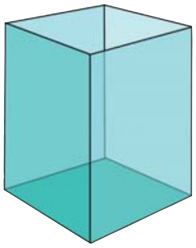
b Rúmmál keilunnar er greinilega minna er rúmmál sívalningsins. Hvað telur þú að rúmmál keilunnar sé stór hluti af rúmmáli sívalningsins? Rökstyddu svar þitt.

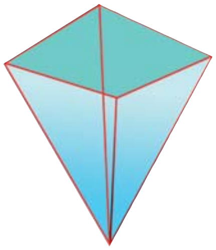




HÓPVERKEFNI

33
- Búið til réttstrending með ferningslaga grunnflöt sem er opinn að ofan.
- Búið til píramída sem hefur sams konar grunnflöt og réttstrendingurinn og sömu hæð og hann. Hafið gat á botni píramídans.
- Fyllið píramídann með grjónum eða sandi og hellið því síðan yfir í rétt-strendinginn.
- Finnið hvert er rúmmál sandsins í réttstrendingnum og áætlið þannig rúmmál píramídans.

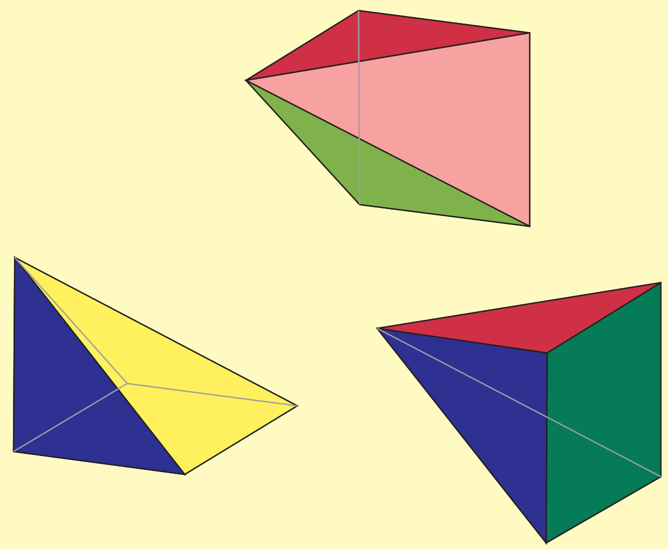




Kannið rúmmál sívalnings og keilu á sama hátt. Þið getið notað eyðublöð sem finna má á vef Námsgagnastofnunar.

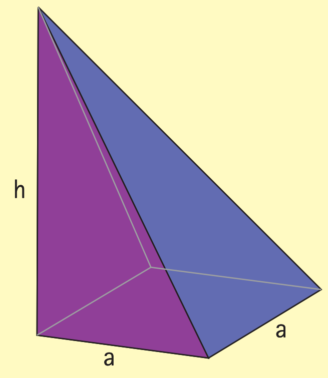
Píramídarnir á blaðsíðunum hér að framan voru allir réttir píramídar eða píramídar þar sem topppunkturinn er beint yfir miðju grunnflatarins. Til eru aðrar gerðir píramída og einn þeirra er yagma. Yagma er gamalt kínverskt heiti yfir píramída sem hefur rétthyrndan grunnflöt og eina hlið sem myndar 90° horn við eitt horn grunnflatarins.

Hér sérðu mynd af yagma með ferningslaga grunnflöt.
Þremur píramídum eins og þessum má raða saman í tening.



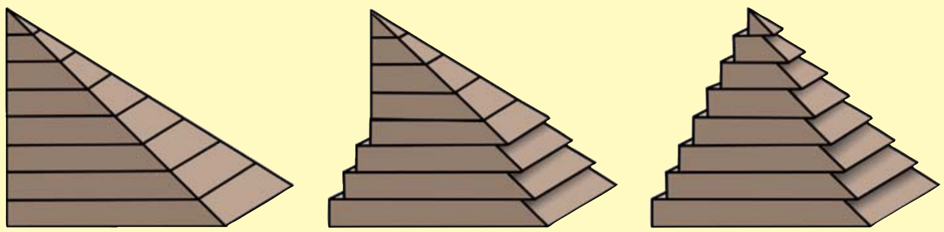
Ef hliðarlengd teningsins er a sést að rúmmál hans er a^3.
Rúmmál hvers píramída (yagma) er því $\boxed{\frac{1}{3}a^3}$ eða $\frac{1}{3}$ af rúmmáli teningsins.

Ef hæð píramídans er breytt, hann hækkaður þannig að hæðin verði t.d. h, þarf að margfalda hæðina a með tiltekinni tölu. Ef hæðin a á að verða h þarf að margfalda a með $\frac{h}{a}$ og rúmmálið breytist í sama hlutfalli. Rúmmál píramída (yagma) með hæðina h verður því $\frac{a^3}{3} \cdot \frac{h}{a}$ eða $\frac{a^2h}{3}$.



Samkvæmt þessari reglu má finna rúmmál yagma með hvaða hæð sem er. Hvað gerist ef topppunkturinn er annars staðar, t.d. yfir miðju ferningsins?

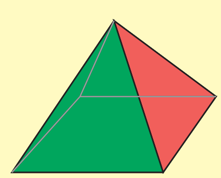
Ímyndum okkur að píramídi sé skorinn í fjölmargar þunnar sneiðar lárétt og að þeim sé síðan hnikað til þannig að toppurinn færist til og endi að lokum yfir miðju ferningsins.



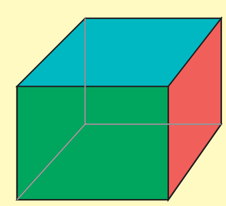
Ef sneiðarnar væru óendanlega margar yrðu hliðar píramídans líka alveg sléttar. Af þessu ætti að vera ljóst að rúmmálið helst óbreytt. Því má nota regluna til að finna rúmmál hvaða píramída sem er sem hefur ferningslaga grunnflöt.

Breyta má grunnfleti píramída úr ferningi sem er $a \cdot a$ í grunnflöt sem er $a \cdot b$ með því að margfalda aðra hliðina með tiltekinni tölu eins og gert var í tengslum við breytingu á hæðinni hér að ofan. Til þess að breyta annarri hliðarlengdinni a í b þarf að margfalda hana með $\frac{b}{a}$ og rúmmálið breytist í sama hlutfalli. Rúmmál píramída með rétthyrndan grunnflöt og hliðarlengdirnar a og b og hæðina h verður því $\frac{a^2h}{3} \cdot \frac{b}{a} = \frac{abh}{3}$.
Þetta sýnir að reikna má út rúmmál píramída með rétthyrndan grunnflöt með því að finna flatarmál grunnflatar og margfalda það með hæðinni og finna síðan $\frac{1}{3}$ af því.

Almennt má segja að rúmmál píramída sé $\frac{1}{3}$ af rúmmáli strendings með sömu hæð og sams konar grunnflöt og píramídinn.

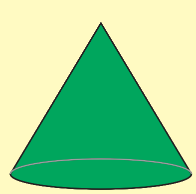


$R = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$

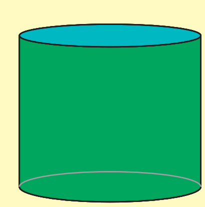


$R = \cdot h \cdot G$

Rúmmál keilu er einnig $\frac{1}{3}$ af rúmmáli sívalnings með sams konar grunnflöt og sömu hæð og keilan.



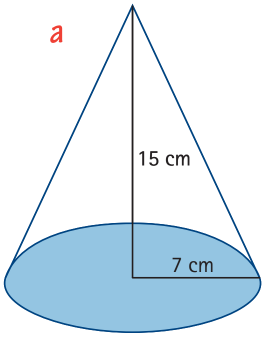
$R = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$



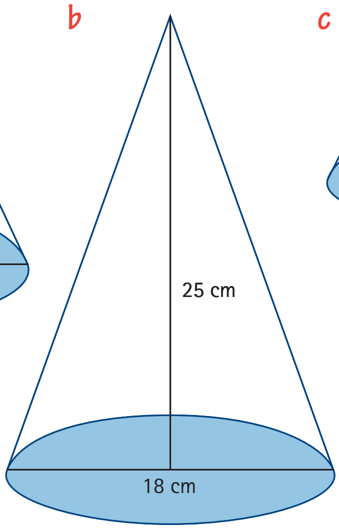
$R = \cdot h \cdot G$

34 Reiknaðu rúmmál og yfirborðsflatarmál þessara forma.

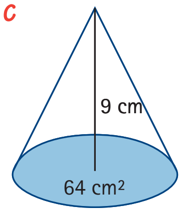
a



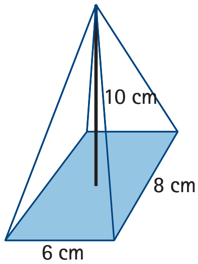
b



c



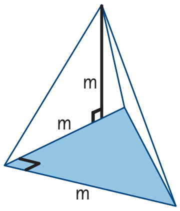
d



35 Hvert er rúmmál píramída með ferningslaga grunnflöt ef hliðar grunnflatar eru 5 cm og hæð hans 6 cm?

36 Hver er hæð píramída með ferningslaga grunnflöt ef hliðarlengdir grunnflatar eru 4 cm og rúmmál hans 48 cm^3?

37 Myndin sýnir píramída með þríhyrndan grunnflöt. Grunnflöturinn er jafnarma, rétthyrndur þríhyrningur. Hæð píramídans er m og lengd skammhliða grunnflatarins er m eins og myndin sýnir. Skráðu reglu sem nota má til að finna rúmmál píramídans út frá óþekktu stærðinni m.

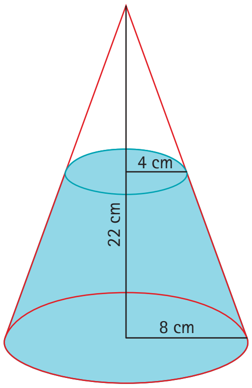


38 Hver er hæð keilu ef flatarmál grunnflatar hennar er 6 cm^2 og rúmmál hennar 8 cm^3?

39 Finndu hæð keilu og ummál grunnflatar ef rúmmál keilunnar er 183 cm^3 og geisli grunnflatar er 5 cm.

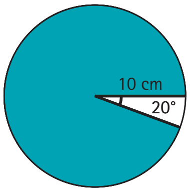
40 a Hvert er rúmmál vatnsins í keilunni?

b Hvert væri rúmmál vatns í keilu sem hefur 113 cm^2 grunnflöt og hæð sem er 16 cm?



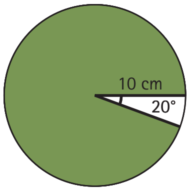
HÓPVERKEFNI

41 Þið eigið að búa til keilur úr pappír, án botns, og kanna hve mikið þær rúma.

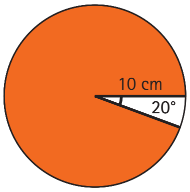


- Teiknið hring með geisla sem er 10 cm.
- Klippið 20° hringgeira út úr hringnum og búið til keilu úr því sem eftir er.
- Búið til fleiri hringi með sama geisla. Klippið út úr þeim 40°, 60°, 80° og 120° hringgeira og búið til keilu úr hverjum og einum.

Þið eigið að finna rúmmál hverrar keilu um sig. Til þess að finna rúmmál keilnanna þurfið þið að finna hæð þeirra og þvermál eða geisla þess flatar sem afmarkar op eða botn þeirra. Þið getið gert þetta með mælingum þegar þið eruð búin að búa keilurnar til. Slíkar mælingar verða þó aldrei alveg nákvæmar. Hæð og þvermál keilnanna má einnig finna með útreikningum.



- Reiknið ummál grunnflatar keilu sem er búin til úr hring með 10 cm langan geisla og þar sem 20° hringgeiri hefur verið fjarlægður. Hve langan geisla hefur grunnflötur keilunnar?

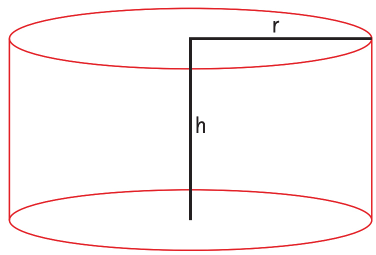


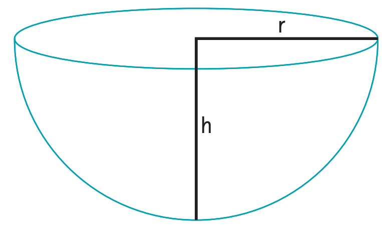
- Skoðið myndina. Þið þekkið nú geisla grunnflatarins. Ytri brún keilunnar, lengdin frá brún botnflatarins að toppi hennar er einnig þekkt því hún er sú sama og geisli upphaflega hringsins eða 10 cm. Þið getið nú notað setningu Pýþagórasar til að finna hæðina því geisli botnflatarins, ytri brún keilunnar og hæðin mynda rétthyrndan þríhyrning.
- Finnið rúmmál keilnanna með útreikningum og setjið niðurstöður ykkar upp í töflu. Gott er að nota töflureikni.

	Ummál	**Geisli**	**Hæð**	**Rúmmál**
Keila 1 (20°)				
Keila 2 (40°)				
Keila 3 (60°)				

- Hve stóran hringgeira ætti að fjarlægja til að fá keilu með sem mest rúmmál?

Við höfum nú skoðað hvernig finna má rúmmál ýmiss konar strendinga og strýta. En hvernig ætli megi finna rúmmál kúlu? Ein leið til að skoða það er að bera saman rúmmál kúlu með tiltekið þvermál og sívalnings með sama þvermál og þá jafnframt sömu hæð og kúlan.



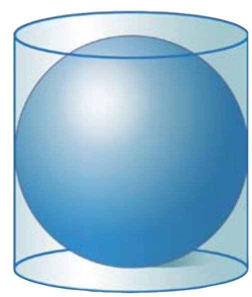


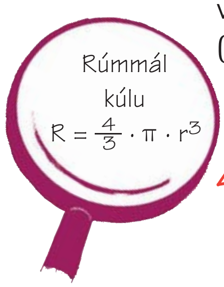
Við skulum byrja á að skoða sívalning og hálfkúlu með sama grunnflöt og sömu hæð. Ef hálfkúlan er fyllt af vatni og vatninu síðan hellt í sívalninginn kemur í ljós að rúmmál hálfkúlunnar er $\frac{2}{3}$ af rúmmáli sívalningsins.

Rúmmál sívalnings er $R = (\pi \cdot r^2) \cdot h$,
svo rúmmál hálfkúlunnar
verður $R = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Þar sem hæðin er jöfn
geislanum í hálfkúlunni
verður rúmmál kúlunnar
(tvær hálfkúlur) $R = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$$R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$





42 Boltar sem notaðir eru í ýmsum íþróttagreinum eru kúlur. Í keppnum er þess gætt að boltar séu í réttum stærðum. Finndu rúmmál þessara bolta.

	Íþróttagrein	**Þvermál**
a	Golf	45,9 mm
b	Tennis	6,35–6,37 cm
c	Kúluvarp kvenna	95–110 mm
d	Kúluvarp karla	110–130 mm
e	Handbolti kvenna	17,2–17,8 cm
f	Fótbolti	21,6– 22,6 cm
g	Körfubolti	21 cm

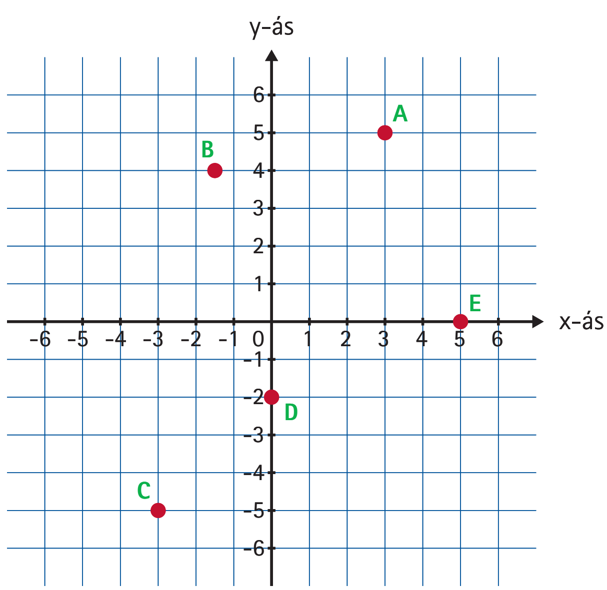
Yfirborðsflatarmál kúlu má finna út frá reglunni $4 \cdot \pi \cdot r^2$

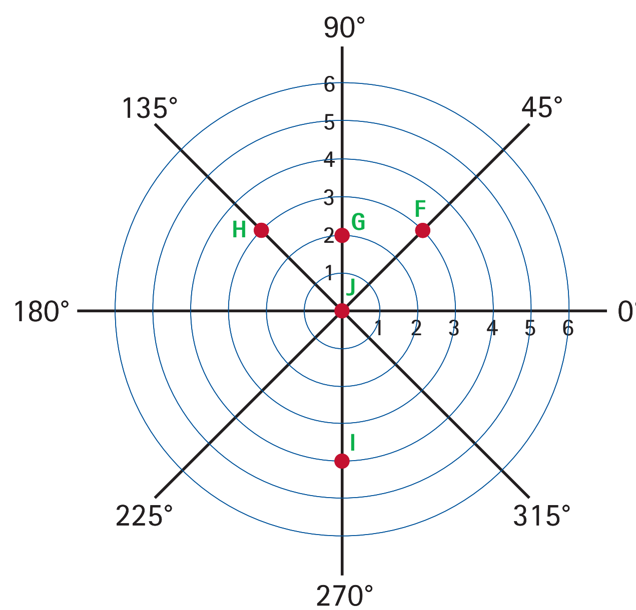
43 Finndu yfirborðsflatarmál boltanna í dæmi 42.

*René Descartes (1596–1650) var frægur stærðfræðingur og heimspekingur. Hann vann að rannsóknum og framþróun algebru, m.a. að því hvernig mætti nota táknmál í algebru. Hann skrifaði bókina **La Geómétrie.** Þar setur hann fram hugmynd að algebrulegri skráningu og leggur til að litlir stafir aftarlega úr stafrófinu séu notaðir til að tákna breytur en litlir stafir fremst í stafrófinu til að tákna fasta. Hann setti líka fram hugmyndina um að skrá veldi með veldisvísi, 8^3.*

Descartes var frumkvöðull að því að nota rétthyrnd hnitakerfi til að kanna og lýsa rúmfræðilegum eiginleikum. Honum tókst með uppfinningu sinni að tengja saman hefðbundna gríska rúmfræði og algebru. Til eru margar gerðir hnitakerfa bæði tvívíð og þrívíð. Önnur gerð hnitakerfa er pólhnitakerfi. Þar eru hnit gefin miðað við fjarlægð frá núllpunkti og horn út frá grunnlínu.

44 Skráðu hnit punktanna sem merktir eru í hnitakerfin.





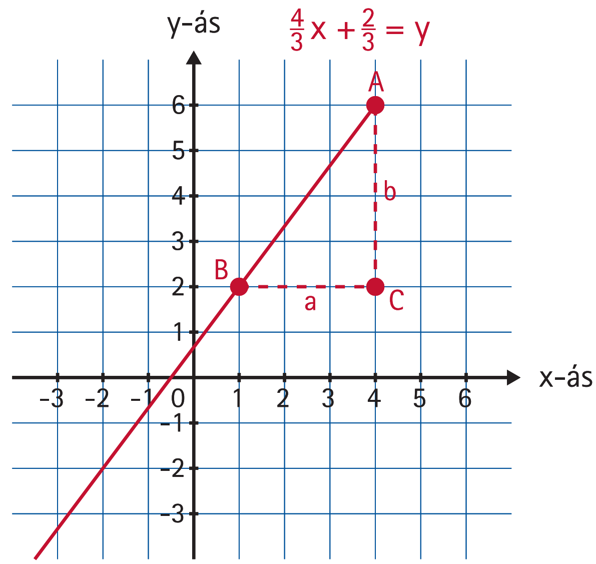
45 Teiknaðu pólhnitakerfi og merktu eftirfarandi punkta inn í það.

a (2, 60°) **b** (2, 225°) **c** (4, 90°) **d** (1, 270°)

Graf jöfnu má teikna í hnitakerfi. Slíkt myndrit má nota til að finna lausnir jöfnu fyrir tiltekin gildi á x eða y.

46 a Skráðu hnit punktanna A og B.

b Hvað segja hnitin þér um lausn jöfnunnar?



Setningu Pýþagórasar um samband hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningum má nýta til að finna fjarlægð á milli punkta á grafi.

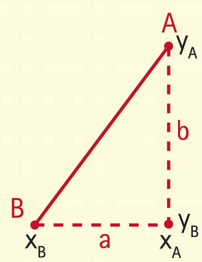
47 Skoðaðu þríhyrning ABC.

a Hver er lengd a?

b Hver er lengd b?

c Hver er fjarlægðin milli punktanna A og B?

Mótlæg hlið við hornið A ber nafnið a.

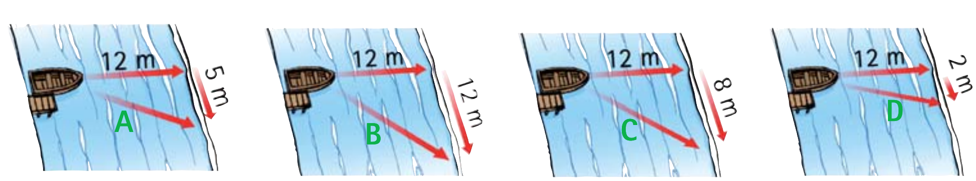


Lengd a finnst með því að finna mismun á x-gildum og lengd b með því að finna mismun á y-gildum. Fjarlægð á beinni línu má því finna með reglunni: $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = AB^2$.

48 Finndu fjarlægð milli punktanna.

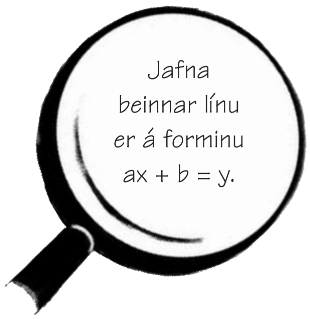
a A(4,6), B(7,2) **b** A(0,0), B(7,2) **c** A(–5,2), B(7,–6)

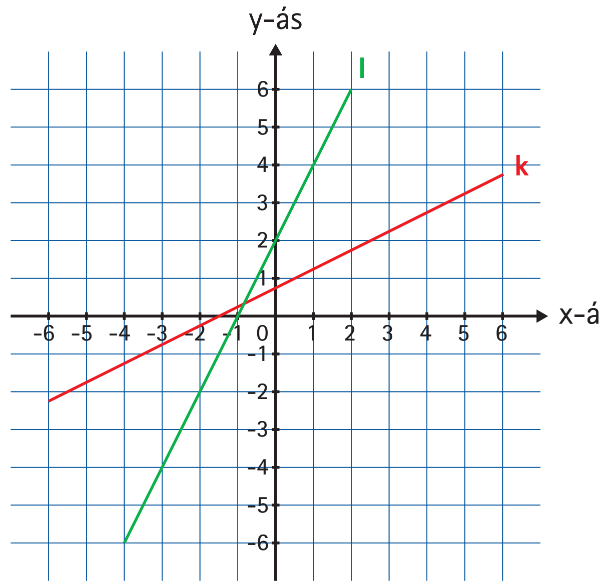
49 a Ferjumaður býður upp á siglingu yfir á. Áin er straumhörð og því berst báturinn með straumnum um leið og hann siglir áfram. Reiknaðu lengd siglingarleiðar A.



b Straumurinn í ánni er ekki alltaf jafnmikill. Ýmislegt hefur áhrif, t.d. vatnavextir og vindur. Siglingarleiðin er því mislöng eftir aðstæðum. Finndu lengd siglingarleiðanna B, C og D.

50 Oft má lesa jöfnu línu af grafi hennar. Skráðu jöfnur línanna k og l.





Erfitt getur verið að lesa jöfnur lína beint úr hnitakerfi ef hallatalan og/eða skurðpunkturinn er ekki heil tala. Reikna má út hallatölu og skurðpunkt við y-ás ef gefnir eru upp tveir punktar á grafinu og vitað er að um jöfnu beinnar línu er að ræða. Hallatala segir til um hve mikið y-gildi breytist ef x-gildi hækkar um einn. Breyting á y-gildi er í réttu hlutfalli við breytingu á x-gildi. Finna má hallatölu með því að finna hlutfall mismunar á y-gildi tveggja punkta og mismunar á x-gildi.
a = hallatala.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{breyting á } y}{\text{breyting á } x}$$

51 a Teiknaðu graf jöfnunnar $2x - 2 = y$.

b Veldu tvo punkta á grafinu og reiknaðu hallatölu línu út frá þeim.

c Veldu tvo aðra punkta og reiknaðu líka hallatöluna út frá þeim.

d Útskýrðu hugtakið hallatala og sýndu dæmi um hallatölu línu.

52 Reiknaðu hallatölu beinnar línu sem hefur punktana

a A(8,12) og B(2,6) b A(2,–4) og B(7,6) c A(2,0) og B(0,4)

53 Skurðpunkt við y-ás má reikna út frá jöfnu beinnar línu $ax + b = y$ ef þekktur er einn punktur og hallatalan.

a A(1,7) og $a = 4$ b A(3,19) og $a = 8$ c A(4,–7) og $a = -1$

Í kaflanum hefur þú oft þurft að nota jöfnur til að leysa rúmfræðileg vandamál. Reglur sem nota má til að reikna ummál, flatarmál, rúmmál, fjarlægðir og hallatölu eru settar fram sem jöfnur á táknmáli algebrunnar. Glíma í verkefnum snýst oft um að greina hvaða stærðir eru þekktar og hverjar óþekktar, setja þekktar stærðir inn í viðeigandi jöfnu og einfalda hana til að fá fram gildi óþekktu stærðarinnar.

$R = l \cdot b \cdot h$ $\qquad$ $R = \frac{l \cdot b \cdot h}{3}$ $\qquad$ $R = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $\qquad$ $R = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$

54 **a** Hver er hæð réttstrendings sem hefur lengdina 5 cm, breiddina 2,5 cm og rúmmálið 47,5 cm^3?

b Hvert er flatarmál grunnflatar sívalnings sem hefur hæðina 7 cm og rúmmálið 197,82 cm^3?

c Hvert er rúmmál keilu með 4 cm geisla og 7 cm hæð?

d Hvert er rúmmál sívalnings með 4 cm geisla og 7 cm hæð?

e Flatarmál grunnflatar píramída er 12 cm^2. Hvert er rúmmálið ef hæðin er 3 cm?

f Hverjar gætu verið hliðarlengdir grunnflatar píramída sem hefur flatarmálið 12 cm^2?

g Hvaða reglu má nota til að finna rúmmál kúlu?

h Hvert er rúmmál kúlu með geislann 2,5?

55 Jöfnu beinnar línu má skrifa á forminu $ax + b = y$.

a Fyrir hvaða stærðir standa bókstafirnir a og b?

b Finndu hallatölu línu þar sem vitað er að $b = 4$ og að ef $x = 2$ er $y = 8$.

c Finndu hallatölu línu þar sem þekktir eru punktarnir A(3,9) og B(–2,–1).

d Hver er fjarlægðin milli punktanna A og B?

Tölur og talnafræði

Góður skilningur á tölum og leikni í meðferð þeirra er grundvöllur þess að geta stundað stærðfræði og leyst úr ýmsum viðfangsefnum í lífi og starfi.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Öðlist góðan skilning á talnamengjum og einkennum þeirra.*
- *Eflir færni þína og skilning á ræðum tölum, m.a. í að skrá lotubundin tugabrot sem almenn brot.*
- *Getir notað veldarithátt og reiknað með veldum.*
- *Þekkir frumtölur og frumþáttun og getir nýtt þér frumþáttun til að finna stærsta sameiginlega þátt og samnefnara.*
- *Getir nýtt þér þekkingu þína í talnafræði til að setja fram einfaldar röksemdafærslur, bæði munnlegar og skriflegar.*

APAR HRAPA

ALLIR GRILLA

1 Ártalið 2002 heillaði marga stærðfræðinga eins og allar spegiltölur gera. Spegiltölur eru tölur eins og 2002, 3003 og 4114.

a Hvenær verður næst spegiltöluártal?

b Hvenær var ártal síðast spegiltala?

c Hve margar spegiltölur eru milli 1 og 2002?

2 a Þeir sem fæddust 18. nóvember 1981 og 28. nóvember árið 1982 skrá fyrri hluta kennitölu sinnar með spegiltölu. Finndu fleiri slíka fæðingardaga.

b Hvaða tölustafir geta verið í einingasæti ártala sem nota má með mánaðardögum og mánuðum til að fyrri hluti kennitölu myndi spegiltölu?

MÚRARARÚM

Töluna 2002 má skrifa sem summu 7 talna í röð. Hvaða tölur eru það?
Finndu hvaða ellefu tölur í röð gefa summuna 2002.
Getur þú fundið fleiri leiðir til að skrifa 2002 sem summu nágrannatalna?

FÍLALÍF

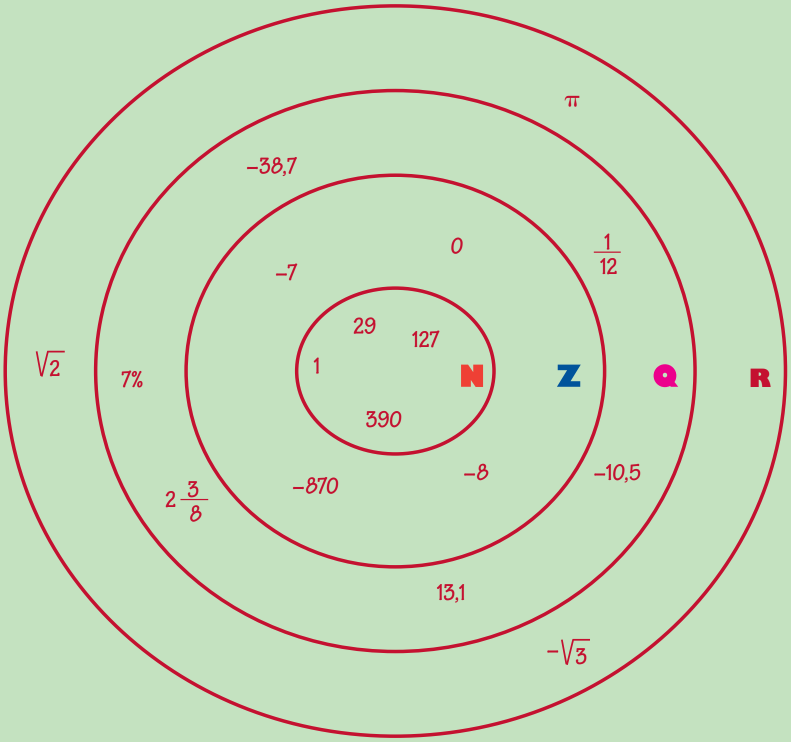
ÓLÍK KÍLÓ

Notkun talna hefur þróast í aldanna rás. Stærðfræðingar hafa rannsakað tölur og eiginleika þeirra og sett fram hugmyndina um talnamengi. Í hverju talnamengi hafa tölur tiltekna sameiginlega eiginleika.

Mengi náttúrlegra talna er táknað með bókstafnum **N**. Í því eru allar heilar, jákvæðar tölur.
N = {1, 2, 3, 4, ...}

Mengi heilla talna er táknað með bókstafnum **Z**. Í því eru náttúrlegar tölur, talan 0 og neikvæðar heilar tölur.
Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Mengi ræðra talna er táknað með bókstafnum **Q**. Í menginu eru allar tölur sem skrifa má sem almennt brot.

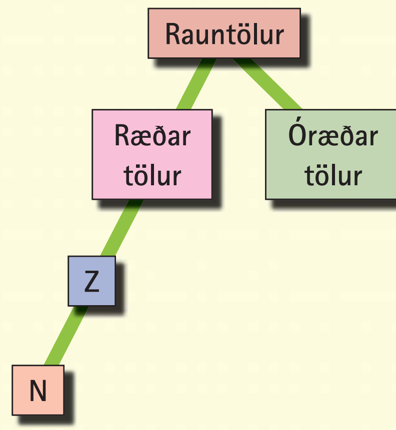


Mengi rauntalna er táknað með bókstafnum **R**.
Í menginu eru bæði ræðar og óræðar tölur. Óræðar tölur eru allar tölur sem ekki er hægt að skrá sem almennt brot. Talan π og $-\sqrt{3}$ eru dæmi um óræðar tölur.

3 *a* Skráðu þrjár tölur sem eru í talnamenginu Z.
b Skráðu þrjár aðrar tölur sem eru bæði í talnamengjunum Q og Z.
c Hvaða eiginleikar eru sameiginlegir með tölum í Q og Z?

4 Í hvaða talnamengjum eru tölurnar
a 3,4 *b* 5 *c* $\frac{35}{7}$ *d* 3π *e* 0,33333... *f* 8,7347

Óræðar tölur eru óendanlega margar. Þær eiga það sameiginlegt að ekki er hægt að skrá þær sem almennt brot og ef þær eru skráðar á tugabrotsform verða aukastafir þeirra óendanlega margir. Mengin N, Z og Q eru ekki hlutmengi í mengi óræðra talna. Óræðar tölur eru þær tölur sem bætast við ræðu tölurnar og mynda með þeim mengi rauntalna (R). Tölur má því flokka í ræðar og óræðar tölur.

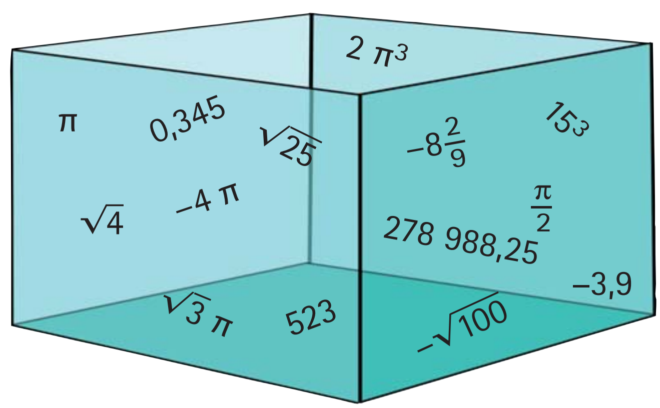


5 Tölurnar í kassanum eru allar rauntölur.

a Flokkaðu tölurnar í ræðar tölur og óræðar.

b Hverjar ræðu talnanna eru heilar tölur?

c Hverjar ræðu talnanna eru náttúrlegar tölur?



6 Leystu jöfnurnar og skráðu í hvaða talnamengjum lausnin er.

a $2x + 5 = 7$ **b** $2x + 5 = 10$ **c** $2x + 5 = 1$ **d** $2x + 5 = 5\frac{1}{3}$

7 Reiknaðu dæmin og skráðu í hvaða talnamengjum svarið er.

a $247 : 3$ **c** $2 + \sqrt{3} + 5$ **e** $\pi + \pi$ **g** $18 - 3\pi + 2\pi$

b $245 : 5$ **d** $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ **f** $14 + 7,5 - 32$ **h** $2\frac{1}{6} - \frac{5}{3}$

Til eru jöfnur sem ekki eiga sér neina lausn í mengi rauntalna.
Það á til dæmis við um $x \cdot x = -4$
Til þess að hægt sé að leysa jöfnur af þessari gerð hefur verið bætt við talnamengin og búin til ný gerð talna. Þær eru kallaðar ímyndaðar tölur. Það eru líka til tölur sem eru blanda af rauntölum og ímynduðum tölum. Þær eru kallaðar tvinntölur.

Í stærðfræði er mikilvægt að gera grein fyrir forsendum þegar dæmi eru sett fram. Það þarf að vera ljóst þegar leysa á reikningsdæmi hvert grunnmengið er. Það ákvarðar hvort til er lausn á dæminu. Frádráttardæmið 4 – 5 er ekki hægt að leysa með tölum úr mengi náttúrlegra talna (N) því talan –1 er ekki náttúrleg tala. Ef grunnmengið er hins vegar mengi heilla talna (Z) er til lausn.

Þegar leitað er lausna er því einungis hægt að nota tölur sem eru í því talnamengi sem gefið er upp. Sú hefð hefur myndast að ef ekki er gefið upp grunnmengi er miðað við mengi rauntalna (R).

Er til lausn við dæmum 8-11? Finndu lausnina ef svo er.

8 Grunnmengið er N. Það má skrá sem G = N

a $23 + 15\,590$ c $23 - 15\,590$ e $3211 - 13$ g $3211 : 13$

b $23 \cdot 15\,590$ d $23 : 15\,590$ f $3211 \cdot 13$ h $13 : 3211$

9 Grunnmengið er Z. G = Z

a $-9 + 5 - 3 + 6$ c $34 \cdot (-2) : 4$ e $1729 - 2029$ g $2029 - 1729$

b $-9 : 5 - 3 + 6$ d $34 \cdot (-2) : (-2)$ f $1729 \cdot 2029$ h $2029 : 1729$

10 Grunnmengið er Q. G = Q

a $1750 : 5$ c $1750 : 2{,}5$ e $1750 : \frac{1}{3}$ g $1750 : 0$

b $1750 \cdot \frac{2}{9}$ d $1750 \cdot 450$ f $1750 \cdot \frac{4}{3}$ h $0 : 1750$

11 Grunnmengið er R. G = R

a $157 : 3$ c $\frac{2\pi}{2}$ e $\frac{1}{2} \cdot 7{,}5$ g $\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 7{,}5$

b $1\frac{5}{7} : 3$ d $\sqrt{36}$ f $3{,}7 \cdot 15 : \frac{3}{4}$ h $\pi + \sqrt{2}$

12 Hvert er gildi stæðunnar $x^2 + 3x - 4$ ef x er

a 1 b 0 c 0,5 d 4

e Hvaða skilyrði þarf x að uppfylla til þess að gildi stæðunnar $x^2 + 3x - 4$ sé í mengi náttúrlegra talna? En í mengi heilla talna?

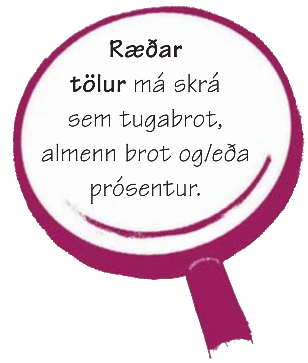
13 Leystu verkefnin og skráðu niðurstöður þínar.

a Hve stór hluti er 60 af 80?

b En 80 af 60?

c Hve stór hluti er 340 cm af 2 metrum?

d Berðu niðurstöður þínar saman við niðurstöður bekkjarfélaga þinna. Er hægt að skrá hlutföllin á fleiri en einn veg?



14 Berðu saman þessar stærðir. Greindu frá hvernig þú ferð að.

a $\frac{7}{20}$ og $\frac{3}{10}$ *b* 6 hlutar af 13 og 13 hlutar af 28 *c* 0,33 og $\frac{1}{3}$ og 33%

15 Skráðu svör þín bæði sem almenn brot, tugabrot og prósentur.

a Hjálmar blandaði vatni saman við 375 ml af frostlegi og bjó til 500 ml blöndu. Hve stór hluti af blöndunni er frostlögurinn?

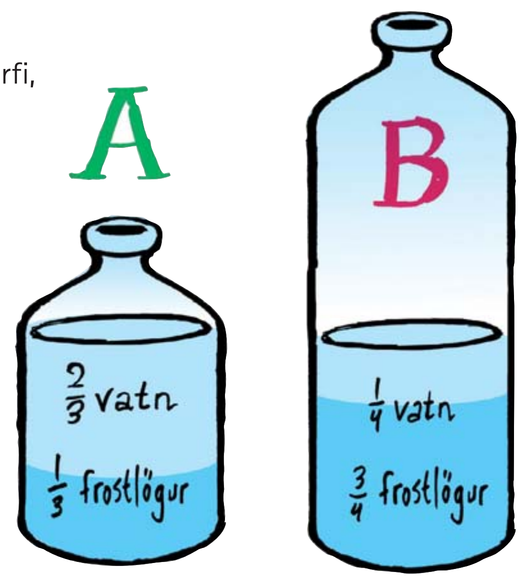
b Hjálmar býr líka til 1250 ml blöndu sem í eru 700 ml af frostlegi. Er sama hlutfall af frostlegi í báðum blöndunum?

16 Í eðlisfræðitilraun var blandað saman 540 mg af járnsvarfi, 320 mg af brennisteini og 340 mg af sandi.

a Hve stór hluti af blöndunni er brennisteinn?

b Hve mörg prósent af blöndunni eru járnsvarf?

c Í annarri blöndu er heildarmassinn 874 g. Járnsvarf er 420 g af blöndunni. Hvor blandan hefur hærra hlutfall af járnsvarfi? Rökstyddu svar þitt.

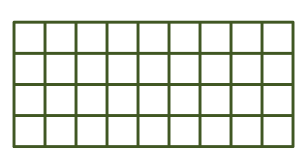


17 Hvert verður hlutfallið af frostlegi og vatni ef hellt er úr flösku A í flösku B?

18 *a* Teiknaðu rétthyrning sem er 9 · 4 rúður.

b Litaðu $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, og $\frac{1}{9}$ af myndinni þannig að hlutarnir fjórir skarist ekki.

c Hve mörg prósent af rétthyrningnum eru ólituð?



19 *a* Skrifaðu niður tvö ólík almenn brot.

b Skrifaðu niður almennt brot með teljara sem er summa úr teljurum brotanna þinna og nefnara sem er summa nefnaranna í sömu brotum.
Er nýja almenna brotið tala sem liggur á milli fyrstu brotanna?

c Notaðu aftur sömu almennu brotin.

Hver yrði teljarinn ef teljari fyrra brotsins væri margfaldaður með tveimur og lagður við teljara seinna brotsins? Hver yrði nefnarinn ef hann væri fundinn á sama hátt? Hvaða brot kemur fram?
Er nýja almenna brotið tala sem liggur á milli fyrstu brotanna?

20 Raðaðu eftir stærð.

a $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{5}{12}$

b 0,33 $\frac{2}{6}$ 32% $\frac{3}{8}$

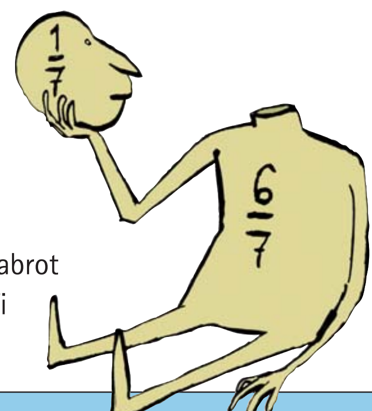
c 0,4 $\frac{1}{4}$ 35% 6

d $\frac{11}{12}$ 90% $\frac{32}{35}$ 0,89

21 Breyttu þessum almennu brotum í tugabrot. Notaðu vasareikni og skráðu alla aukastafi sem koma fram á skjánum.

a $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$

b Öllum almennum brotum (ræðum tölum) má breyta í endanleg eða óendanleg lotubundin tugabrot. Hverjum af brotunum í a-lið var hægt að breyta í endanlegt tugabrot og hverjum í óendanlegt lotubundið tugabrot?



22 Skráðu 3–4 almenn brot sem þú telur að hægt sé að breyta í endanleg tugabrot. Sýndu fram á að það sé hægt.

23 Skráðu 3–4 almenn brot sem þú telur að verði óendanleg lotubundin tugabrot. Breyttu þeim í tugabrot með því að nota vasareikni og skráðu alla aukastafi sem koma fram á skjánum.

Summa þriggja talna er 98. Hlutfallið milli fyrstu og annarrar tölu er $\frac{2}{3}$ og hlutfallið milli annarrar og þriðju er $\frac{5}{8}$. Hver er önnur talan?

Breyta má almennum brotum í endanleg tugabrot ef nefnari þeirra er veldi af 10 eða ef lengja má brotin þannig að nefnarinn verði veldi af 10.

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$$

Ef breyta á endanlegu tugabroti í almennt brot þarf að athuga um hve stóra hluta er að ræða t.d. tíundu hluta eða hundraðshluta. Fjöldi aukastafa fyrir aftan kommu segir til um það. Reynt er að fullstytta almenna brotið sem fram kemur.

24 Breyttu almennu brotunum í tugabrot.

a $\frac{7}{10}$ b $\frac{4}{5}$ c $\frac{6}{100}$ d $\frac{13}{25}$ e $\frac{9}{45}$ f $\frac{3}{8}$ g $\frac{27}{40}$ h $\frac{5}{4}$

25 Breyttu tugabrotunum í almenn brot. Fullstyttu ef hægt er.

a 0,6 b 0,35 c 0,003 d 3,5 e 0,8 f 0,012 g 2,25 h 1,375

Ekki eru öll tugabrot endanleg eins og tugabrotin í dæmi 25. Þú veist líklega að lotubundna óendanlega tugbrotið 0,33333333… jafngildir almenna brotinu $\frac{1}{3}$ og að 0,66666666… jafngildir almenna brotinu $\frac{2}{3}$. Þessi brot er ekki hægt að lengja þannig að nefnari þeirra verði 10, 100, 1000 eða eitthvert annað veldi af 10. Í óendanlegum, lotubundnum tugabrotum koma fram ákveðnir tölustafir sem endurtaka sig sífellt. Endurteknu tölustafirnir eru kallaðir **lota**. Lotan er oft gefin til kynna með yfirstrikun.

$0{,}323232\ldots = 0{,}\overline{32}$. Lotan er 32 og lengd hennar er 2.

26 Skráðu lotuna með yfirstrikun og tilgreindu lengd hennar.

a 0,77777… b 0,353535… c 0,385385… d 0,76123761237…

27 Notaðu vasareikni og breyttu almennu brotunum í tugabrot. Skoðaðu hvernig tölustafirnir endurtaka sig og skráðu lotuna.

a $\frac{7}{11}$ b $\frac{5}{11}$ c $\frac{10}{41}$ d $\frac{17}{37}$ e $\frac{21}{37}$ f $\frac{4}{9}$ g $\frac{10}{9}$ h $\frac{3}{13}$

28 Breyttu almennu brotunum í tugabrot og skráðu lotuna.

a $\frac{1}{7}$ b $\frac{2}{7}$ c $\frac{3}{7}$ d $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{7}$ f $\frac{6}{7}$ g $\frac{9}{7}$ h $\frac{13}{7}$

Lota í aukastöfum tugabrota kemur ekki alltaf strax fram eins og í tugabrotinu 0,4090909... Þá er lotan 09. Loturnar geta verið mislangar og stundum er ekki hægt að sjá lotuna á venjulegum vasareikni. Gott getur verið að nota töflureikni eða vasareikni í tölvu til að greina lengri lotur. En það eru líka til óendanleg, lotulaus tugabrot og þú hefur nú þegar kynnst nokkrum þeirra, þ.e.a.s. óræðu tölunum. Dæmi um slíkar tölur eru talan pí og $\sqrt{2}$. Öllum ræðum tölum má breyta í almenn brot.

Hvernig skyldi vera hægt að breyta lotubundna tugabrotinu 0,4444444... í almennt brot?
Það er erfitt að vera með alla þessa óendanlega mörgu aukastafi og skráningin á stærðinni verður aldrei hárnákvæm. Til er leið til þess að breyta lotubundnu tugabroti í almennt brot.

Dæmi A

$x = 0{,}44444\ldots$
Ef skrá á lotubundna tugabrotið $0{,}\overline{4}$ sem almennt brot er byrjað á því að greina lotuna.
Lengd lotunnar er 1.
Því er x margfaldað með 10^1.

$$\begin{aligned} 10x &= 4{,}44444\ldots \\ -\;x &= 0{,}44444\ldots \\ \hline 9x &= 4 \\ x &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Dæmi B

$x = 0{,}545454\ldots$
Ef skrá á lotubundna tugabrotið $0{,}\overline{54}$ sem almennt brot er byrjað á því að greina lotuna.
Lotan er 54 og er lengd hennar því 2.
Því er x margfaldað með 10^2.

$$\begin{aligned} 100x &= 54{,}545454\ldots \\ -\;x &= 0{,}545454\ldots \\ \hline 99x &= 54 \\ x &= \frac{54}{99} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

Þessi leið byggist á því að velja veldi af tíu til að margfalda tugabrotið með þannig að ekki verði eftir aukastafir þegar lotubundna tugabrotið er dregið frá margfeldinu. Ef lotan er þrír stafir þarf að margfalda með 10^3 en ef hún er tveir stafir með 10^2. Almennt má setja þetta þannig fram að ef lengd lotunnar er x þá er margfaldað með 10^x.

29 Breyttu í almennt brot. Byrjaðu á því að skrá lotuna með yfirstrikun og lengd hennar.

a 0,363636... **c** 0,434343... **e** 0,232232...
b 0,22222... **d** 0,534534... **f** 0,99999...

Veldarithátttur er oft notaður þegar skrifaðar eru mjög háar eða mjög lágar tölur. Það er líka hentugt að nota veldarithátt þegar reiknað er með tölum sem skrá má með sama veldisstofni. Þá má einfalda reikninga mjög mikið.

30 Reiknaðu.

a 2^5 *b* 2^2 *c* 2^8 *d* 2^0

31 Skráðu sem veldi af 2.

a 8 *b* 128 *c* 512 *d* 1024

32 Settu fram nokkrar stæður sem má einfalda og fá niðurstöðuna 2^6.

33 *a* Lýstu því hvernig nota má töfluna til að útskýra af hverju $49 \cdot 343 = 16807$.

b Notaðu töfluna til þess að finna gildi $\frac{5764801}{823543}$

c Notaðu töfluna til þess að finna gildi $\frac{117649}{2401}$

d Tölustafurinn í einingasætinu 7^6 er 9. Hvaða tölustafur er í einingasætinu í 7^{12}?

$7^0 = 1$
$7^1 = 7$
$7^2 = 49$
$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$
$7^5 = 16807$
$7^6 = 117649$
$7^7 = 823543$
$7^8 = 5\,764\,801$

34 Þrjár heilar tölur í röð eru margfaldaðar saman og tölunni í miðjunni bætt við.
Dæmi: $3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 = 4^3$

a Finndu fleiri tölur sem þetta samband gildir fyrir.

b Gildir þetta alltaf ef notaðar eru þrjár heilar tölur í röð? Sýndu fram á sambandið með því að tákna miðjutöluna sem n.

Soffía heldur að það að leggja saman tvær tölur og hefja summuna í annað veldi gefi sömu niðurstöðu og að hefja hvora tölu fyrir sig í annað veldi og leggja þær síðan saman. Rannsakaðu hvort þetta er stundum satt, alltaf satt eða aldrei satt.

35 Finndu gildi n. **a** $8^2 = 2^n$ **b** $27^2 = 3^n$

36 Hvaða tala er stærst?

a $(2^3)^3$ **b** $(2^5)^3$ **c** $(3^2)^5$ **d** $(3^5)^2$ **e** $(5^2)^3$

HÓPVERKEFNI

37 a Skrifið 64 sem veldi af tveimur.
Berið skráninguna saman við $(2^3)^2$.
Hvað er líkt?

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

b Hvaða tala kæmi fram ef veldisstofninn væri 2 en veldisvísarnir væru 5 og 2?

c En ef veldisvísarnir væru 2 og 4?

d Hvað breytist ef veldisstofninn er 4 en ekki 2? Hvað ef ...?

e Setjið fram fleiri spurningar af þessum toga og rannsakið hvaða regla gildir um að hefja veldi í veldi.

f Setjið fram reglu um einföldun dæma af þessu tagi $(a^m)^n =$

38 a Hvaða þrjár náttúrlegar tölur, x, y og z, uppfylla skilyrðin að $(x^y)^z = 64$?

b Finndu nokkur dæmi um gildi x, y og z.

39 a Tvær sléttar tölur í röð eru hafnar í annað veldi.
Mismunur ferningstalnanna sem fram koma er 44.
Hverjar eru tölurnar?

$8^2 - 6^2 = 28$

b Tvær sléttar tölur í röð lægri en 30, eru hafnar í annað veldi.
Mismunur ferningstalnanna sem fram koma er ferningstala. Hverjar eru tölurnar?

40 Finndu hvenær Járngerður er fædd ef árið 2025 verður ferningstala af aldri hennar.

Stærðin y^2 stendur fyrir ferningstölu og y er heil tala. Skoðaðu stæðuna $9 + y^2$.
Útskýrðu hvernig hægt er að vita að til eru gildi fyrir y þar sem stæðan táknar ekki ferningstölu. Útskýrðu hvers vegna stæðan $16y^2$ hlýtur alltaf að vera ferningstala.

Á öllum vasareiknum er aðgerðin að finna ferningsrót innbyggð í takkanum $\sqrt{\ }$

41 Finndu ferningsrót og skráðu hana með tveggja aukastafa nákvæmni.

a $\sqrt{12}$ **b** $\sqrt{32}$ **c** $\sqrt{15}$ **d** $\sqrt{81}$ **e** $\sqrt{252}$ **f** $\sqrt{1250}$

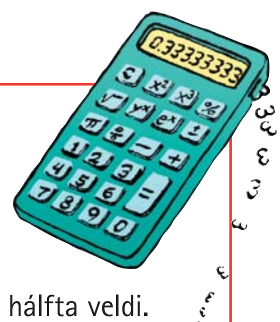
42 Það að finna ferningstölur og ferningsrætur eru andhverfar aðgerðir. Ferningsrætur geta verið bæði jákvæðar og neikvæðar tölur. Til dæmis er $(-3) \cdot (-3) = 3 \cdot 3$. Venjan er að gefa aðeins eina jákvæða ferningsrót nema sérstaklega sé beðið um annað. Þá er sett ± fyrir framan ferningsrótarmerkið $\pm\sqrt{9} = \pm 3$. Aldrei er hægt að finna ferningsrót af neikvæðum tölum. Hvernig má útskýra það?

43 Finndu ferningsrætur.

a $\sqrt{121}$ **b** $\sqrt{169}$ **c** $\sqrt{25}$ **d** $\sqrt{625}$ **e** $\sqrt{10\,000}$ **f** $\sqrt{256}$

44 a Fjögurra stafa ferningstala hefur 6 í einingasætinu. Hvaða tölustafur gæti verið í einingasætinu í ferningsrót tölunnar? Gæti ferningsrótin verið oddatala? Útskýrðu svarið.

b Fimm stafa ferningstala hefur 9 í einingasætinu. Er ferningsrót tölunnar slétt tala eða oddatala? Útskýrðu svarið.



HÓPVERKEFNI

45 a Hvert er gildi $\sqrt{16}$?

b Finna má $16^{\frac{1}{2}}$ með því að ýta á takkana

1 6 ^ (1 a b/c 2) =

c Berið saman aðgerðirnar að finna ferningsrót og að hefja í hálfta veldi.

d Prófið á sama hátt að finna ferningsrót fyrir tölurnar 49 25 7

e Ræðið út frá athugunum ykkar hvað þið getið ályktað um samband $a^{\frac{1}{2}}$ og $\sqrt{a}$.

46 Reiknaðu og veldu rétt merki $<$ $=$ $>$

a $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ ☐ $\sqrt{13}$ **c** $\sqrt{25} + \sqrt{16}$ ☐ $\sqrt{41}$ **e** $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ ☐ $\sqrt{9}$

b $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ ☐ $\sqrt{36}$ **d** $\sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$ ☐ $\sqrt{400}$ **f** $\sqrt{25} : \sqrt{16}$ ☐ $\sqrt{\frac{25}{16}}$

g Hvaða reikniaðgerðir eru notaðar þar sem þú valdir að setja jafnaðarmerkið?

47 Reiknaðu.

a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ **c** $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$ **d** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}$ **e** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

Ferningstölur eru tölur sem hafnar hafa verið í annað veldi.
Teningstölur eru tölur sem hafnar hafa verið í þriðja veldi.

48 Finndu ferningstölu talnanna.

a 5 b 7 c –7 d 11 e –2 f 3

49 Finndu teningstölu talnanna.

a 5 b 7 c –7 d 11 e –2 f 3

50 Töluna 28 má skrifa sem summu tveggja teningstalna. $28 = 1^3 + 3^3$
Skrifaðu töluna 35 sem summu tveggja teningstalna.

51 Sigurður bjó til teningstölu með því að slá 63 inn í vasareikninn sinn og hefja töluna í þriðja veldi. Hvað þarf hann að gera til þess að fá aftur upphafstöluna? Prófaðu aðferð þína á teningstölunum sem þú fannst í dæmi 48.

52 a Er hægt að finna teningsrót af neikvæðum tölum? Prófaðu nokkrar tölur.

b Ef teningstala er jákvæð hvort er teningsrótin jákvæð eða neikvæð tala?

53 Finndu teningsrót.

a $\sqrt[3]{125}$ b $\sqrt[3]{-1}$ c $\sqrt[3]{-64}$ d $\sqrt[3]{216}$ e $\sqrt[3]{-1331}$ f $\sqrt[3]{512}$

54 Finndu ferningsrót ef hægt er og skráðu hana með tveggja aukastafa nákvæmni.

a $\sqrt{56}$ b $\sqrt{-35}$ c $\sqrt{278}$ d $\sqrt{2764}$ e $\sqrt{-9261}$ f $\sqrt{267}$

55 Reiknaðu þessi dæmi ef þú hefur vasareikni með teningsrótartakka. $\sqrt[x]{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$
Finndu teningsrót og skráðu með tveggja aukastafa nákvæmni.

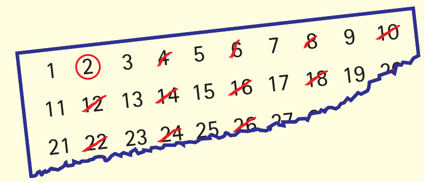
a $\sqrt[3]{56}$ b $\sqrt[3]{-35}$ c $\sqrt[3]{278}$ d $\sqrt[3]{2764}$ e $\sqrt[3]{-9261}$ f $\sqrt[3]{267}$

56 Reiknaðu.

a $\sqrt{144}$ b $\sqrt[3]{-1}$ c $\sqrt[3]{343}$ d $\sqrt{343}$ e $\sqrt[3]{729}$ f $\sqrt{729}$

Skúli heldur því fram að summa nágrannaoddatalna sé alltaf mismunur tveggja ferningstalna. Ertu sammála Skúla? Rökstyddu svar þitt.

Frumtölur eru allar náttúrlegar tölur stærri en einn sem einungis hafa þættina einn og töluna sjálfa.
Aðrar náttúrlegar tölur eru samsettar.
Dæmi um frumtölur eru 5, 11 og 19.



57 **a** Hvaða frumtölur lægri en 50 þekkir þú?

b Hve margar frumtölur lægri en 100 hafa 7 sem tölustaf?

c Úr tölustöfunum 1, 3 og 7 má búa til níu tveggja stafa tölur. Hve margar þeirra eru frumtölur?

58 Þegar um háar tölur er að ræða er erfitt að greina hvort tala er frumtala eða ekki. Hverjar af þessum tölum geta ekki verið frumtölur og eru því samsettar tölur? Rökstyddu svar þitt.

a 367 **b** 369 **c** 420 **d** 428 **e** 579 **f** 580 **g** 825 **h** 1973 **i** 1981

b Frumþáttaðu þær tölur úr a-lið sem þú ert viss um að séu samsettar tölur.

60
2 30
2 15
3 5

Við frumþáttun er byrjað á að kanna hvort lægsta frumtalan, þ.e. 2, gengur upp í töluna og síðan er haldið áfram að prófa hvort frumtölur ganga upp í töluna þar til allir frumþættir eru fundnir.

60 – 30 – 15 – 5 – 1
2 2 3 5

Til er regla sem segir að í samsettum tölum hljóti annar þátturinn að vera minni en ferningsrót tölunnar en hinn stærri nema þeir séu báðir jafnir ferningsrótinni. Þetta þýðir að ef engin frumtala sem er minni en ferningsrót tölunnar gengur upp í henni er talan frumtala.

c Kannaðu þær tölur úr a-lið sem þú ert ekki viss um hvort eru frumtölur eða samsettar tölur. Byrjaðu á að finna ferningsrót þeirra og kannaðu síðan hvort allar frumtölur lægri en ferningsrótin ganga upp í tölurnar.

59 Eru þessar tölur frumtölur?

a 53 **b** 89 **c** 157 **d** 373 **e** 391 **f** 457 **g** 1291 **h** 1337

Tölustafirnir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 og 9 eru notaðir til að búa til fjórar tveggja stafa frumtölur. Hver er summa þeirra?

Nota má frumþáttun til þess að finna lægstu tölu sem tvær eða fleiri tölur ganga upp í og stærsta sameiginlega þátt þeirra (hæstu tölu sem gengur upp í þær).

Dæmi

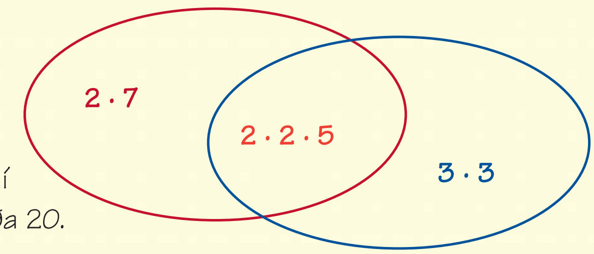
Frumþættir tölunnar 280 eru $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ eða $2^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Frumþættir tölunnar 180 eru $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ eða $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Gott er að skrá frumþætti talnanna í mynd.

Sameiginlegir þættir eru $2 \cdot 2 \cdot 5$.

Hæsta talan sem gengur upp í báðar tölurnar er því $2^2 \cdot 5$ eða 20.



Lægsta tala sem báðar tölurnar ganga upp í inniheldur stærsta sameiginlega þáttinn og að auki alla aðra þætti sem ekki eru sameiginlegir báðum tölunum eða $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$.

Talan er því $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{2520}$.

$180 \cdot 14 = 2520$ $280 \cdot 9 = 2520$

60 Frumþáttaðu tölurnar og skráðu þættina í mynd. Finndu lægstu tölu sem báðar tölurnar ganga upp í og stærsta sameiginlega þátt þeirra.

a 45 og 126 **b** 112 og 154 **c** 420 og 135 **d** 440 og 350 **e** 112 og 440

61 Styttu þessi brot.

a $\frac{45}{126}$ **b** $\frac{112}{154}$ **c** $\frac{135}{420}$ **d** $\frac{350}{440}$ **e** $\frac{112}{440}$

Þegar stytta á brot þarf að finna hæstu tölu sem gengur upp í bæði teljara og nefnara. Þegar leggja á saman ósamnefnd brot þarf oft að finna lægstu tölu sem báðar tölurnar ganga upp í eða samnefnara talnanna. Þá getur verið gott að frumþátta teljara og nefnara.

62 Reiknaðu.

a $\frac{2}{45} + \frac{11}{126}$ **b** $\frac{52}{112} + \frac{71}{154}$ **c** $\frac{11}{135} + \frac{17}{420}$ **d** $\frac{7}{440} + \frac{9}{350}$ **e** $\frac{25}{112} + \frac{55}{440}$

63 Reiknaðu.

a $\frac{5}{12} + \frac{5}{18}$ **b** $\frac{7}{18} + \frac{11}{24}$ **c** $\frac{13}{24} - \frac{5}{27}$ **d** $1\frac{19}{27} - \frac{4}{45}$ **e** $5\frac{27}{45} + 3\frac{18}{126}$

64 Frumtölur eiga sér einungis tvo deila, þ.e. einn og töluna sjálfa. Hvaða tölur eru það sem eiga sér einungis þrjá deila, þ.e. einn, töluna sjálfa og eina tölu að auki? Rökstyddu svarið og gefðu nokkur dæmi.

65 Gott er að nýta sér frumþáttun til þess að finna hvaða tölur ganga upp í tiltekinni tölu. Frumþættir 360 eru $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Þú sérð strax að 5, 8 og 9 ganga upp í 360.

a Finndu allar tölur sem ganga upp í 360.

b Hvaða tölur eru það og hve margar eru þær?

66 Finndu alla deila þessara talna.

a 140 **b** 205 **c** 676 **d** 453

67 Hve margar þrenndir af náttúrlegum tölum (x, y og z) uppfylla skilyrðið $x \cdot y \cdot z = 400$?

68 Tala er margfeldi af 3 og 4. Hún er þriggja stafa tala.

a Hver er lægsta talan sem þetta gæti verið? Rökstyddu svar þitt.

b Hver er lægsta þriggja stafa tala sem er margfeldi af 12 og 21?

69 Margfeldi fjögurra náttúrlegra talna í röð er 3024. Hvaða tölur eru það?

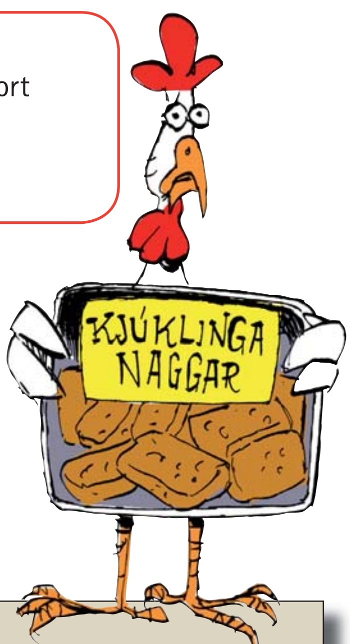
HÓPVERKEFNI

70 Til eru nokkrar einfaldar reglur sem hægt er að nota til að kanna hvort tölurnar frá 2–10 ganga upp í annarri tölu. Hvaða reglur eru þetta? Sýnið nokkur dæmi.

71 Hvaða tölur frá 2–10 ganga upp í tölurnar?

a 1725 **c** 8892 **e** 444 **g** 3285

b 1251 **d** 1918 **f** 427 **h** 3282



72 Hve margar af fyrstu 500 náttúrlegu tölunum eru deilanlegar með 3, 4 og 5?

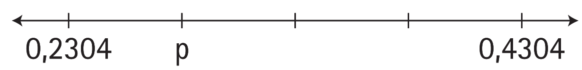
73 Hve margar þriggja stafa tölur eru deilanlegar annaðhvort með 3 eða 7?

Kjúklinganaggar eru seldir í pakkningum með 6, 9 og 20 nöggum í hverjum pakka. Hvaða fjölda upp í 30 getur þú keypt með því að raða saman pakkningum á mismunandi hátt?

Á þessari blaðsíðu eru nokkrar talnaþrautir sem reyna á hvort þú hafir náð valdi á ýmsum af þeim hugtökum sem fengist hefur verið við í kaflanum.

74 Hve mörg margfeldi af 10, sem eru minni en 400, eru summa fjögurra náttúrlegra talna í röð? En ef miðað er við 1000?

75 Skrifaðu gildi p með fjórum aukastöfum.



76 Ártalið 2006 er margfeldi þriggja frumtalna. Hvaða ár gerist það næst?

77 a Hver er 2008. slétta talan?

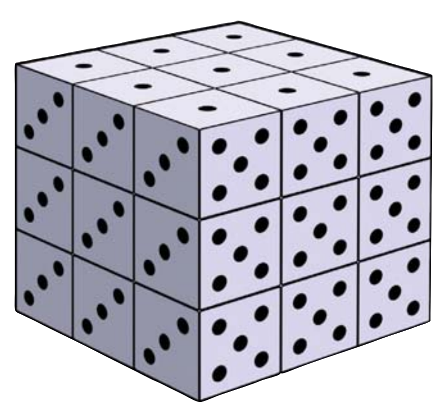
b Hver er 2008. oddatalan?

78 Mismunur ferningstalna tveggja oddatalna í röð er 128.
Hvert er margfeldi þessara talna?

79 Finndu gildi x. $\frac{2}{x} - \frac{x}{5} = \frac{1}{15}$

80 Hvaða sameiginlegt einkenni hafa þessar fjórar tölur, 403, 1207, 2701 og 7663?

81
- Skrifaðu niður tölu sem er deilanleg með tveimur þegar þú hefur dregið einn frá henni.
- Skrifaðu niður tölu sem er deilanleg með tveimur og þremur þegar þú hefur dregið einn frá henni.
- Skrifaðu niður tölu sem er deilanleg með tveimur, þremur og fjórum þegar þú hefur dregið einn frá henni.
- Haltu áfram á þennan hátt. Settu fram reglu.



82 27 spilateningum er raðað saman í stóran tening.
Hver er minnsta summa sem fá má ef fjöldi punkta á öllum hliðum er lagður saman?

Líkur

Líkindareikningur er áhugavert viðfangsefni og tengist mörgum sviðum daglegs lífs, svo sem spilum, leikjum, happdrætti og ýmiss konar spám.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Eflir skilning þinn á hugtakinu líkur og notkun þess í daglegu lífi.*
- *Gerir greinarmun á fræðilegum líkum, líkum sem leiddar eru af tilraunum og huglægu mati á líkum.*
- *Getir kannað líkur, skráð þær skipulega og túlkað niðurstöður.*

HÓPVERKEFNI

1 Vinnið tvö saman og framkvæmið eftirfarandi athugun á 50 manns.

a Athugið hvort hægri eða vinstri þumalfingur lendir efstur þegar greipar eru spenntar. Kannið einnig hvort þeir eru fæddir að degi eða nóttu og hvort þeir eru rétthentir eða örvhentir. Skráið niðurstöður skipulega í töflu.

Hægri	Vinstri	Dagur	Nótt	Örv-hentur	Rétt-hentur

b Er líklegra að hægri þumalfingur lendi ofan á en sá vinstri ef einhver er beðinn að spenna greipar? Rökstyðjið svarið.

c Setjið niðurstöður allra hópanna í eina töflu. Breyta niðurstöðurnar svari ykkar við spurningunni hér að ofan?

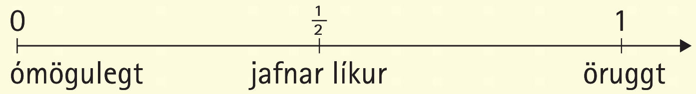
d Guðbjörg heldur því fram að þeir sem fæddir eru að degi spenni greipar þannig að vinstri þumalfingur lendi ofan á. Styður könnun ykkar þessa hugmynd hennar?

e Páll heldur því fram að hægt sé að segja til um hvort fólk sé rétthent eða örvhent með því að biðja það að spenna greipar. Er hægt að styðja þessa hugmynd hans út frá niðurstöðum bekkjarins þíns?

f Hvaða kosti og galla sérð þú á þessari könnun?

g Hversu líklegt er að hægri þumalfingur lendi ofan á þegar einhver spennir greipar? Hvernig myndir þú lýsa því í orðum? En með tölu á bilinu 0–1?

Í mæltu máli er líkum oft lýst með orðum, eins og **jafnar líkur**, **ólíklegt**, **fremur líklegt**, **mjög líklegt** og **öruggt** svo nokkur dæmi séu nefnd. Ef staðsetja á þessi orð á kvarða getur verið erfitt að finna þeim nákvæman stað.

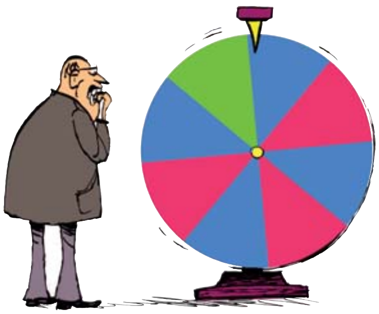


Hægt er að skrá líkur með tölum og er það oft gert á grundvelli útreikninga. Líkur eru hlutfall tiltekinnar útkomu af mögulegum útkomum. Skrá má hlutfallið á ýmsan hátt. Líkur á að talan 5 komi upp á verpli sem er áttflötungur með tölunum 1–8 eru ein af átta mögulegum útkomum. Þetta má skrá sem

$\frac{1}{8}$ 0,125 eða 12,5%

Líkur á atburði sem er talið alveg öruggt að gerist eru sagðar vera 1 eða 100% en ef engar líkur eru taldar á að atburður gerist eru líkur taldar vera 0. Ef líkur á tilteknum atburði eru 0,2 eru líkur á því að atburðurinn gerist ekki 1 – 0,2 eða 0,8.

Ekki er að hægt að fá bláan og rauðan samtímis og því skarast atburðirnir ekki. Líkur á að fá rauðan eru $\frac{3}{8}$ eða 0,375, bláan $\frac{1}{2}$ eða 0,5 og grænan $\frac{1}{8}$ eða 0,125.



Líkurnar á að fá rauðan, bláan eða grænan lit þegar örinni er snúið eru samtals 1 eða 0,375 + 0,5 + 0,125.

2 Finndu líkurnar á að fá

a rauðan eða grænan lit

b bláan eða grænan lit

c rauðan eða bláan lit

d rauðan og grænan lit

3 Snúningsskífa er lituð með fjórum litum; grænum, gulum, hvítum og svörtum. Líkur á að fá grænan eru $\frac{1}{3}$, gulan 40% og hvítan $\frac{1}{6}$. Finndu líkurnar á að fá

a svartan

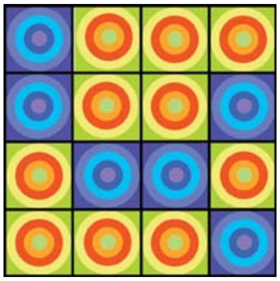
b gulan eða grænan

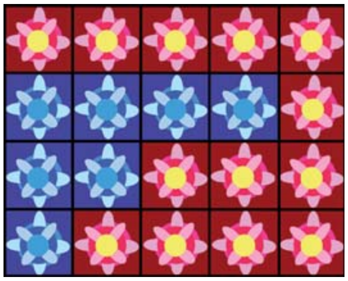
c gulan eða svartan

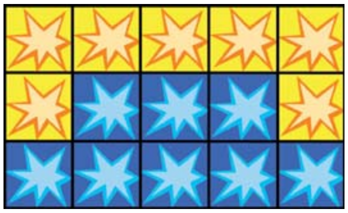
4 Haukur býr til leik til að skemmta börnum í barnaafmæli. Hann útbýr þrjú spjöld og skiptir þeim í reiti eins og myndin sýnir. Börnin kasta hringjum og fá stig í hvert sinn sem þau hitta bláan reit. Hvaða spjald myndir þú velja

a ef þú vildir eiga sem mestar líkur á að fá stig?

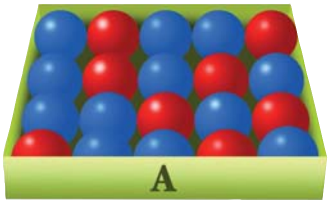
b ef þú ættir að greiða 100 kr. í hvert sinn sem einhver hitti á bláan reit á spjaldi?

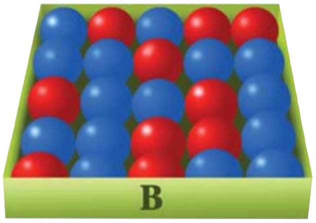






5 Þú mátt velja eina kúlu af handahófi úr kassa A eða B. Þú vilt helst fá rauða kúlu. Hvorn kassann myndir þú að velja? Rökstyddu svar þitt með því að reikna út líkur.





6 Í verslun eru íþróttabuxur til sölu. Þær eru til í þremur litum; hvítar, dökkbláar og gráar. Alls eru til 55 buxur og að minnsta kosti einar buxur í hverjum lit. Líkur á að velja hvítar buxur af handahófi eru $\frac{3}{5}$. Hver er mesti mögulegi fjöldi af gráum buxum sem gæti verið til í búðinni?

7 Í skóla er nemendum skipt í þrjá aldurshópa. Velja á einn nemanda af handahófi til að koma fram fyrir hönd skólans. Í töflunni koma fram líkur á því að velja strák eða stelpu úr hverjum hópi fyrir sig.

	Stelpur	Strákar
Yngsta deild	0,2	0,2
Miðdeild	0,1	0,15
Unglingadeild	0,25	0,1

a Hverjar eru líkurnar á að valinn verði nemandi úr yngstu deildinni?

b Hverjar eru líkurnar á að strákur verði valinn?

c Hverjar eru líkurnar á að valin verði stelpa eða nemandi úr unglingadeild?

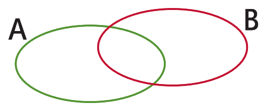
d Hve margir nemendur eru í unglingadeild ef nemendur í skólanum eru alls 400?

Gott
getur verið
að skrá allar
mögulegar útkomur
á mengjamynd eða
í mengjasviga.

8 a Í menginu Ú eru allar mögulegar útkomur þegar teningi er kastað.
Skráðu öll stök Ú í mengjasviga. Ú = {_ _ _ }

b Mengi A og mengi B eru hlutmengi í menginu Ú. Mengi A er mengi sléttra talna og mengi B er mengi oddatalna. Teiknaðu mengjamynd sem sýnir mengin A og B.

c Skráðu öll stök mengjanna A og B.



d Skráðu sniðmengi mengjanna A og B.

9 Mengið A er mengi sléttra talna sem upp geta komið þegar teningi er kastað. Mengið B er mengi talna minni en 5 sem upp geta komið þegar teningi er kastað.

a Teiknaðu mengjamynd sem sýnir mengin.

b Skráðu tölurnar í $A \cap B$.

c Finndu líkur á að fá slétta tölu eða tölu sem er minni en 5 þegar teningi er kastað.

10 Jóhanna segir að hægt sé að finna líkur á því að fá 5 eða oddatölu á teningi með því að leggja saman líkurnar á því að fá 5 sem eru $\frac{1}{6}$ og líkurnar á því að fá oddatölu sem eru $\frac{1}{2}$. Hefur hún rétt fyrir sér? Teiknaðu mengjamynd og rökstyddu svar þitt.

11 Í 24 barna bekk eru 16 nemendur með grá augu, 8 eru örvhentir og af þeim eru 4 með grá augu. Nemandi er valinn af handahófi. Hverjar eru líkurnar á að hann sé

a gráeygður **b** örvhentur **c** örvhentur og gráeygður?

12 Teningi og peningi er kastað upp samtímis.

a Skráðu allar mögulegar útkomur í mengið Ú. Ú = {1,F, 2,F, 3,F _ _ _ }

b Skráðu alla möguleika á að fá skjaldarmerki í hlutmengið A. A = {_ _ _ }

c Skráðu alla möguleika á að fá sexu í hlutmengið B. B = {_ _ _ }

d Skráðu $A \cap B$.

e Hverjar eru líkurnar á að fá skjaldarmerki eða sexu þegar teningi og krónupeningi er kastað upp samtímis?

13 Þegar finna á líkur á að tveir atburðir gerist sem ekki skarast má leggja saman líkur á hvorum atburði fyrir sig. Skoðaðu dæmi 12 og greindu frá því hvað þarf að hafa í huga þegar finna á líkur á tveimur atburðum sem skarast.

14 a Hverjar eru líkurnar á að þú fáir gullpening ef þú dregur einn pening úr pokanum?

b Þú setur peninginn aftur í pokann og lætur vin þinn draga pening úr pokanum. Á hann jafnmikla möguleika á að fá gullpening og þú áttir?

c Þú fékkst silfurpening þegar þú dróst pening úr pokanum. Þú stakkst peningnum í vasann og vinur þinn dregur pening. Á hann meiri eða minni líkur á að fá gullpening en þú áttir? Hverjar hefðu líkur hans verið á að fá gullpening ef þú hefðir dregið gullpening úr pokanum í upphafi í stað silfurpenings? Af hverju stafar þessi munur?

Þegar tveir atburðir gerast hefur útkoma fyrri atburðarins stundum áhrif á líkur þess að seinni atburðurinn gerist. Þá er sagt að **atburðirnir séu háðir**.

HÓPVERKEFNI

15 Skoðið þessi dæmi og ræðið hvort um háða eða óháða atburði er að ræða.

a Þú dregur tvö spil úr spilastokk hvort á eftir öðru. Fyrra spilið er ekki sett aftur í stokkinn.
- Fyrsta spilið er spaði.
- Næsta spil er spaði.

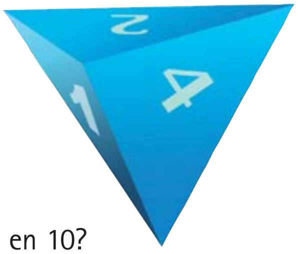
b Þú dregur tvö spil hvort á eftir öðru úr spilastokk. Fyrra spilið er ekki sett aftur í stokkinn.
- Fyrsta spilið er kóngur.
- Næsta spil er ás.

c Gyða og Gunnar eru tvíburar.
- Gunnar fer í bíó í kvöld.
- Gyða fer í bíó í kvöld.

d Dregið er í lottó. Í pottinum eru tölurnar 1-30.
- Fyrsta lottótalan er 15.
- Önnur lottótalan er 7.

e
- Það var sól í dag.
- Það verður sól á morgun.

16 Þegar reikna á líkur getur verið gott að skrá allar mögulegar útkomur í töflu. Tveimur verplum sem eru fjórflötungar er kastað. Á verplunum eru tölurnar 1, 2, 3 og 4.



a Tölur sem upp koma eru margfaldaðar saman. Skráðu allar mögulegar útkomur í töflu.

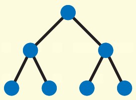
b Hverjar eru líkurnar á að margfeldið verði oddatala?

c Hverjar eru líkurnar á að margfeldið verði tala sem er hærri en 10?

d Hverjar eru líkurnar á að margfeldið verði slétt tala hærri en tveir?

Í dæminu hér fyrir ofan voru jafnar líkur á því að hver tala fyrir sig kæmi upp á verplunum og því er mjög auðvelt að finna líkur með því að skrá alla möguleika í töflu.

Mikilvægt er að þekkja mögulegan fjölda á útkomum þegar reikna á líkur. Þegar finna á fjölda útkomumöguleika þar sem um tvö eða fleiri skref er að ræða getur verið gott að fá yfirlit yfir fjölda möguleika með því að teikna talningartré.



17 Í 10. bekk er hægt að velja námskeið af þremur sviðum. Á hverju sviði eru fjögur námskeið í boði. Teiknaðu talningartré. Hve margir ólíkir valmöguleikar eru í boði?

18 Í Árbyggð eru Ari, Beta, Dóra og Einar ráðin til að hafa umsjón með unglingavinnu. Hver verkstjóri hefur umsjón með tveimur flokkum. Teiknaðu talningartré sem sýnir hve margir vinnuflokkar verða við störf í sveitarfélaginu.
Í hverjum flokki geta að hámarki verið 5–8 unglingar. Hve margir unglingar gætu fengið vinnu í Árbyggð?

19 Hvernig má finna fjölda valmöguleika án þess að nota talningartré?

20 Símafyrirtæki selur síma frá tveimur framleiðendum. Frá hvoru fyrirtæki um sig eru seldar átta gerðir í þremur litum. Hve marga ólíka síma er hægt að velja?

21 Í hjólreiðaverslun eru seld reiðhjól frá fjórum framleiðendum. Frá hverjum framleiðanda eru til hjól bæði með þremur gírum og með 21 gír. Allir framleiðendur bjóða upp á hjól í þremur litum og fjórum stærðum.

a Hve margar mismunandi gerðir af hjólum selur verslunin?

b Hve marga valmöguleika áttu ef þú ætlar að kaupa þér hjól af stærstu gerð?

c Hve marga valmöguleika áttu ef þú ætlar að kaupa þér þriggja gíra hjól?

22 Hjólafélagið efnir til hjólreiðakeppni.

a Í torfæruflokki eru fjórir keppendur þau Arnar, Björt, Daði og Elín. Hvernig gætu þau raðast í sæti?

b Í barnaflokki eru skráðir þrír keppendur. Á hve marga vegu gætu þeir raðast í sæti?

23 Finndu á hve marga vegu keppendur geta raðast í sæti ef þeir eru

a 2 **b** 3 **c** 4 **d** 5 **e** 6

24 Einar, Guðný og Helgi skipa stjórn hjólafélagsins. Velja þarf formann og gjaldkera úr hópi þeirra þriggja. Ákveðið er að draga í embættin. Miðar með nöfnum þeirra eru settir í poka.

Áður en dregið er þarf að ákveða hvort sama manneskja getur gegnt báðum embættum. Ef svo er, þarf að setja fyrsta miðann sem dreginn er, aftur í pokann áður en næsti miði er dreginn. Annars er miðinn ekki settur til baka í pokann.

Ef sama manneskja getur gegnt báðum embættum og sá fyrsti sem dreginn er verður formaður og sá næsti sem dreginn er verður gjaldkeri er miðinn settur aftur í pokann. Möguleikarnir á því að velja formann verða þrír og aftur þrír á að velja gjaldkera. Heildarfjöldi möguleika verður því $3 \cdot 3$ eða 9.

a Hver margir verða möguleikarnir ef sami maður getur ekki gegnt starfi formanns og gjaldkera og gjaldkeri er dreginn út fyrst?

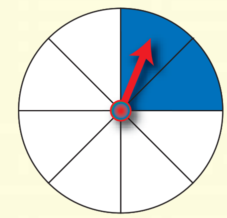
b Hve margir möguleikar eru á því að velja tvo fulltrúa úr hópi fjögurra stjórnarmanna til að koma fram fyrir hönd félagsins?

25 a Hve margir möguleikar eru á því að velja formann, gjaldkera og ritara úr hópi fjögurra manna ef einn og sami maður getur gegnt öllum embættum?

b Hver margir möguleikar eru á að velja formann, gjaldkera og ritara úr hópi fjögurra manna ef sami maður getur ekki gegnt meira en einu embætti og formaður er dreginn út fyrstur, síðan gjaldkeri og þá ritari?

c Hve margir möguleikar eru á því að velja tvo fulltrúa úr hópi fjögurra stjórnarmanna til að koma fram fyrir hönd félagsins?

Stundum þarf að kanna samsettar líkur á að tveir atburðir gerist sem ekki eru jafn líklegir. Þá getur verið heppilegra að nota flatarmynd eða líkindatré til að greina alla möguleika en að skrá í töflu.

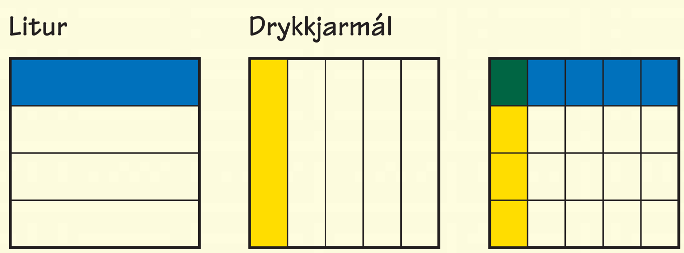


Kanna á líkur á því að fá bláan lit þegar skífu er snúið og að drykkjarmál sem kastað er lendi á botninum.

Ef skífan er skoðuð má sjá að líkurnar á að fá bláan eru $\frac{1}{4}$ og líkurnar á því að ekki komi upp blár eru því $\frac{3}{4}$ eða $1 - \frac{1}{4}$.

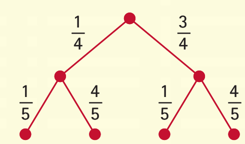
Gefið er að líkurnar á því að drykkjarmálið lendi á botninum eru $\frac{1}{5}$. Þá eru líkur á að það lendi ekki á botninum $\frac{4}{5}$ eða $1 - \frac{1}{5}$.

Þessu má lýsa með flatarmynd



Líkurnar á að fá bláan lit og að drykkjarmál lendi á botninum eru $\frac{1}{5}$ af $\frac{1}{4}$ eða $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$.

Þetta má líka skoða með því að teikna líkindatré.

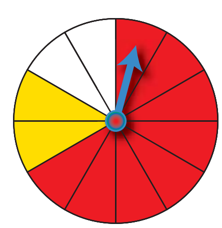


26 **a** Hvaða líkur eru á að fá ekki bláan lit og að drykkjarmálið lendi ekki á botninum?

b Hvaða líkur eru á að fá ekki bláan lit og að drykkjarmálið lendi á botninum?

c Hvaða líkur eru á að fá bláan lit og að drykkjarmálið lendi ekki á botninum?

27 Notaðu flatarmynd til að finna líkur á því að fá rauðan lit þegar skífunni er snúið og tölu sem er hærri en 5 þegar verplinum er varpað.



a Hverjar eru líkurnar á að fá ekki rauðan lit og tölu sem er ekki hærri en 5?

b Hverjar eru líkurnar á að fá tölu sem er lægri en 3 og gulan lit?

28 Líkurnar á því að það snjói hvern dag í janúarmánuði eru $\frac{1}{5}$.

a Hverjar eru líkurnar á því að snjói bæði fyrsta og síðasta dag mánaðarins?

b Hverjar eru líkurnar á að það snjói ekki síðasta dag janúarmánaðar?

c Hverjar eru líkurnar á að það snjói ekki fyrsta dag mánaðarins en það snjói síðasta daginn?

29 Leystu þetta dæmi með því að nota bæði flatarmynd og líkindatré. Berðu þessar lausnaleiðir saman og greindu frá hvor leiðin þér finnst betri.

a Í sælgætiskrús eru 4 rauðir sælgætismolar og 3 bláir. Hverjar eru líkurnar á því að fá 2 rauða mola ef tveir molar eru teknir úr krúsinni? En að báðir séu bláir?

b Nú veistu hvaða líkur eru á að báðir molarnir séu rauðir og að báðir séu bláir. Hvernig getur þú fundið líkurnar á að molarnir séu hvor með sínum litnum?

30 Trausti á bara svarta sokka. Margir þeirra eru með gati á tánni. Hann geymir sokkana sína í tveimur skúffum. Í annarri skúffunni eru 24 sokkar og af þeim er $\frac{1}{3}$ með gati. Í hinni skúffunni eru 16 sokkar og þar af $\frac{1}{4}$ með gati. Hverjar eru líkurnar á að hann taki sokk með gati ef hann velur skúffu af handahófi og dregur svo einn sokk úr henni blindandi?

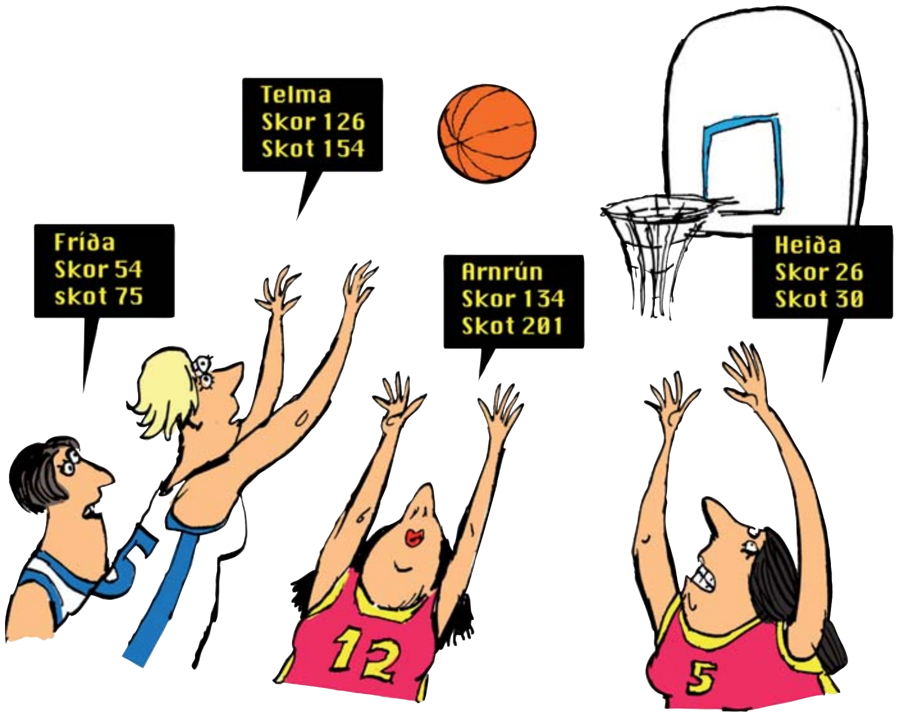
31 Þóra á marga hvíta íþróttasokka. Sumir þeirra hafa svarta rönd að ofan en aðrir ekki. Þóra geymir sokkana í þremur skúffum.

- Í efstu skúffunni eru 4 sokkar og þar af 2 með rönd.
- Í miðskúffunni eru 8 sokkar, þar af 4 með rönd.
- Í neðstu skúffunni eru 6 sokkar, þar af 2 með rönd.

a Ef valinn er einn sokkur úr miðskúffunni, hverjar eru líkurnar á að hann sé hvítur?

b Ef valin er skúffa af handahófi og einn sokkur er tekinn úr henni blindandi hverjar eru þá líkurnar á að sokkurinn sé með svartri rönd að ofan?

c Ef valin er skúffa af handahófi og einn sokkur tekinn úr henni, hverjar eru líkurnar á að hann sé hvítur?



Ekki er alltaf hægt að skrá allar mögulegar útkomur. Þá eru gerðar tilraunir og skoðað hve oft tiltekin útkoma kemur fram og líkur metnar út frá því. Í körfubolta er til dæmis fylgst með skotnýtingu leikmanna. Líkur á að þeir hitti í körfu eru metnar út frá fyrri skotnýtingu.

32 a Hver keppenda hafði bestu skotnýtinguna?

b Í hve mörgum prósentum tilrauna sinna hitti Fríða?

Það er kallað að finna **hlutfallstíðni** þegar fundið er hlutfall milli vel heppnaðra skota og allra skota. Hlutfallstíðni má skrá sem almennt brot, tugabrot eða prósentu.

33 Skráðu skotnýtingu leikmannanna með almennu broti, tugabroti og í prósentum. Námundaðu að tveimur aukastöfum.

Íris 135 skipti af 250	Ásta 26 skipti af 52	Guðrún 98 skipti af 123
Ásgeir 78 skipti af 124	Sunna 49 skipti af 74	Selma 103 skipti af 110

HÓPVERKEFNI

34 Gerið tilraun til að finna fjölda kubba af hverjum lit. Einn úr hópnum setur 20 kubba í þremur litum í poka. Hann ákveður hve margir eru af hverjum lit en hinir í hópnum vita ekki hver skiptingin er.

- Dragið einn kubb tíu sinnum úr pokanum og skilið honum aftur í hvert sinn. Skráið hvaða lit þið fáið hverju sinni.
- Endurtakið þetta fimm sinnum.
- Dragið þrjá kubba í einu og endurtakið tilraunina á sama hátt.

Notið niðurstöður ykkar til að giska á litasamsetningu kubbanna.

35 Halldóra kastar körfubolta fimmtíu sinnum á körfuna og hittir í 36 skipti. Hún heldur áfram að gera tilraunir til að hitta í körfuna og skráir niðurstöður eftir hverjar 50 tilraunir.

1. tilraun	2. tilraun	3. tilraun	4. tilraun	5. tilraun	6. tilraun
36	40	43	39	45	24

a Skoðaðu vel niðurstöður í tilraunum Halldóru. Hvaða líkur telur þú vera á því að Halldóra hitti í körfu ef hún tekur eitt skot? Rökstyddu svar þitt með því að nýta niðurstöður tilrauna hennar.

b Gerður og Elín ákveða að prófa hve oft þær hitta í körfuna. Gerður hittir í 40 skipti af 50 og Elín í 25 skipti af 50. Jakobína þjálfari þarf að ákveða hver þeirra þriggja, Halldóra, Gerður eða Elín, skuli taka þátt í keppni fyrir Íslands hönd. Hverja þeirra ætti hún að velja? Rökstyddu svar þitt.

Til þess að auka öryggi í mati á líkum byggðum á tilraunum þarf að gera nokkuð margar tilraunir. Ef peningi er t.d. kastað hundrað sinnum verða niðurstöður oftast mjög nálægt fræðilegum líkum, þ.e. að jafnoft komi upp skjaldarmerki og fiskur.

36 Eftirfarandi gögn eru niðurstöður úr tilraunum sem þrjár stúlkur gerðu. Þær köstuðu þremur peningum tuttugu sinnum og skráðu hve oft tvö skjaldarmerki og einn fiskur komu upp. Reiknaðu út hlutfallstíðni fyrir hverja tilraun.

Ragnheiður

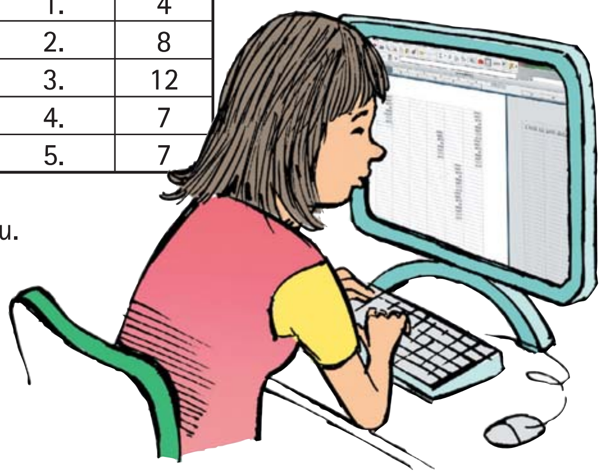
Tilraun	Tíðni
1.	6
2.	8
3.	5
4.	9
5.	11

Lilja

Tilraun	Tíðni
1.	3
2.	7
3.	9
4.	10
5.	5

Sigrún

Tilraun	Tíðni
1.	4
2.	8
3.	12
4.	7
5.	7



a Finndu meðaltíðni úr niðurstöðum hverrar stúlku.

b Finndu meðaltíðni hjá þeim öllum. Eru niðurstöður tilrauna þeirra nálægt því að vera þær sömu og fræðilegar líkur?

37 Taka á mynd af þeim sem eru með derhúfu. Þeir eiga að standa í röð.
Á hve marga vegu má raða þeim?

38 Nemandi er valinn af handahófi. Finndu líkur á því að velja nemanda

- *a* í rauðri peysu
- *b* ekki í rauðri peysu
- *c* í rauðri peysu og með derhúfu
- *d* í rauðri peysu en ekki með húfu
- *e* í rauðri peysu eða með heyrnartól
- *f* í svartri peysu eða með heyrnartól
- *g* í blárri peysu, með heyrnartól og húfulaus
- *h* í svartri peysu, með heyrnartól og derhúfu

39 Skoðaðu dæmi 38 og sýndu hvernig mætti reikna líkurnar fyrir hvern lið.

40 Búðu til átta líkindareikningsdæmi út frá myndinni. Hafðu þau fjölbreytt og sýndu hvað þú kannt. Reiknaðu dæmin þín.

Reikningur og algebra

Í daglegu lífi og stærðfræðinámi koma oft upp fjölbreytt verkefni sem leysa þarf með reikningi. Stundum þarf að reikna með heilum tölum, brotum og bókstöfum. Nota má mismunandi aðferðir og þróuð hafa verið öflug reiknitæki sem gott er að nýta sér.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Öðlist færni í reikningi með almennum brotum og veldum.*
- *Getir útskýrt hugtök, aðferðir og eigin lausnir bæði munnlega og skriflega.*
- *Kynnist dæmi um hvernig sannanir eru settar fram í stærðfræði.*
- *Notir reiknitæki og ólíkar aðferðir við að leysa og rannsaka stærðfræðileg viðfangsefni.*

1 Notaðu þessi brotaspjöld og búðu til sannar fullyrðingar.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

a $\square + \square = \frac{7}{12}$ **b** $\square - \square = \frac{1}{6}$ **c** $\square + \square - \square = \frac{7}{12}$

2 Hvaða náttúrlegar tölur getur x staðið fyrir?

a $\frac{3}{4} \geq \frac{x}{5}$ **b** $\frac{5}{8} \geq \frac{x}{10}$ **c** $\frac{2}{3} > \frac{x}{12}$

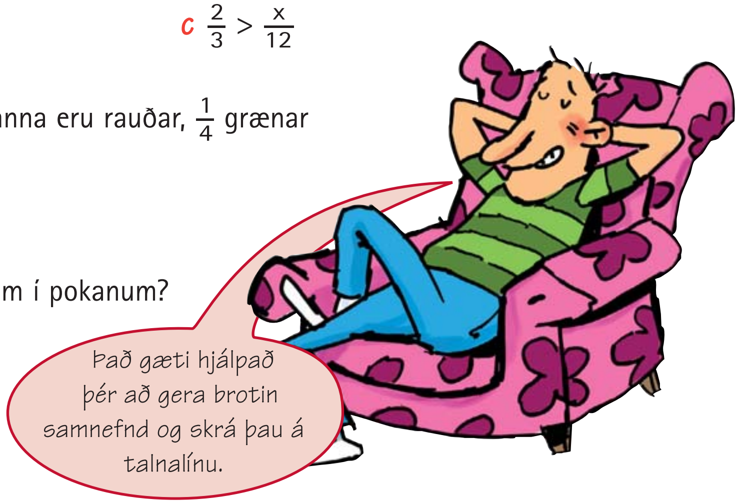
3 Í poka eru litaðar kúlur. $\frac{3}{16}$ hlutar kúlanna eru rauðar, $\frac{1}{4}$ grænar og $\frac{5}{12}$ eru gular. Afgangurinn er blár.

a Hve stór hluti er blár?

b Hver er minnsti mögulegi fjöldi af kúlum í pokanum?

4 a Hvaða tala er mitt á milli $\frac{3}{15}$ og $\frac{3}{5}$?

b Hvaða tala er mitt á milli $1\frac{2}{3}$ og $2\frac{3}{5}$?



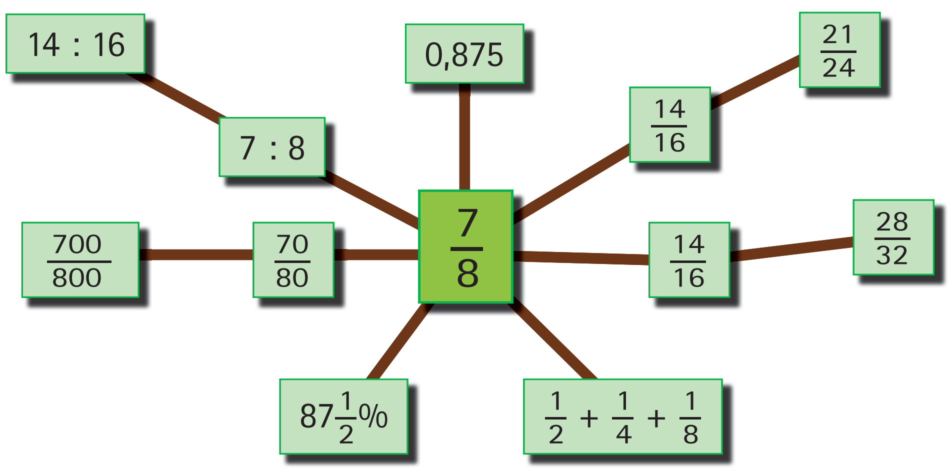
5 a Finndu tvö almenn brot sem hafa summuna $\frac{5}{6}$. Brotin eru ekki sjöttu hlutar.

b Finndu tvö almenn brot sem hafa summuna $\frac{9}{10}$. Brotin eru ekki tíundu hlutar.

c Finndu tvö almenn brot sem hafa summuna $\frac{2a}{5}$. Brotin eru fimmtu hlutar.

d Finndu tvö almenn brot sem hafa summuna $\frac{2a}{5}$. Brotin eru ekki fimmtu hlutar.

6 Almenna brotið $\frac{7}{8}$ má skrá á ýmsa vegu.



Skoðaðu myndina og lýstu því hvað gerist á hverri grein og bættu við fleiri dæmum þar sem það er hægt.

7 Skoðaðu þessi almennu brot og kannaðu hvort þau jafngilda almenna brotinu $\frac{7}{8}$. Rökstyddu svar þitt.

a $\frac{7a}{8a}$ **b** $\frac{14ab}{16ab}$ **c** $\frac{7a(a + 2)}{8a(a + 2)}$ **d** $\frac{7a^2 + 21}{8a^2 + 24}$

8 Finndu hver þessara almennu brota jafngilda $\frac{2}{5}$ og hver ekki. Rökstyddu svar þitt.

$\frac{6}{15}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{8}{20}$ $\frac{200}{500}$ $\frac{2ab}{5ab}$ $\frac{4a}{10b}$ $\frac{8a(a + 1)}{20a(a + 1)}$ $\frac{2a + 1}{5a + 1}$

9 Búðu til 8 almenn brot sem jafngilda almenna brotinu $\frac{1}{3}$. Notaðu bæði bókstafi og tölustafi.

10 Finndu lægsta samnefnara þessara almennu brota með því að frumþátta nefnarana og skrá þá í mynd. Reiknaðu síðan dæmin.

a $\frac{17}{24} + \frac{17}{84}$ b $\frac{97}{105} + \frac{83}{84}$ c $\frac{13}{168} - \frac{7}{150}$ d $\frac{16}{105} + \frac{77}{150}$

11 Notaðu myndirnar í dæmi 10.
Finndu hæstu tölu sem gengur upp í bæði

a 24 og 84 b 105 og 84 c 168 og 150 d 105 og 150

Í algebru eru bókstafir oft notaðir sem staðgenglar fyrir tölur.
Hægt er að finna sameiginlega þætti í algebrustæðum.
3x má skrá sem $3 \cdot x$.
4x má skrá sem $4 \cdot x$. x er sameiginlegur þáttur í báðum þessum stæðum.
Það má deila með x í bæði 3x og 4x.

12 Hvaða þættir eru sameiginlegir í þessum stæðum? Hver er hæsti sameiginlegi þátturinn?

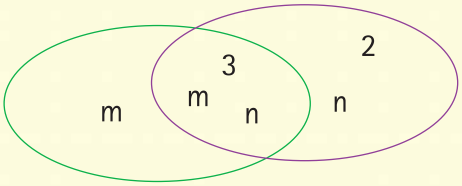
a 4m og 7m b 2ab og 5a c 6mn og 3m d $2x^2y$ og xy e $5m^2nx$ og $10m^2n$

Þegar finna á hæsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæðna getur verið gott að frumþátta stæðurnar og skrá þættina í mynd.

$3m^2n$ má skrá sem $3 \cdot m \cdot m \cdot n$

$6mn^2$ má skrá sem $2 \cdot 3 \cdot m \cdot n \cdot n$.

Hæsti sameiginlegi þátturinn er 3mn og lægsta talan sem báðar stæður ganga upp í er $6\ m^2n^2$.



13 Finndu hæsta sameiginlega þátt þessara stæðna og lægstu tölu sem þær ganga upp í. Teiknaðu mynd.

a 5b og 10b c $2x^2y$ og x^2y e 3ab og 9 g $3a^2b$ og ab i 5mn og mn^2

b n og 3n d 6m og 2 f 2x og $2x^2$ h $12m^2n$ og 4 j ab^2 og a^2b^2

Lægsta tala sem bæði 5b og 10b ganga upp í er 10b.

Samnefnari almennu brotanna $\frac{1}{5b} + \frac{3}{10b}$ er því 10b.

Til þess að hægt sé að leggja brotin saman þarf að lengja brotið $\frac{1}{5b}$ með tveimur þannig að nefnari þess verði 10b.

$\frac{1 \cdot 2}{5b \cdot 2} = \frac{2}{10b}$ $\qquad \frac{2}{10b} + \frac{3}{10b} = \frac{5}{10b} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot b} = \frac{1}{2b}$

14 Reiknaðu dæmin. Þú getur nýtt þér myndirnar sem þú gerðir í dæmi 13 til að finna lægsta samnefnarann.

a $\frac{3}{5b} + \frac{5}{10b}$ **c** $\frac{1}{2x^2y} + \frac{3}{x^2y}$ **e** $\frac{2}{3ab} - \frac{2}{9}$ **g** $\frac{4}{3a^2b} - \frac{2}{ab}$ **i** $\frac{7}{5mn} + \frac{3}{mn^2}$

b $\frac{2}{n} - \frac{1}{3n}$ **d** $\frac{5}{6m} - \frac{1}{2}$ **f** $\frac{3}{2x} + \frac{11}{2x^2}$ **h** $\frac{5}{12m^2n} + \frac{3}{4}$ **j** $\frac{8}{ab^2} - \frac{1}{a^2b^2}$

15 Reiknaðu.

a $1\frac{3}{5} + \frac{7}{20}$ **b** $\frac{4}{7} - \frac{a}{3}$ **c** $2\frac{2}{5} + \frac{7b}{10}$ **d** $3\frac{3}{4m} - \frac{3}{8m^2}$ **e** $\frac{7}{5} - 1\frac{a}{15}$

16 a Finndu summu þessara almennu brota.

$\frac{1}{2} + \frac{2}{1}$ $\qquad \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{4}{5} + \frac{5}{4}$

b Búðu til á sama hátt 3–4 dæmi í viðbót og reiknaðu þau.

c Kemur þú auga á einhverja reglu í svörunum?

17 a Finndu mismun almennu brotanna í þessari röð.

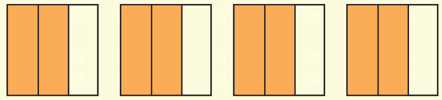
$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$

Byrjaðu á $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$. Finndu síðan mismun á $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{4}$.

b Kemur þú auga á einhverja reglu?

c Bættu við nokkrum brotum í röðina og kannaðu hvort regla þín gildir.

Í þessum dæmum er sýnt hvernig margfalda má heilar tölur með almennu broti.



$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

$\boxed{2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}}$ $\boxed{\frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}}$ $\boxed{\frac{2}{7} \cdot m = \frac{2m}{7}}$

18 Skoðaðu dæmin vel og ræddu lausnir þeirra við bekkjarfélaga þinn. Skráðu reglu sem nota má þegar margfalda á heila tölu með almennu broti.

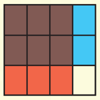
19 Reiknaðu dæmin. Fullstyttu brotin ef hægt er. Breyttu í heila tölu og brot.

a $2 \cdot \frac{7}{9}$ **c** $\frac{5}{11} \cdot 7$ **e** $2 \cdot \frac{1}{x}$ **g** $\frac{2}{3} \cdot m$ **i** $2 \cdot \frac{3y}{4}$

b $\frac{3}{7} \cdot 7$ **d** $12 \cdot \frac{5}{6}$ **f** $\frac{1}{2a} \cdot 4$ **h** $m \cdot \frac{2m}{5}$ **j** $\frac{4x}{y} \cdot 3y$

Hægt er að margfalda saman tvö almenn brot.

Myndin sýnir að $\frac{3}{4}$ af $\frac{2}{3}$ jafngilda $\frac{6}{12}$



$\boxed{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}}$ $\boxed{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{12}{14} = \frac{2}{7}}$ $\boxed{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3a}{21} = \frac{a}{7}}$

20 Skoðaðu dæmin vel og ræddu lausnir þeirra við bekkjarfélaga þinn. Skráðu reglu sem nota má þegar tvö almenn brot eru margfölduð saman.

21 Reiknaðu dæmin. Einfaldaðu svörin eins og hægt er.

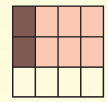
a $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}$ **d** $2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$ **g** $\frac{2m}{7} \cdot \frac{7}{3}$

b $\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{5}$ **e** $\frac{1}{9} \cdot 3\frac{3}{5}$ **h** $\frac{2b}{9} \cdot \frac{3ab}{2}$

c $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{x}$ **f** $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2a}$ **i** $\frac{4}{x} \cdot \frac{3x}{2}$

Í þessum dæmum er sýnt hvernig deila má með heilli tölu í brot.

$$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} : 4 = \frac{8 : 4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$



$$\frac{12}{15} : 3 = \frac{12 : 3}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{3x}{4} : 5 = \frac{3x \cdot 5}{4 \cdot 5} : 5 = \frac{15x : 5}{20} = \frac{3x}{20}$$

22 Skoðaðu dæmin vel og ræddu lausnir þeirra við bekkjarfélaga þinn. Skráðu reglu sem nota má þegar deilt er með heilli tölu í almennt brot.

23 Reiknaðu dæmin. Einfaldaðu svörin eins og hægt er.

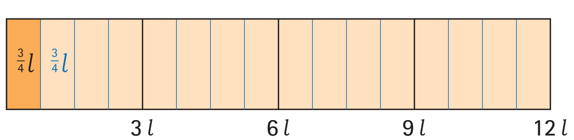
a $\frac{4}{7} : 2$ **b** $\frac{5}{6} : 3$ **c** $\frac{13}{15} : 2$ **d** $\frac{4x}{7} : 4$ **e** $\frac{2}{m} : 3$ **f** $\frac{2ab}{7} : 2a$

24 Ketill hefur búið til 12 lítra af ávaxtadrykk og ætlar að setja drykkinn á flöskur. Hann veltir fyrir sér hve margar flöskur hann þarf. Það fer að sjálfsögðu eftir því hvað hver flaska tekur mikið.

Ef hann ætlar að setja drykkinn í tveggja lítra flöskur þarf hann að deila með 2 í lítrafjöldann. Hann þarf að nota 12 : 2 = 6 flöskur.

Ef hann ætlar að fylla á flöskur sem taka $\frac{3}{4}$ lítra hver þarf hann að deila með $\frac{3}{4}$ í 12 til að finna hve margar flöskur hann þarf. Hvernig er hægt að gera það?
$12 : \frac{3}{4} = ?$

Hægt er að skoða hve marga $\frac{3}{4}$ l þarf til að búa til 12 l.



Það er líka hægt að nota vasareikninn. Prófaðu að deila í 12 með $\frac{3}{4}$ með því að nota brotatakkann á vasareikninum þínum.
Þú getur líka slegið inn 12 : (3 : 4) =

25 **a** $12 : \frac{3}{4}$ **b** $12 : \frac{1}{4}$ **c** $12 : \frac{1}{2}$ **d** $12 : \frac{1}{3}$ **e** $12 : \frac{2}{3}$

Ef tala og margföldunarandhverfa hennar eru margfaldaðar saman fæst margföldunarhlutleysan sem er einn.

26 Finndu margföldunarandhverfu þessara talna.

2 $\quad 5$ $\quad \frac{1}{4}$ $\quad \frac{2}{7}$ $\quad \frac{5}{8}$ $\quad \frac{21}{2}$ $\quad \frac{5}{4}$ $\quad 12$

27 a Notaðu vasareikni og prófaðu að deila með tölunum í dæmi 26 í töluna 1260.

b Prófaðu síðan að margfalda 1260 með margföldunarandhverfum talnanna.

c Færðu sömu niðurstöðu þegar þú deilir með tölu og þegar þú margfaldar með margföldunarandhverfu tölunnar?

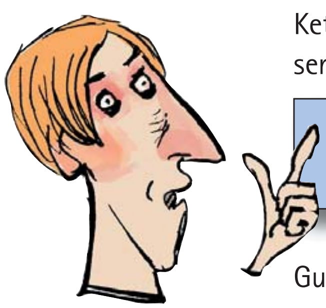
d Prófaðu að deila í fleiri tölur.

28 Skoðaðu þessi dæmi:

$3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 12$

$5 : \frac{3}{5} = 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3} = 4\frac{1}{3}$

$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$

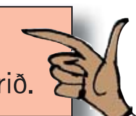


Ketill segist hafa komið auga á mjög einfalda reglu sem má nota við að deila með almennu broti.

Í stað þess að deila með almenna brotinu þá sný ég því við og margfalda með því.

Guðrún segir að þetta sé í raun alveg sama reglan og sett var fram hér að ofan og er á þessa leið.

Í stað þess að deila með tölu er hægt að margfalda með margföldunarandhverfu hennar og fá út sama svarið.



Sýndu fram á með útskýringum og dæmum að þetta sé í raun ein og sama reglan.

29 Reiknaðu dæmin. Einfaldaðu svörin eins og hægt er.

a $9 : \frac{3}{4}$

b $5 : \frac{2}{5}$

c $12 : \frac{3}{9}$

d $\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$

e $\frac{3}{10} : 5$

f $3\frac{1}{4} : \frac{5}{6}$

g $\frac{6}{7} : \frac{6}{7}$

h $3\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$

Deilingu má einnig skrá sem brot

$$9 : \frac{3}{4} = \frac{9}{\frac{3}{4}}$$

Ef brotið $\frac{9}{\frac{3}{4}}$ er lengt með 4 fæst $\frac{9 \cdot 4}{\frac{3}{4} \cdot 4} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 9 \cdot \frac{4}{3}$

Dæmið sýnir að í stað þess að deila með $\frac{3}{4}$ getum við margfaldað með $\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}$ eru margföldunarandhverfa $\frac{3}{4}$ $\boxed{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1}$

30 a Halldís kaupir 6 pitsur fyrir afmælisboð Steins sonar síns. Hún reiknar með að hvert barn borði $\frac{1}{3}$ úr pitsu. Hve margir voru í afmæli Steins?

b Steinn segir mömmu sinni að hún þurfi að kaupa 12 lítra af gosi fyrir afmælisveisluna. Hve mikið reiknar hann með að hver og einn drekki ef hann gerir ráð fyrir að allir drekki jafn mikið?

c Hve mikið gos þyrfti í veisluna ef allir drykkju $\frac{1}{4}$ lítra?

31 a Halldór ætlar að bjóða vinum sínum upp á kaffi. Hann hellir upp á tvær könnur sem taka tvo lítra hvor. Hann á bolla sem taka $\frac{1}{5}$ úr lítra. Hve mörgum gæti Halldór boðið upp á kaffibolla?

b Heiða vinkona Halldórs segir að þetta séu allt of litlir bollar. Hún á krúsir sem taka $\frac{3}{8}$ úr lítra og leggur til að hann noti þær í staðinn. Hve mörgum gæti Halldór boðið upp á kaffikrús?

c Guðjón telur að Halldór eigi að nota litlar plastkrúsir, en þær taka $\frac{1}{8}$ úr lítra. Hve mörgum gæti hann boðið kaffi úr plastkrús?

32 a $6 : \frac{3}{5}$ **c** $3x : \frac{3}{5}$ **e** $5 : \frac{3}{5}$ **g** $5a : \frac{5a}{3}$

b $12 : \frac{4}{a}$ **d** $8 : \frac{4y}{5}$ **f** $15 : \frac{3a}{5}$ **h** $2x : \frac{4x}{7}$

33 a $4 : 1\frac{2}{6}$ **b** $15 : 3\frac{1}{3}$ **c** $5a : 2\frac{1}{2}$ **d** $2x : 2\frac{4x}{7}$

Þegar deila á almennu broti með öðru almennu broti er farið eins að og þegar deilt er með broti í heila tölu. Þið hafið séð að í stað þess að deila með broti er hægt að margfalda með margföldunarandhverfu brotsins. Hægt er að fara þessa sömu leið hvort sem sú tala sem deilt er í (deilistofninn) er heil tala eða brot.

$8 : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ $\qquad$ $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \frac{4}{5}$

34 Reiknaðu dæmin. Einfaldaðu svörin eins og hægt er.

a $\frac{8}{9} : \frac{1}{6}$ **c** $\frac{3a}{4} : \frac{3}{5}$ **e** $\frac{a}{3} : \frac{a}{6}$ **g** $\frac{4x}{5} : \frac{3x}{10}$ **i** $\frac{9}{14} : 1\frac{2}{7}$

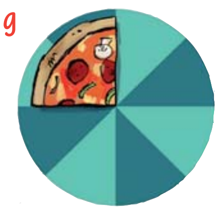
b $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ **d** $\frac{3}{4} : \frac{3}{5a}$ **f** $\frac{y^2}{3} : \frac{y}{6}$ **h** $\frac{4x}{5} : \frac{10}{3x}$ **j** $1\frac{2}{7} : \frac{9}{14}$

35 Hve mörgum sinnum má taka $\frac{1}{3}$ úr heilli pitsu af hverjum diski?

a

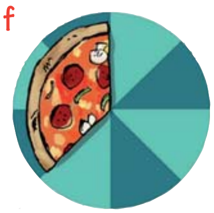
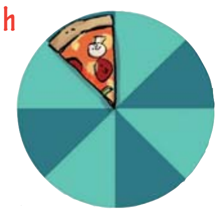
c

e

g


b

d

f

h


36 Garðyrkjubændurnir Guðjón og Birna eiga saman stóran matjurtagarð. Birna á $\frac{1}{3}$ hluta garðsins og hún ræktar blómkál í $\frac{4}{5}$ hlutum og spergilkál í afganginum. Guðjón ræktar rófur í $\frac{3}{4}$ hlutum af sínum garði og gulrætur í hinum hlutanum. Finndu í hve stórum hluta matjurtagarðsins eru ræktaðar

a rófur **b** gulrætur **c** blómkál **d** spergilkál

Vasareiknir er mjög öflugt reiknitæki. Flestir nota einungis mjög fáa af þeim möguleikum sem vasareiknirinn býr yfir. Til eru ýmsar gerðir af vasareiknum sem hafa innbyggða ólíka eiginleika.

Á einföldustu gerðum vasareikna eru tölustafirnir og aðgerðamerkin $+$, $-$, $\times$ og $\div$. Auk þess eru þeir oft með prósentutakka og takka sem nota má til að finna ferningsrót. Einnig eru þeir yfirleitt með minnistökkum. Þá má nota til að geyma stærðir í minni og kalla þær síðan fram þegar gera á frekari útreikninga.

Flóknari gerðir vasareikna, eða vísindalegir vasareiknar eins og þeir eru oft kallaðir, hafa mun fleiri takka. Í grunnskóla hefur þú ekki not fyrir nema lítinn hluta þeirra en þó eru margir sem geta flýtt mjög fyrir þér við útreikninga. Hér verða útskýrðir nokkrir aðgerðatakkar sem gætu nýst þér í grunnskóla. Yfirleitt er hægt að framkvæma tvær til þrjár aðgerðir með hverjum takka og er þá farið á milli aðgerða með því að ýta aukalega á sérstaka skiptitakka.

π fyrir pí.

$+/-$ til að breyta jákvæðri tölu í neikvæða og neikvæðri tölu í jákvæða.

( ) til að setja sviga.

$a\,b/c$ til að reikna almenn brot.
Shift d/c til að stytta almenn brot.

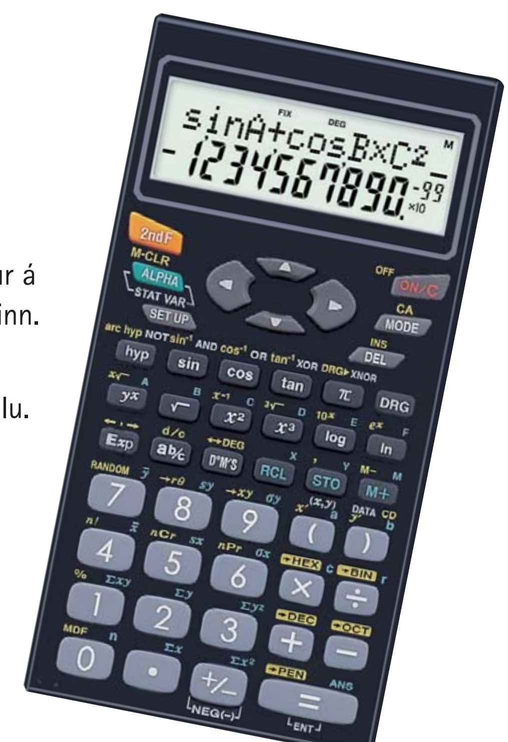
Ef breyta á almennu broti í tugabrot er ýtt aftur á $a\,b/c$ eftir að almenna brotið hefur verið slegið inn.

x^2 til að hefja tölu í annað veldi.
Shift x^{-1} til að finna margföldunarandhverfu tölu.

$\sqrt{\ }$ til að finna ferningsrót af tölu.

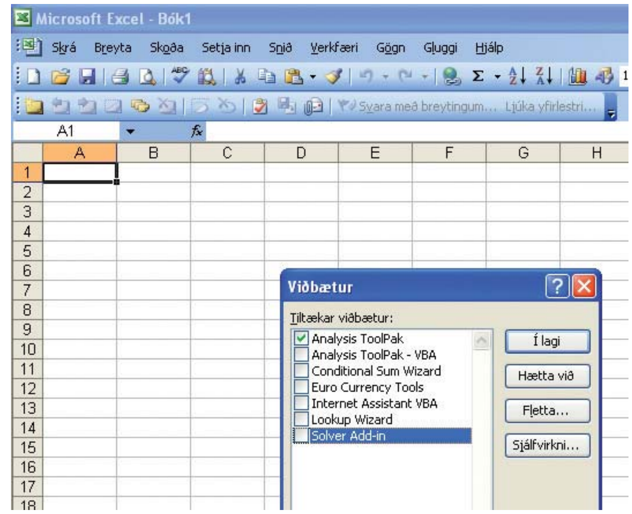
x^3 til að hefja tölu í þriðja veldi.
Shift $\sqrt[3]{x}$ til að finna þriðju rót af tölu.

y^x til að finna tölu í tilteknu veldi.
Shift $\sqrt[x]{y}$ til að finna tiltekna rót af tölu.



Kannaðu hvort þú getur framkvæmt þessar aðgerðir með vasareikninum þínum.

Töflureiknir er annað mjög öflugt reiknitæki sem hefur breytt mjög miklu um það hvernig fólk reiknar og heldur utan um tölulegar upplýsingar. Á það bæði við um daglegt líf og í atvinnulífinu. Í töflureikni eru innbyggðar ýmsar aðgerðir og reiknireglur. Sumar þeirra þarf að setja sérstaklega inn ef ætlunin er að nota þær.

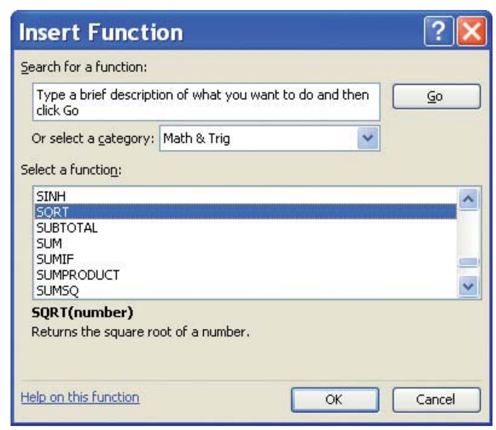


Hér verða skoðaðar nokkrar aðgerðir sem finna má í greiningarverkfærum Analysis Toolpack.

Til þess að setja inn stærðfræðiföll þarf að velja Tools – Add ins – Analysis toolpack – OK

Ein af þeim aðgerðum sem hægt er að velja er að finna ferningsrót, SQRT.

Sláðu inn tölu í dálk A. Staðsettu síðan bendilinn efst í dálki B.



Veldu fx. Þá gefst kostur á að velja flokk. Veldu Math & trig.

Þá birtist listi yfir föll í glugganum þar fyrir neðan. Leitaðu að fallinu ferningsrót, SQRT, og veldu það. Síðan velur þú reitinn í dálki A. Þá hefur þú skilgreint fallið ferningsrót og getur afritað það niður dálk B og fundið ferningsrót talna sem skráðar eru í dálk A. Skráðu að minnsta kosti 20 tölur á bilinu 1-100 í dálk A.

Í flokknum Math & trig má finna fleiri föll og aðgerðir. Prófaðu að setja aðgerðirnar EVEN og ODD í dálka C og D. Segðu frá hvað gerist þegar þessum aðgerðum er beitt.

Prófaðu einnig aðgerðirnar GCD, LCD og MOD. Þeim aðgerðum er beitt á tvær tölur í einu og því þarf að skrá tölur í tvo dálka.

Í þemaheftinu ***Töflureiknir notaður*** er sagt frá ýmsum öðrum aðgerðum sem gaman gæti verið að skoða.

Algebra er mjög öflugt tæki sem nota má til að sanna reiknireglur. Þú hefur áður heyrt af leiðinni sem stærðfræðingurinn Gauss uppgötvaði ungur að aldri til að finna summu fyrstu hundrað náttúrlegu talnanna. Hann komst að því að hægt væri að para tölurnar saman eins og hér er sýnt. Summa er táknuð með S.

$$S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (49 + 52) + (50 + 51)$$
$$S = 50 \cdot 101$$
$$S = 5050$$

Útskýrðu hvers vegna summan verður $50 \cdot 101$.

Þegar rannsakað er samhengi milli talna er oft prófað að reikna mörg sams konar dæmi með ólíkum tölum. Ef sanna á að regla gildi fyrir allar tölur eru hins vegar notaðir bókstafir sem staðgenglar fyrir tölur. Hér verður sýnt hvernig nota má bókstafi sem staðgengla talna þegar aðferð Gauss er notuð til að finna summu n fyrstu náttúrlegu talnanna. Fyrst er aðferð Gauss sett þannig fram að hún gildi fyrir hvaða fjölda náttúrlegra talna sem er.

Setning:

Summa n fyrstu náttúrlegu talnanna er: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

Sönnun:

Í talnaröðinni $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ myndi talan næst á undan n vera $(n - 1)$. Talan næst á undan (n-1) væri (n-2) og svo framvegis.

Notuð er aðferð Gauss og talnaröðunum er raðað hvorri í sína áttina hvorri á móti annarri og síðan eru lagðir saman þeir liðir sem standa saman tveir og tveir.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \dots & + & 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1)
\end{array}$$

Hægra megin við jafnaðarmerkið kemur talan $(n + 1)$ fyrir n sinnum.
Summa þessara talna er því $n(n + 1)$.
Það þýðir að $2S = n(n + 1)$.

Það er $S = \frac{n(n + 1)}{2}$ sem er það sem við vildum sanna.

37 Finndu summu talnanna.

a 1 til 20 **b** 1 til 1000 **c** 1 til 2500 **d** 1 til 155

Oft eru tölur skráðar sem veldi. Nota má veldarithátt fyrir heilar tölur, brot og bókstafi.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ $\quad$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ $\quad$ $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$

38 Einfaldaðu og skráðu sem veldi.

a $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$

b $7 \cdot a \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

c $11 \cdot 11 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$

d $11 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

e $a \cdot a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

f $5 \cdot 5 \cdot v \cdot v \cdot 5$

39 Einfaldaðu og skráðu sem veldi.

a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

b $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

c $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}$

d $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7}$

e $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{a}{9} \cdot \frac{a}{9}$

f $\frac{2a}{5} \cdot \frac{2a}{5} \cdot \frac{2a}{5}$

40 Reiknaðu.

a $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad$ b $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ $\quad$ c $\left(\frac{6}{5}\right)^4$ $\quad$ d $\left(\frac{7}{4}\right)^2$

41 Halldís heldur því fram að almennt brot sem er lægra en einn verði alltaf lægra en einn, sama í hvaða veldi það er hafið. Útskýrðu þessa fullyrðingu Halldísar.

42 Í hvaða veldi þarf að hefja $\frac{5}{4}$ til að fá fram tölu sem er stærri en 2? En $\frac{10}{5}$?

43 Hvert er gildið þegar a = 3?

a $\left(\frac{a}{7}\right)^4$ $\quad$ b $\left(\frac{5}{a}\right)^3$ $\quad$ c $\left(\frac{2a}{6}\right)^2$ $\quad$ d $\left(\frac{4a}{a}\right)^3$ $\quad$ e $\left(\frac{2a}{7}\right)^2$

Veldisvísar geta verið hvaða tölur sem er. Veldisvísir er $\frac{1}{2}$ þegar um er að ræða ferningsrót.

44 Reiknaðu.

a $\left(\frac{1}{6}\right)^4$ $\quad$ c 6^{-2} $\quad$ e $\left(\frac{4}{9}\right)^4$ $\quad$ g $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

b $\left(\frac{1}{6}\right)^0$ $\quad$ d 6^{-4} $\quad$ f $\left(\frac{4}{9}\right)^0$ $\quad$ h $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$(2)^{-4} = \left(\frac{1}{2^4}\right)$

Staðalform er þegar tala er skráð sem margfeldi tölu frá 1 til 10 og veldi af 10. $7{,}82 \cdot 10^3$

45 Skráðu þessar tölur á staðalformi.

a 745 000

b 150 000 000

c 0,23

d 0,00000789

e 0,00000000000000285

f 0,00000000972

Þegar finna á summu eða mismun talna sem skráðar eru sem veldi þarf að gæta nákvæmni.
Ef bæði veldisvísir og veldisstofn eru eins má draga saman líka liði.

$5^2 + 5^2 = 2 \cdot 5^2$ $\quad$ $5^2 + 2^2 = 25 + 4$ $\quad$ $5^3 + 5^2 = 125 + 25$

$25 + 25 = 2 \cdot 25$

$50 = 50$

46 Reiknaðu.

a $3^4 + 3^4$ $\quad$ c $5^3 + 5^1$ $\quad$ e $7^2 + 7^2 + 7^2$ $\quad$ g $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

b $11^1 - 7^1$ $\quad$ d $11^4 - 11^4$ $\quad$ f $11^3 - 11^2 + 11^1$ $\quad$ h $\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Auðvelt er að margfalda og deila með tölum sem skráðar eru sem veldi ef veldisstofninn er sá sami.

$10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ $\quad$ $10^{3+2} = 10^5$

$1000 \cdot 100 = 100000$

$\frac{10^3}{10^2} = 10^1$ $\quad$ $10^{3-2} = 10^1$

$\frac{1000}{100} = 10$

47 Einfaldaðu og skráðu sem eitt veldi.

a $3^4 \cdot 3^4$ $\quad$ c $3^6 \cdot 3^5$ $\quad$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$ $\quad$ g $\left(\frac{a}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^4$

b $7^6 : 7^3$ $\quad$ d $x^5 : x^3$ $\quad$ f $3^4 : 3^8$ $\quad$ h $\left(\frac{2}{3}\right)^6 : \left(\frac{2}{3}\right)^4$

48 Reiknaðu.

a $5^8 : 5^{10}$ $\quad$ b $2^3 : 3^2$ $\quad$ c $a^4 : b^4$ $\quad$ d $\frac{a^2}{7^3} : \frac{a^4}{7}$ $\quad$ e $6^4 : 3^4$

Veldareglur

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad$ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

49 Nemendur í 10.B fengu það verkefni að setja fram stæðu sem mætti nota til að reikna hve margar eldspýtur þyrfti til að leggja ferningamynstur.

Tómas setti fram stæðuna $1 + (n \cdot 3)$

Arndís skráði stæðuna $4 + ((n - 1) \cdot 3)$

Kristján notaði stæðuna $(n \cdot 2) + (n + 1)$

a Skoðaðu stæðurnar og lýstu því hvernig hver nemandi hefur greint mynstrið.

b Einfaldaðu stæður nemendanna.

c Hvað þarf margar eldspýtur til að leggja hundrað ferninga mynstur? En milljón ferninga mynstur?

50 Einfaldaðu stæðurnar.

a $3x + 5 + x - 2$

b $4x - 3x + 4 - 2x$

c $x(2x + 5) - x^2$

d $7x - 2(x + \frac{1}{3})$

e $5(x^2 + 3) + 8x(3 - x)$

f $5x(x - 2) + 2x(\frac{1}{2} - 2x)$

g Finndu gildi stæðanna þegar $x = -3$.

51 Paraðu saman jafngildar stæður.

$x + 4 + 4x + 4x + 5$

$(4x + 3)(4x - 3)$

$6x + 4 + 3x + 3 + 2$

$3x^2(2x^3 - 5x)$

$2x^3 \cdot 3x^2$

$2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot x^2$

$\frac{1}{2} - x^3 + 3 + 2x^3$

$4x^3 + \frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} - 3x^3$

$(3x^2 \cdot 2x^3) - (3x^2 \cdot 5x)$

$16x^2 + 12x - 3(4x + 3)$

52 Ljúktu við að einfalda þessar stæður.

a $\frac{4x + 2y}{10x + 5y} = \frac{2(\quad + \quad)}{5(\quad + \quad)}$

b $\frac{8y + 12}{2y + 3} = \frac{4(\quad + \quad)}{2y + 3}$

c $\frac{6m + 2mp}{6m^2} = \frac{2m(\quad + \quad)}{2m \cdot 3m}$

53 Útskýrðu hvers vegna ekki er hægt að einfalda $\frac{2}{2 + n}$.

54 Útskýrðu af hverju $\frac{2x + 7}{7}$ er ekki jafngilt $2x$.

55 *a* Búðu til tvö almenn brot úr tölustöfunum 2, 5, 7 og 15. Hver er summa, mismunur, margfeldi og kvóti brotanna þinna?

b Reyndu að búa til hærri summu með því að raða tölustöfunum saman í tvö almenn brot á annan hátt.

c Reyndu að fá fram meiri mismun, hærra margfeldi og hærri kvóta á sama hátt. Hvað þarf að hafa í huga við gerð almennu brotanna?

d Gefa sömu tvö brot hæstu summu og hæsta mismun?

e Gefa sömu tvö brot hæsta margfeldi og hæsta kvóta?

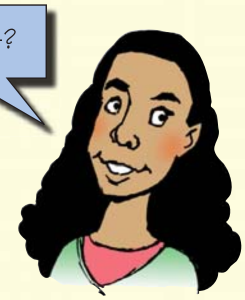
f Hve margir möguleikar eru á því að fá ólíkar summur?

Margar leiðir má fara við deilingu, hvort sem um er að ræða heilar tölur eða brot. Mikilvægt er að hafa í huga að líta má á deilingu bæði sem endurtekinn frádrátt og sem skiptingu. Gott er að lesa dæmi vel og skoða hvað felst í þeim áður en farið er að reikna.

$2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} =$

Ég lít á dæmið sem endurtekinn frádrátt. Hve oft get ég tekið $1\frac{1}{4}$ af $2\frac{1}{2}$?

Með hvaða tölu þarf ég að margfalda $1\frac{1}{4}$ til að fá út $2\frac{1}{2}$?



Ég breyti brotunum í eiginleg brot og geri þau samnefnd, þá verður svarið augljóst.

$2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} = \frac{5}{2} : \frac{5}{4} = \frac{10}{4} : \frac{5}{4} =$

Ég notfæri mér það að í stað þess að deila með broti get ég margfaldað með margföldunarandhverfu brotsins. Ég byrja á að breyta báðum brotunum í eiginleg brot og finn síðan margföldunarandhverfu.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{2} : \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

Hvert er svarið?

56 Leystu þessi dæmi á tvo mismunandi vegu.

a $5\frac{5}{6} : 1\frac{1}{6}$ *b* $6\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2}$ *c* $2\frac{1}{12} : 2\frac{1}{2}$ *d* $2\frac{4}{9} : 1\frac{5}{6}$

Pýþagóras

Pýþagóras fæddist um 579 f.Kr. á eyjunni Samos í Eyjahafi sem nú tilheyrir Grikklandi. Sagan segir að Mnesarkos, faðir Pýþagórasar, hafi leitað til véfréttarinnar í Delfí og sagði hofgyðjan Pýþía honum þá að kona hans ætti von á barni sem myndi skara fram úr öllum öðrum. Mnesarkos leit því á soninn, sem fæddist skömmu síðar, sem guðs gjöf og sá til þess að hann fengi bestu menntun sem völ var á.

Það kom að því að lærimeistarar Pýþagórasar höfðu kennt honum það sem þeir kunnu og hvöttu hann því til að leggja land undir fót og afla sér þekkingar í öðrum löndum. Á þessum tíma var einræðisherrann Pólýkrates við völd á Samos og líkaði Pýþagórasi illa stjórnunarhættir hans. Það hefur líkast til einnig stuðlað að því að hann lagðist í ferðalög. Pýþagóras ferðaðist víða um Egyptaland og nam ýmis fræði af prestum og spámönnum, m.a. stjörnufræði og rúmfræði.

Í Egyptalandi var Pýþagóras tekinn til fanga af hermönnum konungs Persíu um 525 f.Kr. og fluttur til Babýloníu. Þar nam hann bæði stjörnufræði og stærðfræði af persneskum prestum, en þeir voru mjög framarlega á þeim sviðum. Einnig lagði Pýþagóras stund á dulspeki og kynntist ýmsum leynireglum í Babýlóníu þau 12 ár sem hann dvaldi þar. Hann hélt aftur heim til Samos en komst fljótlega að því að Pólýkrates hafði þar enn öll völd í hendi sér og ákvað Pýþagóras því að fara til Krótónu, hafnarborgar á Suður-Ítalíu sem var undir stjórn Grikkja. Þar stofnaði hann heimspekiskóla og bræðralag sem lagði stund á trúarbrögð, dulspeki og vísindi. Bæði karlar og konur höfðu aðgang að bræðralagi Pýþagóringa og á vísindasviðinu var einkum fengist við talnafræði, rúmfræði, tónlist og stjörnufræði.

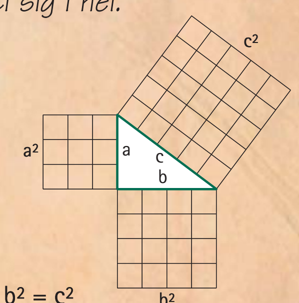
Pýþagóras er sagður hafa verið mjög alvörugefinn, ráðvandur og lítið gefinn fyrir hlátur. Hann var ætíð hvítklæddur enda var hvíti liturinn talinn tákn um gott eðli. Hann setti lærisveinum sínum mjög strangar reglur. Þeim var skipt í áheyrendur og stærðfræðinga og var mjög erfitt að komast í hóp lærisveina.

Áheyrendur fengu aldrei að sjá Pýþagóras. Hann var alltaf á bak við tjald þegar hann flutti þeim boðskap sinn og þeir sem vildu komast í hóp stærðfræðinganna þurftu að ganga í gegnum fimm ára þagnartímabil áður en þeir fengu að kynnast helstu kennisetningum í skóla Pýþagórasar og sjá meistarann sjálfan með eigin augum. Pýþagóras gerði miklar kröfur til lærisveina sinna og lagði að þeim að ígrunda ætíð að loknu dagsverki þessar spurningar.

- *Hvaða misgerðir hef ég framið?*
- *Hverju fékk ég áorkað?*
- *Hvaða skyldur hef ég ekki uppfyllt?*

Pýþagóringar nutu talsverðrar virðingar í samfélaginu og höfðu þar nokkuð mikil ítök. En þeir voru líka öfundaðir og ofsóttir af þeim sem ekki fengu inngöngu í bræðralagið. Eitt sinn réðst hópur óvildarmanna að samkomustað þeirra og kveikti í honum. Pýþagóras komst undan en þetta varð honum mikið áfall og leiddi til þess að hann svelti sig í hel.

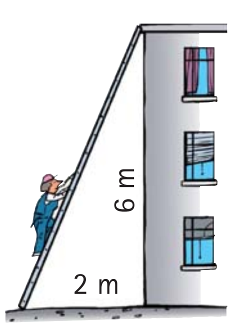
Setning Pýþagórasar er oft talin það mikilvægasta sem Pýþagóringar unnu að. Setningin er gott dæmi um stærðfræðilega uppgötvun sem auðvelt er að skilja en sá sem setti hana fram og sannaði hefur þurft að hafa góða stærðfræðiþekkingu. Setningin setur fram fullyrðingu um samband hliðarlengda rétthyrndra þríhyrninga sem er sönn fyrir alla rétthyrnda þríhyrninga.



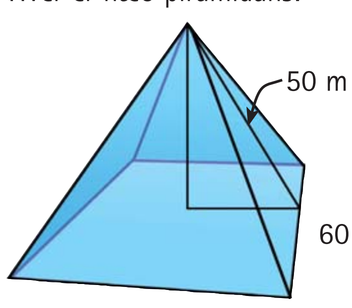
$a^2 + b^2 = c^2$

Setning Pýþagórasar leiðir til þess að auðvelt er að finna eina óþekkta hliðarlengd í rétthyrndum þríhyrningi ef hinar tvær eru þekktar. Það getur komið sér vel við lausn ýmiss konar verkefna.

1 a Hve hár er stiginn?

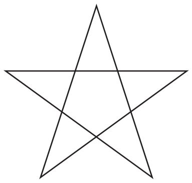


b Hver er hæð píramídans?

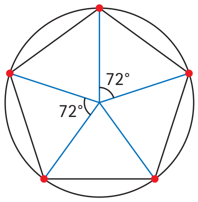


Fjallað verður um setningu Pýþagórasar og ýmsar leiðir við að sanna hana síðar í þessum kafla en Pýþagóringar unnu að því að rannsaka ýmis önnur stærðfræðileg viðfangsefni.

Reglulegur fimmhyrningur var eitt af þeim formum sem heillaði Pýþagóringa. Talið er að fimmstirni, sem myndast þegar hornlínur eru dregnar í reglulegan fimmhyrning, hafi verið merki bræðralags Pýþagóringa. Jafnframt var fimmstirnið tákn heilsunnar og er talið að Pýþagóringar hafi jafnan heilsast með orðunum: „*Heilsist þér vel*".

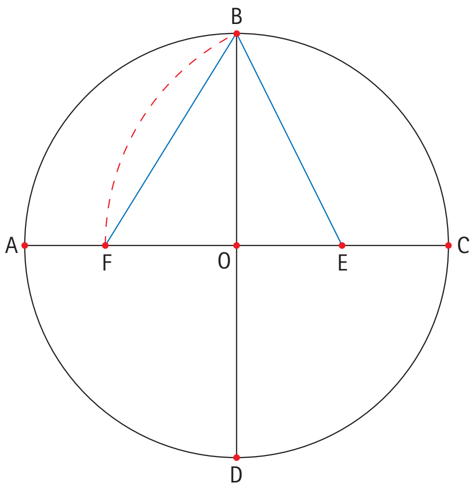


Pýþagóringar uppgötvuðu að hornalínur fimmhyrnings skipta hver annarri í gullinsniðshlutfalli sem skrá má sem $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ en gildi þess, með þremur aukastöfum, má skrá sem 1,618.



Ekki er auðvelt að teikna reglulegan fimmhyrning. Einna einfaldast er að gera það með því að teikna jafnarma þríhyrning út frá miðju hrings með 72 gráðu horni.

2 Einu verkfærin sem forngrísku stærðfræðingarnir notuðu til að teikna marghyrninga voru hringfari og ókvörðuð stika. Teiknaðu fimmhyrning eftir þessum fyrirmælum.



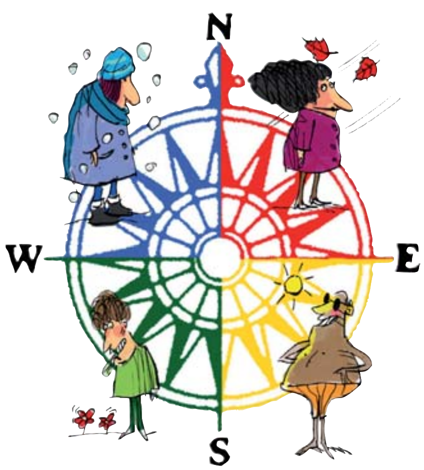
- Teiknaðu hring og miðstreng í hann.
- Teiknaðu miðstreng sem er hornréttur á þann fyrri.
- Merktu endapunkta og skurðpunkt strikanna eins og myndin sýnir.
- Helmingaðu strikið OC og merktu þar punktinn E.
- Teiknaðu hring með miðpunkt í E og geisla EB.
- Merktu punktinn F þar sem hringurinn sker strikið OA, eins og sýnt er á myndinni.
- Teiknaðu síðan hring með miðju í B og geisla BF.
- Merktu punktana G og H þar sem upphaflegi hringurinn og síðasti hringurinn skerast.
- Punktarnir B, G og H eru hornpunktar í reglulegum fimmhyrningi og ætti að vera auðvelt að finna hina tvo með því að marka með hringfara vegalengdina GB eða HB á upphaflega hringinn.

3 Teiknaðu nokkra misstóra fimmhyrninga og fimmstirni inn í þá. Haltu áfram að búa til minni og minni fimmhyrninga. Prófaðu líka að stækka fimmhyrninga og fimmstirni með því að framlengja hliðarlínur.

Deilar tölunnar 10 eru 1, 2, 5.

4 Pýþagóringar vörðu miklum tíma í að kanna og rannsaka tölur. Þeir veltu bæði fyrir sér innbyrðis tengslum talna og tengslum talna við náttúruna. Einna merkilegastar þóttu þeim hinar fullkomnu tölur en þær eru þess eðlis að summa deila þeirra er jöfn tölunni. Sem dæmi má nefna að talan 6 er fullkomin tala vegna þess að summa deila tölunnar 6 er $1 + 2 + 3 = 6$. Taka verður fram að Pýþagóringar litu ekki á töluna sjálfa sem eigin deili. Næsta fullkomna tala er á milli 20 og 30. Hvaða tala skyldi það vera?

5 Talan einn hafði algjöra sérstöðu í huga Pýþagóringa enda markaði hún upphaf alls í þeirra huga og samsvaraði því skaparanum. Tölur voru flokkaðar í sléttar tölur og oddatölur og voru sléttu tölurnar kallaðar kvenkyns tölur vegna þess að þær voru taldar veikari. Hvernig ætli Pýþagóringar hafi getað rökstutt að sléttar tölur væru veikari en oddatölur?



Hér eru dæmi um tengsl talnanna 4 og 7 við náttúruna samkvæmt hugmyndum Pýþagóringa.

- Skynfæri mannanna.
- Árstíðirnar fjórar.
- Höfuðáttirnar fjórar.
- Litir regnbogans.

Þekktir voru sjö furðuhnettir, þar á meðal sól og tungl.

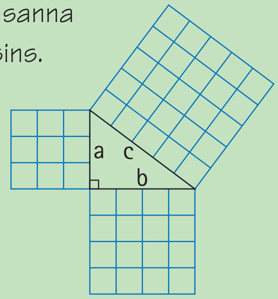
- Flauta guðsins Pan hafði sjö pípur og lýra Appolons sjö strengi.
- Á skynfærunum eru sjö göt.
- Börn fá fullorðinstennur 7 ára og drengjum fer að vaxa skegg $2 \cdot 7$ ára eða 14 ára.

6 Finndu fleiri dæmi um tengsl talna við náttúruna miðað við okkar tíma.

Eins og fram hefur komið er sönnun á setningu Pýþagórasar líkast til mikilvægasta framlag Pýþagóringa til stærðfræðinnar.

Í réttyrndum þríhyrningi er summan af ferningum skammhliðanna jöfn ferningi langhliðarinnar.

Samband stærða hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi má sanna með því að teikna beint ferninga út frá hverri hlið þríhyrningsins.



Dæmi

Teiknaður er rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðarnar a og b. Lengdir skammhliðanna eru skráðar og hvor um sig hafin í annað veldi (a^2 og b^2).
Summa þessara ferningstalna er þá $a^2 + b^2$.
Ef $a = 3$ og $b = 4$ fæst $9 + 16 = 25$.
Ef lengd langhliðarinnar (c) er mæld og sú stærð hafin í annað veldi (c^2) kemur fram ferningstalan 25, sem er einmitt sama tala og summa ferningstalna skammhliðanna. Ef $a = 3$ og $b = 4$ og þríhyrningurinn er rétthyrndur verður $c = 5$.

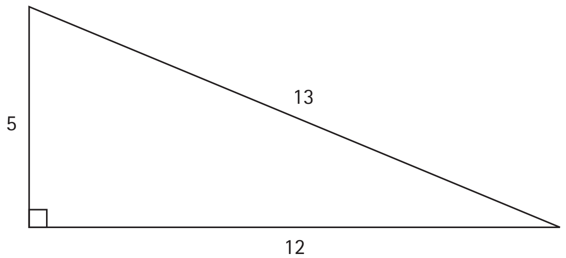
7 a Klipptu úr rúðuneti þrjá ferninga. Einn ferningurinn á að hafa hliðarlengdina 6 rúður, annar hliðarlengdina 8 og sá þriðji hliðarlengdina 10. Búðu til rétthyrndan þríhyrning með því að raða ferningunum á sama hátt og á myndinni.

b Sýndu fram á að flatarmál stærsta ferningsins sé jafnt summu flatarmáls minni ferninganna.

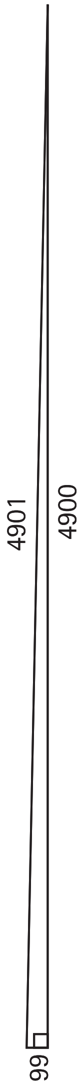
c Búðu til fleiri rétthyrnda þríhyrninga með hliðarlengdir sem eru margfeldi af 3, 4 og 5. Er summa ferningstalna hliðarlengda skammhliðanna alltaf sama tala og ferningstala hliðarlengdar langhliðarinnar?

8 Finna má fleiri gerðir rétthyrndra þríhyrninga sem hafa heilar tölur sem hliðarlengdir. Pýþagóringar fundu m.a. þá tvo sem eru í a-lið og b-lið. Sýndu fram á að setning Pýþagórasar gildi um þá.

a



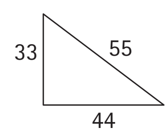
b



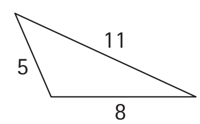
Með því að sanna setninguna $a^2 + b^2 = c^2$ sýndu Pýþagóringar fram á að hún væri algilt stærðfræðilegt lögmál. Í því felst fullvissa um að hún verði aldrei afsönnuð. Draga má ályktanir um þríhyrninga út frá þessari setningu. Ef samband hliðarlengda þríhyrnings uppfyllir skilyrði setningarinnar er þríhyrningurinn rétthyrndur. En ef summa ferningstalna hliðarlengda skammhliðanna er ekki jöfn summu ferningstölu langhliðarinnar er þríhyrningurinn ekki rétthyrndur. Tölur sem uppfylla skilyrði setningarinnar eru kallaðar **pýþagórískar þrenndir**. Lengdir hliða í þríhyrningi eru alltaf pýþagórískar þrenndir ef þríhyrningurinn er rétthyrndur.

9 Eru þessi þríhyrningar rétthyrndir?

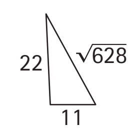
a



b



c



10 Ýmsar leiðir hafa verið þróaðar til að finna pýþagórískar þrenndir. Lýsing Pýþagórasar á einni slíkri er:

- Veldu oddatölu sem hliðarlengd skammhliðar. Finndu ferningstölu hennar.
- Dragðu einn frá.
- Helmingaðu útkomuna. Svarið er hliðarlengd hinnar skammhliðarinnar.
- Bættu einum við og þú hefur hliðarlengd langhliðarinnar.

a Skráðu aðferð Pýþagórasar við að finna þrenndir með algebru.

b Notaðu aðferð Pýþagórasar til að finna fjórar pýþagórískar þrenndir.

11 Platón (fæddur 427 f.Kr.) lýsir líka leið til að finna pýþagórískar þrenndir.

Veldu slétta tölu hærri en 2 sem hliðarlengd skammhliðar.

Helmingaðu töluna.

Settu útkomuna í annað veldi.

Dragðu einn frá til að fá lengd hinnar skammhliðarinnar.

Bættu einum við til að fá lengd langhliðarinnar.

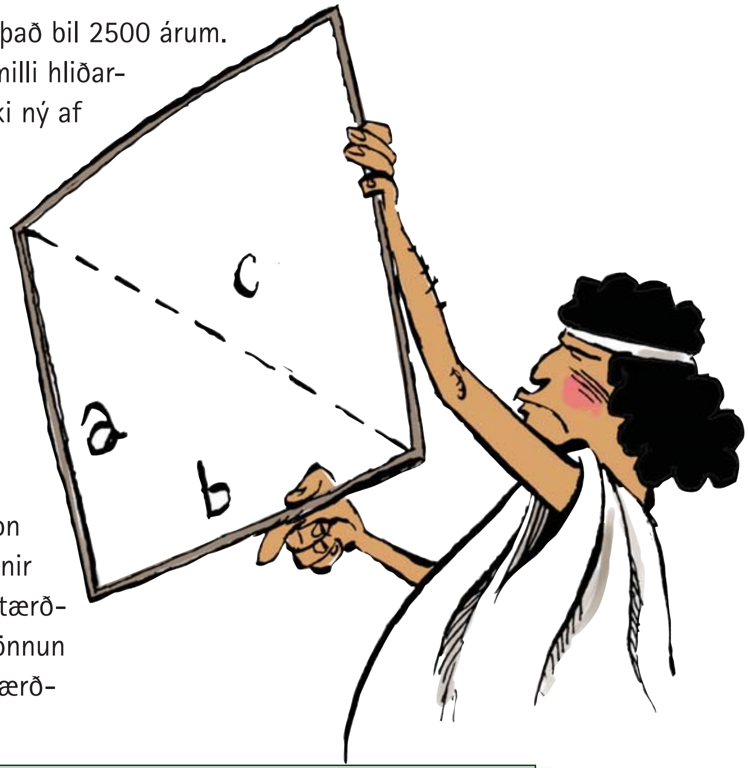
a Skráðu aðferð Platóns við að finna þrenndir með algebru.

b Notaðu aðferð Platóns til að finna fjórar pýþagórískar þrenndir.

12 Eru tölurnar pýþagórískar þrenndir?

a 27 364 365 **b** 5 15 16 **c** 9 12 17 **d** 8 15 17

Pýþagóras setti sönnun sína fram fyrir um það bil 2500 árum. Hugmyndin um að ákveðið samband væri milli hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi var þá ekki ný af nálinni. Kínverjar og Babýloníumenn þekktu inntakið í setningu Pýþagórasar þúsund árum fyrr. Þeir voru búnir að átta sig á að þetta samband gilti fyrir alla þá rétthyrndu þríhyrninga sem þeir höfðu mælt en settu ekki fram almenna reglu. Setningin er nefnd eftir Pýþagórasi vegna þess að hann varð fyrstur manna til að sanna að hún væri algild.



Í bókinni *Síðasta setning Fermats* eftir Simon Singh er mikinn fróðleik að sækja um tilraunir stærðfræðinga og leikmanna til að sanna stærðfræðilegt samband. Þar má m.a. lesa um sönnun Pýþagórasar og framlag hans til þróunar stærðfræðilegra sannana.

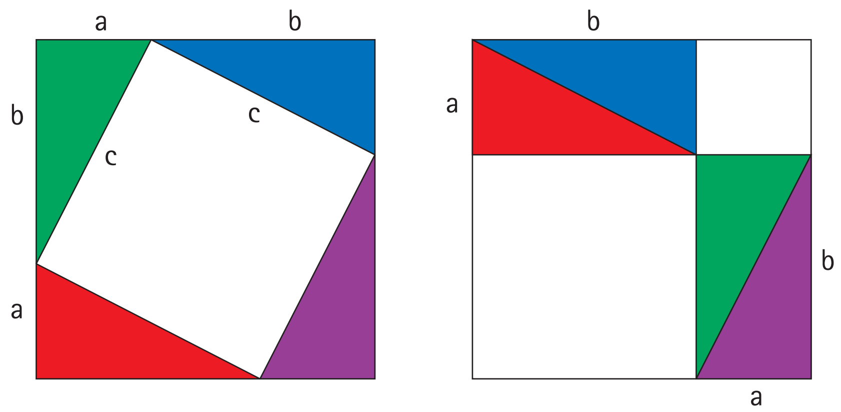
Sönnun Pýþagórasar er óhrekjanleg. Hún leiðir í ljós að setning hans gildir fyrir hvern einasta rétthyrnda þríhyrning í veröldinni. Þessi uppgötvun þótti svo stórfengleg að hundrað uxum var fórnað fyrir hana guðunum til dýrðar. Hún markaði þáttaskil í stærðfræði og er ein af mikilvægustu uppgötvunum í sögu siðmenningarinnar.

Mikilvægi hennar var tvíþætt. Í fyrsta lagi fékk hugmyndin um stærðfræðilega sönnun á sig mynd. Stærðfræðileg niðurstaða sem hefur verið sönnuð býr yfir dýpri sannleika en önnur sannindi því hún er afleiðing af ótvíræðri röksemdafærslu. Heimspekingurinn Þales hafði að vísu sett fram nokkrar einfaldar sannanir í rúmfræði en Pýþagóras þróaði sönnunarhugtakið miklu lengra og tókst að sanna margfalt hugvitssamlegri stærðfræðilegar fullyrðingar. Í öðru lagi var afleiðingin af setningu Pýþagórasar sú að hún tengir óhlutbundna stærðfræðilega aðferð við áþreifanlega hluti. Pýþagóras sýndi að beita mætti stærðfræðilegum sannleika í heimi vísindanna og leggja honum til rökfræðilegar undirstöður. Stærðfræði leggur raunvísindunum til hárnákvæmt upphaf og á þann trausta grunn hlaða vísindamenn ónákvæmum mælingum og ófullkomnum athugunum.

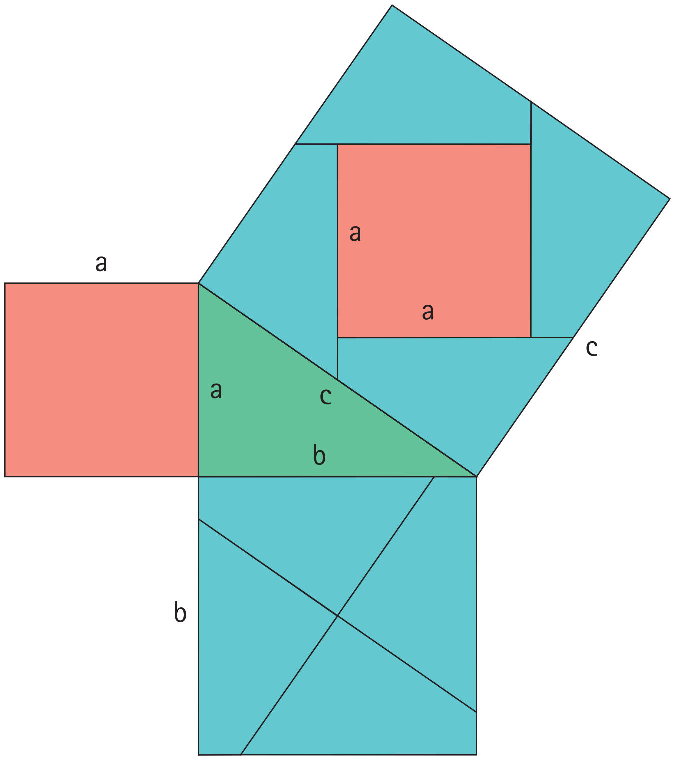
Heimild: *Síðasta setning Fermats* eftir Simon Singh í þýðingu Kristínar Höllu Jónsdóttur.

Margir hafa glímt við að setja fram sannanir á setningu Pýþagórasar. Sannanirnar á setningu Pýþagórasar eru flestar byggðar á rúmfræði.

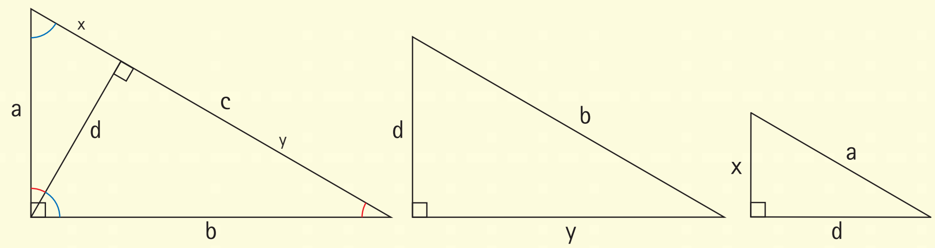
13 Prófaðu þessa sönnun Indverjans Bhaskara með því að klippa hlutana út og raða þeim saman. Skráðu heiti allra hliðarlengda.



14 Önnur leið til að sanna setningu Pýþagórasar er að klippa ferning sem er eins og sá minnsti út úr þeim stærsta eins og myndin sýnir. Bútunum sem eftir verða er raðað saman í ferning sem er jafn stór og næst minnsti ferningurinn.



Við sönnun á setningu Pýþagórasar má einnig nota þá leið að skipta rétthyrndum þríhyrningi í tvo einslaga rétthyrnda þríhyrninga. Byggt er á því að vitað er að hlutfall milli einslægra hliða í einslaga þríhyrningum er það sama.



Þessir þrír rétthyrndu þríhyrningar eru allir einslaga. Því má skrá:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \qquad \frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

$$x = \frac{a^2}{c} \qquad y = \frac{b^2}{c}$$

Hliðarlengdin c er jöfn summunni af x og y. Því má skrá:

$$c = x + y$$

$$c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} \quad \text{(báðar hliðar margfaldaðar með } c\text{)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

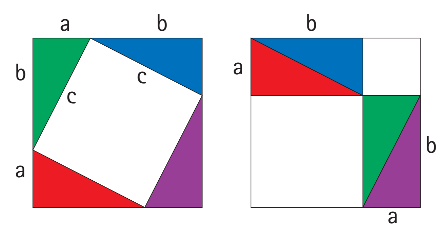
15 Sönnun Bhaskara má líka skrá með því að nota algebru.

$$c^2 + 4(\tfrac{1}{2}ab) = (a + b)^2$$

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Útskýrðu skráninguna.



16 Í þessum kafla hafa verið sýndar fjórar sannanir á setningu Pýþagórasar og á bls. 10 er að finna þá fimmtu.

a Skoðaðu þessar sannanir og berðu þær saman. Hvað eiga þær sameiginlegt og hvað skilur þær að?

b Hverja þeirra gekk þér best að skilja?

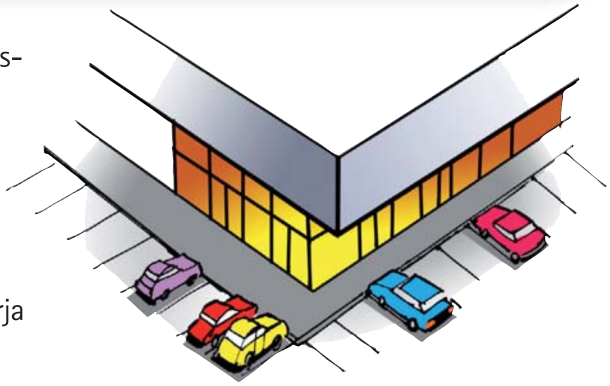
c Hvernig skyldi standa á því að stærðfræðingar vilji finna fleiri leiðir til að sanna eitthvað sem þegar hefur verið óhrekjanlega sannað?

Líkön

Stærðfræðilíkön geta verið hlutir, myndir, orð, tölur og tákn.
Í þessum kafla munt þú kynnast reiknilíkönum og hvernig þau eru notuð við áætlanagerð.

Markmið með þessum kafla eru að þú:

- *Beitir stærðfræði við lausn samfélagsmála.*
- *Notir tilbúin líkön og eigin líkön við útreikninga og mat á niðurstöðu.*
- *Eflir færni þína í að lesa úr upplýsingum og beitir skipulagðri vinnu við skráningu þeirra.*
- *Eflir dug þinn og þor við að leysa verkefni og prófa lausnir þínar.*



Reiknilíkön eru mikið notuð í skipulagsmálum, m.a. þegar reiknaður er út hæfilegur fjöldi bílastæða við nýbyggingar.

Yfirleitt er miðað við að eitt bílastæði sé á hverja 50 fermetra í iðnaðarhúsnæði og eitt stæði á hverja 35 fermetra í verslunarhúsnæði.

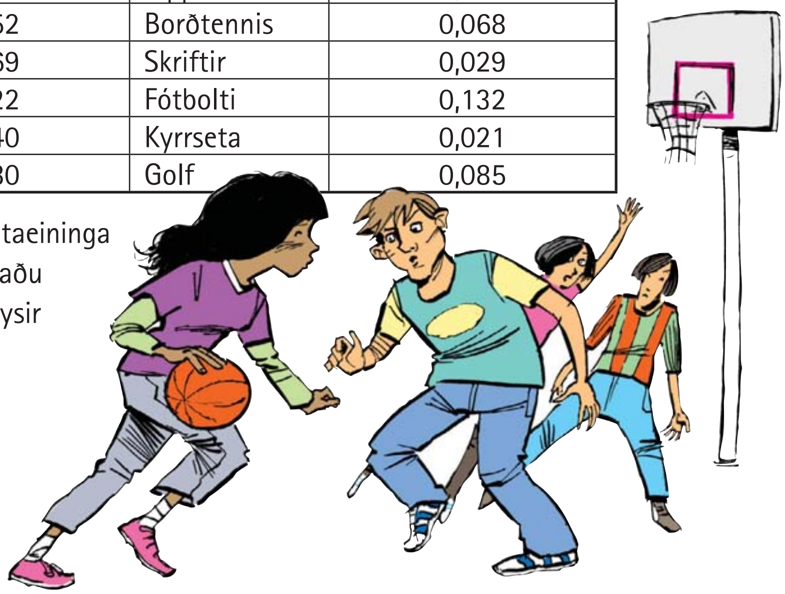
1 a Hve mörg bílastæði þarf að hafa við 1250 fermetra iðnaðarhúsnæði?
b Hve mörg bílastæði þarf að hafa við 725 fermetra iðnaðarhúsnæði?
c Settu fram líkan fyrir útreikning á bílastæði við iðnaðarhúsnæði.

2 a Hve mörg bílastæði þarf að hafa við 1250 fermetra verslunarhúsnæði?
b Hve mörg bílastæði þarf að hafa við 725 fermetra verslunarhúsnæði?
c Settu fram líkan fyrir útreikning á bílastæði við verslunarhúsnæði.

3 a Breyta á 1000 fermetra iðnaðarhúsnæði í verslunarhúsnæði. Hve mörgum bílastæðum þarf að bæta við?
b Hvaða reiknilíkan má nota þegar reikna á út hve mikið þarf að fjölga bílastæðum þegar iðnaðarhúsnæði er breytt í verslunarhúsnæði?

Mannslíkaminn brennir mismörgum hitaeiningum eftir því hvað fengist er við. Fjöldi hitaeininga sem hann brennir fer líka eftir stærð, líkamlegu ástandi og fleiru.

	$\frac{\text{kílóhitaeiningar}}{\text{mín} \cdot \text{þyngd í kg}}$		$\frac{\text{kílóhitaeiningar}}{\text{mín} \cdot \text{þyngd í kg}}$
Körfubolti	0,138	Sipp	0,162
Smíðar	0,052	Borðtennis	0,068
Hjólreiðar – hratt	0,169	Skriftir	0,029
Afslöppuð lega	0,022	Fótbolti	0,132
Píanóleikur	0,040	Kyrrseta	0,021
Ganga	0,080	Golf	0,085



Í töflunni er gefið hlutfall milli kílóhitaeininga og margfeldis af tíma og þyngd. Notaðu upplýsingarnar í töflunni þegar þú leysir dæmi 4–7.

4 a Hvenær brennir líkaminn flestum hitaeiningum?

b Hvenær brennir líkaminn fæstum hitaeiningum?

c Hvenær skyldi mannslíkaminn ekki brenna neinum hitaeiningum?

5 a Reiknaðu út hve mörgum kílóhitaeiningum 60 kg þung manneskja brennir ef hún situr kyrr í 30 mínútur.

b Jónas reiknar út brennslu sína.

$$\frac{x}{55 \cdot 75} = 0{,}040$$

$$\frac{x}{4125} = 0{,}040$$

$$x = 165 \text{ kílóhitaeiningar}$$

Hvað hefur Jónas verið að gera og hve lengi?

c Sigríður spilar körfubolta í x mínútur og brennir 500 kílóhitaeiningum. Þetta má tákna með jöfnunni $500 = 8{,}28x$. Hvernig má fá fram þessa jöfnu út frá upplýsingunum í töflunni?

6 Veldu eina athöfn sem krefst margra hitaeininga og aðra athöfn sem krefst fárra hitaeininga. Búðu til töflu sem sýnir fjölda mínútna sem það tekur 60 kílóa þunga manneskju að brenna 100, 200, 300, 400 og 500 kílóhitaeiningum miðað við hvora athöfn.

7 Hverjir gætu verið kostir þess að nota líkanið sem fram kemur í töflunni?

Reiknilíkön geta verið mjög ólík. Þegar reiknað er út verð á vínberjum, hakki eða fóðurbæti er til dæmis notað líkanið **kílóverð margfaldað með þyngd gefur verð** en þegar reiknaður er út kostnaður við að leigja bílaleigubíl er notað líkanið **kílómetrafjöldi margfaldaður með einingaverði og fastagjaldi bætt við**.

8 Þjónustuaðilar innheimta virðisaukaskatt fyrir ríkissjóð. Virðisaukaskattur á útselda vinnu er 24,5%. Iðnaðarmaður selur vinnu sína á 3500 krónur á klukkutímann. Hann notar reiknilíkanið $3500 \cdot t \cdot 1{,}245$ til að reikna út kostnað viðskiptavina sinna. Reiknaðu út kostnað við verk sem tekur

a 10 klst. *b* 20 klst. *c* 14,5 klst. *d* 145 klst.

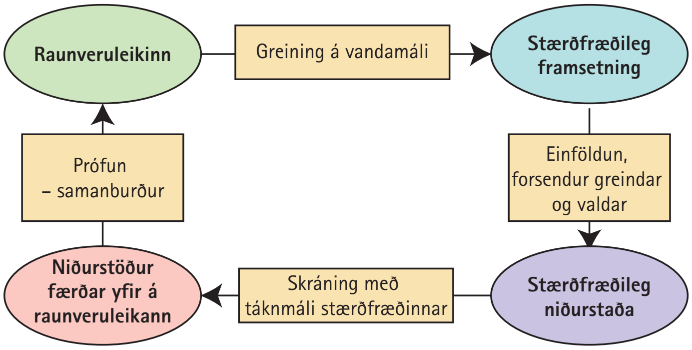
e Hvernig myndi líkanið líta út ef útseld vinna væri á 4000 krónur?

Spálíkön eru mikið notuð við áætlanagerð. Þau eru búin til út frá greiningu á forsendum og spá áframhaldandi þróun á þeim grundvelli. Dæmi um spálíkan er líkan sem notað var árið 1990 til að spá fyrir um fjölda barna í Háteigsskóla í Reykjavík árið 2010. Því var spáð að 47 börn myndu hefja nám í fyrsta bekk. Hvaða forsendur kynnu að hafa legið til grundvallar gerð þessa spálíkans?

Líkön geta aldrei verið nákvæm eftirlíking af raunveruleikanum. Við gerð þeirra er byrjað á að greina forsendur og skoða í hverju viðfangsefnið felst. Oftast er verið að fást við tiltekið vandamál og þarf að skoða vel hverjir eru helstu áhrifaþættir. Mikilvægt er að átta sig á hvert sambandið er á milli meginþáttanna. Sambandið er síðan skráð og sett fram á stærðfræðilegan hátt. Gerðar eru tilraunir með líkanið með því að setja ýmsar tölur inn, reikna út og skoða hvernig niðurstöður passa við raunveruleikann.

Þegar um spálíkön er að ræða getur verið erfitt að sjá fyrir áhrifaþætti og er því mjög mikilvægt að gera góða grein fyrir því hvaða forsendur eru lagðar til grundvallar. Oft eru því settar fram ólíkar spár á grundvelli mismunandi spálíkana. Fólk er sjaldnast sammála um spálíkön. Þegar Hafrannsóknarstofnun tilkynnir mat sitt á stofnstærð þorsks eru oft margir sem telja matið alltof lágt og þegar spáð er fyrir um verðlagsþróun koma líka margir fram og hafa aðra skoðun.

Gerð líkana má sýna með mynd.

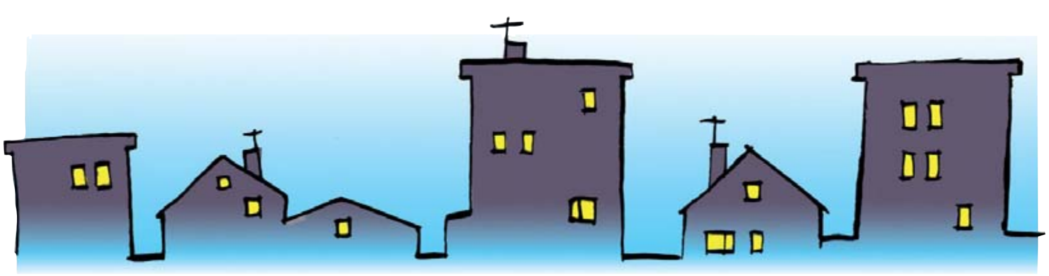


Dæmi um hvernig búa má til líkan og prófa það.

1. Fyrirhugað er að byggja nýtt hverfi með 700 íbúðum. Fyrir hve mörg börn þarf að byggja grunnskóla?
2. Skoða þarf íbúasamsetningu og skrá stærð og gerð íbúða. Skoðað er hve margir grunnskólanemendur eru að jafnaði í hverri gerð íbúða. Þá er notað líkan sem skipulagsfræðingar hafa sett fram. Miðað er við að það séu 0,3 börn á íbúð í fjölbýlishúsi, 0,5 börn í raðhúsi og 0,6 börn í einbýlishúsi. Í hverfinu eru 350 íbúðir í fjölbýlishúsum, 200 íbúðir í raðhúsum og 150 einbýlishús.
3. Samband stærða skráð. $350 \cdot x + 200 \cdot y + 150 \cdot z = v$ $\boxed{\text{v er fjöldi barna}}$
4. Líkan prófað á raunveruleikanum. Skoðuð eru nokkur hverfi og gæði líkansins metin út frá því hve nálægt raunveruleikanum niðurstaðan er.

HÓPVERKEFNI

9 Skoðið hverfið ykkar og notið þetta reiknilíkan til að finna út hver fjöldinn í grunnskólanum ykkar ætti að vera samkvæmt því. Berið niðurstöðu ykkar saman við raunverulegan fjölda nemenda í skólanum og setjið fram hugsanlegar skýringar á því af hverju líkanið sýnir svipaða niðurstöðu og raunveruleikinn eða víkur frá honum. Hvaða fleiri forsendur geta haft áhrif en gerð íbúða?



HÓPVERKEFNI

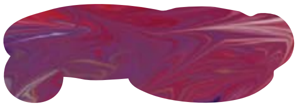
OLÍUBÍLL VALT Í HEIÐMÖRK

Í gær varð það óhapp á Heiðmerkurveginum að olíubíll valt í mikilli hálku. Ökumann sakaði ekki en töluvert af olíu lak úr bílnum. Eftirlitsmenn fóru strax á staðinn til að skoða verksummerkin og skipuleggja aðgerðir. Þeir reyndu strax að áætla á hve stórt svæði olían hefði dreift sér því miklu máli skiptir að hefta útbreiðslu hennar og hefja hreinsunaraðgerðir strax. Í viðtali við Jónu Geirsdóttur eftirlitsmann hjá Mengunarvörnum, kom fram að hún hefði áhyggjur af því hve nálægt vatnsbólum Reykvíkinga óhappið hefði orðið.

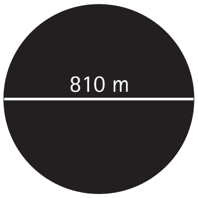
10 Hvernig má mæla stærð olíumengaða svæðisins?

11 Metið flatarmál svæðanna. Útskýrið hvernig þið ákvörðuðuð svörin og látið koma fram hvernig þið mælduð.

a 

b 

12 Við kjöraðstæður, til dæmis í stóru köldu vatni, breiðist olía út í þunnu lagi sem er ein sameind á þykkt. Þykkt sameindar af olíu er um það bil $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ cm. Gerðu ráð fyrir að olían hafi dreifst eins og sýnt er á myndinni og sé ein sameind á þykkt. Skráðu svar þitt í lítrum og gerðu ráð fyrir að 1 ml af olíunni fylli 1 rúmsentímetra.



13 Hvaða áhrif hefur magn olíu á lögun og flatarmál olíuflekks?

Leitið svara við þessari spurningu með því að gera tilraun.

Gögn:
- dropateljari
- átta arkir af rakadrægum sléttum pappír (t.d. vatnslitapappír)
- reglustika
- örlítið af olíu
- eitthvað til að þrífa með

① Raðið örkunum á sléttan flöt sem ekki dregur í sig raka. Númerið arkirnar frá 1–8 og setjið punkt með blýanti í miðju hverrar arkar. Gætið þess að krumpa ekki pappírinn.

② Byrjið á örk númer 8. Setjið átta dropa af olíu með dropateljaranum á miðpunktinn. Setjið næst sjö dropa á örk númer 7, sex dropa á örk númer 6 og haldið þannig áfram með allar arkirnar.

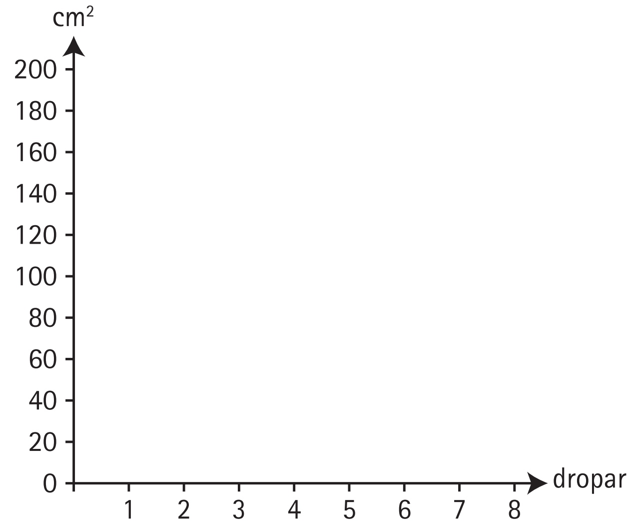
③ Fylgist með hvernig olían dreifist og skráið athuganir ykkar. Gætið þess að snerta ekki pappírinn.

④ Rannsakið tengsl milli fjölda dropa af olíu sem fór á pappírinn og lögun olíuflekksins sem myndaðist.
- Hvaða mynstur getið þið greint í lögun flekkjanna?
- Er einhver regla um stærð flekkjanna?
- Hvaða erfiðleikar koma upp ef mæla á og reikna stærð flekkjanna?
- Mælið breidd olíuflekkjanna með 0,1 cm nákvæmni. Byrjið á örk númer 1 og haldið áfram í réttri röð. Skráið niðurstöður hjá ykkur.
- Áætlið flatarmál olíuflekkjanna með eins fersentímetra nákvæmni.

⑤ Hve marga aukastafi notið þið þegar þið mælið olíuflekkina? Hvaða áhrif hefur fjöldi aukastafa á nákvæmni í flatarmálsútreikningum?

⑥ Samband er á milli fjölda dropa og stærð olíumengaðs svæðis. Ef olíumengaða svæðið er háða breytan, hverju er hún háð? Ef fjöldi dropa er óháða breytan, hvað felur það í sér?

Notið niðurstöður úr rannsóknum ykkar á olíuflekkjum.



14 a Búið til graf þar sem fjöldi dropa er á öðrum ásnum og flatarmál olíuflekkja úr dæmi 13 á hinum ásnum. Hafið svæðið sem myndast af 0 dropum með á grafinu.

b Lýsið einkennum grafsins.

c Notið grafið til að áætla stærð olíuflekkja eftir:

10 dropa	25 000 dropa (u.þ.b. 1 l)	0,5 dropa
25 dropa (u.þ.b. 1 ml)	2,5 dropa	0,04 dropa

15 a Reiknið hlutfall svæðisins miðað við fjölda dropa sem notaðir voru á hverri af örkunum átta.

b Útskýrið þá reglu sem kemur fram.

c Að hvaða tölu má námunda hlutföllin sem þið funduð í a-lið?

d Hlutfallið sem þið skráðuð í c-lið er kallað m.
Setjið það inn í jöfnuna $y = mx$ og teiknið graf jöfnunnar.
Hvað táknar y í jöfnunni? Hvað táknar x í jöfnunni?

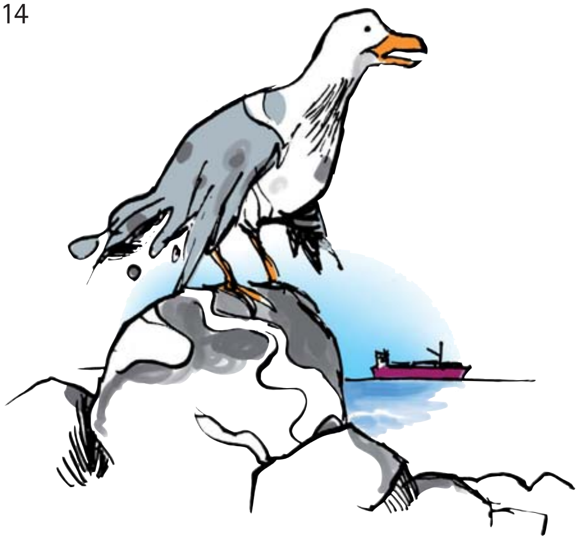
e Notið jöfnuna úr d-lið til að spá fyrir um flatarmál olíuflekkja sem koma fram við olíuleka.

0,04 dropar	0,5 dropar	2,5 dropar
10 dropar	25 dropar	25 000 dropar

16 a Berið saman grafið í dæmi 14 og jöfnuna úr dæmi 15.

b Hvaða jafna gæti verið gott líkan til að lýsa dreifingu olíu? Rökstyðjið mat ykkar.

c Teljið þið líklegt að einn lítri af olíu (um það bil 25 000 dropar), sem væri hellt á nægilega stórt blað, myndi dreifast á jafnstórt svæði og þið spáðuð í e-lið í dæmi 15? Rökstyðjið.



d Gæti jafnan úr d-lið í dæmi 15 nýst til að spá af nákvæmni um útbreiðslu olíumengunar á jörðu úr 500 tunnum af olíu? Rökstyðjið svarið. Setjið fram hugmynd um breytingu á spálíkaninu ef þið teljið það nauðsynlegt til að bæta spágildi þess.

17 Umræðuspurningar fyrir allan nemendahópinn.

a Skoðið niðurstöður úr tilraun ykkar.

Minnkaði olíuflekkurinn alltaf ef droparnir voru færri?
Hvaða vandamál rákust þið á við að finna út stærð flekkjanna?
Hvaða leiðir notuðuð þið til að leysa úr þeim vandamálum?

b Hvaða leiðir eru góðar til að átta sig á sambandi stærða?

Þið hafið borið saman það að teikna graf og nýta hlutfallsútreikninga til að setja fram jöfnu. Hvor leiðin teljið þið að sé heppilegri?

c Skráið jöfnur sem hópar settu fram í dæmi 16 b-lið. Hvað er líkt með þeim og hvað er ólíkt?

d Teljið þið að þessi leið sé gagnleg til að búa til líkan um dreifingu út frá olíuleka?

e Teljið þið að líkön ykkar gætu nýst eftirlitsmönnum Mengunarvarna við skipulagningu viðbragða við olíuslysi?

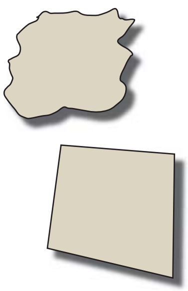
Skipting á landsvæði hefur oft leitt til mikilla deilna og jafnvel langvarandi stríðsátaka. Margir þekkja líka sögur af erfiðleikum við að skipta arfi. Þróuð hafa verið ýmis reiknilíkön sem nota má til að finna sanngjarna skiptingu.

18 Ekki eru allir sammála um hvað sé sanngjörn skipting. Hvað finnst þér vera sanngjörn skipting ef skipta á:

a sportbíl að virði 3,5 milljónir króna og demantshring að virði 700 þúsund króna milli tveggja manna?

b 25 hekturum lands milli þriggja manna?

Ein leið til að skipta skiptanlegum hlutum, eins og landareign, milli tveggja manna er **skiptu og veldu** aðferðin. Þessi leið byggist á því að annar aðilinn skiptir hlutnum í tvennt og hinn velur svo hvorn hlutann hann vill.



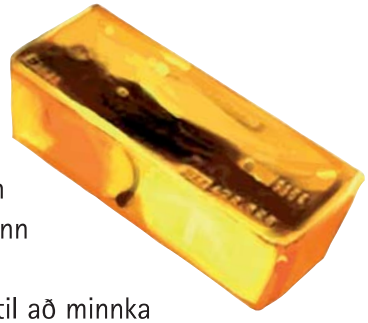
19 Prófaðu **skiptu og veldu** aðferðina með félaga þínum.

a Teiknið form og klippið þau út. Skiptið hvoru formi milli ykkar með því að annar klippir form í sundur og hinn velur hluta.

b Teljið þið að þessi aðferð sé góð leið til að fá fram sanngjarna skiptingu? Hvort viljið þið vera sá sem klippir eða sá sem velur?

Þessa aðferð má líka nota ef þrír eða fleiri þurfa að skipta einhverju á milli sín. Þá klippir einn aðilinn af sanngjarnan hluta fyrir einn. Hinir meta hver á eftir öðrum hvort þetta sé sanngjarn hluti og minnka hann ef þeim finnst þurfa. Sá sem minnkar hlutann síðast fær hann. Notuð er **skiptu og veldu** aðferðina til að skipta því sem eftir er.

20 Vinnið fjögur saman.



- Klippið renning sem á að tákna gullstöng. Veljið einn sem byrjar á að klippa sanngjarnan hluta fyrir einn og ákveður í hvaða röð skærin ganga.
- Látið hlutann ganga á milli ykkar. Sá sem fær hann næst hefur val um að minnka hlutann eða hafa hann óbreyttan.
- Haldið áfram þangað til allir hafa fengið tækifæri til að minnka hlutann þannig að þeim finnist hann sanngjarn hluti fyrir einn. Sá sem minnkaði hlutann síðast fær hann og er þar með búinn að fá sinn hluta.
- Ferlið er endurtekið og þegar tveir eru eftir klippir annar og hinn velur hluta.

21 Klippið út óreglulegt svæði og prófið skiptingaraðferðir á því.

Það er vandi að finna leið til sanngjarnrar skiptingar á hlutum sem eru óskiptanlegir, eins og hús. Í slíkum tilfellum getur aðeins einn aðili fengið hlutinn og finna þarf leiðir til að bæta hinum það á sanngjarnan hátt. Stærðfræðingar hafa þróað nálgun að þessu vandamáli sem kalla má **bjóddu í og skiptu**. Aðferðin felst í að allir bjóða leynilega í hlutinn og sá sem býður hæst fær hlutinn. Stærðfræðilíkani er beitt til að ákvarða bætur til hinna en við það eru notuð tilboð hvers og eins.

22 Hér er dæmi um hvernig líkanið **bjóddu í og skiptu** er notað. Viktor, Freyja, Alvin og Blædís erfa húseign. Þau ákveða að fara þá leið að bjóða í húsið og reikna síðan bætur til þeirra sem ekki fá húsið út frá tilboðum þeirra.

Viktor	Freyja	Alvin	Blædís
24 milljónir	32 milljónir	28 milljónir	36 milljónir

Blædís býður hæst svo hún fær húsið. Aðferðin til að reikna út bætur til hinna felur í sér að hún leggur $\frac{3}{4}$ af tilboðsverði sínu tímabundið í sjóð. Í þessu tilfelli eru það $\frac{3}{4} \cdot 36 = 27$ milljónir krónur.

Hinir erfingjarnir taka út úr sjóðnum $\frac{1}{4}$ af þeirri upphæð sem þeir buðu í húsið. Viktor fær því $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ milljónir, Freyja fær $\frac{1}{4} \cdot 32 = 8$ milljónir og Alvin $\frac{1}{4} \cdot 28 = 7$ milljónir.

Þau hafa þá tekið samtals 21 milljón úr sjóðnum og eftir eru 6 milljónir. Þeirri upphæð er deilt jafnt á milli allra erfingjanna.

Hver er endanleg upphæð sem hver erfingi fær?

23 Notaðu líkanið og reiknaðu sanngjarnan hlut fyrir erfingja Þórdísar. Tilboð þeirra eru:

Héðinn	Hlín	Sigurður	Vaka
12 milljónir	16 milljónir	15 milljónir	13 milljónir

24 Skipting er aðeins sanngjörn ef allir aðilar meta það þannig að þeir hafi fengið sanngjarnan hluta af heildinni.

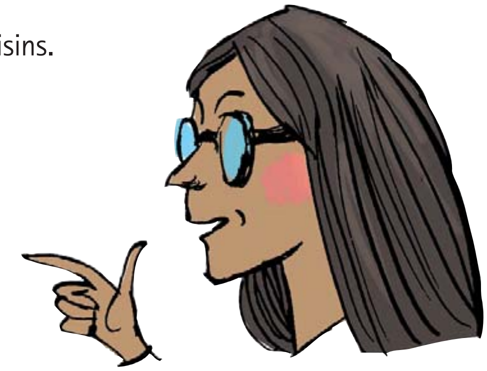
a Fær hver sanngjarnan hlut út frá sínu sjónarmiði ef líkanið er notað?

b Veltu fyrir þér hugtakinu sanngjörn skipting. Hvað þýðir það í þínum huga?

c Hvaða leið myndir þú stinga upp á við skiptingu fyrir fimm erfingja að togara?

Algengt er að fyrirtæki sameinist. Þá koma upp mörg mál sem semja þarf um. Sum þeirra er erfitt að komast að samkomulagi um. Ein leið til að komast að sanngjarnri niðurstöðu er að nota líkan þar sem unnið er út frá forgangsröðun samningsaðila. Líkanið byggist á því að hvort fyrirtæki fær 100 stig til að skipta niður á þau atriði sem deilt er um yfirráð yfir. Þau geta verið:

1. Nafn sameinaðs fyrirtækis.
2. Staðsetning höfuðstöðva fyrirtækisins.
3. Hver verður stjórnarformaður fyrirtækisins.
4. Hver verður forstjóri fyrirtækisins.
5. Í hvoru fyrirtækinu verði sagt upp fleira starfsfólki.



Samningsaðilar eiga að gefa hverju atriði stig eftir því hve mikilvæg þeir telja þau vera fyrir hagsmuni sína. Þeir hafa 100 stig í pottinum. Báðir aðilar verða að gefa stig án þess að vita hvernig hinn aðilinn gefur stig. Dæmi um stigagjöf gæti verið:

	A	B
Nafn fyrirtækis	5	10
Staðsetning höfuðstöðva	25	10
Stjórnarformaður	35	20
Forstjóri	15	35
Uppsagnir	20	25
Samtals:	100	100

25 Stjórnarmenn í fyrirtæki A ráða þeim atriðum sem þeir gefa fleiri stig.

a Hvaða atriðum fær fyrirtæki A að ráða?

b Hvaða atriðum fær fyrirtæki B að ráða?

c Hve mörg stig nýtir fyrirtæki A?

d Hve mörg stig nýtir fyrirtæki B?

e Stjórnarmönnum í fyrirtæki A finnst þessi skipting ekki sanngjörn. Hvernig væri hægt að jafna skiptinguna?

Inn í líkanið er byggð leiðréttingaraðferð svo stjórnarmenn í báðum fyrirtækjum hafi vald yfir sama stigafjölda. Leiðréttingaraðferðin byggist á því að skipta einhverju atriði hlutfallslega. Auðvelt er að skipta uppsögnum hlutfallslega og nota það til leiðréttingar. Þá má setja upp jöfnu með tveimur jafngildum stæðum þar sem hlutfall skiptingar uppsagnanna er óþekkta stærðin. Ef sá hluti uppsagnanna sem stjórnarmenn í fyrirtæki A taka á sig er x má skrá hluta stjórnarmanna í fyrirtæki B sem $1 - x$.

Jafnan verður þá

$$\begin{aligned} 25 + 35 + 20x &= 10 + 35 + 25(1 - x) \\ 60 + 20x &= 45 + 25 - 25x \\ 45x &= 10 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

26 a Hve stór hluti uppsagnanna verður í fyrirtæki B?

b Settu gildið fyrir x í jöfnuna og reiknaðu út hve mörg stig stjórnarmenn í hvoru fyrirtæki nýta miðað við þessa stigagjöf.

c Er þetta sanngjörn aðferð við að skipta völdum og/eða leysa ágreiningsefni?

HÓPVERKEFNI

27 Setjið ykkur í spor stjórnenda fyrirtækis sem er í samrunaferli við annað fyrirtæki. Samið hefur verið um flest mál en eftir er að ákveða fimm atriði, þ.e.

1. Merki fyrirtækisins.
2. Forstjóra.
3. Starfsmannastjóra.
4. Stjórnarformann.
5. Uppsagnir.

Skiptið ykkur í tvo fyrirtækjahópa og gefið ágreiningsatriðum stig.

Fylgið síðan ferlinu sem lýst var og leysið þannig úr ágreiningsmálum.

Leggið mat á niðurstöðuna. Finnst ykkur hún sanngjörn?

Í þessum kafla hefur meginviðfangsefnið verið líkön. Margs konar líkön eru notuð í atvinnulífinu. Dæmi um það er líkan sem bílasalar notuðu til að ákveða hvaða tveimur bílum þeir ættu að bæta í sýningarsal sinn. Fjórar gerðir bíla komu til greina. Bílasalarnir voru ekki sammála um hvaða tvo bíla ætti að velja svo þeir ákváðu að hver þeirra myndi raða bílunum í sæti 1–4 þannig að númer 1 væri sá sem þeir vildu helst. Röðun þeirra er sýnd í töflunni.

Bílasali	Sportbíll	Pallbíll	Fjölskyldubíll	Jeppi
A	1	4	3	2
B	3	2	4	1
C	1	3	4	2
D	2	1	3	4

28 Bílasalarnir biðja þig að lesa úr töflunni og koma með uppástungu um hvaða tvo bíla þeir ættu að panta í sýningarsalinn. Hafðu í huga að mæta sem best hugmyndum bílasalanna. Skrifaðu stutta samantekt og settu upplýsingarnar fram myndrænt.

HÓPVERKEFNI

29 Skólastjórinn í Hoppuskóla kom að máli við nemendur í 10. bekk. Hann sagði að þeir mættu velja tvo hluti af fjórum til að hafa í skólastofunni. Hlutirnir voru: fartölva, ísskápur, sófi og hljómflutningstæki.

- Vinnið fjögur saman og setjið ykkur í spor nemenda í Hoppuskóla.
- Gerið töflu og notið aðferð bílasalanna við að skrá forgangsröð ykkar.
- Nýtið upplýsingarnar í töflunni til að meta vilja bekkjarins.
- Berið niðurstöður ykkar saman við niðurstöður annars hóps.

Fólki berst mikið af niðurstöðum útreikninga og því er mikilvægt að efla færni sína í að greina líkön og skilja hvernig þau eru notuð.

Sæmundur Sólmundsson
Sólhlíð 177 b
207 Kópavogur

Jarðverk hf.
Launaseðill nr. 07.2007

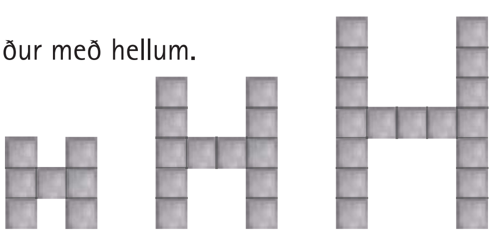
Tekjur		**Frádráttur**	
Verkamaður 1,40 einingar	60 000	Félagsgjald 1%	600
Orlof 10,17%	6 102	Lífeyrissjóður 4%	2 400
		Orlof í banka	6 102
		Staðgreiðsla	0
Reiknaður skattur 35,72%	21 432	Tekjur samtals	66 102
Nýttur persónuafsláttur	21 432	Frádráttur samtals	9 102
		Launagreiðsla	**55 000**

30 Skoðaðu launaseðil og útskýrðu hvaða líkön eru notuð til að finna niðurstöður. Athugaðu samband vinnutíma og launa, orlof, lífeyrissjóð og skatta.

31 Þegar vinna á óvinsæl verk á heimili eða velja á milli hluta er oft sagt **köstum bara upp á það.** Lýstu líkaninu sem liggur að baki þessari leið til að velja.

32 Í kaflanum hafa verið sýnd dæmi um nokkrar gerðir líkana. Sum þeirra byggjast á að greina samband stærða en önnur snúast um val og skiptingu. Nefndu tvö dæmi um hvora gerð.

33 Stafurinn H er lagður með hellum.



① ② ③

a Gísli hefur sett fram líkan sem nota má til að finna fjölda hellna fyrir hvaða stærð á hellulögðu H sem er.

x er númer myndar $x + 2 + 4 \cdot x$

b Ólöf hefur líka sett fram líkan sem nota má til að finna fjölda hellna.

x er númer myndar $x \cdot 2 + 1 + x + x \cdot 2 + 1$

c Skoðaðu líkönin þeirra. Eru þau bæði skráning á sambandi milli númers myndar og fjölda hellna? Eru þetta tvö ólík líkön?

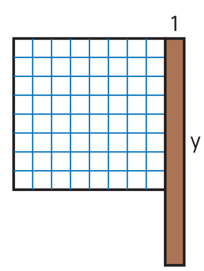
Algebra og jöfnur

Táknmál algebrunnar hefur verið að þróast öldum saman. Með því að nota bókstafi sem staðgengla talna má setja samband stærða fram á skýran hátt og einfalda útreikninga.

Markmið þessa kafla eru að þú

- *Getir notað táknmál stærðfræðinnar til að skrá samband stærða.*
- *Náir góðu valdi á að einfalda stæður.*
- *Þekkir helstu reiknireglur og getir beitt þeim við þáttun og margföldun liðastærða.*
- *Gerir greinarmun á jöfnum og ójöfnum og getir leyst fyrsta stigs jöfnur.*

1 Ummál flata má skrá með ýmsu móti. Skoðaðu hvernig ummál hefur verið skráð og útskýrðu hvernig það er hugsað.



a $y + 1 + 8 + 8 + 8 + (y - 8) + 1$

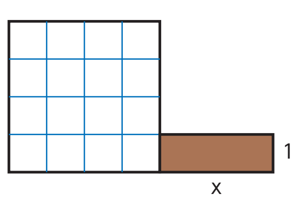
b $y + y + 9 + 9$

c $(2y + 2) + 32 - 16$

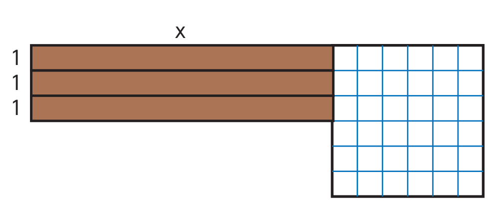
d Er ummálið rétt skráð í öllum tilfellum?
Sýndu fram á að ummálið sé alltaf rétt skráð.

2 Skráðu ummálið á tvo vegu.

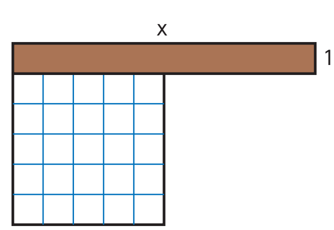
a



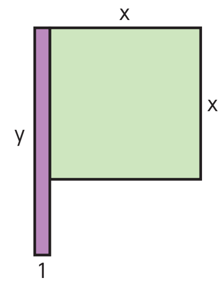
b

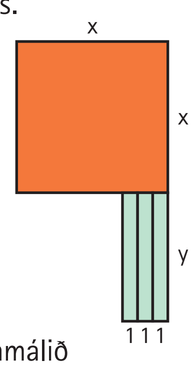


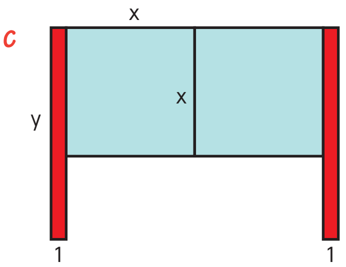
c



3 Skráðu ummál hvers svæðis.

a


b


c


4 Teiknaðu fleti sem hafa ummálið

a $2y + 2x + 6$ **b** $4x + 2y$ **c** $4x + 6y + 7$

5 Teiknaðu fleti sem hafa ummálið $4x + 8y$ þar sem x og y eru fastar stærðir.

6 Einfaldaðu stæðurnar.

a $3x + 4 + 2x - 5$ **c** $x^2 + 4b - 2b + 2x^2$ **e** $y^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 2y^2$

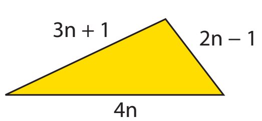
b $4r + 8a - 7r + a$ **d** $-x^3 + 9 + 4x^3 - 5x^3$ **f** $\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}y + y^2$

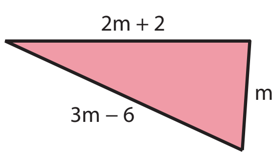
7 Einfaldaðu stæðurnar.

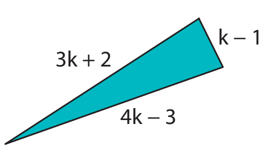
a $3x + 4 \cdot 4x - x$ **c** $4b \cdot 5b - b(6 + b)$ **e** $8a : 2a + 5a - 3a$

b $8 - 3(4a + 3) - 2a$ **d** $3x + 4y \cdot 3x - 7y$ **f** $12k + 24k : 2 - \frac{4}{5}$

8 Skráðu stæður fyrir ummál þríhyrninganna. Einfaldaðu þær eins og hægt er.

a


b


c


9 Finndu ummál þríhyrninganna ef

a $n = 3{,}5$ **b** $m = 5$ **c** $k = 7$

10 Finndu gildi hverrar stæðu ef $a = 2$ og $b = 2\frac{1}{2}$

a $4a + \frac{3}{4} + \frac{8}{2} + 3a$ **c** $4{,}2a - 5a + 1{,}8a + a$ **e** $b^2 + 2b^2 - 3b^2$

b $\frac{2}{5}a + 7 - \frac{4}{5}a + \frac{7}{5}a$ **d** $5{,}3 + 9{,}7b + 0{,}3b - 14{,}2$ **f** $a \cdot a^2 - 4a - a^3$

11 Tinna er x ára í dag. Taflan sýnir aldur systkina Tinnu.

	Stæða	Orð
Gréta	$x + 2$	Tveimur árum eldri en Tinna
Matthías	$x - 3$	a
Torfi	$2x$	b

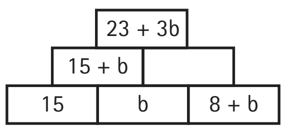
a Hvað má skrifa fyrir a í töfluna?

b Hvað má skrifa fyrir b í töfluna?

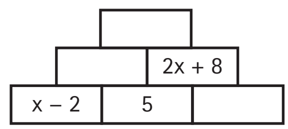
c Eftir 2 ár verður Tinna $x + 2$ ára. Skráðu stæður fyrir aldur systkina hennar þá.

12 Teiknaðu turnana og bættu inn þeim stæðum sem vantar.

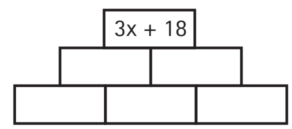
a



b



c



d Finndu að minnsta kosti tvær aðrar leiðir við að fylla í reitina í c-lið.

13 Einfaldaðu stæðurnar.

a $3b^3 \cdot 2b + 8b - 20b$

b $\frac{1}{2}x + 3x^2 + 4x - 3x$

c $\frac{1}{3}k^2 : \frac{5}{6}k + 4{,}2k$

d $\frac{14}{5}k^3 \cdot k + 3{,}5k^2 : k^2$

e $a^2 : 2a^3 \cdot 4a^2 : a$

f $(a^2 : 2a^3) \cdot (4a^2 : a)$

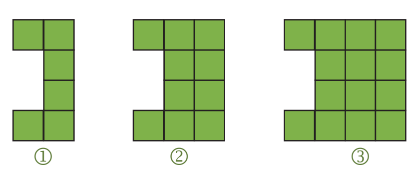
Samband stærða má skrá með því að nota bókstafi til að tákna breytur. Þannig má gefa miklar upplýsingar með einfaldri skráningu. Þetta skiptir máli þegar skrá á reglu eða þegar endurtaka þarf útreikninga. Til dæmis má skrá stæðu í töflureikni, gefa upp mörg talnagildi og fá niðurstöður útreikninga á örskammri stundu.

14 Einföld dæmi um samband stærða eru samband magns og einingaverðs og samband hraða og tímalengdar. 1,2 kg · 450 kr. 60 km/klst. · 4 klst.

a Skráðu stæðu sem nota má fyrir hvaða magn og einingaverð sem er.

b Skráðu stæðu sem nota má fyrir hvaða hraða og tímalengd sem er.

c Greining á sambandi stærða hjálpar líka þegar finna á hve marga ferninga þarf í mynd númer 100. Skráðu stæðu sem nota má til að finna fjölda ferninga í hvaða mynd sem er.



15 Finndu tvö dæmi þar sem notkun stæðu einfaldar útreikninga.

Í liðastærðinni $3x + 6$ er 3 sameiginlegur þáttur.
Hægt er að umrita liðastærðina og taka 3 út fyrir sviga $3(x + 2)$. Þetta er kallað að þátta liðastærðina.

Þegar liðastærðir eru þáttaðar er yfirleitt reynt að finna stærsta sameiginlega þátt og hann tekinn út fyrir sviga.

Pálína þáttaði stæðuna $3x^2 + 6x$ og tók 3 út fyrir sviga $3(x^2 + 2x)$.
Ennþá er sameiginlegur þáttur innan svigans sem er x.
Ef x er einnig tekið út fyrir sviga fæst $3x(x + 2)$.
Ef Pálína hefði komið auga á stærsta sameiginlega þáttinn strax hefði hún getað tekið 3x strax út fyrir sviga.

Ef liðirnir í sviganum eru margfaldaðir með þættinum utan svigans kemur fram liðastærðin $3x^2 + 6x$. Þáttun og margföldun liðastærða eru andhverfar aðgerðir.

Stæður sem eru með tveimur liðum eða fleiri kallast liðastærðir.

16 Þáttaðu liðastærðirnar.

a $4a - 12$
b $4x^2 + 20$
c $5b + bx$
d $4ax + 2x^2$
e $25a - 5$
f $7k^3 - 7k$
g $2y^2 - 6yx$
h $99 + 11a$

17 Þáttaðu liðastærðirnar.

a $9x^2 - 3xy$
b $4ab - 12a^2$
c $4xy^2 + 8y^2$
d $3c + 12a^2c$
e $24a + 16a^3$
f $24a + 18a^2x$
g $2xy^2 - 10x^2y$
h $2x^2y^3 - 10x^3y^2$

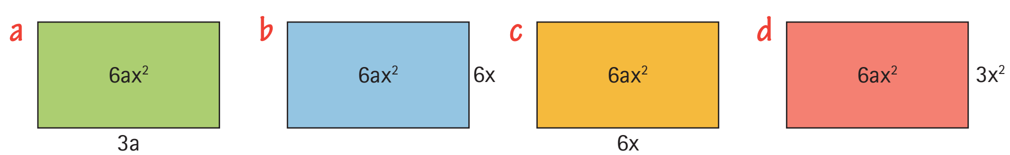
18 Finndu týndu stærðirnar.

a $\square(4d - 3) = 12d - 9$
b $\square(3h + 2x) = 3h^2 + \square$
c $8p(p + \square) = \square + 16p$

19 Margfaldaðu inn í sviga.

a $2b(b + 12)$
b $4x(2x - 5)$
c $8k^2(k + 3)$
d $xy(x + y)$
e $x^2(2 + 3a)$
f $x(3b + 4a)$
g $-d\,(4a + 6d)$
h $-2d(2a - 3d)$

20 Flatarmál rétthyrnings er $6ax^2$. Önnur hliðarlengdin er þekkt, finndu hina.



e Finndu fleiri dæmi um mögulegar hliðarlengdir rétthyrnings með flatarmálið $6ax^2$.

21 Einfaldaðu stæðurnar.

a $\frac{5x}{15}$ b $\frac{27}{9x}$ c $\frac{4ab}{b}$ d $\frac{8k^2}{2k}$ e $\frac{36^4}{36^3}$ f $\frac{5^3a^2}{5^2a}$

22 Einfaldaðu stæðurnar.

a $\frac{4(x + 3)}{4}$ c $\frac{4x + 12}{x + 3}$ e $\frac{3x^2 - 9x}{3x}$ g $\frac{10cd^2 - 5d}{2cd^2 - d}$

b $\frac{4(x + 3)}{x + 3}$ d $\frac{6a + 12}{a + 2}$ f $\frac{7b + 14ab}{7b}$ h $\frac{xy^3 - x^2y^2}{y^2 - xy}$

23 Halla og Gunnar eiga að einfalda stæðuna $\frac{5a - 10ab}{5a}$

Halla $\frac{5a(1 - 2b)}{5a} = 1 - 2b$ Gunnar $\frac{\cancel{5a} - 10ab}{\cancel{5a}} = -10ab$

a Finndu hvort þeirra reiknar rétt með því að finna gildi stæðunnar fyrir og eftir einföldun ef a = 1 og b = 2.

b Hvaða villu gerir sá sem ekki reiknar rétt?

c Þegar einfalda á stæðu sem er brot er hún oft þáttuð. Kristín reiknaði dæmi Höllu og Gunnars með því að deila með nefnaranum í báða liði teljarans.

$\frac{\cancel{5a} - \cancel{10ab}}{\cancel{5a}}$

Kristín fékk rétta niðurstöðu. Útskýrðu hvers vegna.

24 Einfaldaðu stæðurnar.

a $\frac{4d^2 + 8d}{2d + 4}$ b $\frac{4d^2 + 8d}{4d + 8}$ c $\frac{12x - 6x^2}{3x}$ d $\frac{12x - 6x^2}{6 - 3x}$

Stundum getur verið hentugt að taka neikvæðan þátt út fyrir sviga.

$$-2 \cdot x - (-2) \cdot 2 = -2x + 4$$

$$\text{Dæmi: } \frac{-2x + 4}{x - 2} = \frac{-2(x - 2)}{x - 2}$$

25 Einfaldaðu stæðurnar með því að taka þátt út fyrir sviga í teljaranum þannig að nefnarinn styttist út.

a $\frac{-4a + 8}{a - 2}$ b $\frac{4a - 8}{-a + 2}$ c $\frac{-4a - 8}{a + 2}$ d $\frac{-4a - 8}{-a - 2}$

26 Dragðu saman liði og einfaldaðu stæðurnar.

a $\dfrac{7p - 5(p - 2)}{3p + 15}$ **b** $\dfrac{3x + 3 - 7x + 3(2x - 3)}{3x + 5 - 2(x + 3) + 1}$

27 a Veldu fjórar nágrannatölur, til dæmis 4, 5, 6 og 7.

b Margfaldaðu saman lægstu og hæstu töluna.

c Margfaldaðu miðtölurnar saman.

d Veldu aðrar fjórar nágrannatölur og farðu eins að.

e Eftir hverju tekur þú?

f Skráðu lægstu töluna sem x og sýndu fram á að alltaf komi fram sami mismunur á margfeldi talnanna.

28 a Veldu fimm nágrannatölur, til dæmis 3, 4, 5, 6 og 7.

b Margfaldaðu þá lægstu með þeirri hæstu.

c Margfaldaðu aðra og fjórðu tölu saman.

d Veldu aðrar fimm nágrannatölur og farðu eins að.

e Eftir hverju tekur þú?

f Skráðu lægstu töluna sem x og sýndu fram á að alltaf komi fram sami mismunur á margfeldi talnanna.

29 a Hvaða regla telur þú að komi fram ef þú ferð eins að með sex nágrannatölur?

b Prófaðu reglu þína á nokkrum nágrannatölum.

30 Settu fram reglu fyrir hvaða fjölda af nágrannatölum sem er. Skráðu hana bæði með orðum og táknum.

31 Hver er mismunurinn annars vegar á margfeldi hæstu og lægstu tölu og hins vegar annarrar og elleftu ef tólf tölur eru margfaldaðar saman?

Vilhjálmur tók eftir því að ef tala er margfölduð með sjálfri sér verður svarið einum hærra en margfeldi talna sem eru einum lægri og einum hærri en talan. Sýndu fram á að þetta gildi alltaf.

$6 \cdot 6$ er einum hærra en $5 \cdot 7$
$7 \cdot 7$ er einum hærra en $6 \cdot 8$
$9 \cdot 9$ er einum hærra en $8 \cdot 10$

Ef margfalda á tölurnar 23 · 14 má nota dreifiregluna og byrja á að skrá dæmið sem (20+3)(10+4). Tölurnar eru margfaldaðar þannig að hver liður í seinni sviganum er margfaldaður með liðunum í fyrri sviganum. Niðurstöður eru að lokum lagðar saman.

·	10	4
20	200	80
3	30	12

200 + 80 + 30 + 12 = 322

32 Margfaldaðu stærðirnar í svigunum saman með því að skrá þær í töflu. Einfaldaðu eins og hægt er.

- **a** $(30 + 3)(40 + 5)$
- **b** $(x + 3)(20 + 5)$
- **c** $(x + 5)(y + 8)$
- **d** $(a + b)(c + d)$
- **e** $(a + 8)(a - 3)$
- **f** $(2x + 3)(3x - 5)$

33 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(5a + 2)(4a + 3)$ **b** $(5a - 2)(4a + 3)$ **c** $(5a + 2)(4a - 3)$ **d** $(5a - 2)(4a - 3)$

34 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(2 + 5a)(4a + 3)$ **b** $(5a + 2)(3 - 4a)$ **c** $(5a - 2)(3 + 4a)$ **d** $(5a - 2)(3 - 4a)$

35 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

- **a** $(n - 8)(3n - 4)$
- **b** $(2x + 3)(x - 5)$
- **c** $(8 + 7b)(x + 8b)$
- **d** $(5x - 1)(3a + 2x)$
- **e** $(9p^2 + 2p)(4p + 3)$
- **f** $(12n + 5)(3n^2 + 4n)$

Í einum sviga geta verið mismargir liðir. Þegar liðastærðir eru margfaldaðar þarf að gæta þess að margfalda alla liði saman. Skipuleg skráning í töflu tryggir að ekkert margfeldi gleymist.

(50 + 5)(100 + 20 + 3)

	100	20	3
50	5000	1000	150
5	500	100	15

5000 + 1000 + 150 + 500 + 100 + 15 = 6765

$(a + b)(c + d + e + f)$

	c	d	e	f
a	ac	ad	ae	af
b	bc	bd	be	bf

ac + ad + ae + af + bc + bc + be + bf

(50 + 5)(100 + 20 + 3)

$(a + b)(c + d + e + f)$

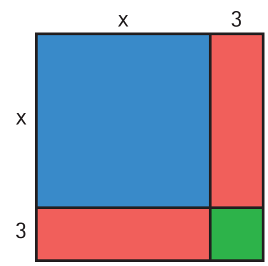
36 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(c + b)(a + b + 4)$ **b** $(2x + 5)(x - y - 3)$ **c** $(2n + 3)(3n - 1 + x)$

37 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(a + 2)(a + 2)$ **b** $(x + 7)(x + 7)$ **c** $(3 + a)(3 + a)$

38 Hvaða tvö svæði á myndinni eru jafn stór?
Hver er lögun hinna svæðanna?



39 Notaðu myndina til að sýna að reglan
$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
gildi þegar summa tveggja liða er hafin
í annað veldi.

40 Notfærðu þér regluna um summu tveggja liða í öðru veldi við að margfalda liðastærðirnar.

a $(x + 4)(x + 4)$ **c** $(50 + 6)(50 + 6)$ **e** $(2a + 3)(2a + 3)$

b $(x + 8)(x + 8)$ **d** $(11 + 5)(11 + 5)$ **f** $(2x + y)(2x + y)$

41 Hvaða regla kemur fram þegar mismunur tveggja liða er hafinn í annað veldi?

$(a - b)(a - b) = (a - b)^2$

42 Notfærðu þér regluna um mismun tveggja liða í öðru veldi þegar þú reiknar þessi dæmi.

a $(x - 4)(x - 4)$ **c** $(50 - 6)(50 - 6)$ **e** $(2a - 3)(2a - 3)$

b $(x - 8)(x - 8)$ **d** $(11 - 5)(11 - 5)$ **f** $(2x - y)(2x - y)$

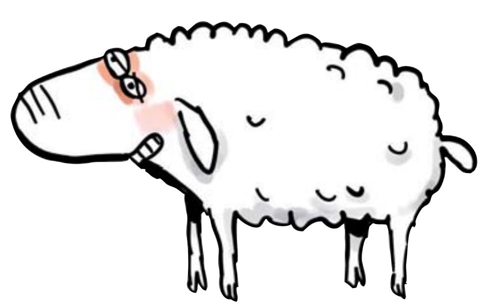
43 Skráðu sem margfeldi tveggja eins liðastærða.

a $n^2 + 12n + 36$ **e** $49 - 14n + n^2$

b $n^2 + 18n + 81$ **f** $100 + 20n + n^2$

c $n^2 - 16n + 64$ **g** $4n^2 + 16n + 16$

d $n^2 + 16 + 64$ **h** $9n^2 + 12n + 4$



44 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(a + 3)(a - 3)$ **b** $(x + 5)(x - 5)$ **c** $(8 + a)(8 - a)$

d Svarið við a-lið er mismunur tveggja ferningstalna. Hvaða ferningstölur eru það? En í b- og c-lið?

45 Finndu hvaða liðastærðir hafa verið margfaldaðar saman þegar svarið er

a $x^2 - 16$ **b** $b^2 - c^2$ **c** $81 - y^2$ **d** $121 - a^2$

Þegar margfölduð er saman summa og mismunur talnanna a og b verður útkoman mismunur ferningstalna þeirra. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

46 Reiknaðu dæmin og notfærðu þér regluna hér fyrir ofan.

a $(20 + a)(20 - a)$ **b** $(20 + 2)(20 - 2)$ **c** $(x + 7)(x - 7)$ **d** $(2x + 2)(2x - 2)$

Þegar margfalda á eða þátta liðastærðir getur komið sér vel að þekkja þessar reglur.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

47 Lýstu reglunum með þínum eigin orðum.

48 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(x + 8)(x + 8)$ **d** $(3x - 9)(3x - 9)$ **g** $(12 + y)(12 - y)$

b $(a + 3)(a + 3)$ **e** $(b + 7)(b - 7)$ **h** $(5x - 1)(5x + 1)$

c $(m - 5)(m + 5)$ **f** $(6 + y)(6 + y)$ **i** $(7 - 2a)(7 - 2a)$

49 Margfaldaðu liðastærðirnar og einfaldaðu eins og hægt er.

a $(x + 3)(2x + 4)$ **b** $(4a - 1)(2a + 2)$ **c** $(k - 1)(2k + 1)$

50 Þáttaðu stæðurnar og skráðu þær sem margfeldi tveggja liðastærða.

a $x^2 + 4x + 4$ **d** $4x^2 - 12x + 9$ **g** $k^2 + 20k + 100$

b $49 - a^2$ **e** $9 + 12x + 4x^2$ **h** $16x^2 - 8x + 1$

c $121 - 22m + m^2$ **f** $4x^2 - 9$ **i** $144 - 36x^2$

51 Rétthyrningur er 5 cm lengri en hann er breiður.

a Láttu x tákna breiddina og skráðu stæðu sem táknar lengdina.

b Skráðu og einfaldaðu stæðu sem táknar ummál rétthyrningsins.

c Ummál rétthyrningsins er 38 cm. Settu upp jöfnu og notaðu hana til að finna lengd hans og breidd.

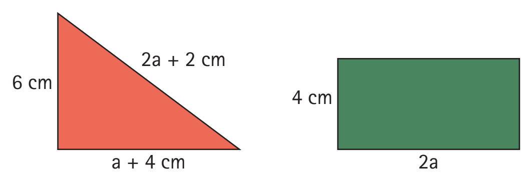
52 Ferningur sem hefur hliðarlengdina $x + 4$ m og rétthyrningur sem hefur breiddina x m og lengdina $2x$ m hafa sama ummál. Finndu hliðarlengdir og flatarmál hvors ferhyrnings um sig.

53 Lengd rétthyrnings sem hefur flatarmálið 18 cm^2 er táknuð á tvo mismunandi vegu $(20x + 1)$ cm og $(10x + 3{,}5)$ cm.

a Finndu lengd rétthyrningsins.

b Finndu breidd rétthyrningsins.

54 Þessir tveir fletir hafa sama ummál. Skráðu stæðu fyrir ummál hvors um sig og finndu síðan ummál og flatarmál þeirra.



Þegar leysa á jöfnur þarf að gæta þess að stæðurnar sem standa sín hvorum megin við jafnaðarmerkið haldist jafngildar. Oft má með smá umhugsun og útsjónarsemi sjá hvert gildi óþekktu stærðarinnar hlýtur að vera. Í öðrum tilvikum er nauðsynlegt að leysa jöfnuna skref fyrir skref. Þá þarf að gæta vel að því að framkvæma ætíð sömu aðgerð báðum megin jafnaðarmerkis.

55 Þessar jöfnur eru allar jafngildar jöfnunni $3x + 2 = 11$. Hvaða aðgerð hefur verið framkvæmd báðum megin jafnaðarmerkis til að breyta jöfnunni? Hverja þeirra telur þú vera auðveldast að leysa? Rökstyddu svar þitt.

$$3x + 2 = 11$$

a $12x + 8 = 44$

b $3x + 1 = 10$

c $3x = 9$

d $3x - 1 = 8$

e $3x + 3 = 12$

f $3x + 4 = 13$

g $3x + 5 = 14$

h $2x + 2 = 11 - x$

i $x + 2 = 11 - 2x$

j $2 = 11 - 3x$

k $6x + 4 = 22$

56 Leystu þessar jöfnur. Lýstu hvernig þú ferð að.

a $2x + 3 = 11$ **c** $12 - y = 7$ **e** $x + \frac{3}{4} = 2$ **g** $\frac{4x + 1}{3} = 3$

b $5x = x + 20$ **d** $\frac{x}{7} = 38{,}5$ **f** $2x + 3 = x + 7$ **h** $15x = -30$

Áður en hafist er handa við að leysa jöfnurnar eða finna gildi þeirrar stærðar sem er óþekkt þarf oft að einfalda eða draga saman þær stæður sem standa sín hvorum megin jafnaðarmerkisins.

57 Jafnhliða þríhyrningur og ferningur hafa sama ummál. Ummál þríhyrningsins má tákna með stæðunni $3(x + 5)$ cm en ummál ferningsins með stæðunni $4(x + 2{,}25)$ cm. Settu upp jöfnu fyrir ummál hyrninganna, einfaldaðu hana og finndu gildi x. Finndu ummál, hliðarlengdir og flatarmál hvors hyrnings um sig.

58 Einfaldaðu og leystu jöfnurnar.

a $4x + 3 - x = 2x + 13 - x$ **d** $8(x - 14) = 72$

b $3a - 17 + 5a = 6a - 8 - 4a - 15$ **e** $5(4 + k) = 65$

c $7b + 2 - 3b - 14 = 5a - 20 - 3a - 4$ **f** $6(b - 2) = 30$

59 Einfaldaðu og leystu jöfnurnar

a $4m - (x + 2) = 25$ **d** $2(y + 4) + 3(y + 3) = 32$

b $15 - (2x - 3) = 12$ **e** $5 + (3x - 4) = 9 - (x - 2)$

c $30 - 3(x + 2) = 6$ **f** $3p - 2(x - 5) = 8 - 3(x + 6)$

60 Summa þriggja samliggjandi heilla talna er 24. Táknaðu minnstu töluna með x. Settu fram stæður sem tákna stærð hinna talnanna. Búðu til jöfnu og finndu gildi x. Hverjar eru tölurnar þrjár?

61 Systurnar Guðný, Kristín og Dóra eiga samtals 250 DVD myndir. Guðný á x fjölda af myndum. Kristín á fimmtíu fleiri myndir en Guðný. Dóra á tvöfaldan myndafjölda Guðnýjar. Settu upp jöfnu og finndu hve margar myndir hver þeirra á.

62 **a** Í jöfnunni x + 5 = 8 getur x aðeins haft eitt gildi. Hvaða gildi er það?

b Hvert gæti gildi x verið ef x + 5 > 8?

c Gæti x verið 3,5? En 3,1? En $3\frac{1}{20}$?

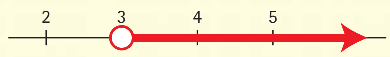
Er hægt að skrá öll gildi sem x gæti haft?

63 Fullyrðingin x + 5 > 8 er ekki jafna. Fullyrðing sem þessi er kölluð ójafna. Hverjar af tölunum geta verið lausn á ójöfnunni?

a x = 5 **b** x = 3 **c** x = 1 **d** x = 3,1

e Finndu fjórar tölur í viðbót sem gætu verið lausn á ójöfnunni.

Nota má talnalínu til að skrá lausnir á ójöfnum.

x + 5 > 8 

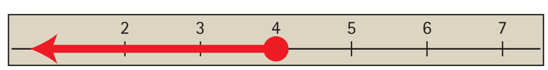
x + 5 ≥ 8 

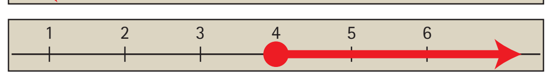
64 Sýndu lausnir ójafnanna á talnalínu.

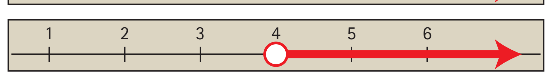
a 8 + x > 12 **c** x – 2 ≤ 12 **e** 12 + x ≥ 11

b 8 + x < 12 **d** x – 2 ≥ 12 **f** 12 – x ≥ 11

65 Þessar talnalínur sýna lausn á þremur ójöfnum.

a x + 2 > 6 ① 

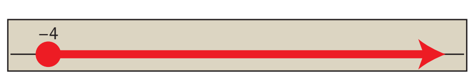
b x + 2 ≤ 6 ② 

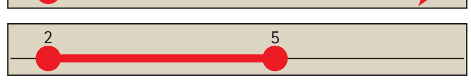
c x + 2 ≥ 6 ③ 

a Paraðu saman ójöfnu og talnalínu.

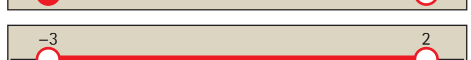
b Hvaða heilar tölur gæti x staðið fyrir?

66 Paraðu saman ójöfnur og talnalínur. Skráðu allar lausnir sem eru heilar tölur.

a 2 ≤ n ≤ 5 ① 

b –3 < x < 2 ② 

c –1 ≤ a < 4 ③ 

d n ≥ –4 ④ 

67 Skráðu fullyrðingarnar sem ójöfnur. Sýndu hvert talnabil á talnalínu.

a Allar náttúrlegar tölur stærri en 3 og minni eða jafnt og 10.

b Heilar tölur sem liggja á milli –1 og –12.

c Ræðar tölur sem eru stærri en 0 og minni en 4,5.

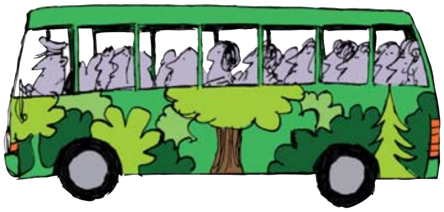
68 Leigja á rútu til að flytja 8 manna vinnuhópa sem eiga að fara að planta trjám. Í hverri rútu verða 3 verkstjórar. Rútan tekur 50 farþega.

a Hver af þessum ójöfnum sýnir hve marga 8 manna hópa rútan getur tekið.

$8n + 3 < 50$ $\quad$ $8n - 3 < 50$ $\quad$ $8n + 3 \leq 50$ $\quad$ $8n + 3 \geq 50$

b Finndu hve marga 8 manna hópa rútan getur í hæsta lagi tekið.

69 Leigja á rútu til að flytja 12 manna vinnuhópa og 5 verkstjóra á vinnustað. Settu fram ójöfnu sem sýnir hve marga vinnuhópa ásamt verkstjórum er hægt að flytja í hæsta lagi ef sætafjöldi í rútunni er



a 80 $\quad$ **b** 59 $\quad$ **c** 40

70 Sýndu lausnir ójafnanna á talnalínu.

a $6 + m > 11$ $\quad$ **c** $k - 3 < -5$ $\quad$ **e** $\frac{x}{5} - 5 < 1$

b $5x \leq 20$ $\quad$ **d** $4x \geq -1$ $\quad$ **f** $\frac{m}{2} - 2 \leq -2$

Ójafna sem er sönn helst sönn ef sama tala er lögð við eða dregin frá báðum hliðum hennar.

Dæmi: $-3 > -9$

$-3 + 4 > -9 + 4$

$1 > -5$

71 Skoðaðu ójöfnuna –3 > –9. Prófaðu að:

a draga 4 frá báðum hliðum ójöfnunnar. Helst fullyrðingin sönn?

b draga –4 frá báðum hliðum ójöfnunnar. Helst fullyrðingin sönn?

c margfalda báðar hliðar ójöfnunnar með 4. Helst fullyrðingin sönn?

d margfalda báðar hliðar ójöfnunnar með –4. Helst fullyrðingin sönn?

e deila í báðar hliðar ójöfnunnar með 4. Helst fullyrðingin sönn?

f deila í báðar hliðar ójöfnunnar með –4. Helst fullyrðingin sönn?

72 Leystu jöfnurnar með því að finna fyrst hvaða tala ætti að standa í litaða fletinum.

a $\frac{3x}{4} + 5 = 14$ c $\frac{9}{x-2} + 5 = 8$ e $\frac{25}{2(x+1)} = \frac{35}{7}$ g $2 = \frac{9(x-1)}{5} - 7$

b $\frac{x+2}{2} = -4$ d $6 = \frac{5x-1}{4}$ f $\frac{20}{x} + 2 = 20 - 8$ h $7 - 4 = \frac{3(x+2)}{8}$

Margar jöfnur með brotum eru flóknari en svo að hægt sé að leysa þær á einfaldan hátt eins og jöfnurnar hér að ofan. Þá er gott að finna minnsta samnefnara þeirra brota sem eru í jöfnunni. Allir liðir jöfnunnar eru síðan margfaldaðir með samnefnaranum. Þá styttast nefnararnir út og því verður einfaldara að leysa jöfnuna.

Dæmi:

$\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 3$ Minnsti samnefnari brotanna er 6.

$\frac{6 \cdot x}{2} - \frac{6 \cdot x}{6} = 6 \cdot 3$ Allir liðir jöfnunnar eru margfaldaðir með 6.

$3x - x = 18$ Nefnarar styttast út.

$2x = 18$

$x = 9$

73 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{a}{2} + \frac{a}{5} = 21$ c $\frac{y-4}{2} = \frac{2y}{3}$ e $\frac{4x-3}{3} = \frac{x+3}{2}$

b $\frac{2a}{3} - \frac{a}{4} = 15$ d $\frac{2(x-1)}{3} = -4$ f $\frac{3x+2}{4} = \frac{4x+1}{5}$

74 Nefnarar í jöfnum geta innihaldið óþekktar stærðir.
Hver er lægsti samnefnari þessara brota?

a $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{2x}$ b $\frac{2-a}{3a}$ og $\frac{1}{5}$ c $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{m+2}$ d $\frac{x+3}{4x}$ og $\frac{4}{3}$

75 Leystu jöfnurnar.

a $\frac{1-m}{2m} = \frac{2}{5}$ b $\frac{1}{b} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ c $\frac{5}{x} - \frac{1}{2x} = 5$ d $\frac{4}{x} = \frac{8}{x+1}$

Við lausn jafna þarf oft að einfalda stæður og umrita jöfnuna. Þá er beitt ýmsum reiknireglum, ekki síst víxlreglu, dreifireglu og tengireglu. Við lausn jafna þarf að gæta þess að stæður sín hvorum megin við jafnaðarmerkið haldist jafngildar. Notaðar eru bæði samlagningarandhverfur og margföldunarandhverfur til að umrita jöfnur markvisst.

76 Leystu jöfnurnar og skráðu hvaða reiknireglur þú notar.

a $4x - 3 = 12 - x$
b $7 + 8x = 13x - 8$
c $2 \cdot 3a + 8a - 12 = 7a + 4 \cdot 4$
d $2(4a + 3) - 6 = 36 - a \cdot 2$
e $\frac{(5y - 25)}{(15y - 75)}$

77 Skoðaðu dæmin. Hvert er gildi x?

a $5x + 8 = 11$
b $5x + 8 = 3 + 8$
c $5x + 8 = x + 11$
d $x + 4x + 8 = x + 8 + 3$

Víxlregla

$3 + 5 = 8$ $\quad 5 + 3 = 8$ $\quad 5 + x = 12$ $\quad x + 5 = 12$

Með því að nota samlagningarandhverfu má umrita

$3 + 5 - 5 = 8 - 5$
$3 = 8 - 5$

$5 + x - x = 12 - x$
$5 = 12 - x$

Víxlregla

$3 \cdot 5 = 15$ $\quad 5 \cdot 3 = 15$ $\quad 3 \cdot (x + 4) = 27$ $\quad (x + 4) \cdot 3 = 27$

Með því að nota margföldunarandhverfu má umrita

$3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} = 15 \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{5} = \frac{15 \cdot 1}{5}$

$3 = 15 : 5$

$3(x + 4) \cdot \frac{1}{x + 4} = 27 \cdot \frac{1}{x + 4}$

$\frac{3(x + 4)}{x + 4} = \frac{27}{x + 4}$

$3 = \frac{27}{x + 4}$

78 Einangraðu óþekktu stærðina x í jöfnunum án þess að einfalda þær.

$2x + 3 = 10y$
$x = \frac{(10y - 3)}{2}$

a $3y + 5x = 9$
b $4y - 3x = 12$
c $3x + a - 5 = 4a + 14$
d $6 - 4x = 3b - 12$
e $5 + 3k - 2 = 4x$
f $3a - 2 \cdot 4 = 7x$

Við lausn dæma og þrauta getur verið gott að setja upp jöfnu og leysa hana. Þá eru tvær jafngildar stæður skráðar í jöfnu.

Settu upp jöfnur og leystu dæmin.

79 a Aldur Maríu er einn fimmti hluti af aldri ömmu hennar. Samtals eru þær 90 ára. Hve gömul er amma Maríu?

b Hvernig hefðir þú sett upp jöfnuna ef spurt hefði verið um aldur Maríu?

80 a Jói á tvisvar þá upphæð sem Stella á og Stella á þrisvar sinnum þá upphæð sem Guðjón á. Samtals eiga þau þrjár milljónir króna. Hve margar krónur á Stella?

b Hvernig jöfnu hefðir þú sett upp ef spurt hefði verið um upphæð Guðjóns?

c Gylfi á sexfalda þá upphæð sem Kristinn á og tvöfalda þá upphæð sem Auður á. Samtals eiga þau þrjár milljónir. Hve margar krónur á Auður?

d Hvernig jöfnu hefðir þú sett upp ef spurt hefði verið um upphæð Kristins?

81 Þorsteinn kaupir þrjá pakka af geisladiskum. Hann borgar með 5000 krónum og fær 2150 krónur til baka.

a Hve mikið kostar hver pakki af geisladiskum?

b Hve mikið kosta 15 pakkar af geisladiskum?

82 Foreldrar Andrésar og Jóakims ákveða að safna gullpeningum í sjóð fyrir syni sína. Andrés og Jóakim eru fæddir á sama ári. Foreldrar Jóakims setja 20 peninga í sjóðinn þegar hann fæðist og síðan einn gullpening á ári. Foreldrar Andrésar setja í hans sjóð tvo gullpeninga á ári.

a Hve gamlir verða Andrés og Jóakim þegar þeir eiga orðið jafn marga gullpeninga í sjóði?

b Hve gamlir verða Andrés og Jóakim þegar Andrés á 6 gullpeningum meira í sjóði sínum?

c Hvert er hlutfallið á milli gullpeningaeignar strákanna þegar þeir eru tíu ára?

83 Búðu til sögu um þessar jöfnur.

a $2x + 2000 = 3x$ **b** $2x + 3x = 10\,000 - 2000$ **c** $3x - 2x = 2000$

Dulmálsfræði

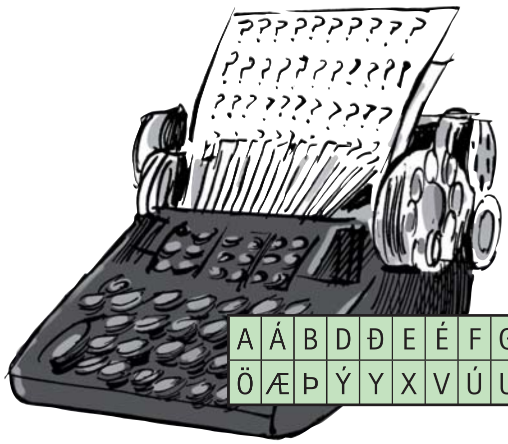
Fólk hefur lengi haft áhuga á og þörf fyrir að senda hvað öðru skilaboð sem aðeins fáir geta lesið. Einnig er mikil þörf í samfélaginu fyrir að geyma upplýsingar á kerfisbundinn hátt á samþjöppuðu formi og hafa hugmyndir úr dulmálsfræði verið nýttar við það.

Markmið með þessum kafla eru að þú:

- *Kynnist undirgrein stærðfræðinnar, dulmálsfræði.*
- *Öðlist aukna færni í að búa til og greina reglu.*
- *Þekkir nokkur dæmi um hvernig stærðfræði er nýtt við tæknilegar lausnir.*

Dulmálsfræði er sú undirgrein stærðfræði og tölvunarfræði sem fæst við dulritun og dulráðningu. Dulritun felst í því að skrá skilaboð þannig að þau séu ekki lesanleg fyrir óviðkomandi. Dulráðning felst síðan í því að greina og búa til dulmálslykla. Slíkir lyklar eru notaðir til að afkóða skilaboð og upplýsingar þannig að sá aðili sem dulrituðu skilaboðin eru ætluð geti vandkvæðalaust umritað þau og lesið. Allar dulritunaraðferðir byggjast á því að sendandinn sem dulritar skilaboðin og móttakandinn sem ræður þau hafi aðgang að dulmálslykli til að dulkóða eða afkóða.

Dulritun hefur verið notuð öldum saman, ekki síst í hernaði. Fyrstu dæmi um dulritun eru frá Egyptalandi fyrir um 4500 árum. Í tíð Júlíusar Sesars, Rómarkeisara, (100–44 f.Kr.) var notað dulmál til að senda hernaðarupplýsingar og í seinni heimsstyrjöldinni starfaði fjöldi manns við að búa til og þýða dulmál. Helstu not fyrir dulmálsfræði nú á dögum eru í hernaði og viðskiptum, t.d. í heimabönkum á Netinu eða hvar sem leyndar er þörf. Dulmálskerfi eru líka notuð til að kóða upplýsingar. Oft eru það stærðfræðingar sem hafa hannað slík kerfi. Kerfunum er ætlað að tryggja öryggi í miðlun upplýsinga og þjappa þeim saman. Dulritun byggist oftast á tilteknum reikniritum og þurfa þau helst að vera svo erfið að ekki sé auðvelt að greina þau og engar auðveldar lausnaraðferðir séu til. Dæmi um slík kerfi sem notuð eru í daglegu lífi eru kennitölur, strikamerkingar á vörum og númer á greiðslukortum. Gríðarlegar framfarir urðu í dulmálsfræðum í fyrri og seinni heimsstyrjöldinni og með tilkomu tölva.



Talið er að hebreskir fræðimenn hafi notað dulmálið Atbash á árunum 600–500 f.Kr. Það er byggt á stafrófinu þannig að stafrófinu er snúið við og síðasti stafur þess táknar þann fyrsta og svo framvegis.

A	Á	B	D	Ð	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	P	R	S	T	U	Ú	V	X	Y	Ý	Þ	Æ	Ö
Ö	Æ	Þ	Ý	Y	X	V	Ú	U	T	S	R	P	Ó	O	N	M	L	K	J	Í	I	H	G	F	É	E	Ð	D	B	Á	A

1 Skrifaðu á dulmálinu Atbash skilaboðin FLÝTTU ÞÉR BURTU.

Sesar, Rómarkeisari, notaði dulmál í samskiptum við hershöfðingja sína. Dulmálið byggist á því að hverjum bókstaf er hliðrað um þrjá reiti til hægri í stafrófinu. Það þýðir að í stað þess að skrifa K er skrifað N.

A	Á	B	D	Ð	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	P	R	S	T	U	Ú	V	X	Y	Ý	Þ	Æ	Ö
D	Ð	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	P	R	S	T	U	Ú	V	X	Y	Ý	Þ	Æ	Ö	A	Á	B

2 Kristín notar dulmálskerfi Sesars til að senda skilaboð. Hver eru skilaboðin?

OÆNKOOKPP GU AULU VKO JÁÍUK GPÍKPP JGKÓD

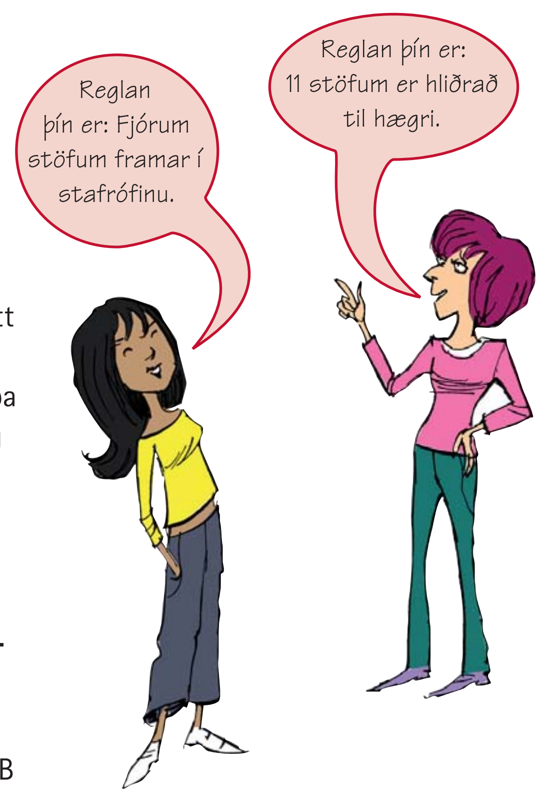
3 Berðu saman regluna sem sendandi skilaboðanna notar og regluna sem lesandi skila-boðanna notar til að lesa úr þeim.

4 Dulmál sem byggist á sömu hugmynd, þ.e. að nota tilfærslu í stafrófinu má nota á ótal vegu. Búðu til þitt eigið dulmál byggt á þessari hugmynd. Sendu nokkur skilaboð til bekkjarfélaga þíns og fáðu hann til að ráða regluna. Fáðu félaga þinn til að senda þér skilaboð og reyndu að ráða í reglu hans.

5 Búðu til dulmál þar sem dulmálskerfi Sesars og Atbash-kerfinu er blandað saman.
Skrifaðu á dulmáli þínu skilaboðin: Steinunn á afmæli.

6 Finndu dulmálslykilinn.

a ÝRRU RNÓÆ **b** ÚUÍÍIÓJÍ RPIRRÁO ÍGB



Vigenére-dulmálið var útfært í Frakklandi af Blaise de Vigenére á 16. öld. Þetta er nokkuð flókið kerfi þar sem textinn er brenglaður töluvert. Sami bókstafurinn hefur ekki alltaf sama táknið og gerir það mun flóknara að ráða dulmálið. Vigenére kerfið reyndist nytsamlegt dulmál. Það býr yfir einföldu lykilorðakerfi sem auðvelt er að tileinka sér og krefst ekki sérstaks tækjabúnaðar.

Kerfið byggist á því að hverjum bókstaf er gefið tölugildi

A	Á	B	D	Ð	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	P	R	S	T	U	Ú	V	X	Y	Ý	Þ	Æ	Ö
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**

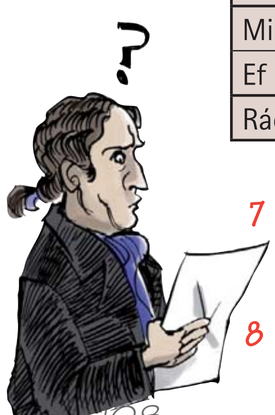
Notað er ákveðið lykilorð sem sendandi og móttakandi þurfa báðir að þekkja. Lykilorðið er fléttað við skilaboðin. Tölugildi hvers bókstafs í skilaboðum og í lykilorði eru lögð saman og þannig er ákvarðað hvaða bókstafir eru notaðir við dulritunina.

Dæmi:

Texti	F	O	R	Ð	A	Ð	U		Þ	É	R
Gildi	7	17	20	4	0	4	22		30	6	20
Lykilorð	L	Y	K	I	L	L	L		Y	K	I
Gildi	14	27	13	10	14	14	14		27	13	10
Samtals gildi	21	44	33	14	14	18	36	57	19	30	
Ef hærra en 31		–31	–31				–31	–31			
Dulmál	S	K	B	L	L	Ó	E		X	P	Æ

Til þess að afkóða skilaboðin: SKBLLÓE XPÆ eru tölugildi lykilorðsins dregin frá.

Texti	S	K	B	L	L	Ó	E		X	P	Æ
Gildi	21	13	2	14	14	18	5		26	19	30
Lykilorð	L	Y	K	I	L	L	L		Y	K	I
Gildi	14	27	13	10	14	14	14		27	13	10
Mismunur	7	–14	–11	4	0	4	–9	–1	6	20	
Ef lægra en 0		+31	+31				+31	+31			
Ráðning	F	O	R	Ð	A	Ð	U		Þ	É	R



7 Prófaðu að skrifa nokkur skilaboð á dulmáli Vigenére, t.d. **Hittumst klukkan þrjú** eða **Hlauptu til Sigga**.

8 Skráðu dulmálskerfið með almennri reglu, bæði fyrir sendanda og móttakanda.

Í dag er hugmyndin á bak við dulmálskerfi notuð við ýmiss konar skráningu. Tölvutæknin hefur kallað á að upplýsingar séu kóðaðar og skráðar þannig að auðvelt sé að nota tölvur til að lesa þær. Þetta birtist á margvíslegan hátt í samfélaginu og verða hér skoðuð tvö dæmi, þ.e. kennitölur og strikamerkingar.

Allir Íslendingar eru skráðir í þjóðskrá undir kennitölu. Kennitölur eru búnar til eftir þar til hönnuðu kerfi sem tryggir að engar tvær kennitölur séu eins. Slík kerfi eru byggð upp á sama hátt og dulmál og má því líta þannig á að kennitala sé skráning á einstaklingum á dulmáli.

Íslenskar kennitölur eru tíu stafa. Þær eru byggðar þannig upp að fyrstu sex tölustafirnir eru skráning út frá fæðingardegi, þ.e. dagur, mánuður og síðustu tveir stafir í fæðingarári. Næstu tveir eru síðan valdir af handahófi. Níundi tölustafurinn er vartala (öryggistala) sem reiknuð er út á eftirfarandi hátt.

Fæðingardagur
15. maí 1994

1	5	0	5	9	4	5	4
·	·	·	·	·	·	·	·
3	2	7	6	5	4	3	2
3	10	0	30	45	16	15	8

Fyrstu átta tölustafir eru skráðir. Margfaldað er með tölunum 2 til 7 og byrjað aftast.

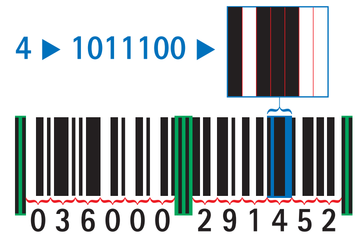
- Margfeldin eru lögð saman. $3 + 10 + 0 + 30 + 45 + 16 + 15 + 8 = 127$
- Deilt er í summuna með 11. $127 : 11 = 11$ og 6 afgangs.
- Fundinn er mismunur á 11 og afgangi. $11 - 6 = 5$ Níunda talan er því 5
- Tíunda talan ræðst svo af því á hvaða öld viðkomandi er fæddur. Ef viðkomandi er fæddur 1994 er síðasta talan 9.

Kennitala
150594-5459

9 Skoðaðu kennitölu þína og nokkurra annarra. Prófaðu að reikna vartölur ykkar.

10 Búðu til kennitölur fyrir þrjá einstaklinga sem fæðast í dag.

Vörur í verslunum eru almennt strikamerktar og þegar greitt er fyrir vöru er strikamerkingin lesin. Þá kemur verðið fram á kassanum en jafnframt er skráð hvaða vara er að fara út af lager. Grunnhugmyndin að strikamerkingum er að tölustafir eru táknaðir með strikum, þannig að hvítt táknar 0 og svart táknar 1.



Hver tala hefur sinn kóða. Svæðinu er skipt í tvennt með strikum sem eru lengri en strikin sem standa fyrir tölur. Í strikamerkingum er miðað við að fyrri talan sé lesin frá vinstri en sú seinni frá hægri.

Ef lesið er frá vinstri:	Ef lesið er frá hægri:
0: 0001101	0: 1110010
1: 0011001	1: 1100110
2: 0010011	2: 1101100
3: 0111101	3: 1000010
4: 0100011	4: 1011100
5: 0110001	5: 1001110
6: 0101111	6: 1010000
7: 0111011	7: 1000100
8: 0110111	8: 1001000
9: 0001011	9: 1110100

11 Skoðaðu strikamerkingar á nokkrum vörum og greindu hvernig hver tölustafur er táknaður með strikum.

12 Teiknaðu strik fyrir tölustafinn 8 bæði ef hann er lesinn frá vinstri og frá hægri.

13 Skráðu talnaröðina 895108 707304 með strikamerkingu.

Með strikamerkingu er hverri vöru gefið ákveðið númer og út frá því má lesa framleiðsluland, framleiðanda og vörunúmer. Númer framleiðslulands kemur þó eingöngu fram sem tala. Hönnuð hafa verið nokkur kerfi en árið 1977 stofnuðu framleiðslu- og viðskiptaaðilar í tólf Evrópulöndum samtökin EAN (European Article Numbering). Meginmarkmið samtakanna var að samræma skráningarkerfi og nær það nú til yfir 100 landa. Stöðugt er óskað eftir að meiri upplýsingar felist í merkingunni og því er verið að fjölga tölustöfunum í skráningarkerfinu.

Þrettán tölustafa merkinguna má skrá á forminu:

$L_1\, L_2\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4\, V_1\, V_2\, V_3\, V_4\, V_5\, V_6\, K$

L er fyrir framleiðsluland

P er fyrir framleiðanda

V er fyrir vörunúmer

K er vartala sem notuð er til að athuga hvort strikamerkingin hafi verið rétt lesin.

Á örk með íslenskum frímerkjum má lesa við strikamerkingu talnaröðina: 5690971651001.

56 er þá landsnúmer Íslands.

9097 er númer framleiðanda, Íslandspósts.

165100 er vörunúmer þessarar gerðar af frímerki.

1 er vartalan.

Vartalan er fundin með því að margfalda aðra hverja tölu með þremur og leggja þær allar saman.

$5 + 6 \cdot 3 + 9 + 0 \cdot 3 + 9 + 7 \cdot 3 + 1 + 6 \cdot 3 + 5 + 1 \cdot 3 + 0 + 0 \cdot 3 = 89.$

Vartalan er sú tala sem bæta þarf við svo summan sé deilanleg með 10.

14 Hver er vartalan?

a 569082430280 *b* 569075535842 *c* 569094110983

Atriðisorð

bjóddu í og skiptu aðferðin 86
deilir 66
deilistofn 66
Descartes, René 19
dulmálsfræði 106
dulráðning 106
dulritun 106
endanlegt tugabrot 29
ferningsrót 33
ferningstala 32
frumtala 35
frumþáttun 35, 36
hallatala 21
háður atburður 43
hlutfallstíðni 48
hnitakerfi 19
hæð í þríhyrningi 9
hæsti sameiginlegi þáttur 53
jafna beinnar línu 21
kvóti 66
liðastærð 93
líkindatré 46
líkur 40
lota 29, 30
lotubundið tugabrot 29
margföldunarandhverfa 57
margföldunarhlutleysa 57
mengi heilla talna (Z) 24
mengi náttúrlegra talna (N) 24
mengi rauntalna (R) 24
mengi ræðra talna (Q) 24
mengjamynd 42
mengjasvigi 42
ójafna 101
óræð tala 24, 25
Píramídarnir í Gíza 11
píramídi 11, 14
pólhnitakerfi 19
Pýþagóras 67
pýþagórískar þrenndir 72
reiknilíkan 76, 78
rúmmál keilu 15
rúmmál kúlu 18
rúmmál píramída 14, 15
rúmmál réttstrendings 5
rúmmál þrístrendings 9
samsettar tölur 35
Setning Pýþagórasar 10, 68, 72
skiptu og veldu aðferðin 85
skurðpunktur 21
spálíkan 78
spegiltölur 23
strýta 18
stærðfræðilíkan 76
talnamengi 24
talningartré 44
teningstala 34
tvinntala 25
töflureiknir 61
vasareiknir 60
veldareglur 64
veldisstofn 33
veldisvísir 31
yfirborðsflatarmál kúlu 18
þáttun 93

Heimildir

Singh, S. 2006. *Síðasta setning Fermat*. Þýðandi Kristín Halla Jónsdóttir. Reykjavík, Hið íslenzka bókmenntafélag.