1 2 3 4 5 6

Stærðfræði 3

8 ÁTTA – tíu 10

TIL NEMANDA

Þessi bók er eign skólans þíns og þú hefur hana að láni. Bækur eru dýrar og því mikilvægt að farið sé vel með þær. Gættu þess vel að skrifa ekki í þessa bók.

Gættu þess vel að skrifa ekki í þessa bók.
Svaraðu öllum skriflegum verkefnum í vinnubók.

Skóli	Bók nr.
	Tekin í notkun

Nemandi/bekkur	Útlán: dags.	Ástand	Skil: dags.	Ástand

1) Nafn nemanda skal greinilega skrifað í línurnar hér að ofan.
2) Ástandi bókar við útlán og skil skal lýst þannig:
   N: ný bók, G: gott, S: sæmilegt, L: lélegt.

Stærðfræði 3

8 tíu

Guðbjörg Pálsdóttir – Guðný Helga Gunnarsdóttir

NÁMSGAGNASTOFNUN

Til nemenda

Námsefnisflokkurinn *8–tíu* er hugsaður fyrir nemendur í 8.–10. bekk. Grunnbókin *8–tíu 3* skiptist í sjö meginkafla en auk þess eru nokkur stök verkefni milli kafla. Í hverjum kafla er aðallega fjallað um einn efnisþátt stærðfræðinnar. Þú þarft þó að hafa hugfast að efnisþættir stærðfræðinnar fléttast saman og styðja hver við annan.

Stór hluti af stærðfræðinámi felst í að temja sér vinnubrögð stærðfræðinnar svo sem að rannsaka og leita að samhengi, finna mögulegar lausnir og rökstyðja þær. Oft reynir það á úthald og þrautseigju og gott getur verið að vinna saman að lausn verkefna.

Námsefninu er ætlað það hlutverk að styðja þig í námi þínu. Þú þarft að fá yfirsýn yfir námið og setja þér markmið.

Gangi þér vel,
höfundar

8–tíu

Stærðfræði 3

ISBN 9979-0-1057-6

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2006
Námsgagnastofnun
Reykjavík

Útlit og umbrot: Námsgagnastofnun
Umbrot og prentvinnsla: Oddi hf.

Hákon Sverrisson, Jónína Vala Kristinsdóttir, Kristín Bjarnadóttir, Steinunn Sigurbergsdóttir og Þórdís Guðjónsdóttir lásu yfir handrit og veittu góð ráð við vinnslu efnisins. Þeim og öðrum sem aðstoðuðu við gerð þessa efnis eru færðar bestu þakkir.

Stærðfræði 3

ÁTTA 10

EFNISYFIRLIT

Tölur 4
Rými 20
Algebra 35
Jöfnur og gröf 51
Hallandi mávar 62
Talnameðferð 64
Rökfræði og mengi 78
Stærðfræði í daglegu lífi 93
Almenn brot 99
Atriðisorð 112

Tölur

Tölur eru oft notaðar þegar gefa þarf upplýsingar eða lýsa hlutum. Sumar tölur eru svo stórar að erfitt er að skilja þær. Aðrar eru svo litlar að erfitt er að ímynda sér að þær skipti máli.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Eflir hæfni þína til að lesa og skrá stórar tölur og smáar.*
- *Þekkir ýmsar leiðir við talnaritun.*
- *Þekkir helstu talnamengin og einkenni þeirra.*
- *Náir valdi á að nota veldi og getir beitt helstu reiknireglum um veldi.*
- *Æfist í að lesa texta um stærðfræðilegt efni þér til skilnings.*

1 Nefndu 2–3 dæmi um hvar notaðar eru:

a Stórar tölur sem táknaðar eru með 10 tölustöfum.

b Smáar tölur sem táknaðar eru með 5 tölustöfum.

Sætin á milli þúsund og milljón eiga ekki sérstakt nafn heldur er talað um tíu þúsund og hundrað þúsund. Sama má segja um milljón og sætin þar fyrir ofan í sætiskerfinu. Látið er duga að fá nýtt nafn á þriggja sæta fresti.

Heiti	Skráning
Þúsund	$1\,000 = 10^3$
Milljón	$1\,000\,000 = 10^6$
Milljarður	10^9
Billjón	10^{12}
Billjarður	10^{15}
Trilljón	10^{18}
Trilljarður	10^{21}

Milljón er skráð með einum og sex núllum. 1 000 000.

2 Skráðu tölurnar og fjölda tölustafa í þeim.

a Tveir billjarðar, ein milljón og tvö hundruð þúsund.

b Þrjár trilljónir, ein billjón og sex milljónir.

c 170 billjarðar, 8 milljónir og 56 þúsund.

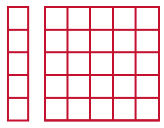
3 Í Nóaflóðinu er talið að rignt hafi í 40 daga og 40 nætur og var allt yfirborð jarðar þá hulið vatni. Til þess að hylja jörðina hefur verið áætlað að þurfi 2 milljónir km^3. Finndu út hve mikið hefur þurft að rigna á klukkustund að jafnaði til að ná þessu.

Klukkustund er gott að nota sem viðmið til að átta sig á stærðum.

Fjöldann níu má skrá á marga vegu. Hér eru nokkur dæmi þar sem sýnt er hvernig níu er skráð með ólíkum táknum og hvernig má skrá slíkan fjölda í öðrum sætiskerfum.

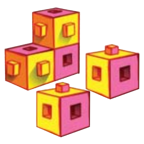
Nú á dögum er algengast að nota tölur sem eiga uppruna sinn að rekja til Asíu og landa fyrir botni Miðjarðarhafs. Þær eru kallaðar indó-arabískar tölur. Notað er sætiskerfi þar sem grunntalan er 10 og gildi hvers tölustafs ákvarðast af stöðu hans í sætiskerfinu. Notaðir eru tíu tölustafir, þ.e. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9.

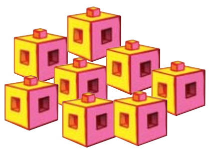
Grunntala í sætiskerfi getur verið önnur er tíu. Ef hún væri til dæmis 5 væru aðeins notaðir fimm tölustafir. Þá væri talið 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, …
Í 10 felst því fjöldinn 5 og í 100 fjöldinn 25.

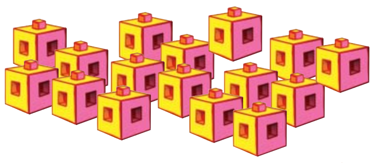


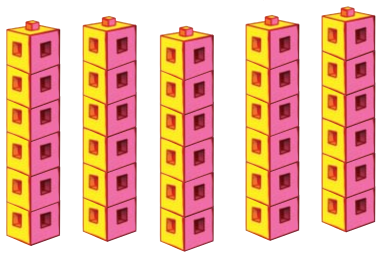
4 Skrifaðu talnaröðina upp í 100 fyrir sætiskerfi með grunntöluna 5.

5 Skráðu fjölda sentíkubbanna miðað við sætiskerfi með grunntöluna 5.

a


b


c


d


HÓPVERKEFNI

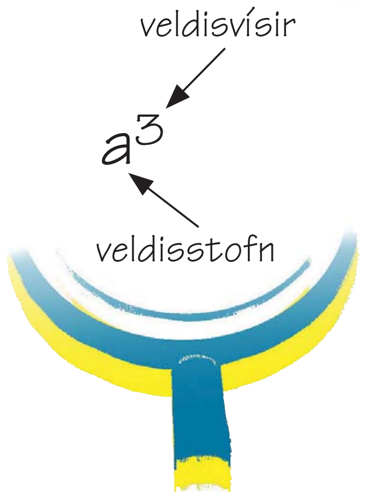
Fullyrt er að tölustafurinn 9 komi fyrir í 99,9…% allra talna.
Getur það staðist? Fullyrðingin hljómar ótrúleg en ef hún er skoðuð skipulega má sjá að hlutfall talna sem tölustafurinn 9 kemur fyrir í er vaxandi.

Náttúrlegar tölur frá 1 til	fjöldi af 9		hlutfall
10	1	1	10%
100	$9 \cdot 1 + 10$	19	19%
1000	$9 \cdot 19 + 100$	271	27%
10000	$9 \cdot 271 + 1000$	3439	34%
100000	$9 \cdot 3439 + 10000$	40951	41%
1000000	$9 \cdot 40951 + 100000$	468559	47%

Notið töfluna til að rökstyðja fullyrðinguna.

Veldi er skráningarmáti sem táknar að tala hefur endurtekið verið margfölduð með sjálfri sér. Veldisstofninn er talan sjálf og veldisvísirinn segir til um hve oft talan hefur verið margfölduð með sjálfri sér.

Dæmi: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$



6 Skráðu sem veldi.

a $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

b $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

c $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$

d $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

7 Skráðu sem veldi.

a $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

b $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot 3 \cdot m \cdot 3 \cdot m$

c $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

d $k \cdot k \cdot h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot k \cdot h \cdot k$

8 Reiknaðu gildi veldanna.

a 4^3 b 4^5 c 14^1 d 2^5 e 19^1 f 8^3 g 7^3 h $5^2 \cdot 2$ i $6^2 \cdot 6^3$ j $3^8 \cdot 4^2$ k 5^4 l $4^3 \cdot 2^2$

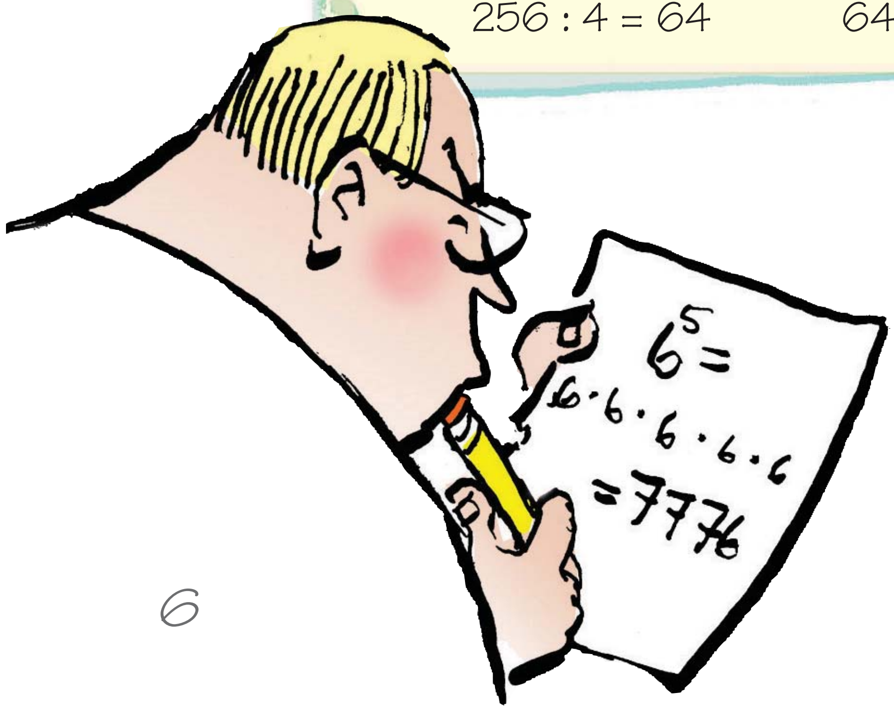
Tölur geta verið í núllta veldi. Gildi talna í núllta veldi er alltaf einn. $5^0 = 1$
Þá ályktun má draga ef skoðað er samhengi á milli velda eftir því sem veldisvísirinn hækkar eða lækkar.

$3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$

Hér sést að ef veldisvísirinn hækkar um einn þrefaldast tala því veldisstofninn er 3. Ef veldisstofninn væri 4 mundi tala fjórfaldast. Það þýðir líka að ef veldisvísirinn lækkar þá minnkar talan.

$4^4 = 256$ $4^3 = 64$ $4^2 = 16$ $4^1 = 4$ $4^0 = 1$

$256 : 4 = 64$ $64 : 4 = 16$ $16 : 4 = 4$ $4 : 4 = 1$



9 Skráðu gildi velda af 6 frá 6^5 niður í 6^0.

10 Skráðu gildi velda af 8 frá 8^3 niður í 8^0.

11 Skráðu gildi velda af 5 frá 5^4 niður í 5^0.

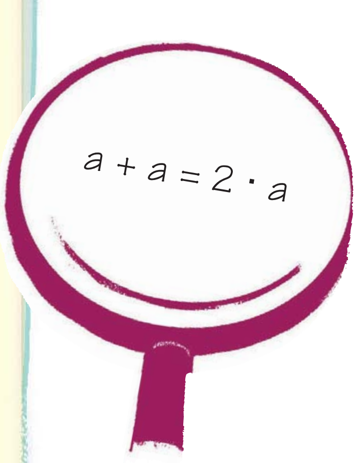
12 a Hvað eiga allar tölur í núllta veldi sameiginlegt?

b Hvaða gildi hefur a^0? En a^2?

Útreikningar verða oft einfaldari ef líkir liðir eru dregnir saman. Reiknireglur gera kleift að einfalda stærðir eins og $a^2 + a^2$ sem $2 \cdot a^2$. Ef tvær stærðir hafa sama veldisstofn og sama veldisvísi má leggja þær saman eða draga þær hvora frá annarri. Þannig verður $5^3 + 5^3 = 2 \cdot 5^3$ og $2x^4 - x^4 = x^4$.
Þá eru dregnir saman líkir liðir og skráð hve mörgum sinnum er um hvern lið að ræða.

$4x^5 + 3x^5 - 2x^5 = 5x^5$ $\quad$ $3a^3 + 5a^2 - a^3 + 2a^2 = 2a^3 + 7a^2$

Hægt er að draga saman líka liði vegna þess að víxlregla og tengiregla gilda um samlagningu.



13 Einfaldaðu stæðurnar.

a $5a^2 + 3a^2$ $\quad$ c $6x^3 - 3x^3$ $\quad$ e $4v^4 + 3v^4 - 5v^2$

b $3a^6 + 3a^3$ $\quad$ d $5p^2 + 12p^2 - 3p^2$ $\quad$ f $6 + 7x^8 + 18 + 4x^8$

g Hvers vegna er $x^2 + x^3$ ekki $2x^5$? Prófaðu að setja inn tölur í staðinn fyrir x.

14 Dragðu líka liði saman og einfaldaðu stæðurnar.

a $x^4 + 2x^4 + x^3 + 3x^3$ $\quad$ c $a^3 - 4a^2 + 6a^2 + 4a^3$ $\quad$ e $4k^4 + 5k^2 - 5k^4 + 3k^4$

b $6h^2 + h - 2h^2 + 5h$ $\quad$ d $x^2 + 5x + 3x^2$ $\quad$ f $3b^2 + 6a^2 + 4b^2 - 3a^2$

15 Jón reiknaði dæmið $b^2 + b^3$ og fékk út b^5. Hvað gerði hann rangt?

Ef margfalda á veldi þar sem veldisstofninn er sá sami má leggja veldisvísana saman og skrá margfeldið sem veldisstofninn með veldisvísi sem er summa veldisvísanna.

Dæmi: $3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$ $\quad$ $4 + 2 = 6$

$y^3 \cdot y^4 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^7$ $\quad$ $3 + 4 = 7$

Fjöldi talna sem margfalda á saman er sá sami og summa veldisvísanna. Þegar margfalda á veldi þarf að skoða veldisstofninn.

Dæmi: $4^2 \cdot 3^4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Ekki er hægt að einfalda skráninguna á veldaformi meira en $4^2 \cdot 3^4$

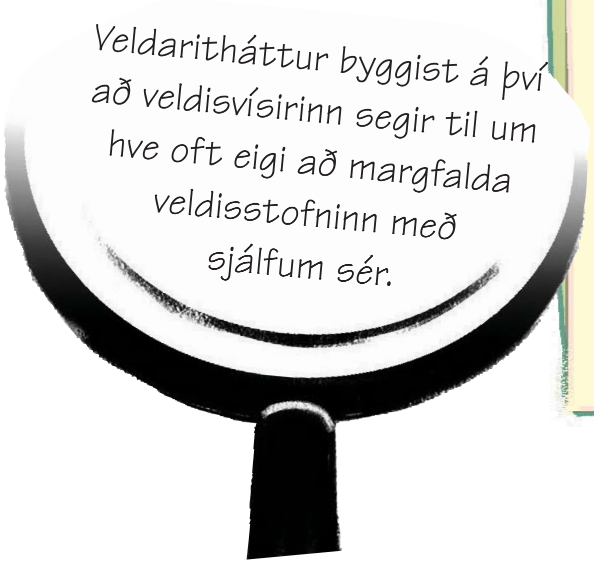
16 Skráðu sem eitt veldi.

a $p^8 \cdot p$ $\quad$ b $y^7 \cdot y^3$ $\quad$ c $q^{15} \cdot q^4$ $\quad$ d $8^6 \cdot 8^{23}$

17 Skráðu sem veldi á sem einfaldastan hátt.

a $2^4 \cdot 2^4$ $\quad$ c $2^5 \cdot 7^5$ $\quad$ e $a^{13} \cdot a^4$ $\quad$ g $6^3 \cdot 3^6 \cdot 3^5$

b $3^3 \cdot 3^3$ $\quad$ d $5^6 \cdot 5^2$ $\quad$ f $b^5 \cdot b^7$ $\quad$ h $5^6 \cdot 5^4 \cdot 5^7$



Sú reikniregla gildir um margföldun velda að leggja má veldisvísana saman ef veldisstofninn er sá sami. Skoðaðu hvað gerist þegar deilingu er beitt á veldi.

$$5^4 : 5^2 = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5^2$$

$$2^5 : 2^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2^3$$

$$7^4 : 7^1 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7} = 7^3$$

18 Hvaða reikniregla gildir um deilingu velda?

19 Notaðu reikniregluna um deilingu velda og skráðu sem eitt veldi.

a $3^6 : 3^2$ c $5^6 : 5^5$ e $6^9 : 6^5$ g $x^7 : x^4$ i $10^8 : 10^3$

b $f^4 : f^2$ d $9^{12} : 9^4$ f $6^6 : 6^1$ h $e^9 : e^4$ j $14^4 : 14^2$

20 Skráðu sem eitt veldi ef hægt er.

a $3^8 \cdot 3^4$ d $7^4 \cdot 7^3 : 7^3$ g $5^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4$ j $a^4 \cdot a^5$

b $4^4 \cdot 4^3$ e $9^6 \cdot 9^3 : 9^2$ h $12^4 : 12^3 \cdot 12^2$ k $r^6 : r^2$

c $8^2 : 8^2$ f $5^5 \cdot 5^9 : 5^8$ i $7^6 \cdot 7^4 : 7^7$ l $v^4 : v^3$

Á mörgum vasareiknum er takki. $\boxed{x^y}$
Þennan takka má nota til að hefja í veldi. Prófaðu að ýta á takkana:

$2^6 =$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$

Berðu það saman við að margfalda $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

Notaðu vasareikni og finndu hvort er hærri tala.
15^8 eða 17^6 235^2 eða 34^4

Búðu til fleiri svona dæmi og leggðu fyrir bekkjarfélaga.

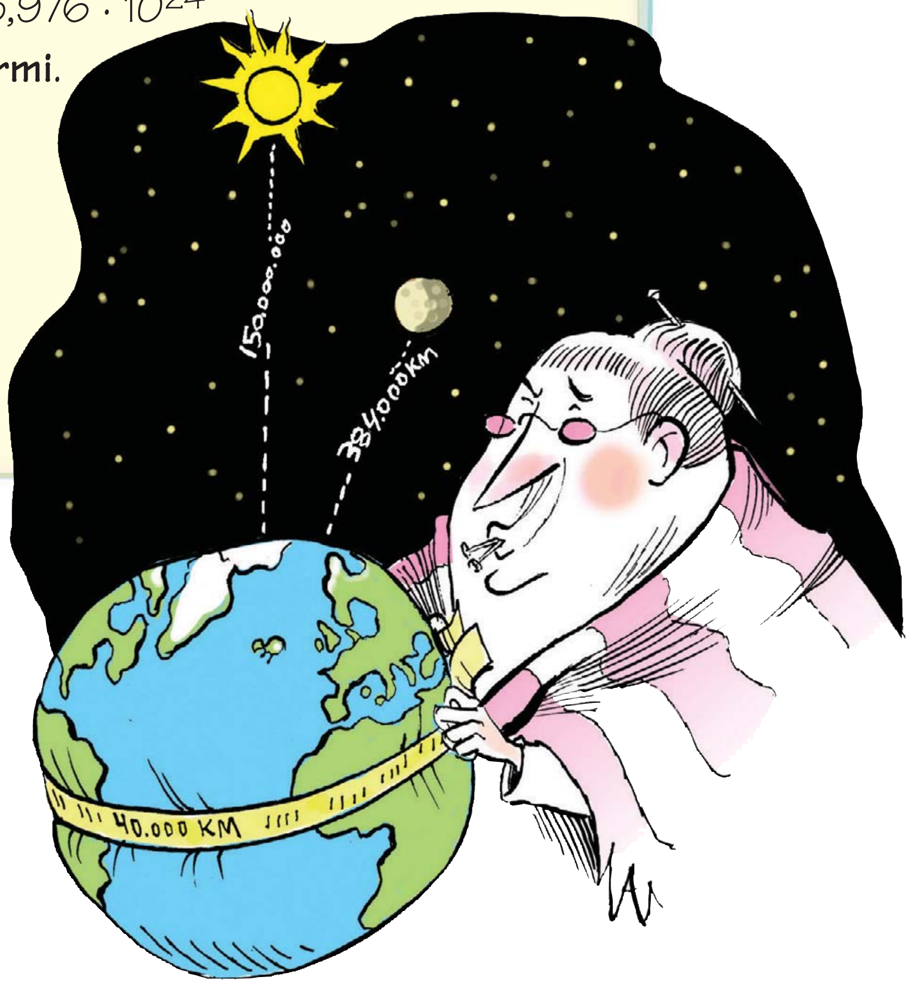
21 Mörgum finnst erfitt að gera sér grein fyrir stærðum sem skráðar eru sem veldi. Finndu gildi stærðanna í dæmi 20. Í liðum j, k og l skaltu miða við að gildi bókstafanna sé a = 4   r = 6 og v = 252.

Nota þarf marga tölustafi til að skrifa stórar tölur. Stundum eru tölur svo stórar að erfitt verður að lesa þær. Dæmi um slíka tölu er skráning á massa jarðar sem er 5 976 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Önnur leið til að skrá þessa stærð er að skrifa: $5{,}976 \cdot 10^{24}$
Þessi skráningarmáti kallast að skrá á **staðalformi**.

Þegar tala er skráð á staðalformi er hún rituð sem margfeldi af tölu frá 1 til 10 og veldi af 10.
$4{,}75 \cdot 10^5$ er staðalform tölunnar 475000.

$45\ 000\ 000 = 4{,}5 \cdot 10\ 000\ 000 = 4{,}5 \cdot 10^7$
$700\ 000\ 000 = 7 \cdot 100\ 000\ 000 = 7 \cdot 10^8$



Mannfjöldi í heiminum er um 6 milljarðar.
Á staðalformi er sú tala skráð sem $6 \cdot 10^9$
því milljarður er skráður 1 000 000 000.

22 Skrifaðu eftirfarandi tölulegar staðreyndir á staðalformi.

a Ljóshraði er 300 000 000 m/s.

b Fjarlægð jarðar frá sólu er 150 000 000 km.

c Ummál jarðar við miðbaug er 40 000 000 km.

d Stjörnurnar í vetrarbrautinni mynda skífu. Þvermál skífunnar er 950 000 000 000 000 000 km.

e Frá jörðu til tunglsins eru 384 000 km.

f Fjarlægð plánetanna frá sólu.

- Jörðin 150 000 000 km.
- Merkúríus 58 000 000 km.
- Venus 108 000 000 km.
- Mars 228 000 000 km.

Ef tvær mjög stórar tölur eru margfaldaðar saman á vasareikni kemur stundum fram ERROR því vasareiknirinn getur ekki sýnt nema átta eða tíu tölustafi.

Fullkomnari vasareiknar sýna niðurstöður á staðalformi, þó þannig að í stað · 10 kemur E eða e+. Þegar t.d. er reiknað 500 000 · 400 000 kemur fram svarið 2 E 11 sem þýðir að um er að ræða tólf stafa tölu þar sem 2 stendur fremst og eftir fylgja ellefu 0. Ef dæmið er 500 000 · 50 000 kemur fram 2,5 E 10 sem er ellefu stafa tala. Hana mætti skrifa sem 25 000 000 000 eða tuttugu og fimm þúsund milljónir.

Vasareiknar í tölvum geta sýnt margra tölustafa svör en ef tölustafirnir verða of margir er gripið til staðalformsins. Notaðu tölvu til að margfalda saman nokkrar stórar tölur.

Sú reikniregla gildir um deilingu velda af sama stofni að niðurstöðu má finna með því að finna mismun veldisvísanna.

23 Notaðu þessa reiknireglu til að leysa:

a $a^4 : a^1$ c $4^6 : 4^5$ e $6^8 : 6^2$ g $5^3 : 5^6$

b $x^5 : x^2$ d $2^4 : 2^3$ f $6^2 : 6^4$ h $3^5 : 3^3$

Ef veldisvísirinn sem deilt er með er hærri en veldisvísirinn í deilistofninum kemur fram neikvæður veldisvísir eins og í dæminu $5^3 : 5^6$ þar sem svarið verður 5^{-3}.

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}$$

5^{-3} má því líka skrá sem $\frac{1}{5^3}$ sem jafngildir $\frac{1}{125}$

Ef veldisvísir er neikvæður er það skráning á almennu broti þar sem nefnarinn er veldið. $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

24 Skráðu sem almennt brot.

a 5^{-2} b 2^{-4} c 6^{-6} d a^{-3} e w^{-23} f g^{-2}

25 Hvor talan er minni?

a 2^{-3} eða 4^{-2} b 6^{-2} eða 2^{-6} c 4^{-3} eða 5^{-3} d 7^{-5} eða 2^{-5}

26 Reiknaðu og skráðu svarið á sem einfaldastan hátt.

a $b^7 : b^9$ c $8^2 : 2^3$ e $b^{12} \cdot b^{13} : b^{30}$

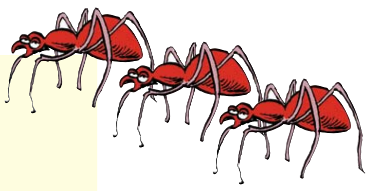
b $3^8 : 3^9$ d $6^4 : 3$ f $a^5 \cdot a^8 : a^6$

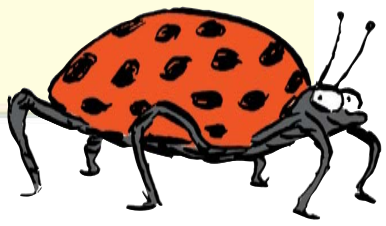
27 Einfaldaðu og skráðu hvort svarið er stærra, jafnt og eða minna en einn.

a $17^2 \cdot 17^2 : 17^4$ c $2^4 : 2^8$ e $13^5 \cdot 13^8 : 13^9$

b $13^2 \cdot 13^{\wedge 8} \cdot 12$ d $7^3 : 7^{12}$ f $9^8 \cdot 9^6 : 9^{17}$

Mjög lágar tölur eru oft skráðar á staðalformi með neikvæðum veldisvísi.
Það þýðir að í nefnara verður veldi af 10.
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$





28 Skráðu sem tugabrot.

a 10^{-4} b 10^{-8} c 10^{-3} d 10^{-9}

29 Skoðaðu hve margir stafir eru fyrir aftan kommu í dæmi 28. Berðu fjölda þeirra saman við veldisvísinn. Hve margir stafir lenda fyrir aftan kommu þegar veldið er –9? En ef veldið er –8?

30 Skráðu á staðalformi.

a 0,03 c 0,00012 e 0,00000003405 g 0,0000000000000004

b 0,000019 d 0,01007 f 0,00000000045 h 0,00000009876

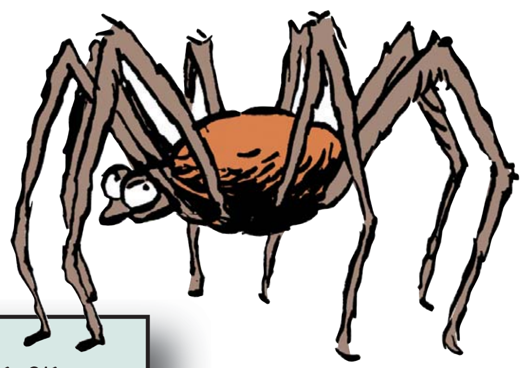
Í eðlisfræði er oft fengist við mjög lágar tölur. Þær eru oft skráðar á staðalformi.

- Vetnisfrumeindin er léttasta þekkta frumeindin. Massi hennar er 0,0000000000000000000000000016735 kg.
  Á staðalformi má skrá þá þyngd sem $1{,}6735 \cdot 10^{-27}$ kg.
- Massi vatnssameindar er $2{,}991 \cdot 10^{-26}$ kg
- Massi gullfrumeindar er $3{,}271 \cdot 10^{-25}$ kg

31 a Hvor er léttari vetnisfrumeind eða vatnssameind?

b Hvor er þyngri gullfrumeind eða vatnssameind?

c Skráðu þyngd frumeindanna og sameindanna í grömmum.



32 a Finndu fleiri dæmi um lágar tölur sem notaðar eru í eðlis- eða efnafræði.

b Þekkir þú dæmi um notkun lágra talna af öðrum sviðum?

Massi róteindar er
$1{,}67262171 \cdot 10^{-27}$ kg

Massi rafeindar er
$9{,}1093826 \cdot 10^{-31}$ kg

HVERS VIRÐI ER ÞAÐ AÐ FÁ AÐ LÆRA AÐ TEFLA?

Samkvæmt munnmælasögu fann uppfinningamaður að nafni Sessa upp taflborðið. Hann var í þjónustu indverska konungsins Sheram og vildi konungur launa honum fyrir þessa frábæru uppfinningu.

Konungurinn spurði Sheram hvað hann vildi fá að launum. „Ég myndi vilja fá eitt hveitikorn fyrir fyrsta ferninginn á taflborðinu, tvö fyrir þann næsta, fjögur fyrir þann þriðja, átta fyrir þann fjórða, sextán fyrir þann fimmta ..."

„Þetta nægir," sagði konungurinn. „Þú færð hveitikorn fyrir hvern af hinum 64 ferningum á skákborðinu samkvæmt óskum þínum. Á sérhvern nýjan reit kemur tvöfaldur fjöldi þeirra hveitikorna sem var á reitnum á undan. En ósk þín er ekki samboðin því örlæti sem ég hugðist sýna þér. Með því að krefjast svo lítilfjörlegra launa hefur þú sýnt mér vanvirðingu. Komdu þér á burt. Þjónar mínir munu færa þér sekk af hveitikorni." Sessa brosti, fór út og beið eftir launum sínum við hlið konungsgarðs.

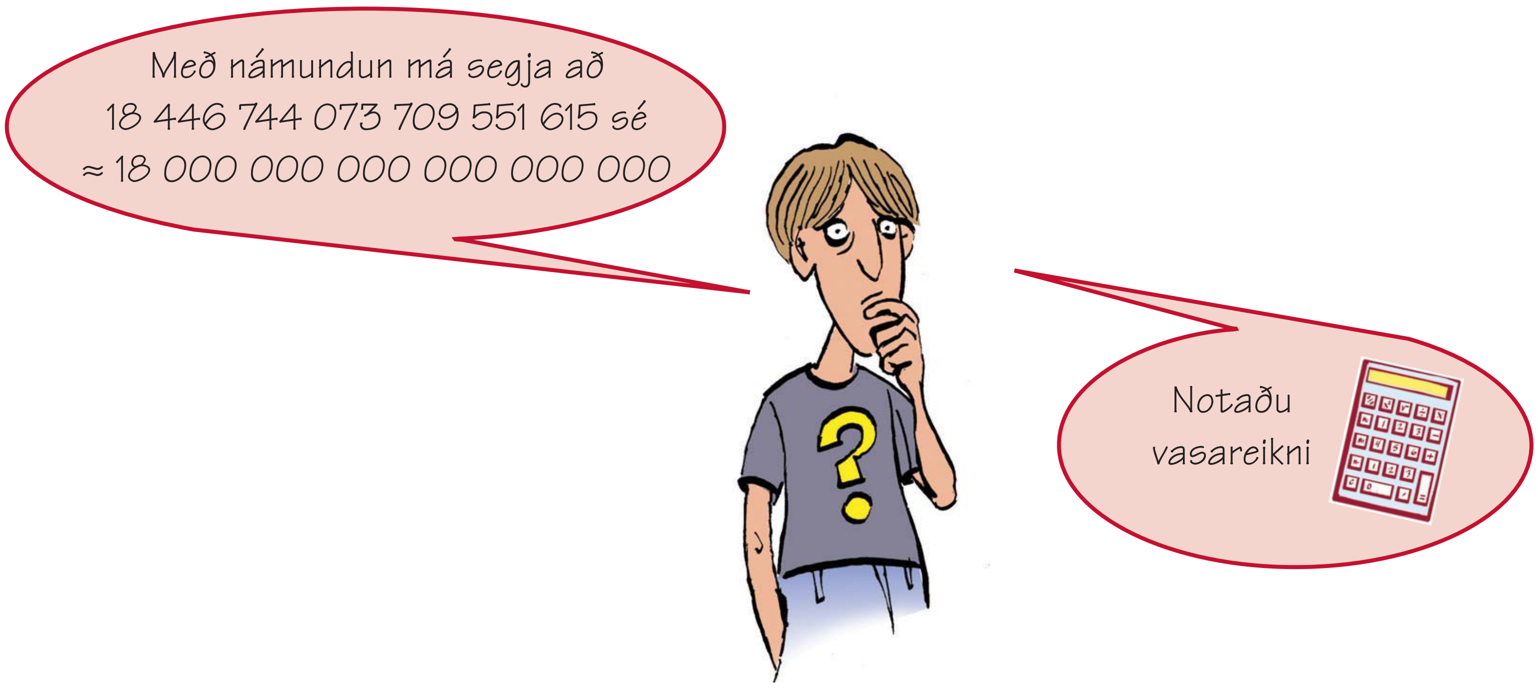
Um kvöldmatarleytið mundi konungur eftir Sessa og spurðist fyrir um hvort hinn heimski uppfinningamaður hefði fengið hin lítilfjörlegu laun sín greidd. Honum var tjáð að enn væru starfsmenn hans að telja saman hve mörg hveitikorn hann ætti að fá. Honum þótti þetta ganga hægt fyrir sig. Áður en hann gekk til náða spurði hann þjón sinn aftur hvort Sessa hefði ekki fengið hveitikornapokann sinn.

„Herra minn!" var svarið, „stærðfræðingar vinna að því hörðum höndum að reikna út hve mörg hveitikorn hann á að fá og vonast til að geta lokið því verki fyrir sólarupprás."
„Hvers vegna tekur þetta svona langan tíma?" spurði konungurinn reiðilega. „Ég vil að búið sé að greiða Sessa að fullu áður en ég vakna."

Um morguninn tjáði aðalstærðfræðingur hirðarinnar honum að sá fjöldi hveitikorna sem Sessa ætti að fá að launum væri gríðarlegur. „Í kornhlöðunum er ekki nægilega mikið af hveitikorni til að hægt sé að greiða Sessa þau laun sem hann fór fram á. Í raun er hvorki til nægilega mikið í öllum kornhlöðum ríkisins né í heiminum öllum.“

2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Konungurinn hlustaði furðu lostinn.
„Hver er þessi háa tala?“ spurði hann.
„Hún er 18 446 744 073 709 551 615,“ svaraði birgðastjórinn. Fjöldi hveitikorna tvöfaldast alltaf þegar farið er milli ferninga á taflborðinu. Stærðfræðingar konungsins notfærðu sér að skrá fjöldann sem veldi af tveimur.
Útskýrðu skráningu þeirra.



33 Finndu út hve mörg hveitikorn yrðu á fyrstu tíu reitunum. En næstu tíu? En á síðasta reitnum?

Hér er rætt um hveitikorn. Eitt hveitikorn er mjög lítið og gerir það enn þá erfiðara að átta sig á hve mikið hveiti er um að ræða. Þá er gott að nota viðmið.

34 Það er þekkt staðreynd að í einum rúmmetra eru u.þ.b. 15 000 000 hveitikorn. Hve margir rúmmetrar af hveitikorni eru þá laun Sessa?

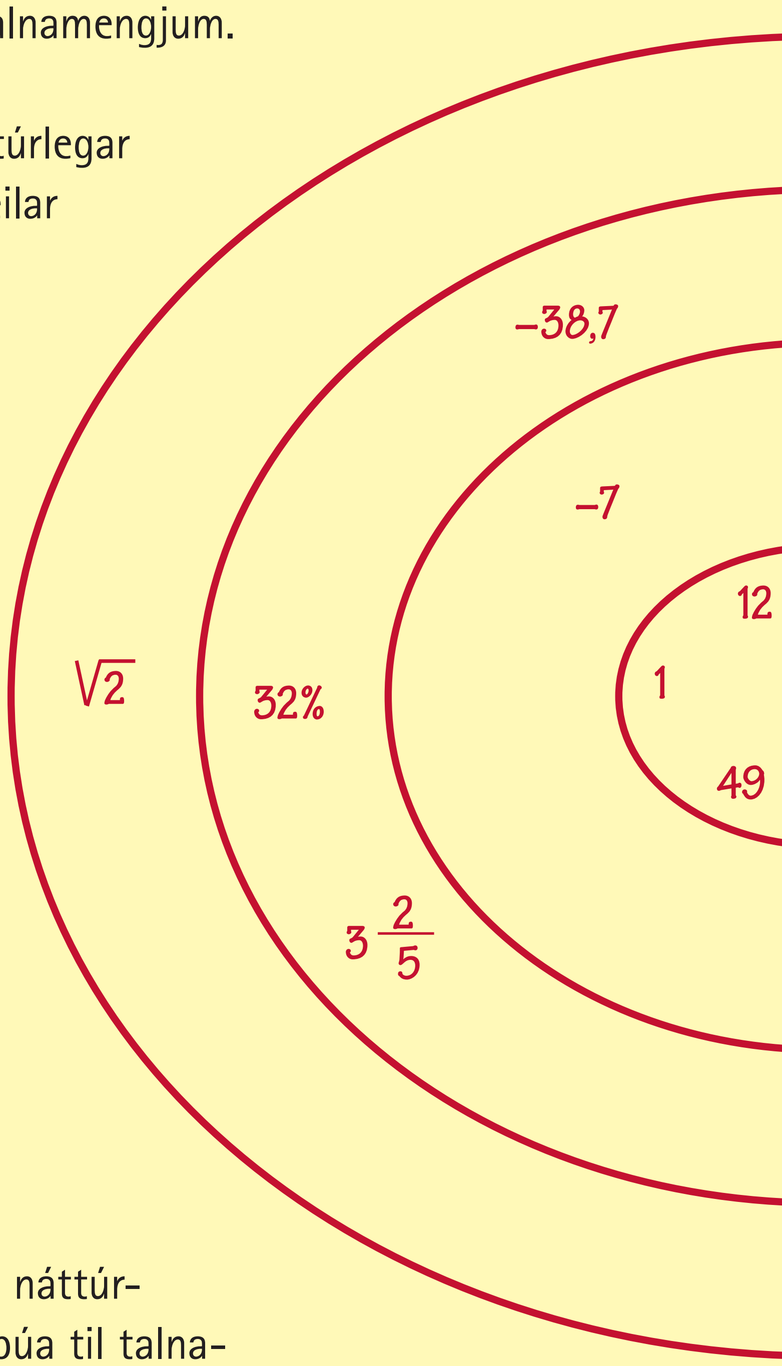
35 Hver gæti verið lengd, breidd og hæð kornhlöðu sem gæti hýst allt þetta hveitikorn?

TALNAMENGI

Tölur eru skráning á stærðum. Í fyrstu notaði fólk eingöngu heilar jákvæðar tölur, þ.e. tölur eins og 1, 25 og 3540. En þessar tölur dugðu ekki þegar fólk vildi skrá af meiri nákvæmni. Margar fleiri gerðir talna hafa verið teknar upp. Til þess að ná yfirsýn yfir gerðir talna má flokka þær í talnamengi eftir einkennum. Enn þá eru stærðfræðingar að fást við rannsóknir á tölum og talnamengjum.

Kjarninn í mengi talna eru **náttúrlegu tölurnar**. Náttúrlegar tölur eru tölurnar sem talið er með. Þær eru allar heilar tölur og eru táknaðar með **N**.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$



Náttúrlegar tölur eru búnar til af fólki eins og aðrar tölur en dæmi um þær finnast í öllum menningarheimum.

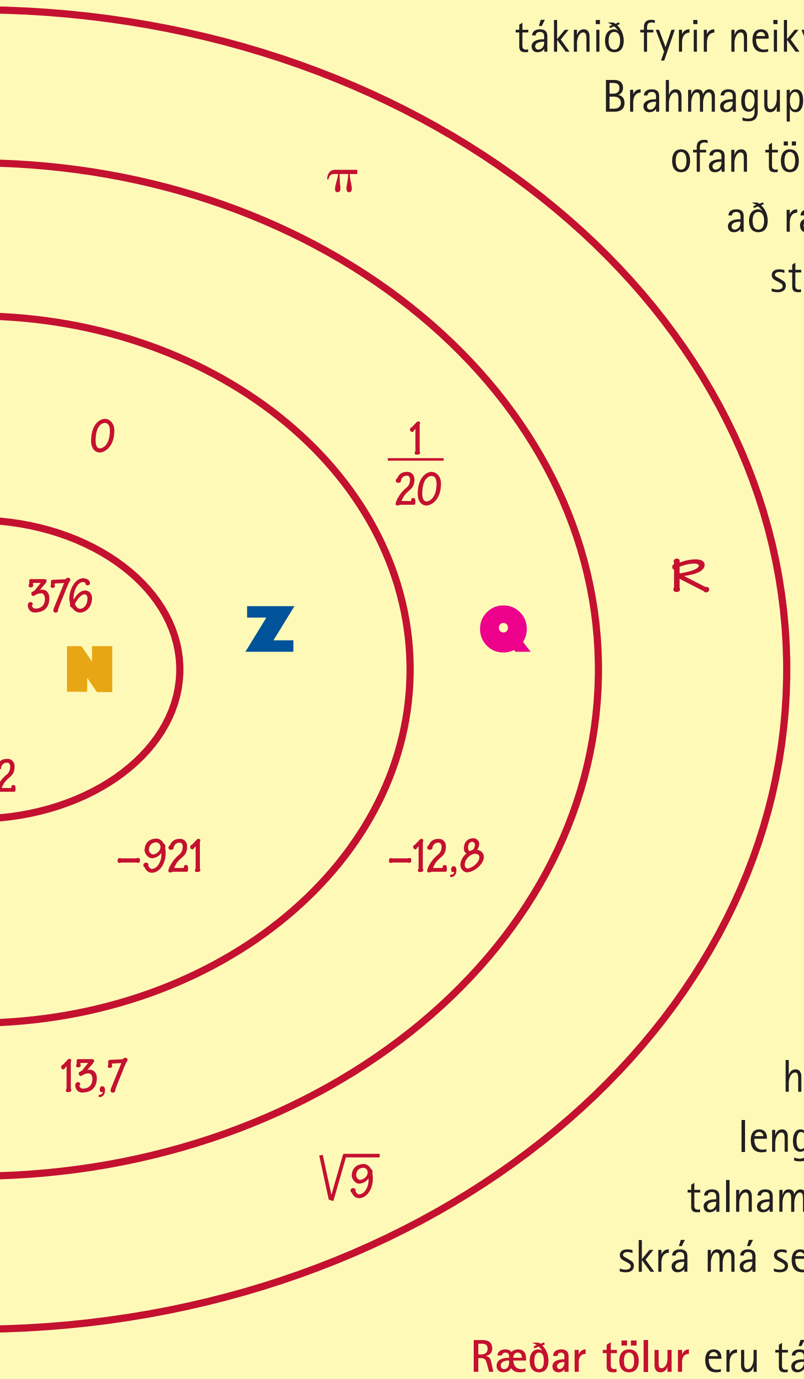
Náttúrlegar tölur má nota á marga vegu. Fyrst og fremst eru þær notaðar til að telja með þeim. Það má líka reikna með þeim. Náttúrlegar tölur má leggja saman og margfalda og svarið verður alltaf náttúrleg tala. Stundum þegar reynt er að draga frá og deila verður svarið ekki náttúrleg tala.

Það má leysa dæmi eins og 7 – 3 og 8 : 2.
En hvað gerist ef tölum er víxlað?
Dæmin 3 – 7 og 2 : 8 er ekki hægt að leysa í mengi náttúrlegra talna. Þess vegna hefur verið nauðsynlegt að búa til talnamengi sem felur í sér tölur sem nota má til að leysa þessi dæmi.

36 Hver þessara dæma hafa svar sem er náttúrleg tala?

- **a** Garðar á 2500 krónur og notar 2000 krónur til að greiða fyrir vörur. Hve mikið á hann eftir?
- **b** Skiptu 854 krónum milli þriggja barna.
- **c** $8 \cdot 55 - 65$ **d** $12 \cdot 5 - 65$ **e** 1 : 4 **f** 12534696 : 9

Í samfélagi þar sem notaðir eru peningar í stað vöruskipta kemur fljótt í ljós að nota þarf fleiri tölur en náttúrlegar tölur. Til þess að geta leyst einföld dæmi eins og 3 – 7 þarf að nota neikvæðar tölur. Nauðsynlegt var því að taka slíkar stærðir inn. Neikvæðu tölurnar áttu þó erfitt uppdráttar. Margir töldu þær ekki vera tölur en í ýmsum gömlum heimildum má lesa um þær. Kínverjinn Jiu Zhang Suanshu skrifaði um neikvæðar tölur í bók frá fjórðu öld fyrir Krist. Fyrsta táknið fyrir neikvæðar tölur kom fram hjá Indverjanum Brahmagupta árið 628 og setti hann kommu fyrir ofan tölu til að tákna að um neikvæða tölu væri að ræða. Á 15. og 16. öld voru þó enn margir stærðfræðingar sem töldu neikvæðar tölur vera merkingarlausar.



Í talnamenginu **heilar tölur** eru náttúrlegar tölur, talan 0 og neikvæðar heilar tölur. Þetta talnamengi er táknað með bókstafnum **Z**.
Heilar tölur: Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

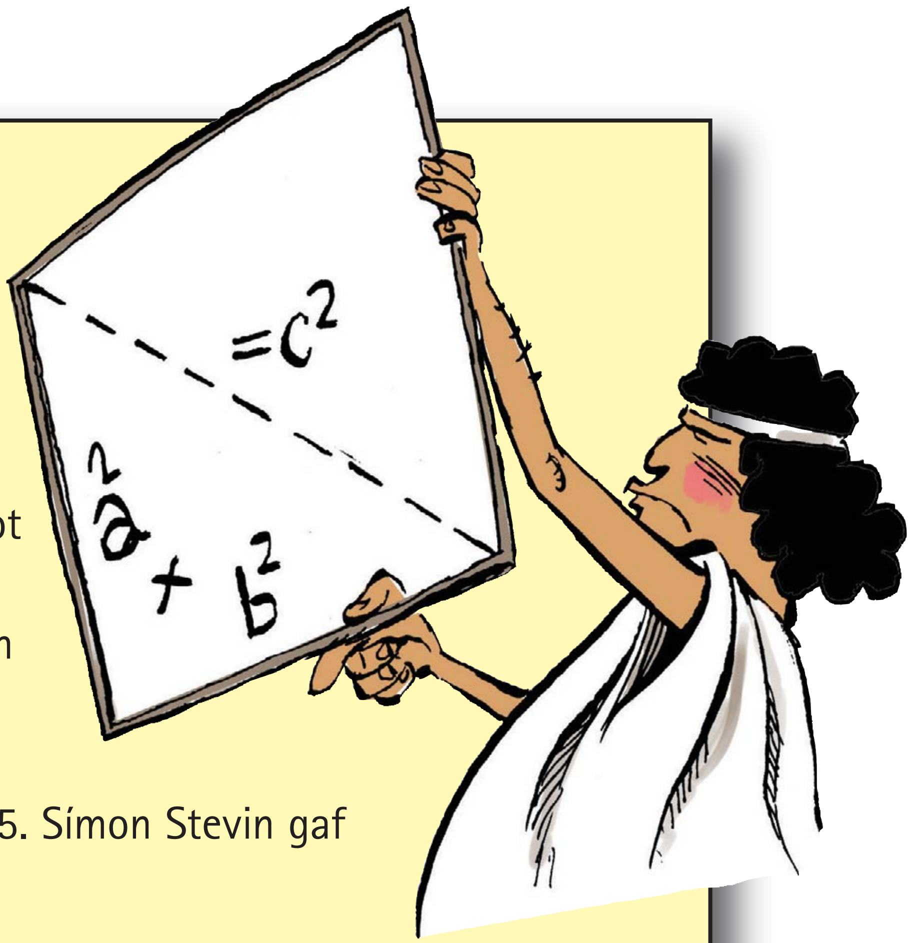
Þessi talnamengi duga þó ekki til að skrá allar stærðir og niðurstöður útreikninga. Upp kemur þörf fyrir að skrá hluta af einingu því til dæmis kemur ekki alltaf út heil tala þegar heilli tölu er deilt í heila tölu. Við framkvæmdir, eins og t.d. byggingar, þarf mikla þekkingu á rúmfræði og hæfni til að mæla og reikna af nákvæmni horn og lengdir. Þá kemur upp þörf fyrir brot og fram kemur talnamengið ræðar tölur. Það felur í sér allar tölur sem skrá má sem almennt brot.

Ræðar tölur eru táknaðar með **Q**. Mengið samanstendur af öllum heilum tölum og almennum brotum. Öll almenn brot má skrifa sem endanleg eða lotubundin tugabrot.

37 Skráðu við tölurnar hvort þær eru í talnamengjunum N, Z eða Q. Athugaðu að sumar geta verið í þeim öllum.

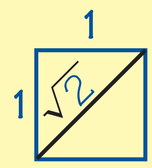
-14 $8{,}3$ 25 $\frac{3}{4}$ $\frac{-3}{4}$ 1450 $2{,}5 \cdot 10^3$

$6{,}359$ $\frac{15}{97}$ $-14{,}5692$

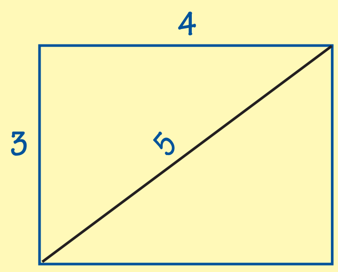


Í upphafi voru aðeins notaðar jákvæðar ræðar tölur. Þær dugðu ágætlega við verslunarreikninga og byggingarframkvæmdir. Í Egyptalandi til forna var reiknað með einingabrotum, þ.e. almennum brotum sem hafa einn sem teljara. Tugabrot komu seinna fram. Þau voru fyrst kynnt árið 1585 þegar belgíski stærðfræðingurinn Símon Stevin gaf út bókina *De thiende*. Hann skráði $17\frac{325}{1000}$ sem $17\ 3^1\ 2^2\ 5^3$.
Þessi skráningarmáti þróaðist síðar í 17,325. Símon Stevin gaf þessum tölum líka nafnið tugabrot.

Ekki eru allar tölur ræðar. Það eru til tölur sem ekki er hægt að skrifa sem almennt brot með heilum tölum í teljara og nefnara. Forn-Grikkir (Pýþagoringar) uppgötvuðu að hlið- og hornalínu hyrninga er ekki alltaf hægt að mæla með sömu einingu. Oft er þessi uppgötvun sett fram þannig að hornalína í ferningi með hliðarlengdina einn er ekki ræð tala.



Rauntölur
R = Allar ræðar tölur og allar óræðar tölur.



Til eru rétthyrningar þar sem nota má sömu einingu um hliðarlengdir og hornalínu.

Þriðja rótin af x^3 er x.
Þriðja rótin af 7 er því sú tala sem gefur 7 ef hún er margfölduð tvisvar með sjálfri sér.

Í fæstum tilfellum er hægt að skrá af fullri nákvæmni allar hliðarlengdir þríhyrnings með heilli tölu eða broti. Því þurfti að stækka talnamengi og fram kom hugmyndin um **óræðar tölur**. Óræðar tölur eru því tölur sem ekki er hægt að skrifa með almennu broti.

Margar ferningsrætur eru óræðar tölur. Ef ferningsrót tölunnar 3 er skoðuð í vasareikni kemur fram tugabrot og það fer eftir því hve marga aukastafi vasareiknirinn tekur hve margir aukastafirnir eru. Fram getur komið 1,7320508075688729352744634150 59 og eru þá ekki allir aukastafirnir í ferningsrótinni af þremur komnir fram. En það eru ekki bara ferningsrætur sem geta verið óræðar tölur. Það eru til margar aðrar óræðar tölur eins og t.d. π og $\sqrt[3]{7}$

Í daglegu lífi og starfi duga ræðar tölur oftast ágætlega. En á ýmsum sviðum getur þurft að nota óræðar tölur. Ef óræðum tölum er bætt við mengi ræðra talna kemur fram nýtt og stærra talnamengi. Það kallast mengi **rauntalna** (R).

Mengi heilla talna er því í raun útvíkkun á mengi náttúrlegra talna, mengi ræðra talna er útvíkkun á mengi heilla talna og síðan er mengið rauntölur útvíkkun á mengi ræðra talna þegar óræðu tölurnar bætast við. Til eru fleiri talnamengi og við rannsóknir stærðfræðinga getur skapast þörf fyrir að búa til ný.

38 Hvert talnamengi er táknað með bókstaf. Skráðu hvaða talnamengi eru táknuð með bókstöfunum.

a N
b Z
c Q
d R

39 Er eitthvert hinna talnamengjanna hlutmengi í mengi óræðra talna?

40 Hvaða tölur bætast við þegar mengi náttúrlegra talna er víkkað út í mengi heilla talna?

41 Reiknaðu eftirfarandi dæmi og skráðu við hvert þeirra hvort svarið er tala í mengi náttúrlegra talna, heilla talna, ræðra talna eða allra rauntalna.

a $4 \cdot 2$
b $3 : 9$
c $875 : 5$
d $893 - 289$
e $17 - 18$
f $124 + 8932$
g $789 - 780$
h $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
i Skiptu 1873 krónum í þrennt.
j Ef ég lána þér 520 krónur skuldar þú mér 2891 krónu.

42 Búðu til þrjú dæmi þar sem svörin eru:

a tölur í mengi náttúrlegra talna
b tölur í mengi heilla talna
c tölur í mengi ræðra talna
d tölur í mengi rauntalna

43 Skoðaðu á vasareikni hvaða tölur koma fram ef þú finnur ferningsrætur talna eins og 2, 3, 5, 7 og 10. Getur þú fundið reglu í röð aukastafa í einhverri ferningsrótinni?

Ræðar tölur eru þær tölur sem skrá má sem almenn brot.

44 Skráðu tugabrotin sem almenn brot. Fullstyttu almennu brotin.

a 1,289 b 7,4 c –3,56 d 0,33333333 ... e 7,08 f 0,005

45 Hver eftirfarandi almennra brota er ekki hægt að skrá sem endanleg tugabrot?

a $\frac{7}{9}$ b $-\frac{4}{5}$ c $\frac{13}{39}$ d $-\frac{24}{96}$ e $\frac{22}{4}$ f $\frac{6}{16}$

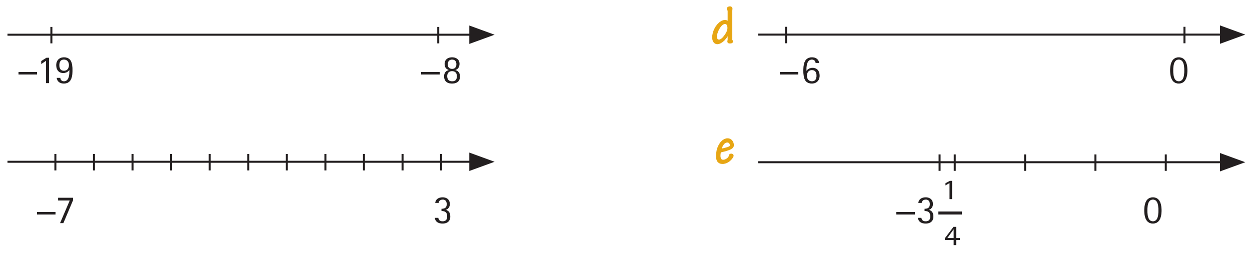
46 Skráðu fjarlægð milli punktanna á talnalínunum. a

b

c

d

e



Tölurnar 6 og –6 hafa sömu fjarlægð frá núllpunktinum á talnalínu. Hugtakið **tölugildi** er notað til að segja til um fjarlægð tölu frá núllpunktinum á talnalínu.

Tölugildi er táknað með því að afmarka tölur með lóðréttum strikum.

Tölugildi 6 og –6 er það sama eða sex. $|6| = |-6|$

47 Skráðu tölugildi talnanna.

a $|17|$ b $|-\frac{3}{4}|$ c $|2{,}345|$ d $|-\sqrt{3}|$ e $|-275|$ f $|\frac{45}{9}|$

Þegar finna á tölugildi stæðu er fyrst reiknað og síðan er niðurstaðan skráð.

48 Reiknaðu tölugildi.

a $|1{,}7 + 3{,}4|$ b $|34 - 57|$ c $|17 : 3|$ d $|-13 + 17|$ e $|0 - 17|$ f $|11{,}7 \cdot 2|$

49 Reiknaðu gildi eftirfarandi stæða ef x = 4.

a $|x + 5|$ b $|7 - x|$ c $|2x - 9|$ d $|5x - 2x|$ e $|7x + \frac{31}{2}|$ f $|-x - 3|$

50 Í þessum kafla hafa meginviðfangsefnin verið stórar tölur og smáar, veldi, talnamengi og tölugildi. Skráðu hjá þér 6—8 atriði sem þú hefur lært af því að glíma við þessi verkefni.

Zenon frá Eleu

Zenon var grískur heimspekingur sem var uppi á árunum 490–425 fyrir Krist. Hann er einkum þekktur fyrir að setja fram ákveðnar þversagnir sem urðu til þess að menn fóru að efast um hvað væri rétt og hvað væri rangt. Þversögn er fullyrðing sem er þannig gerð að forsendur hennar virðast sannar en þær leiða til mótsagnar.
Þau rök sem Zenon setur fram virðast standast en eru samt í algjörri mótsögn við það sem maður upplifir í raun og veru. Ein þekktasta þversögnin sem Zenon setti fram er sagan af Akkillesi og skjaldbökunni. Akkilles var grísk stríðshetja, ein af ofurhetjum sinnar samtíðar. Zenon hélt því fram að ef Akkilles og skjaldbaka tækju þátt í kapphlaupi og skjaldbakan fengi ákveðið forskot þá myndi skjaldbakan alltaf sigra. Hlaupahraði Akkillesar og hversu mikið forskot skjaldbakan fengi skipti ekki máli. Þótt Akkilles hlaupi hraðar en skjaldbakan og nálgist hana þá nær hann henni aldrei. Rök Zenons voru þessi.

Þegar Akkilles kemst þangað sem skjaldbakan byrjaði þá hefur skjaldbakan flutt sig áfram að nýjum áfangastað. Þegar Akkilles kemst þangað hefur skjaldbakan enn flutt sig um set. Og þannig heldur þetta áfram og Akkilles mun aldrei ná skjaldbökunni því hún mun alltaf hafa örlítið forskot.

Fullyrðing Zenons er að sjálfsögðu ekki rétt en hvernig má hrekja hana?

Gerum ráð fyrir að skjaldbakan hafi 10 m forskot og að hraði hennar sé $\frac{1}{10}$ af hraða Akkillesar. Þegar Akkilles hefur hlaupið 10 m er skjaldbakan komin á nýjan stað sem er aðeins framar.

- *Hve langt frá upphafsstað skjaldbökunnar er þessi áfangastaður?*
- *Hvert verður skjaldbakan komin þegar Akkilles nær þessum áfangastað?*

Þú getur lesið meira um Zenon og þversagnir hans í bókum um sögu stærðfræðinnar og á Netinu.

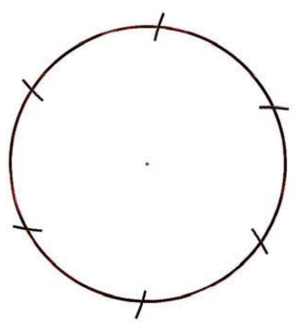
Rými

Í umhverfi okkar er mikill aragrúi af formum bæði reglulegum og óreglulegum, tvívíðum og þrívíðum. Regluleg form er víða að finna í mynstrum og byggingum sem menn hafa hannað. Í náttúrunni má einnig greina regluleika sem komið getur á óvart. Þó regluleiki ráði oft ríkjum í verkum hönnuðum af mönnum þá reyna hönnuðir oft að brjóta regluna með einhverju sem kemur á óvart, bæði til að skapa sérkenni og til að beina athygli að einhverju sérstöku.

Markmið með þessum kafla eru að þú:

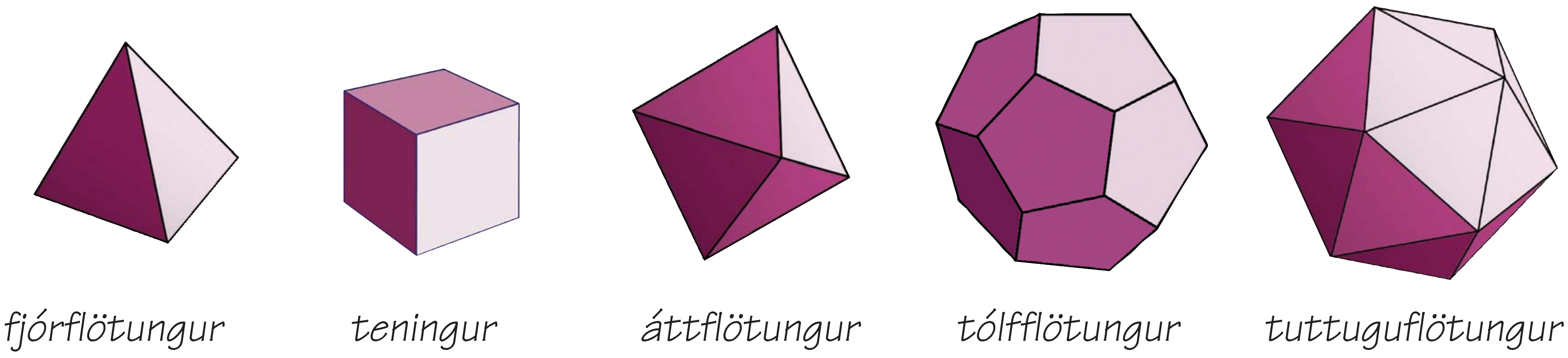
- *Þekkir einkenni tvívíðra og þrívíðra forma.*
- *Kynnist ýmsum gerðum margflötunga og einkennum þeirra.*
- *Kynnist reglu Eulers um samband milli fjölda brúna, horna og flata í reglulegum margflötungum.*
- *Getir fundið rúmmál og yfirborðsflatarmál réttra strendinga.*
- *Áttir þig á hvernig ná má fram þrívíddaráhrifum í teikningum.*

1 Þú hefur kynnst ýmiss konar marghyrningum, bæði reglulegum og óreglulegum. Hvað einkennir reglulegan marghyrning? Teiknaðu reglulegan þríhyrning, ferhyrning og sexhyrning. Notaðu hringfara, reglustiku eða önnur teiknitæki svo myndirnar verði sem nákvæmastar.



2 Ferhyrningar geta búið yfir margs konar regluleika þó þeir séu ekki allir reglulegir ferhyrningar. Teiknaðu 6–8 mismunandi ferhyrninga, bæði óreglulega ferhyrninga og ferhyrninga sem búa yfir einhvers konar regluleika. Greindu frá því hvort og þá hvaða regluleika má greina í hverjum þeirra. Má greina reglu í hliðarlengdum, hornastærðum, o.s.frv.? Hafa þeir samhverfuás?

Til eru fimm gerðir reglulegra margflötunga. Þeir eru:



3 a Úr hvaða formum eru reglulegir margflötungar búnir til?

b Hvers vegna telur þú að þeir séu kallaðir reglulegir margflötungar?

Stærðfræðingurinn Leonard Euler (1707–1783) setti fram reglu sem á við um alla reglulega margflötunga. Reglan segir að ef fjöldi brúna er dreginn frá fjölda horna og fjölda flata er síðan bætt við þá verði útkoman tveir. Regluna má skrá sem

$$H - B + F = 2$$

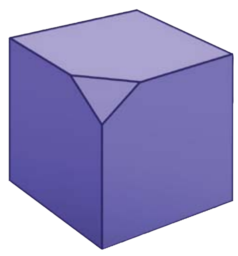
H táknar fjölda horna, B táknar fjölda brúna, F táknar fjölda flata.

4 a Teldu fjölda brúna, flata og horna á margflötungunum fimm. Skráðu niðurstöður þínar í töflu og sannreyndu að regla Eulers sé rétt.

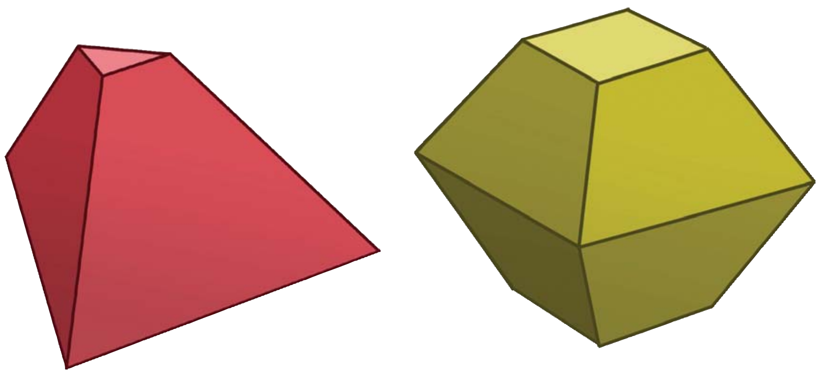
b Skoðaðu fjórflötunginn. Hvert er sambandið á milli fjölda hliða á þríhyrningunum fjórum og fjölda brúna?

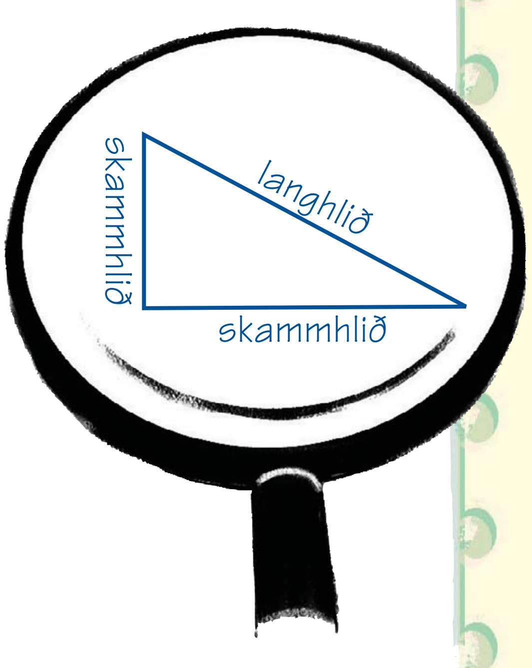
c Skoðaðu hina reglulegu margflötungana. Er samband á milli fjölda hliða á marghyrningunum sem mynda þá og fjölda brúna á margflötungunum?

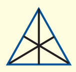
5 Skoðaðu hvort regla Eulers eigi við um aðra margflötunga. Hér hefur eitt horn verið skorið af teningi. Kannaðu hvort regla Eulers gildir um þennan margflötung.



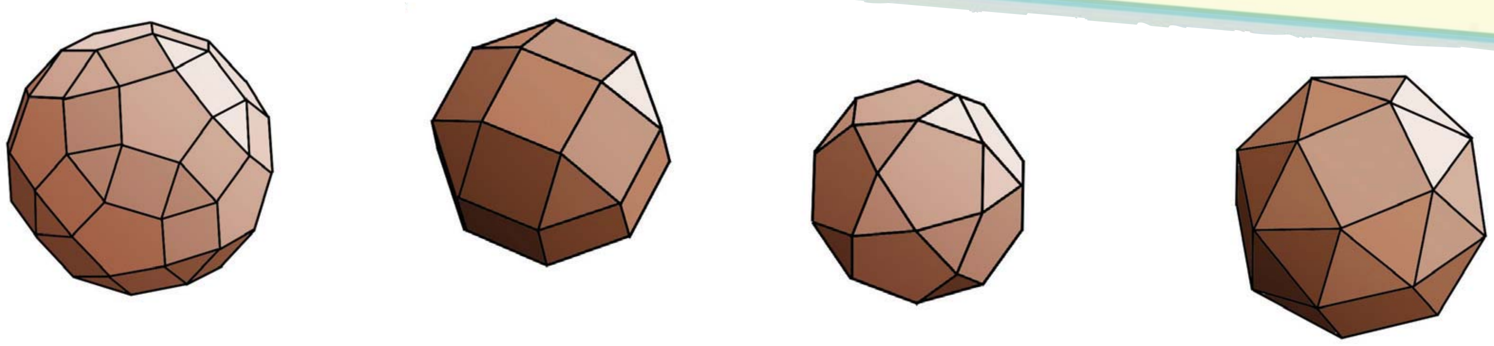
6 Skoðaðu þessi form og kannaðu hvort regla Eulers gildir.



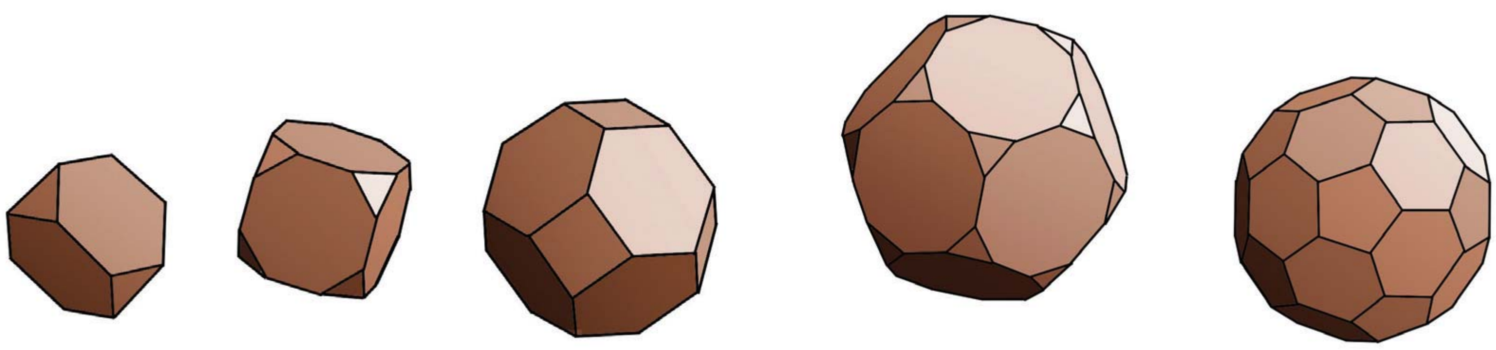


Reglulegu margflötungarnir fimm eru oft kenndir við Platón. Hann var mjög upptekinn af þríhyrningum og komst að því við nánari skoðun á hliðarflötum margflötunganna að hver hlið fjórflötungs væri samsett úr 6 rétthyrndum  þríhyrningum. Því má segja að fjórflötungur sé settur saman úr 24 rétthyrndum þríhyrningum.

Þessa rétthyrndu þríhyrninga taldi Platón þá fegurstu af öllum þríhyrningum en þeir einkennast af því að langhliðin er tvöfalt lengri en styttri skammhliðin. Á sama hátt leit Platón á áttflötunginn sem settan saman úr 48 slíkum þríhyrningum og tuttuguflötunginn úr 120.
Platón leit einnig þannig á að teningurinn væri settur saman úr tuttugu og fjórum jafnarma rétthyrndum þríhyrningum og hver hlið tólfflötungs úr 30 rétthyrndum þríhyrningum eða 360 alls. Skoðaðu hliðarfleti margflötunganna og kannaðu hvort þú getur skipt þeim upp í rétthyrnda þríhyrninga.



Arkímedes (287–212 f.Kr.) kannaði reglulega margflötunga nánar.
Hann komst að því að hægt er að búa til margs konar margflötunga sem eru einnig mjög reglulegir þó hliðarfletir þeirra séu ekki allir eins. Hann sýndi fram á að hægt er að búa til 13 margflötunga sem uppfylla þau skilyrði að hafa allar brúnir jafnlangar, öll hornin búin til úr sams konar hyrningum og alla fleti úr reglulegum marghyrningum, tveimur eða fleirum. Sjö þeirra eru myndaðir með því að skera sams konar form af hverju horni reglulegu margflötunganna fimm.



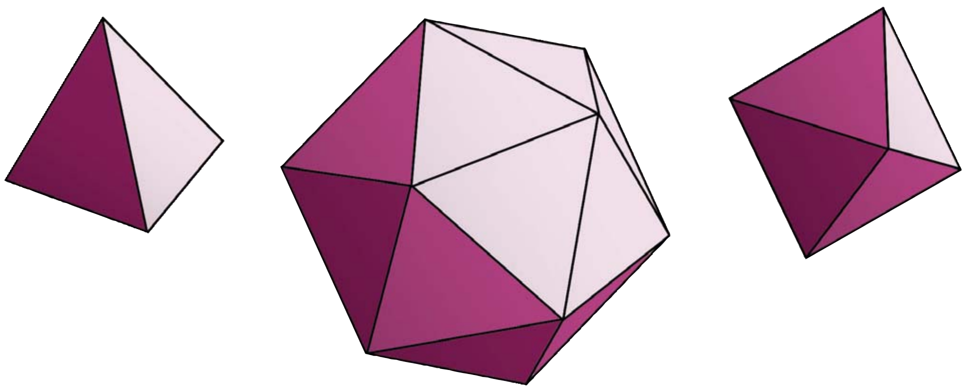
7 a Þessir margflötungar hafa verið búnir til með því að skera sams konar form af hverju horni hinna fimm reglulegu margflötunga. Eru þeir reglulegir? Eru allar hliðar jafnlangar? Athugaðu líka hornin.

b Veldu tvo af þessum margflötungum og kannaðu hvort regla Eulers gildir um þá.

HÓPVERKEFNI

8 Skoðið teninginn og áttflötunginn og reynið að átta ykkur á hvernig skera má horn af þeim og fá út aðra margflötunga sem uppfylla þau skilyrði sem Arkímedes setti. Búið flötunginn til úr leir og prófið að skera hornin af honum. Einnig má búa flötunginn til úr pappír og teikna inn á hann hvar á að skera. Síðan má fletja hann út og reyna að búa til snið fyrir nýja margflötunginn.

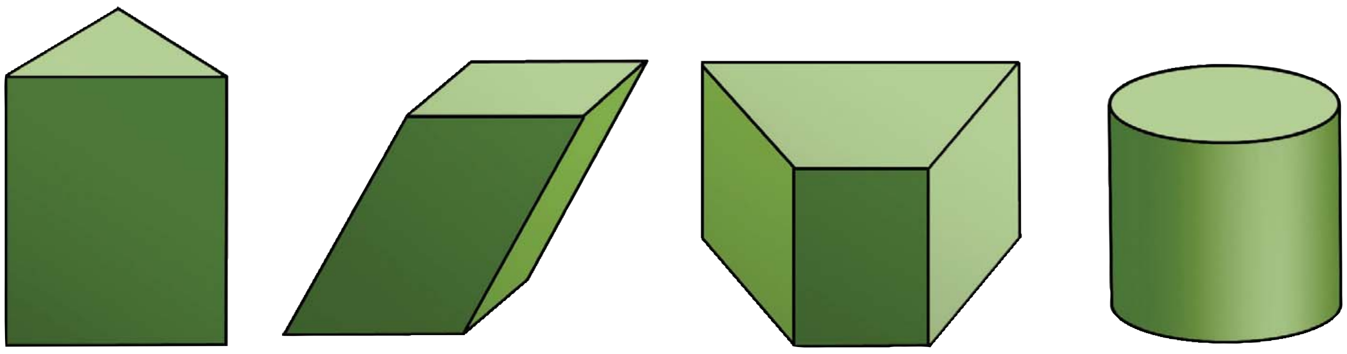
9 Þrír af platónsku margflötungunum eru gerðir úr jafnhliða þríhyrningum.



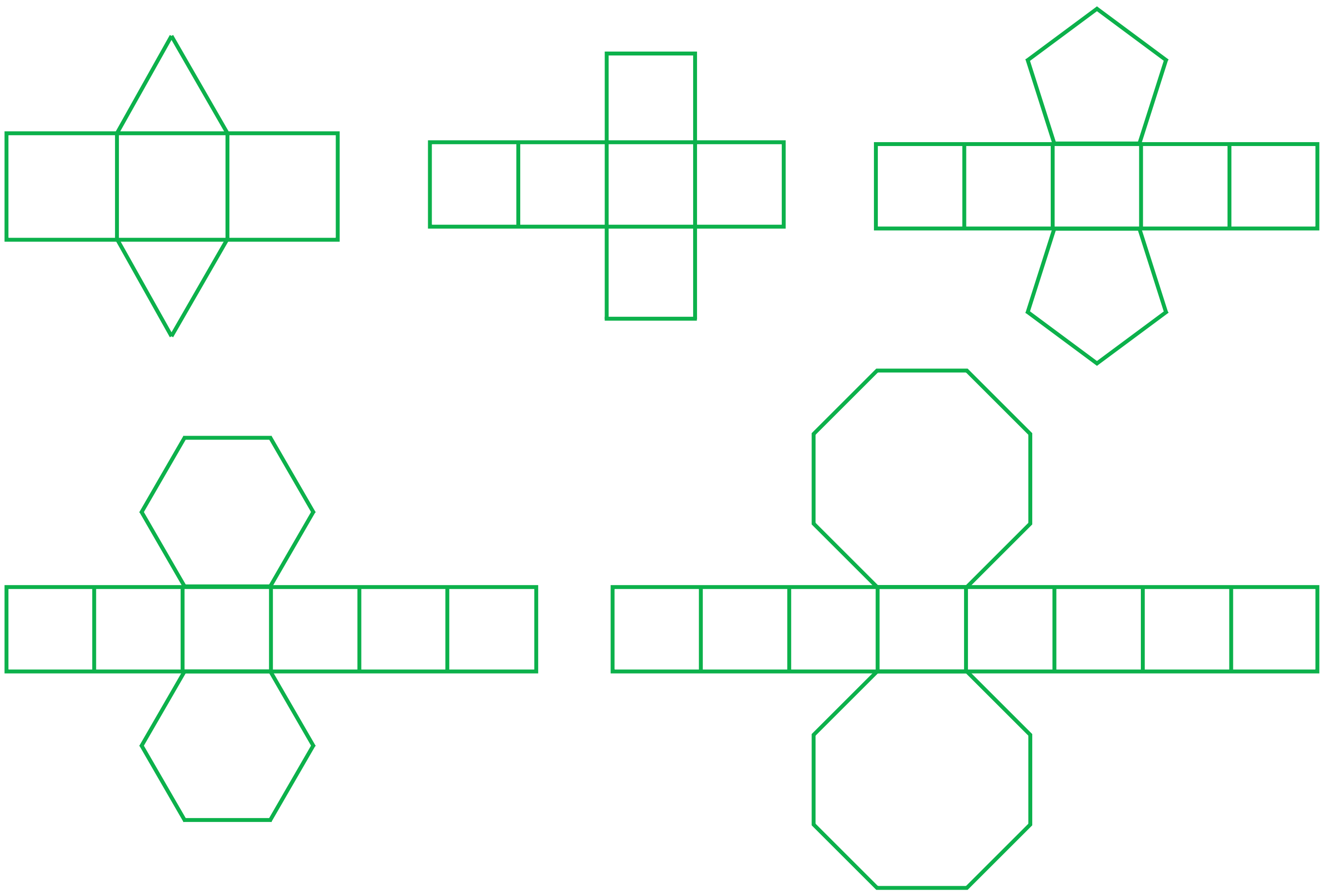
Búa má til fleiri margflötunga úr jafnhliða þríhyrningum eingöngu. Alls er hægt að búa til átta úthyrnda margflötunga úr jafnhliða þríhyrningum. Reynið að búa til hina fimm.
Þið getið notað pappaform, plasthyrninga, rör eða annan efnivið.

10 Notið fjóra jafnhliða þríhyrninga og fimm ferninga með sömu hliðarlengd. Búið til mismunandi lokaða hluti úr þessum hyrningum. Þið þurfið ekki að nota þá alla í hvern hlut. Lýsið hlutunum og rissið upp snið af þeim.

11 Á myndinni sérðu nokkur þrívíð form. Þessi form eru kölluð strendingar. Hvað einkennir þessi form?



12 a Sniðin sýna strendinga sem kallaðir eru réttir strendingar. Hverjir af strendingunum á myndinni hér fyrir ofan telur þú að séu réttir strendingar? Hvað einkennir rétta strendinga?

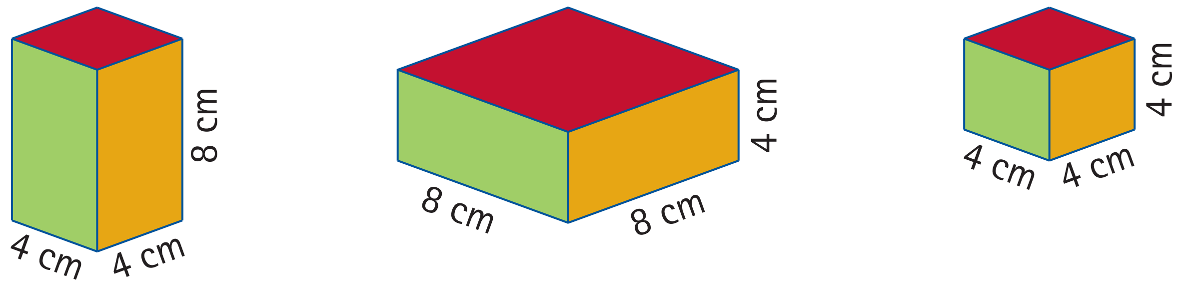


b Rissaðu upp teikningu af formunum eins og þú telur að þau muni líta út í þrívídd.

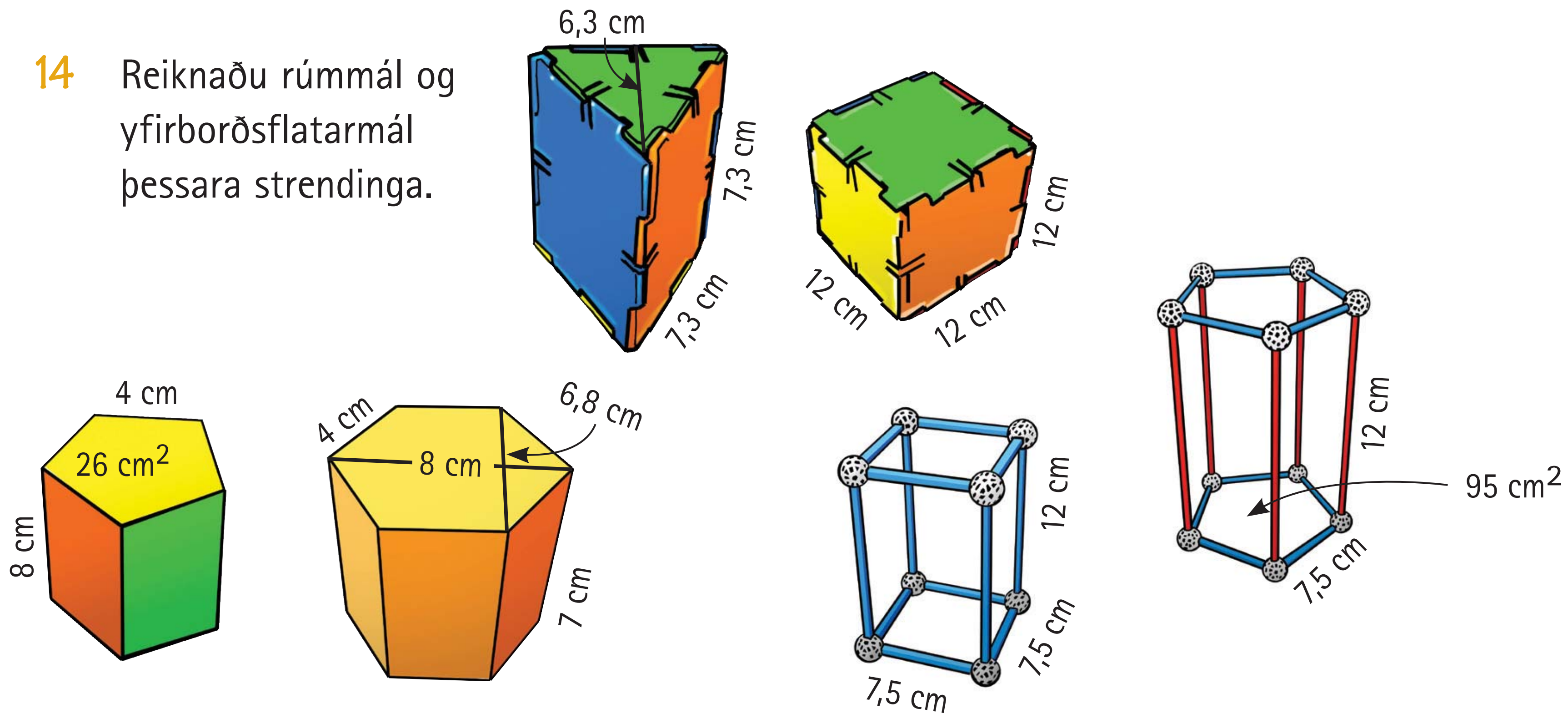
c Lýstu hvernig þú færir að því að reikna rúmmál þessara strendinga.

d Sniðin sýna öll þau form sem mynda yfirborð strendinganna. Hvernig gætir þú reiknað út yfirborðsflatarmál þeirra?

13 Reiknaðu rúmmál og yfirborðsflatarmál þessara strendinga.



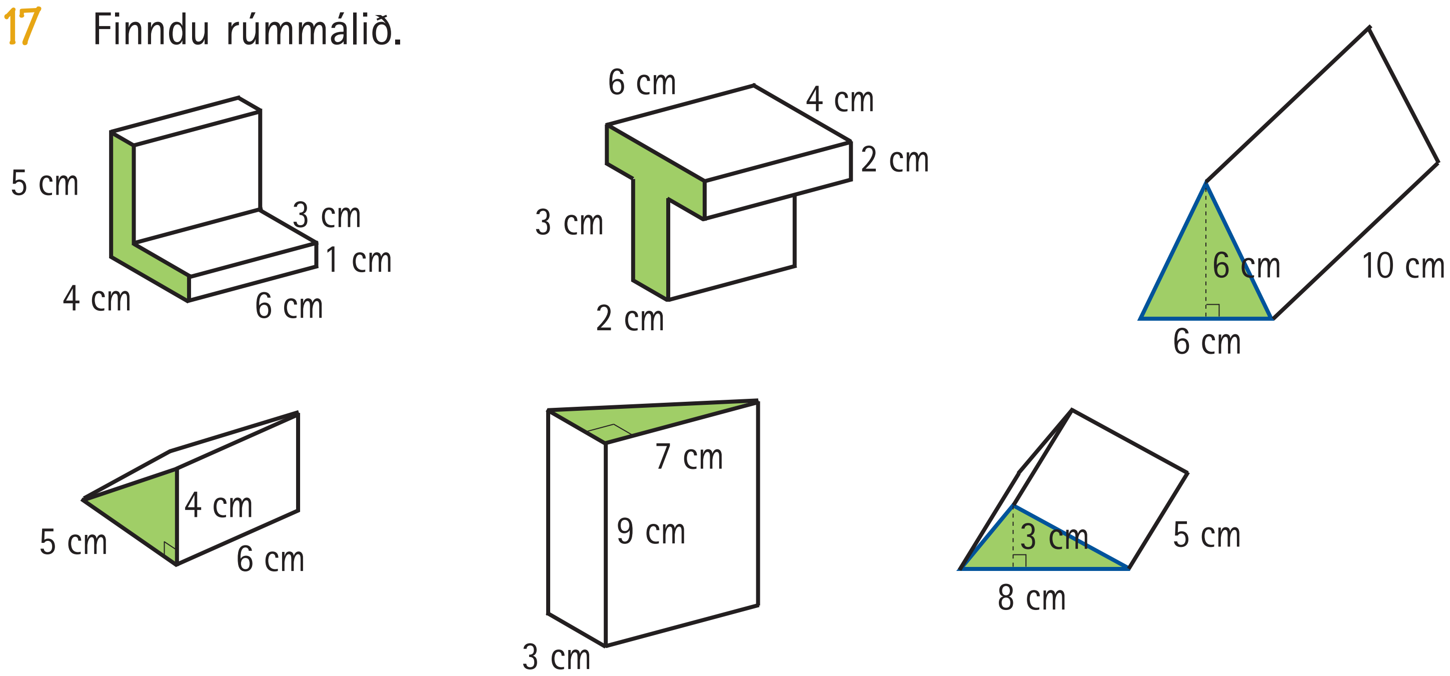
14 Reiknaðu rúmmál og yfirborðsflatarmál þessara strendinga.

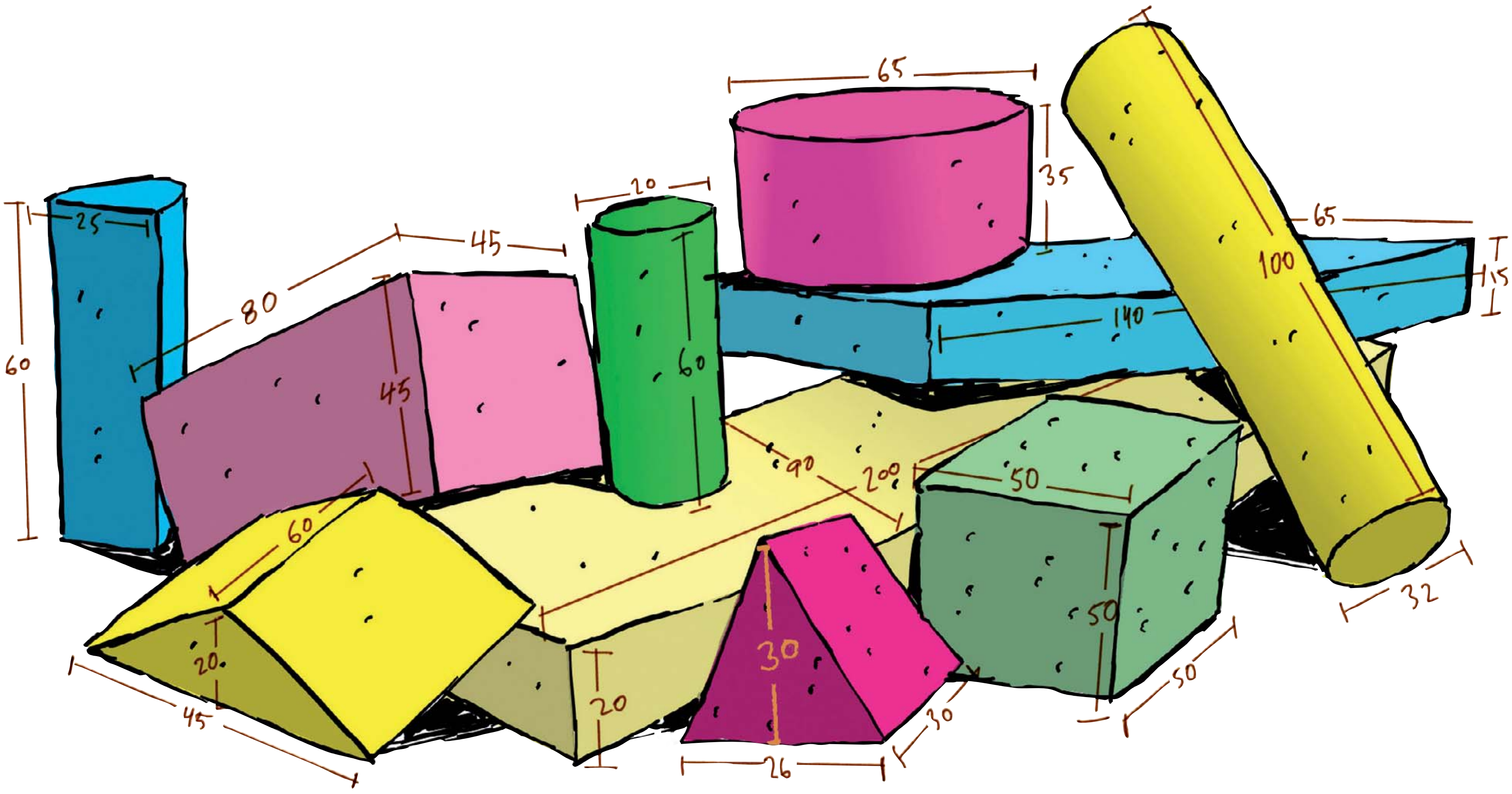


15 Búðu til eða finndu nokkra rétta strendinga í umhverfinu. Finndu rúmmál og yfirborðsflatarmál þeirra.

16 Kassi er búinn til úr vatnsheldum krossvið sem er 1 cm á þykkt. Utanmál kassans eru: hæð 50 cm, lengd 60 cm, breidd 40 cm. Hve margir rúmsentímetrar rúmast ofan í kassanum?

17 Finndu rúmmálið.





18 Fyrirtækið *Mjúkir botnar* selur pullur, púða, dýnur og hnalla úr svampi.

Rúmmál sívalnings er flatarmál grunnflatar · hæð.

a Finndu hvert er rúmmál svampsins sem fer í hvern hlut.

b Hve mikið áklæði þarf utan um hvern hlut? Gerðu ráð fyrir að um það bil 5% þurfi til viðbótar í saumför og samskeyti.

19 Verð hvers fermetra af 1 cm þykkum svampi er 1780 kr. og skurðgjald fyrir sívalningana er 550 krónur.

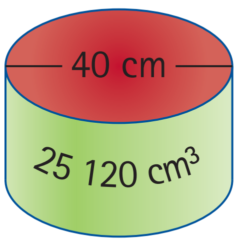
$1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$
$1\ m^3 = 1\ 000\ 000\ cm^3$

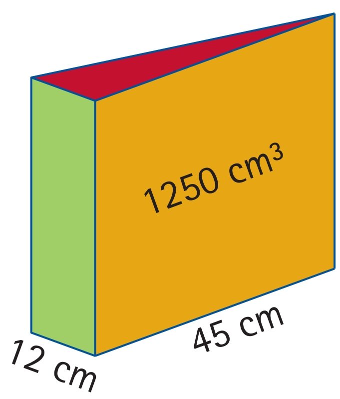
Hægt er að velja um þrjár gerðir af áklæði.

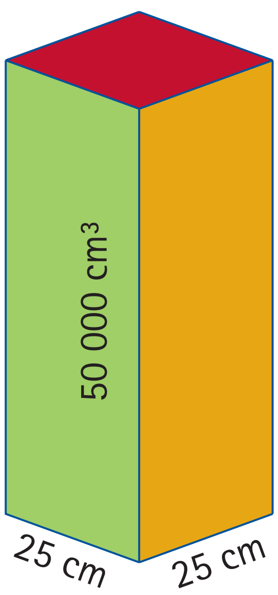
Bómull 2450 kr./m^2
Flauel 3780 kr./m^2
Ull 4590 kr./m^2

Veldu þér áklæði og finndu verð hlutanna.

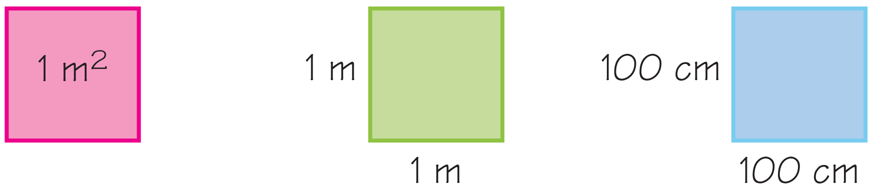
20 Finndu hæð þessara strendinga.







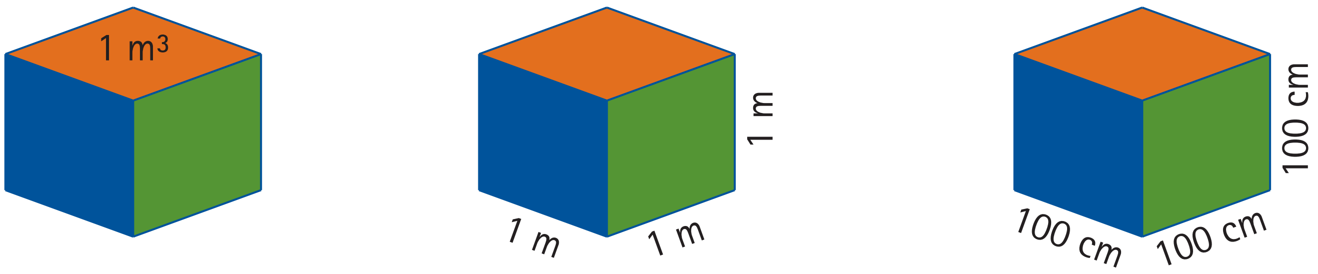
21 a Hve margir fersentímetrar eru í einum fermetra?



22 Finndu flatarmál þessara flata og skráðu í fermetrum.

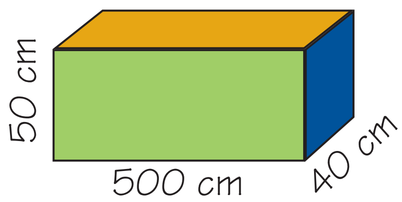
a 50 cm · 200 cm   b 45 cm · 300 cm   c 60 cm · 180 cm

23 Hve margir rúmsentímetrar eru í einum rúmmetra?

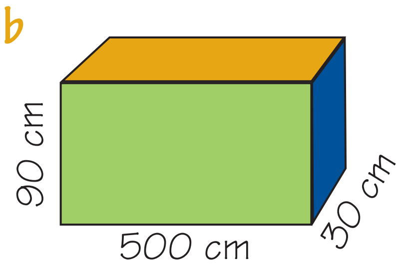


24 Finndu rúmmál þessara kassa í rúmmetrum.

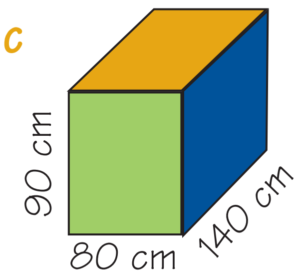
a



b



c



25 Hvers vegna er flatarmál skráð með m^2 (metrum í öðru veldi) en rúmmál með m^3 (metrum í þriðja veldi)?

26 Finndu flatarmál og skráðu niðurstöður þínar í fersentímetrum og fermetrum.

a A4 blaðs   b Borðplötu   c Hurðar   d Gluggarúðu

27 Hve margir fermetrar eru:

a $24\,000\ cm^2$ b $129\,500\ cm^2$ c $5600\ cm^2$ d $555\ cm^2$

28 Finndu rúmmál og skráðu niðurstöður þínar í rúmsentímetrum og rúmmetrum.

a Rýmis undir skólaborði

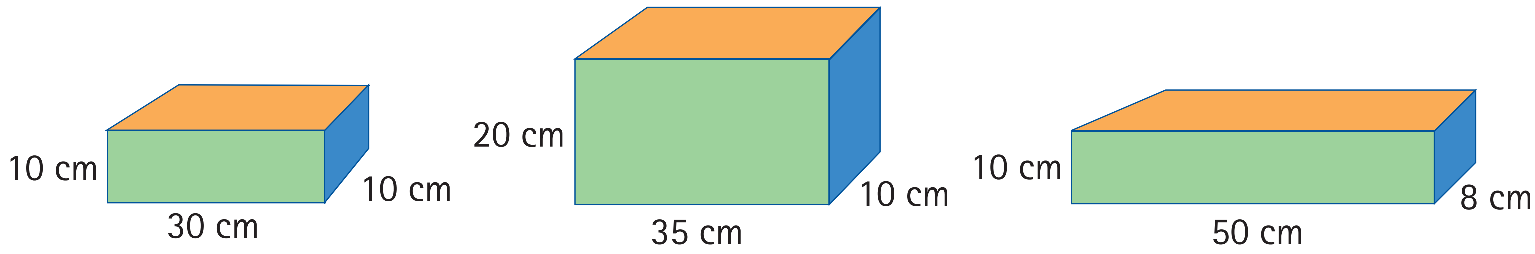
b Skólastofu

c Skáps, hillu eða einhvers annars hlutar í umhverfi þínu

29 Hve margir rúmsentímetrar eru:

a $10\ m^3$ b $1{,}24\ m^3$ c $55{,}5\ m^3$ d $0{,}002782\ m^3$

30 Þessir kassar taka 7 l, 4 l og 3 l. Finndu rúmmál kassanna í rúmsentímetrum.

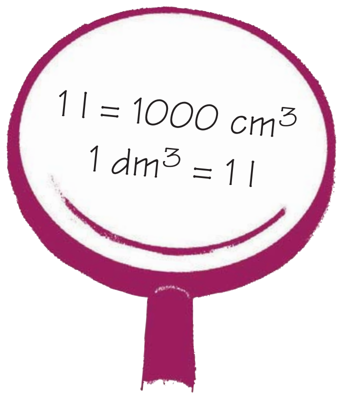


31 Hve margir rúmsentímetrar jafngilda einum lítra?

32 a Hve margir desímetrar eru í einum metra?

b Reiknaðu rúmmál kassanna í dæmi 30 í rúmdesímetrum.

c Hve margir rúmdesímetrar jafngilda einum lítra? En rúmmetrar?



33 Finndu hve margir rúmsentímetrar jafngilda:

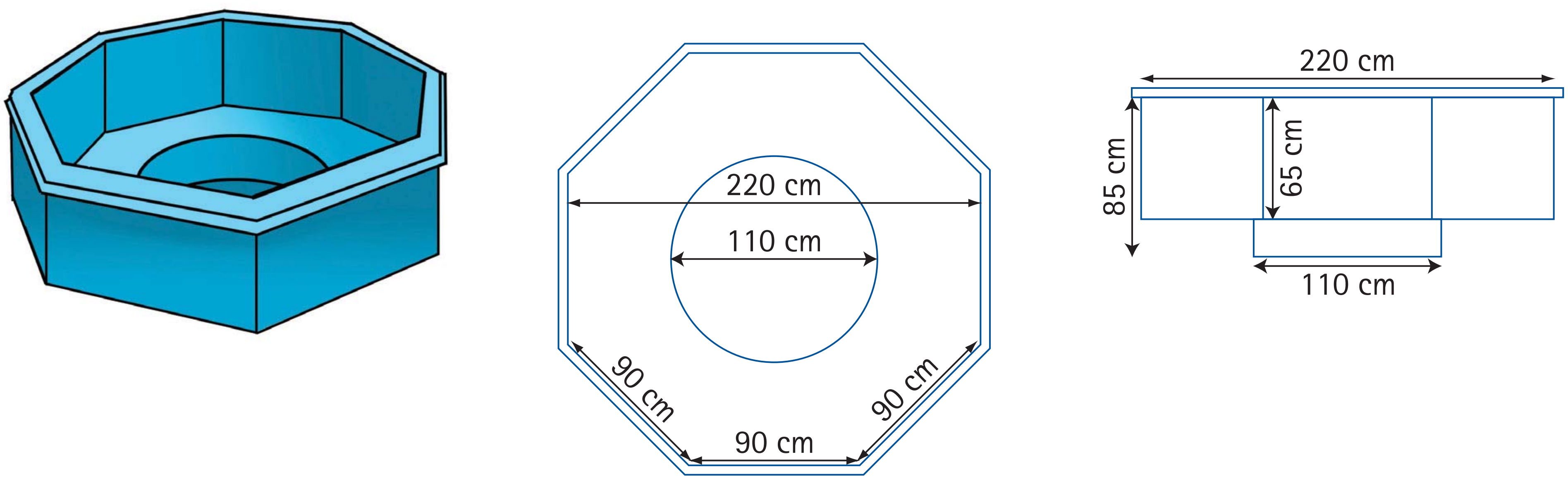
a 1 dl   b 1 cl   c 1 ml

34 Finndu hve margir rúmdesímetrar jafngilda:

a 1 dl   b 1 cl   c 1 ml

35 Hve marga rúmsentímetra taka þessi ílát?

36 Áætlaðu hve marga lítra af vatni potturinn tekur út frá þeim upplýsingum sem fram koma á teikningunum.



37 Stærð bakpoka er oft lýst með því að tiltaka hve marga lítra þeir geta rúmað.
Áætlaðu hæð, dýpt og breidd bakpoka sem taka 25 l, 55 l og 70 l.

38 Stærð farangursrýmis bifreiða er oft lýst í lítrum eða rúmmetrum.

a Áætlaðu hæð, lengd og breidd farangursrýmis í fólksbíl sem tekur um það bil 695 l. En ef það rúmar 0,520 m^3?

b Áætlaðu hæð, lengd og breidd farangursrýmis í skutbíl sem rúmar 1540 l þegar búið er að leggja aftursætið niður. En ef það tekur 970 l?

39 Í flutningum er stærð sendinga oft mæld í rúmmetrum.

a Áætlaðu hve marga rúmmetra húsgögn og munir í herberginu þínu myndu taka í flutningi.

b Hve margir rúmmetrar telur þú að búslóð fjögurra manna fjölskyldu sem búsett hefur verið erlendis í átta ár gæti verið? Reiknaðu rúmmál nokkurra algengra húsgagna og heimilistækja og settu fram rökstudda áætlun.

Á heimasíðum flutningafyrirtækja eru upplýsingar um búslóðaflutninga og reiknivélar sem aðstoða fólk við að reikna rúmmál búslóða.

40 Hér er listi yfir áætlað rúmmál nokkurra algengra húsgagna og heimilistækja.

Þriggja sæta sófi	1,7 m^3
Sjónvarp	0,3 m^3
Einbreitt rúm	1,05 m^3
Kommóða	0,4 m^3
Ísskápur	1,14 m^3
Reiðhjól	0,35 m^3

a Hver gæti lengd, breidd og hæð þessara hluta verið?

b Eru þessar tölur um áætlað rúmmál húsgagnanna raunhæfar að þínu mati?
Rökstyddu svar þitt.

41 Algengar stærðir á gámum sem notaðir eru til að flytja vörur á milli landa eru 33 m^3 og 67 m^3.

a Hæð 33 m^3 gáms er 239 cm og breidd 235 cm. Hver er lengd hans?

b En lengd 67 m^3 gáms ef hæð og breidd er sú sama og í a-lið?

Páll er að fara í heimsókn til Bandaríkjanna og ætlar að dvelja í sex vikur á heimili vinafólks. Hann fær bréf frá Jimmy sem er jafnaldri hans. Í bréfinu stendur meðal annars:

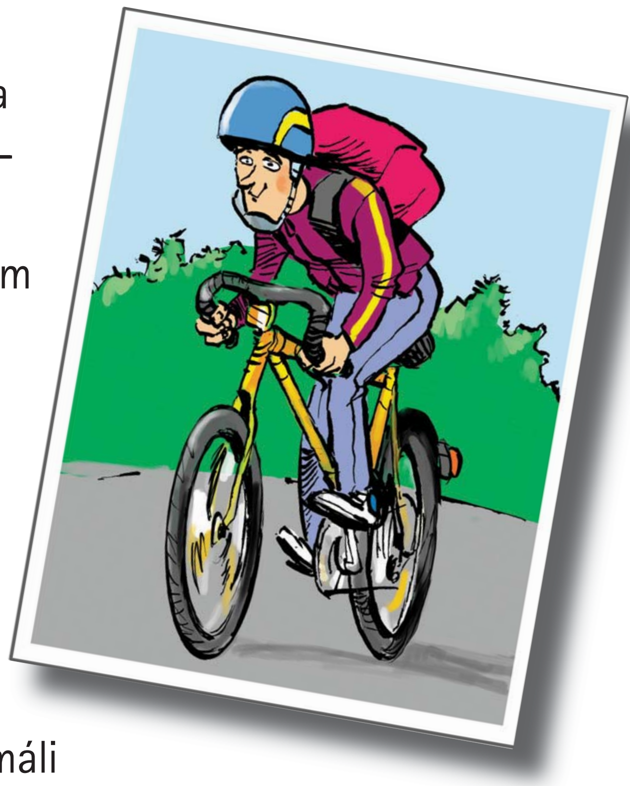
Ég heiti Jimmy. Ég ætla að segja þér örlítið frá sjálfum mér og aðstæðum okkar hér. Ég er 14 ára gamall og er 5 ft 5 in á hæð og 135 lb á þyngd. Ég hef mikinn áhuga á íþróttum og stunda bæði körfubolta og hjólreiðar. Ég hjóla í skólann á hverjum degi og eru það um 5 mílur hvor leið. Ég reyni að fara í langan hjólatúr á hverjum degi eftir skóla. Ef ég er búinn snemma fer ég stóran hring sem er 12 og hálf míla. Ef ég hef lítinn tíma bæti ég við heimleiðina litlum hring sem er 3 mílur.

Á sumrin getur orðið mjög heitt hérna. Hitinn getur farið upp í um 105 °F á heitum sumardögum og þá þarf maður að gæta þess að drekka nóg af vatni, sérstaklega ef maður stundar mikla líkamsrækt. Ég er alltaf með tvær 25 fl oz flöskur af vatni á hjólinu mínu og reyni að drekka ekki minna en um það bil $\frac{3}{4}$ *gallon af vökva á dag á heitum dögum þegar ég æfi mikið.*

Við erum fjögur í fjölskyldunni, eins og þú veist, mamma, tvær systur og ég. Við búum í húsi sem er um það bil 2000 ft^2*. Við erum með ágætt gestaherbergi sem líka er notað sem æfingaherbergi. Það er um 300* ft^2*. Systur mínar og mamma nota þrekhjól og tæki sem þar eru af og til en við getum örugglega komið því þannig við að ekki verði árekstrar. Þú sem gestur færð umráðarétt yfir herberginu.*

Það er ágæt sundlaug skammt frá heimili okkar og þar er meðal annars dýfingalaug. Hún er 12 yds á dýpt, 25 yds á lengd og 15 yds á breidd. Þú getur æft sund í æfingalauginni en hún er 55 yds á lengd, 20 yds á breidd og 4 yds á dýpt. Það eru líka nokkrir skemmtilegir nuddpottar við laugina. Einn þeirra er lítill og notalegur og tekur um 600 gallon af vatni en svo er líka stór nuddpottur sem tekur 1500 gallon af vatni. Við ættum að geta stytt okkur stundir í lauginni ef það verður mjög heitt en annars eru margir skemmtilegir útivistarmöguleikar hér í nágrenninu. Það eru góðar hjóla- og gönguleiðir hér og svo er að sjálfsögðu hægt að gera ýmislegt sér til skemmtunar á kvöldin en mér hefur skilist að þú hafir einna mestan áhuga á íþróttum og útivist.

42 Páll á erfitt með að túlka ýmsar þær upplýsingar sem fram koma í bréfinu. Það stafar af því að Bandaríkjamenn nota annað mælikerfi en metrakerfið sem notað er víðast hvar annars staðar í heiminum. Notaðu töfluna og hjálpaðu Páli að breyta mikilvægum upplýsingum í bréfinu yfir í metrakerfið.



a Hver er hæð og þyngd Jimmy?

b Hve marga kílómetra hjólar Jimmy á dag ef hann hjólar stóra hringinn eftir skóla?

c Hve marga lítra drekkur Jimmy ef hann drekkur $\frac{3}{4}$ gallon af vökva á dag?

d Hversu stórt er gestaherbergið og hve stór hluti af heildarflatarmáli hússins er það?

e Hve djúp er dýfingalaugin?

f Hve marga lítra af vatni tekur stóri nuddpotturinn?

g Finndu fleiri mikilvægar upplýsingar í bréfinu og breyttu þeim yfir í mælieiningar sem þú þekkir.

43 Skrifaðu bréf til Jimmy með upplýsingum um Pál og aðstæður hans. Notaðu bandarískar mælieiningar í bréfinu.

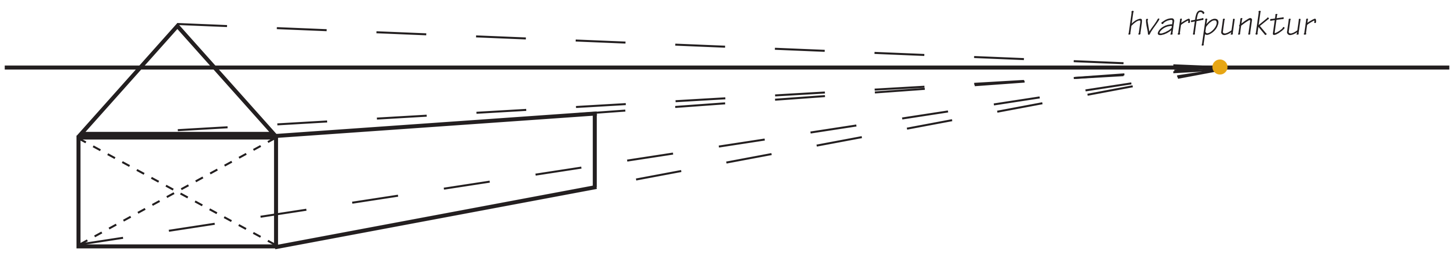
	Bandarískar mælieiningar	Metrakerfi
Lengd	1 mi (míla) = 1760 yds (yards)	≈ 1,61 km
	1 yd = 3 ft (fet)	≈ 0,914 m
	1 ft = 12 in (þumlungar)	≈ 0,305 m
Rúmmál (vökvi)	1 gal (gallon) = 4 qt = 128 fl.oz	≈ 3,785 lítrar
	1 qt (fjórðungur) = 2 pt = 32 fl. oz	≈ 946 ml
	1 pt (pint) = 2 cups	≈ 437 ml
	1 cup (bolli)	≈ 236 ml
	1 fl.oz. (fluid ounce) = 1/128 gal	≈ 30 ml
Flatarmál	1 yd^2 = 9 ft^2	≈ 0,84 m^2
	1 ft^2 = 144 in^2	≈ 0,09 m^2
	1 in^2	≈ 6,45cm^2
Rúmmál	1 yd^3 = 27 ft^3	≈ 0,76 m^3
	1 ft^3 = 1738 in^3	≈ 0,03 m^3
	1 in^3	≈ 16,39 cm^3
Þyngd	1 tonn	≈ 907,2 kg
	1 lb (pund)	≈ 0,45 kg

Til eru ýmsar leiðir til að ná fram þrívíddaráhrifum í teikningum. Þú hefur meðal annars kynnst því hvernig nota má þríhyrningapunktanet og rúðunet.

44 Byrjaðu á því að teikna lárétta línu sem sjóndeildarhring og markaðu hvarfpunktinn á hana.

Teiknaðu gafl á húsi vinstra megin á myndflötinn. Gott er að byrja með einfalda mynd eins og þá sem hér er.

Dragðu beinar línur frá hornpunktum gaflsins yfir í hvarfpunktinn. Ákvarðaðu lengd hússins og teiknaðu hæð þess. Hæðin á að vera samsíða lóðréttu hliðinni á gaflinum.

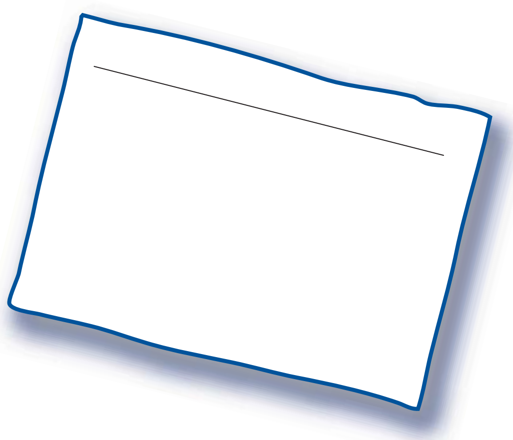


45 Teiknaðu fjarvíddarteikningu af fjölbýlishúsi þar sem mjórri hliðin snýr fram.

Teiknaðu fjarvíddarteikningu af eldspýtustokki sem stendur upp á rönd og mjórri hliðin snýr fram.

46 Teiknaðu sjóndeildarhring efst á A4 blað.

- Markaðu hvarfpunktinn $\frac{1}{4}$ inni á sjóndeildarhringnum.
- Teiknaðu 7 cm breiðan veg neðst á blaðið fyrir miðju og láttu hann stefna á hvarfpunktinn.
- Teiknaðu 8 cm háan ljósastaur við vegkantinn fremst á blaðinu.
- Teiknaðu næsta ljósastaur og hafðu hann 6,5 cm háan. Hvar staðsetur þú hann?
- Teiknaðu fleiri ljósastaura með sama millibili meðfram veginum.
- Teiknaðu gangstétt sem er um það bil 2 cm breið meðfram veginum.

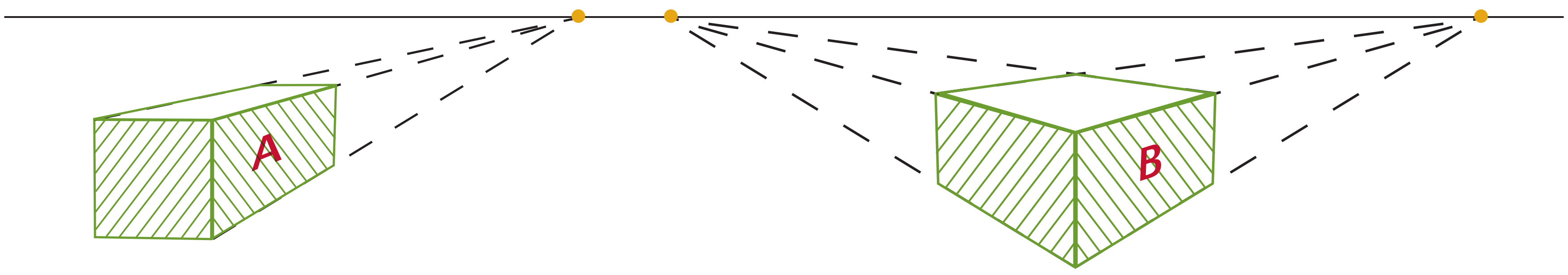


Hvað þarf að hafa í huga þegar staðsetja á nokkra hluti á fjarvíddarteikningu sem hafa sömu fjarlægð hver frá öðrum í raun og veru?

47 Teiknaðu fjarvíddarteikningu af einföldu húsi. Notaðu A4 blað og prófaðu að staðsetja sjóndeildarhringinn og hvarfpunktinn á mismunandi stöðum. Hvaða áhrif hefur það að breyta sjóndeildarhring eða hvarfpunkti?

48 Einnig má nota tvo hvarfpunkta og gefur það annars konar fjarvíddaráhrif.

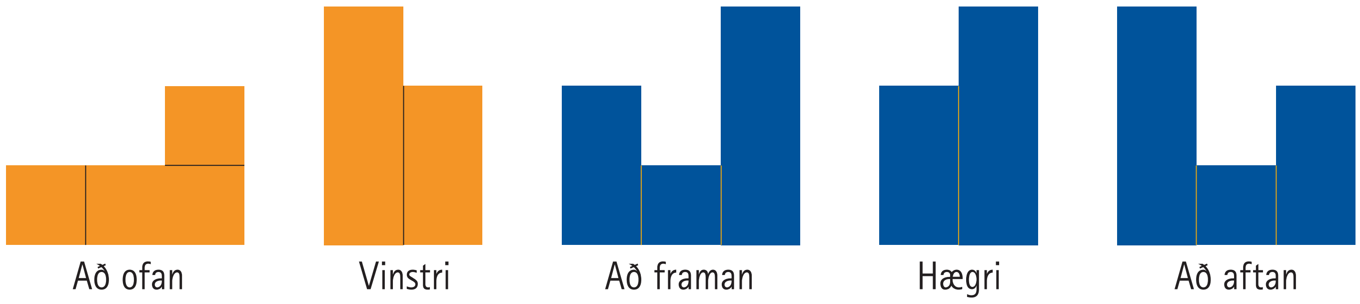
Skoðaðu myndirnar hér fyrir neðan. Önnur er teiknuð út frá einum hvarfpunkti en hin frá tveimur. Berðu myndirnar saman. Hvor myndin finnst þér ná fjarvíddaráhrifum betur?



49 Teiknaðu hús B aftur út frá tveimur hvarfpunktum en færðu það nær sjóndeildarhringnum. Færðu sömu fjarvíddaráhrif?

50
- Teiknaðu sjóndeildarhring efst á A4 blað og markaðu tvo hvarfpunkta inn á sjóndeildarhringinn, annan lengst til hægri og hinn lengst til vinstri.
- Teiknaðu 5 cm langa lóðrétta línu fyrir miðju á A4 blaði um það bil 2 cm fyrir ofan neðri brún blaðsins. Línan myndar horn á raðhúsalengjum sem mætast á götuhorni.
- Teiknaðu götumynd sem sýnir samfellda húsalengju meðfram götunum.
- Teiknaðu líka gangstéttir, garða, grindverk, ljósastaura, fánastengur og annað sem þér dettur í hug.

51 Byggingar geta virst mjög ólíkar frá mismunandi sjónarhornum. Hér er bygging séð frá fimm mismunandi sjónarhornum. Er hægt að búa þessa byggingu til úr sjö sams konar teningum?

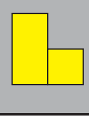
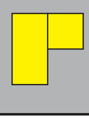
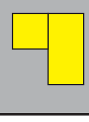
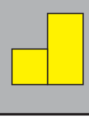


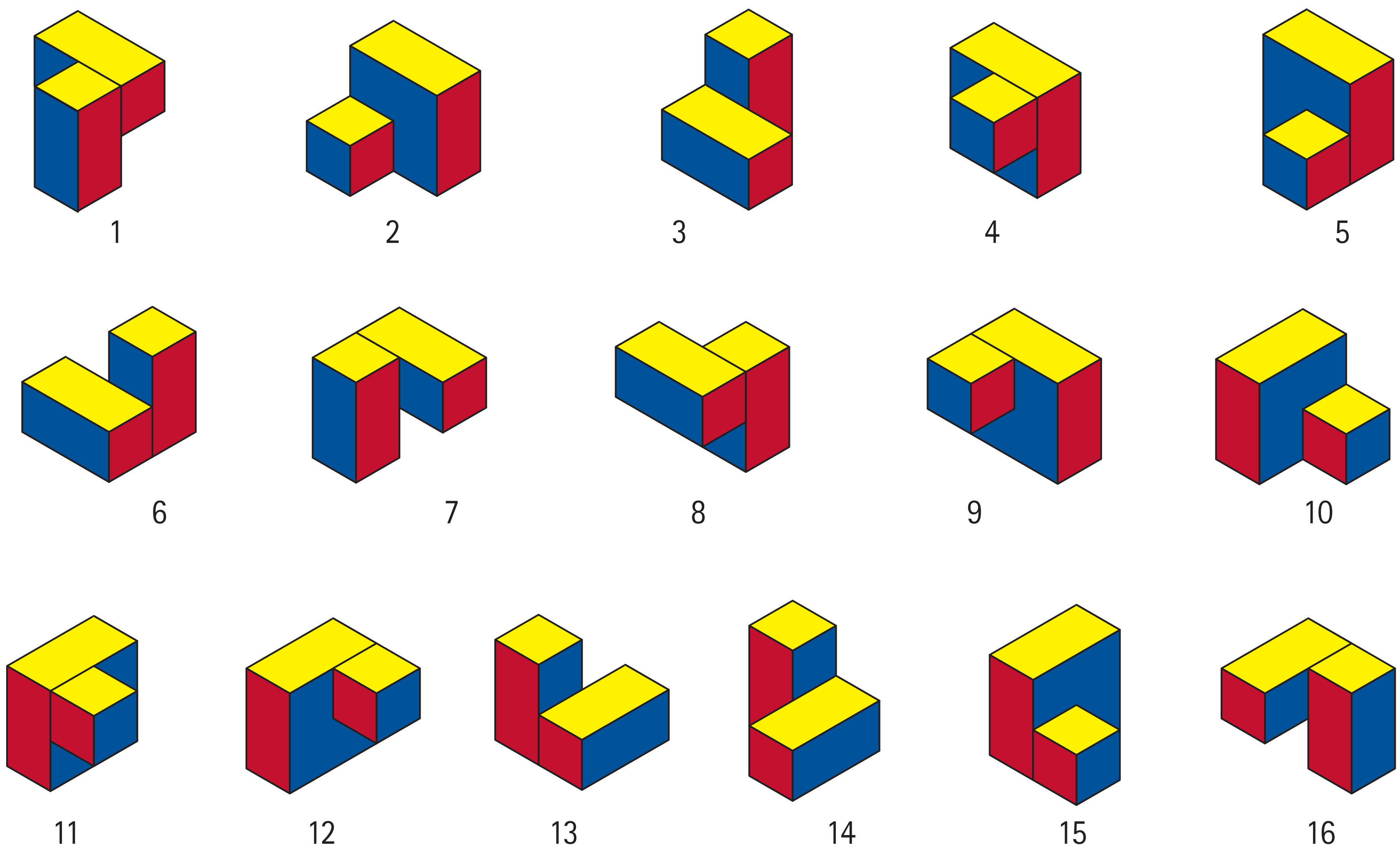
52 Hér eru myndir af nokkrum byggingum. Sé teiknuð loftmynd af þeim má greina sama formið sem snýr á fjóra mismunandi vegu. Sama á við ef horft er beint framan á þær.

- Byggðu byggingarnar úr sentíkubbum.
- Sumar byggingarnar eru gerðar úr jafnmörgum kubbum. Berðu þær saman og skoðaðu hvað þær eiga sameiginlegt og hvað er ólíkt með þeim.
- Búðu til svona töflu og skráðu hjá þér hvaða bygging fer í hvern reit.

Að ofan

Að framan

				
	A	E	I	M
	B	F	J	N
	C	G	K	O
	D	H	L	P



Algebra

Algebra er einn af meginþáttum stærðfræðinnar. Í þessum kafla er beiting táknmáls og vinna með stæður meginviðfangsefnið.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Styrkir tök þín á táknmáli stærðfræðinnar.*
- *Getir notað stæður til að skrá samband stærða.*
- *Kynnist formlegum reglum um forgangsröð aðgerða.*
- *Náir nokkru valdi á að einfalda stæður með því að draga saman líka liði, þátta og margfalda inni í sviga.*
- *Getir nýtt þér stæður og jöfnur til að leysa gátur og ýmis viðfangsefni úr daglegu lífi.*

1 Skoðaðu T-formið sem hefur verið afmarkað á hundraðtalnatöfluna.

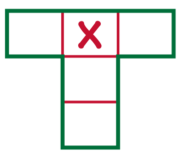
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a Hver er summa talnanna í T-forminu?

b Afmarkaðu T á tveimur öðrum stöðum á töflunni og finndu summuna.

c Hvert er samhengið á milli þeirra summa sem þú færð?

2 a Teiknaðu upp T-form og skráðu í rúðurnar stæðu fyrir hverja tölu.



b Skráðu eina stæðu fyrir summuna.

c Hvað segir stæðan um summu talna sem mynda T-form í hundraðtalnatöflu?

d Hvaða staðsetning T-forms myndi gefa summuna 200?

3 Kannaðu summur í formum sem eru í laginu eins og þau sem hér eru.

a Skráðu eina stæðu fyrir summu hvers forms fyrir sig.

b Finndu stæðu sem er margfeldi af fimm.

c Er einhver stæðan margfeldi af sex?

Í töfraferningi er summa talna í hverri röð, hverjum dálki og hvorri hornalínu alltaf sama talan.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4 Hver er summan í þessum töfraferningi?

5 a Reyndu að finna annan töfraferning þar sem notaðar eru tölurnar frá 1–9 og summan er 15.

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Berðu lausn þína saman við lausn félaga þinna. Funduð þið fleiri en eina lausn?

b Hvað ætli sé hægt að finna marga töfraferninga þar sem tölurnar 1–9 eru notaðar og summan er 15?

6 a Búðu til nýjan ferning og skráðu í hann gildi stæðanna ef y = 2.

b Búðu til annan ferning með því að reikna út gildi stæðanna ef y = 3.

c Eru báðir ferningarnir töfraferningar?

5 + 2y	8 – y	y + 4
3y – 2	5 + y	5y
10 – y	y + 6	2y + 1

7 a Leggðu saman stæðurnar í efstu röðinni.

x + 2 + 3x + 8 + 5 – x

b Leggðu saman stæður í öllum röðum, dálkum og hornalínum ferningsins.

c Er þetta töfraferningur, sama hvert gildi x er? Rökstyddu mál þitt.

d Notaðu ferninginn til að búa til töfraferning þar sem talan 8 er í miðjunni.

e Notaðu ferninginn til að búa til töfraferning þar sem summan er 30.

x + 2	3x + 8	5 – x
8 – x	5 + x	3x + 2
5 + 3x	2 – x	x + 8

8 Dragðu saman líka liði og einfaldaðu þannig stæðurnar.

a 4 + y – 5 + 3y – 2y
b 8 – 3x + 1 + 7x – 10
c 3b + 5b – 1 – 7 + 7b
d 4 – v + 1 + 6v + 2
e 5 + 3r – 5r + 5r – 6
f 2x + 3 – x + 4x + 3
g 2a + 3b – 2b + a – b
h 4m – m + 6n + 2n + 3m
i 12a + 8b – 6a – b + a

9 Ein af þessum stæðum jafngildir þrjátíu. Hver er það?

a $1 + 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5$ **b** $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$ **c** $1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 5$ **d** $1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 5$

10 Halldóra kennari lagði þetta dæmi fyrir bekkinn sinn:
Skoðaðu lausnir krakkanna.

Anna: $3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$ $= 3 \cdot 8 - 14 + 1 = 24 - 14 + 1 = 11$

Björn: $3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$ $= 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 24 - 16 = 8$

Cecil: $3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$ $= 15 + 3 - 14 + 1 = 5$

a Hver krakkanna reiknaði rétt?

b Settu sviga í dæmin hjá hinum krökkunum sem sýna hvernig þeir reiknuðu.

11 Dóra og Einar fengu sama svar og voru því viss um að þau hefðu reiknað rétt.
Settu sviga í dæmin hjá þeim sem sýna hvernig þau reiknuðu.

Dóra: $3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$ $= 15 + 1 \cdot 7 + 1 = 15 + 7 + 1 = 23$

Einar: $3 \cdot 5 + 3 - 2 \cdot 7 + 1$ $= 15 + 1 \cdot 8 = 15 + 8 = 23$

12 Hvað þarf að hafa í huga þegar reiknuð eru dæmi sem samsett eru úr mörgum liðum?

13 Ef dæmið $32 + (8 \cdot 2)$ er reiknað fæst sama útkoma og úr dæminu $32 + 8 \cdot 2$. SvigInn er því óþarfur. Svigi í dæmi gefur til kynna hvað skuli reikna fyrst. Skiptir sviginn máli í þessum dæmum? Skrifaðu já eða nei fyrir hvert þeirra.

a $32 + (8 - 2)$
b $(32 + 8) \cdot 2$
c $32 - (8 : 2)$
d $(32 - 8) : 2$
e $(32 \cdot 8) - 2$
f $32 : (8 : 2)$
g $(32 : 8) + 2$
h $36 - (8 - 2)$
i $32 \cdot (8 \cdot 2)$
j $(32 : 8) - 2$
k $32 : (8 - 2)$
l $32 \cdot (8 : 2)$

HÓPVERKEFNI

14 Vinnið tvö saman að lausnum.

a $4 + 4 + 4 + 4$
b $4 - 4 + 4 \cdot 4$
c $4 + 4 : 4 + 4$
d $44 + 4 : 4$
e $(4 + 4) : (4 + 4)$
f $4 : 4 + 4 : 4$

g Getið þið búið til allar heilar tölur frá 0–30 með því að nota tölustafinn 4 fjórum sinnum, sviga og reikniaðgerðirnar samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu?

Forgangsröð aðgerða segir til um í hvaða röð skal framkvæma útreikninga. Skapast hefur hefð um að reikna í þessari röð.

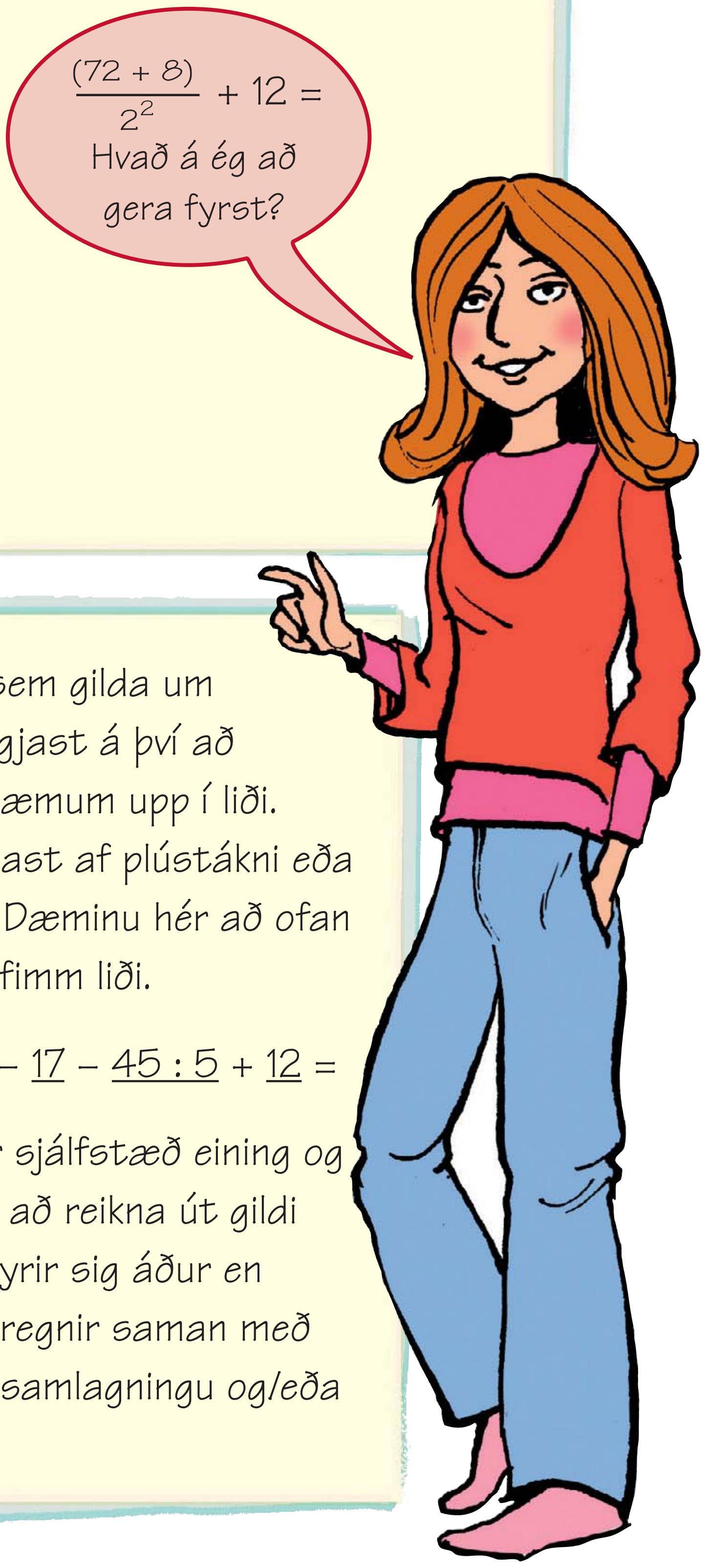
1 Reikna út úr svigum → $\frac{(80)}{2^2} + 12 =$

2 Reikna veldi og rætur → $\frac{80}{4} + 12 =$

3 Margfalda og deila → $20 + 12 =$

4 Leggja saman og draga frá → 32

Miðað er við að reiknað sé frá vinstri til hægri.



$48 + 2 \cdot 14 - 17 - 45 : 5 + 12 =$

Í þessu dæmi þarf að framkvæma fjórar reikniaðgerðir. Ef þú fylgir forgangsröð aðgerða færðu svarið 62. Ef þú hins vegar leysir dæmið án þess að taka tillit til forgangsraðar aðgerða og byrjar á því að leggja saman 48 og 2 margfaldar þá útkomu með 14 og heldur síðan áfram koll af kolli verður útkoman 139,6. Það skiptir því máli að allir fari með tölur og reikniaðgerðir á sama hátt.

Þær reglur sem gilda um reikning byggjast á því að skipta má dæmum upp í liði. Liðir afmarkast af plústákni eða mínustákni. Dæminu hér að ofan má skipta í fimm liði.

$\underline{48} + \underline{2 \cdot 14} - \underline{17} - \underline{45 : 5} + \underline{12} =$

Hver liður er sjálfstæð eining og byrja þarf á að reikna út gildi hvers liðar fyrir sig áður en liðirnir eru dregnir saman með því að nota samlagningu og/eða frádrátt.

15 Leystu dæmin með því að strika undir liði og reikna svo.

a $9 \cdot 6 - 50 + 46 - 6 \cdot 7$ c $8 + 2 \cdot 7 + 3 - 4 : 2$ e $19 + 9 \cdot 2 + 6 - 27$

b $3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 30$ d $19 + 9 \cdot (2 + 6) - 27$ f $62 + 2{,}5 \cdot 4 - 75$

Í stæðu skiptir röð liðanna ekki máli og stundum má nýta sér það við útreikninga.

$48 \quad + 2 \cdot 14 \quad - 17 \quad - 45 : 5 \quad + 12 \quad = \quad + 48 \quad + 12 \quad + 2 \cdot 14 \quad - 17 \quad - 45 : 5$

16 Hvernig getur það auðveldað útreikninga að breyta röð liða? Hverju telur þú þurfa að gæta sérstaklega að þegar liðir eru fluttir til í margra liða stærð?

17 Leystu dæmin með því að strika undir liði og reikna svo.

a $5 + 48 : 8 + 32 \cdot 4 - 8 - 88 : 11$

b $-350 - 30 \cdot 8 + 2700 : 9 - 300 + 21$

c $125 : 25 + 25 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + 250 : 10$

d $170 - 3 \cdot 101 + 450 : 9 + 205 - 2$

e $-75 : 15 + 5 + 3 \cdot 5 - 45 : 3$

f $-8200 : 2 - 17 + 8 \cdot 500 - 56 : 7$

18 Einfaldaðu stæðurnar.

a $20x + 3 \cdot 8 - 3 \cdot 4x$

b $48 : 6 \cdot 2 + 33 : 3$

c $4k + 12k : 3 - 60 : 4$

d $2 \cdot 3 \cdot 4a - 10a + 54 : 9$

e $-32b + 7 \cdot 3b - 8 : 4 : 2$

f $-4 \cdot 7 + 8x + 3 \cdot 7x - 2$

Forgangsröð aðgerða

1 Svigar.
2 Veldi og rætur.
3 Margföldun og deiling.
4 Samlagning og frádráttur.

Bókstafir í stæðum eru alltaf staðgenglar talna.
Hver bókstafur getur tekið mismunandi talnagildi.
Sami bókstafur í **sömu** stæðu hefur alltaf sama gildi.

19 Einfaldaðu stæðurnar.

a $20 + (8 + 3) \cdot 2$

b $3^4 + (2 + 6^2) - 100$

c $4^2 - 2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 2^2$

d $4n + (4 - 2)^2 + 3n - 12n$

e $45 + (x^2 + x^2) - 2 \cdot (18 : 6)$

f $4 \cdot 25y + 20 : 5 \cdot 3 - 20 - y$

Ef reikna á eða einfalda á annan hátt en reglur um forgangsröð aðgerða segja fyrir um þarf að setja sviga utan um þá liði sem reikna skal fyrst. Byrjað er á að leysa innsta svigann.

20 Einfaldaðu stæðurnar.

a $36 + (4 + (3 \cdot 8) - 2) - 2$

b $47 - (18 - (3 \cdot 5) + 4) + 9 : 3$

c $21x + 14x - (18 : 3 + (5 + 8))$

d $(75 - 34 + 19 - (2 \cdot 3 + 4)) + 32a$

21 Teiknaðu töfluna og finndu gildi þessara stæða.

a	b	c	$2 \cdot a + 3 \cdot b^2$	$a : 5 + b - 24 : c$	$a + (3b - 5) - (c + 15)$
2	5	8			
2	3,5	3			
–2	1	6			
–3	7	–2			
5	5	–12			

22 Finndu gildi fyrir:

a x x^2 x^4 ef x er 5

b a^3 a^5 ef a er 3

c x^3 x^2 ef x er 7

d b^2 $3b^2$ b^3 ef b er 8

23 Kristinn einfaldaði stæðu á eftirfarandi hátt: $x + x^2 = x^3$
Útskýrðu fyrir honum hvers vegna ekki er hægt að einfalda á þennan hátt.

24 Einfaldaðu stæðurnar.

a $y + y \cdot y + 2y$

b $x^2 + 5x + x^2 - 2x$

c $a^2 + 2a - a^2 + 2a^2 + 8a$

d $x^5 + 2x^3 + 2x^5 - x^3 + 3x$

e $b^2 + 4b^2 + 6f - 3f$

f $x \cdot x + 5x^2 - 2a$

25 Finndu fimm pör af jafngildum stæðum ef $n = 3$

$12n^2$ $7n$ $6n + 2n$ $2n \cdot 4n$ $2n^2 + 6n^2$

$2 \cdot 6n$ $2n \cdot 6n$ $4n + 3n$ $8n$ $12n$

26 Veldu rétt merki < = >

a $(10 - 3)^2$? $10 - 3^2$

b $(2 + 3)^2$? $2 + 3^2$

c $4 \cdot 3^2$? $(4 \cdot 3)^2$

d $(7 + 3)^2$? $7^2 + 3^2$

e $(8 - 4)^2$? $8 - 4^2$

f $6 \cdot 5^2$? $(6 \cdot 5)^2$

27 Í þessum stæðum er n jákvæð heil tala.

$3n + 1$ $8n - 4$ $4n + 1$ $5n + 10$ $(2n)^2$

$6n + 9$ $12n$ $3n + 6$ $2n^2$

Skráðu þær stæður sem alltaf standa fyrir:

a sléttar tölur

b margfeldi af þremur

c oddatölur

d einum meira en margfeldi af þremur

e ferningstölu

f margfeldi af fjórum

g margfeldi af fimm

28 Skráðu stæðu fyrir tölu sem alltaf er margfeldi af 2 og 3.

29 Í þessum setningum er n jákvæð heil tala. Flokkaðu fullyrðingarnar eftir því hvort þær eru sannar fyrir öll gildi n, sum gildi n eða ósannar fyrir öll gildi n.

A $n + 10$ er neikvæð tala

B $6(n + 1)$ er margfeldi af 6

C n^2 er margfeldi af 5

D $(3n)^2$ er margfeldi af 9

E $4n$ er margfeldi af 4

F $5n + 1$ er margfeldi af 5

G $2n + 5$ er oddatala

H $4n$ er margfeldi af 8

I $1 - n$ er neikvæð tala

J $2n$ er oddatala

K $6n + 8$ er slétt tala

L $3n + 6$ er margfeldi af 3

30 Finndu gildi þessara stæða.

x	y	$x + 6(y - 1)$	$2x - (2y + 5)^2$	$(x + 3)^3 - 2(y + 2)$
1	2			
2	1			
3	4			
10	11			
–2	1			

31 Hver er óþekkta stærðin?

a $4 \cdot \square\ x = 12x$

b $-3 \cdot \square\ a = -6a$

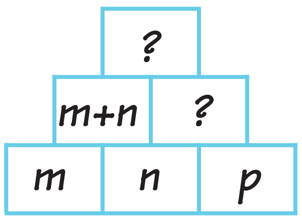
c $y \cdot 2\ \square = 2xy$

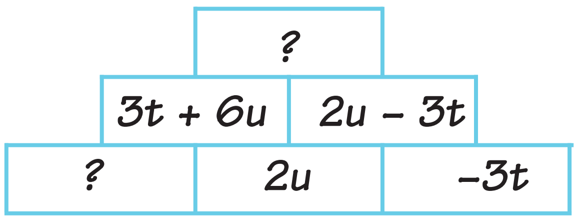
d $2a \cdot \square\ b = 8ab$

e $x \cdot 2\ \square = 2x^2$

f $2n^2 \cdot 3\ \square = 6n^3$

32 Tölurnar í hverjum reit eru summa talnanna í reitnum fyrir neðan. Skráðu summurnar og einfaldaðu eins og hægt er.



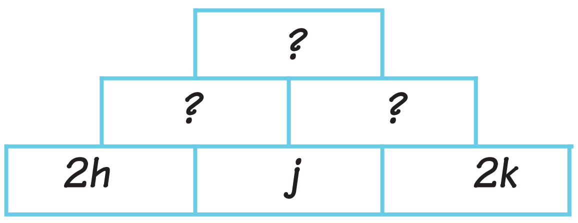


33 Bókstafirnir h, j og k geta staðið fyrir hvaða heilu tölur sem er. Tölurnar sem vantar má finna með því leggja saman tölurnar í reitunum fyrir neðan.

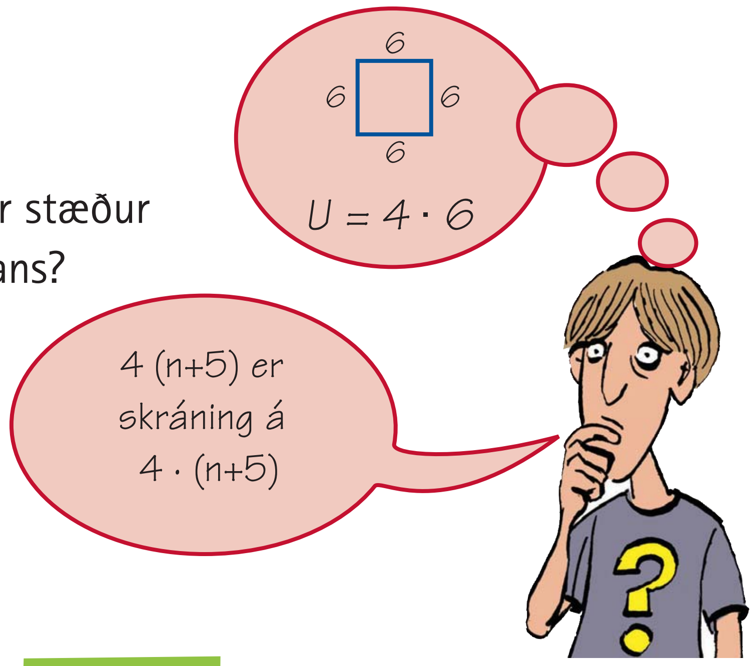
a Færðu rök fyrir því að talan í efsta reitnum verði alltaf slétt tala.

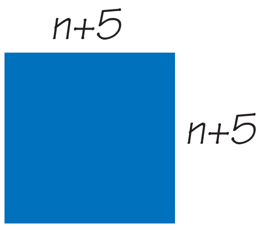
b En ef í stað j kemur j+1?

c En ef í stað 2h kemur h?



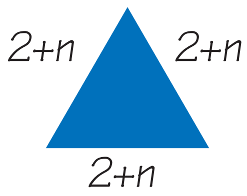
34 Á myndinni er ferningur. Hvaða tvær stæður getur þú notað til að skrá ummál hans?





4(n + 5) | 4n + 5 | 4(n + 20) | 4n + 20

35 Á myndinni er jafnhliða þríhyrningur. Hvaða tvær stæður gætir þú notað til að tákna ummál hans?



6n + n | 3(2 + n) | 5 + 3n | 6 + 3n

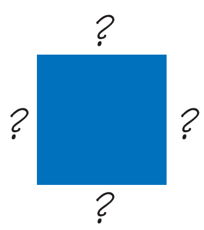
36 Þessar stæður tákna allar ummál jafnhliða marghyrninga. Einfaldaðu stæðurnar.

a 3(n + 3)
b 5(1 + z)
c 4(y + 2,5)
d 6(n + 7)
e 3(7 + x)
f 4(x + 8)
g 7(2x + 1)
h 8(x + 0,5)

37 Ummál fernings er skráð með stæðunni 4x + 12.

a Hver er hliðarlengd ferningsins?

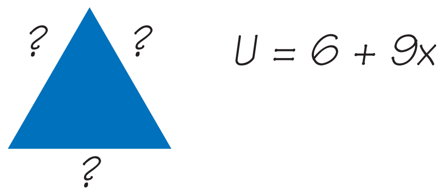
b Skráðu ummál ferningsins sem margfeldi tveggja þátta þar sem annar þátturinn er hliðarlengdin en hinn fjöldi hliða.



38 Ummál jafnhliða þríhyrnings er skráð með stæðunni 6 + 9x.

a Hver er hliðarlengd þríhyrningsins?

b Skráðu ummálið sem margfeldi tveggja þátta.

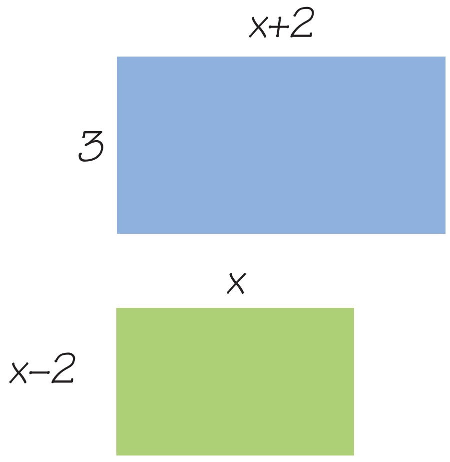


39 Þessar stæður tákna ummál jafnhliða marghyrninga. Finndu hliðarlengdir hyrninganna og skráðu ummál þeirra sem margfeldi tveggja þátta þar sem annar þátturinn er hliðarlengdin og hinn fjöldi hliða í marghyrningnum.

a 15 + 3n
b 4x + 16
c 6 + 6x
d 5 + 15x
e 15x + 10
f 7,5 + 3n
g 8x + 12
h 8n + 40

x(x + 2) x(x – 2)

3(x + 2) 3(x – 2)



40 **a** Hvaða stæða táknar flatarmál bláa rétthyrningsins?

b Skráðu stæðu án sviga sem táknar flatarmál hans.

41 **a** Hvaða stæða táknar flatarmál græna rétthyrningsins?

b Skráðu stæðu án sviga sem táknar flatarmál hans.

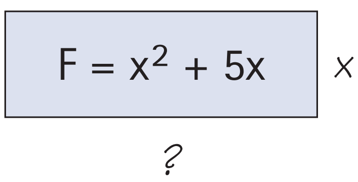
42 Flatarmál rétthyrnings með hliðarlengdir x og x + 3 má skrá sem x(x + 3)

Hver af þessum stæðum jafngildir x(x + 3)? $x^2 + 3$ $x^2 + 3x$ $2x + 3$

43 Í þessum stæðum er flatarmál rétthyrninga skráð sem margfeldi tveggja þátta. Skráðu margfeldið með einni stæðu án sviga.

a x(x + 5) **b** y(7 + y) **c** y(y – 5) **d** 2a(10 – a) **e** x(2x – 2)

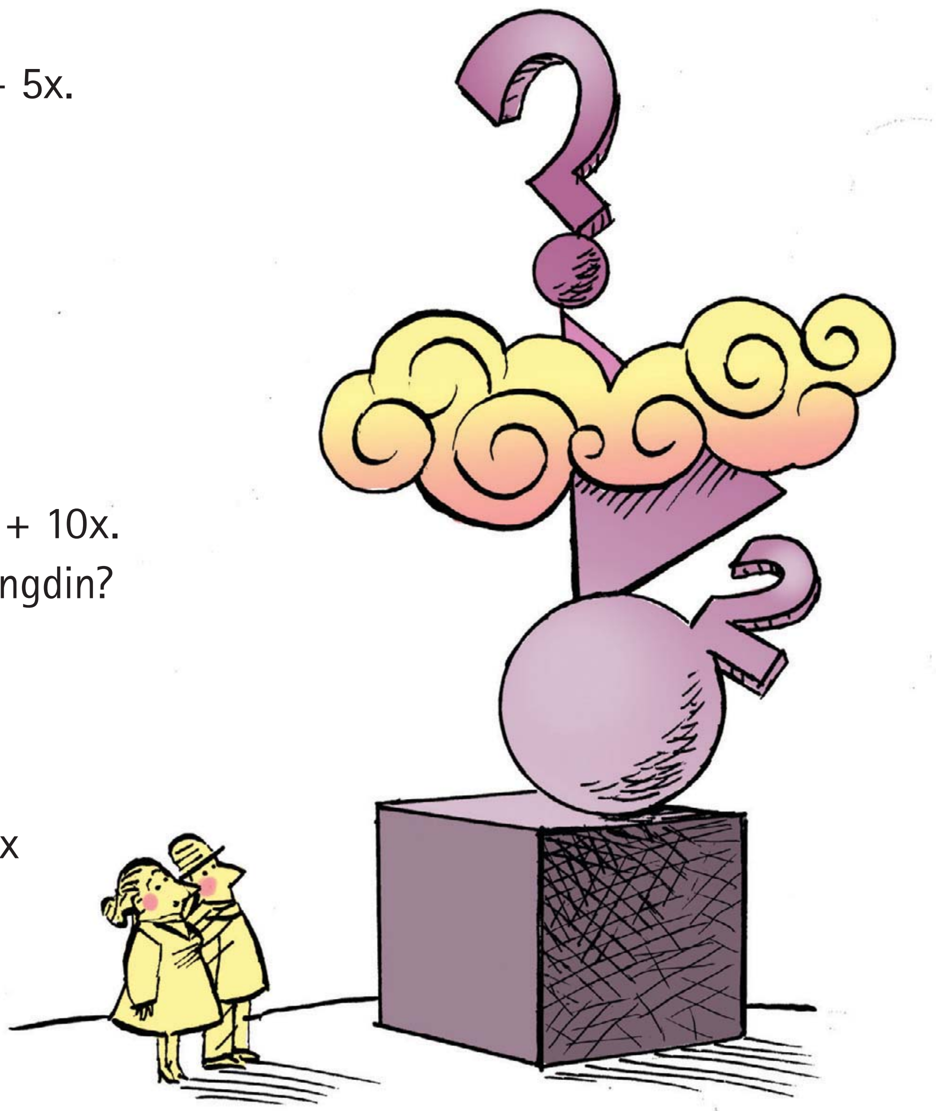
44 Flatarmál rétthyrnings er skráð með stæðunni $x^2 + 5x$. Ef lengd styttri hliðanna er x hver er þá lengd hinna hliðanna?



45 Flatarmál rétthyrnings er skráð með stæðunni $2x^2 + 10x$. Ef önnur hliðarlengdin er 2x hver er þá hin hliðarlengdin?

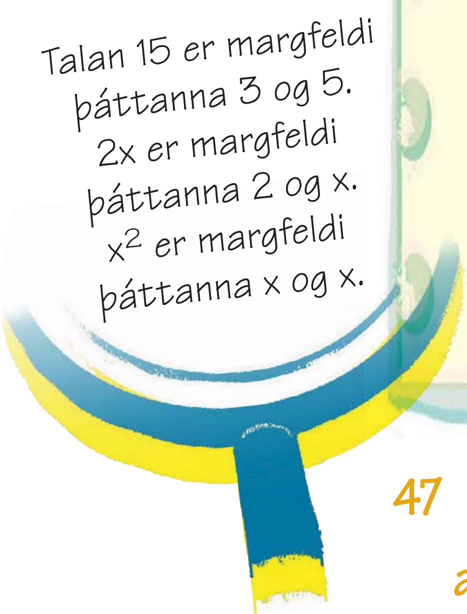
46 Skráðu þessar stæður sem margfeldi tveggja þátta þar sem annar þátturinn er x.

a $x^2 + 4x$ **b** $x^2 + 9x$ **c** $2x^2 + 14x$



Stæður fyrir flatarmál rétthyrninga má skrá sem margfeldi tveggja þátta eða summu tveggja liða. $x(x+2)$ $x^2 + 2x$

Í verkefnunum hér á undan hefur þú glímt við að skrá stæður fyrir ummál og flatarmál marghyrninga, ýmist sem margfeldi tveggja þátta eða summu tveggja liða. Þegar skipt er um form stæðu á þennan hátt er dreifiregla notuð.



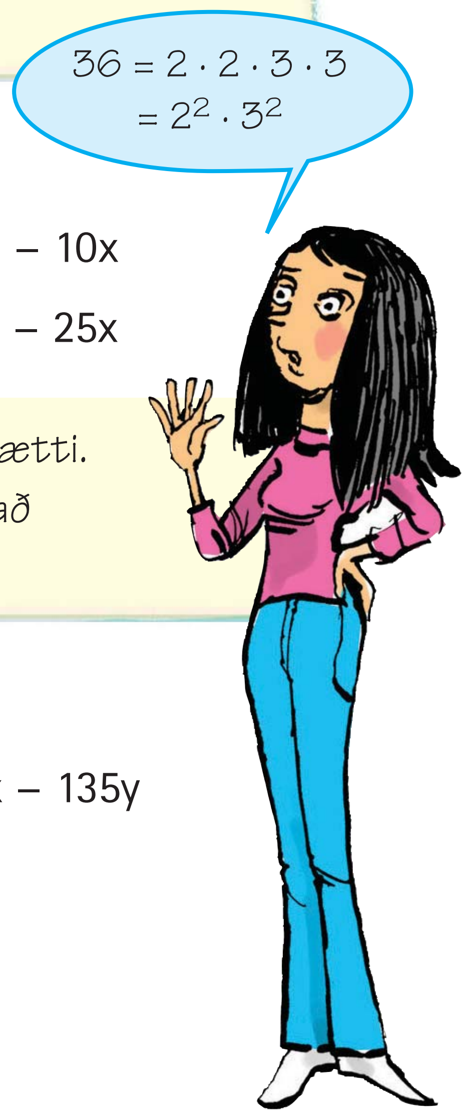
Dreifiregla Þegar margfeldi tveggja þátta er breytt í summu tveggja liða er margfaldað inn í sviga. Báðir þættir innan svigans eru margfaldaðir með þættinum sem er utan svigans. $x(x + 5)$

47 Margfaldaðu inn í svigann.

a $2(x + 8)$ c $x(3x + 9)$ e $2(2x + y)$ g $7(x^2 + x)$

b $3y\ (y - 7)$ d $4(x^2 + 3x + 1)$ f $a(7 - 4a)$ h $2x(x^2 + 5)$

Þegar summu tveggja liða er breytt í margfeldi er fundin stærð sem gengur upp í báða liði og hún tekin út fyrir sviga. $x^2 + 5x = x(x+5)$ x er sameiginlegur þáttur. Þetta er kallað að **þátta stæðu.**



48 Þáttaðu þessar stæður.

a $3x + 15$ c $7y + 3y^2$ e $b^2 - 4\,b$ g $2x^2 - 10x$

b $40 - 5a$ d $2x^2 + 8x$ f $7x + x^2$ h $5x^2 - 25x$

Þegar þátta á stæðu er ekki alltaf auðvelt að finna sameiginlega þætti. Ef um þekktar tölur er að ræða getur verið gott að frumþátta til að finna stærsta sameiginlega þátt.

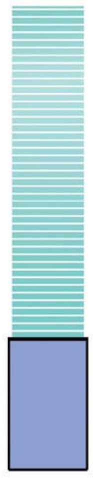
49 Þáttaðu þessar stæður.

a $36x + 24$ b $56 - 42k$ c $105b - 70b^2$ d $45x - 135y$

50 Ég hugsa mér tvær tölur.
Margfeldi þeirra er 10 780.
Stærsti sameiginlegi þáttur þeirra er 14.
Hvor þeirra hefur þrjá frumþætti.
Hverjar eru tölurnar?

51 Búðu til talnagátu og leggðu fyrir bekkjarfélaga þína.

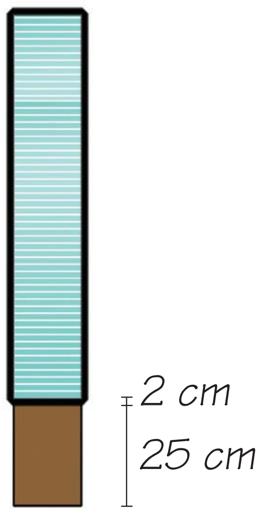
52 Húsgagnaverkstæði framleiðir geisladiskahillur fyrir hvaða fjölda af geisladiskum sem er. Regla fyrir hæð geisladiskahillu er $H = 14x + 60$. H táknar hæð hillu í millímetrum og x fjölda geisladiska.



- a Hvað táknar 14 og hvað táknar 60?
- b Hver verður hæð geisladiskahillu sem tekur 80 diska?
- c Hæð geisladiskahillu er 480 mm. Hve marga diska tekur hún?
- d Hve marga diska tekur hilla sem er 900 mm á hæð?

53 a Búðu til reglu fyrir sams konar geisladiskahillu sem tekur tvær raðir af diskum.
- b Hver verður hæð tvöfaldrar hillu sem tekur 40 diska?
- c Hver verður hæð tvöfaldrar hillu sem tekur 250 diska?

54 Guðbjörg hannar geisladiskahillu sem stendur á 25 cm sökkli. Botn og toppur hillunnar er 2 cm.



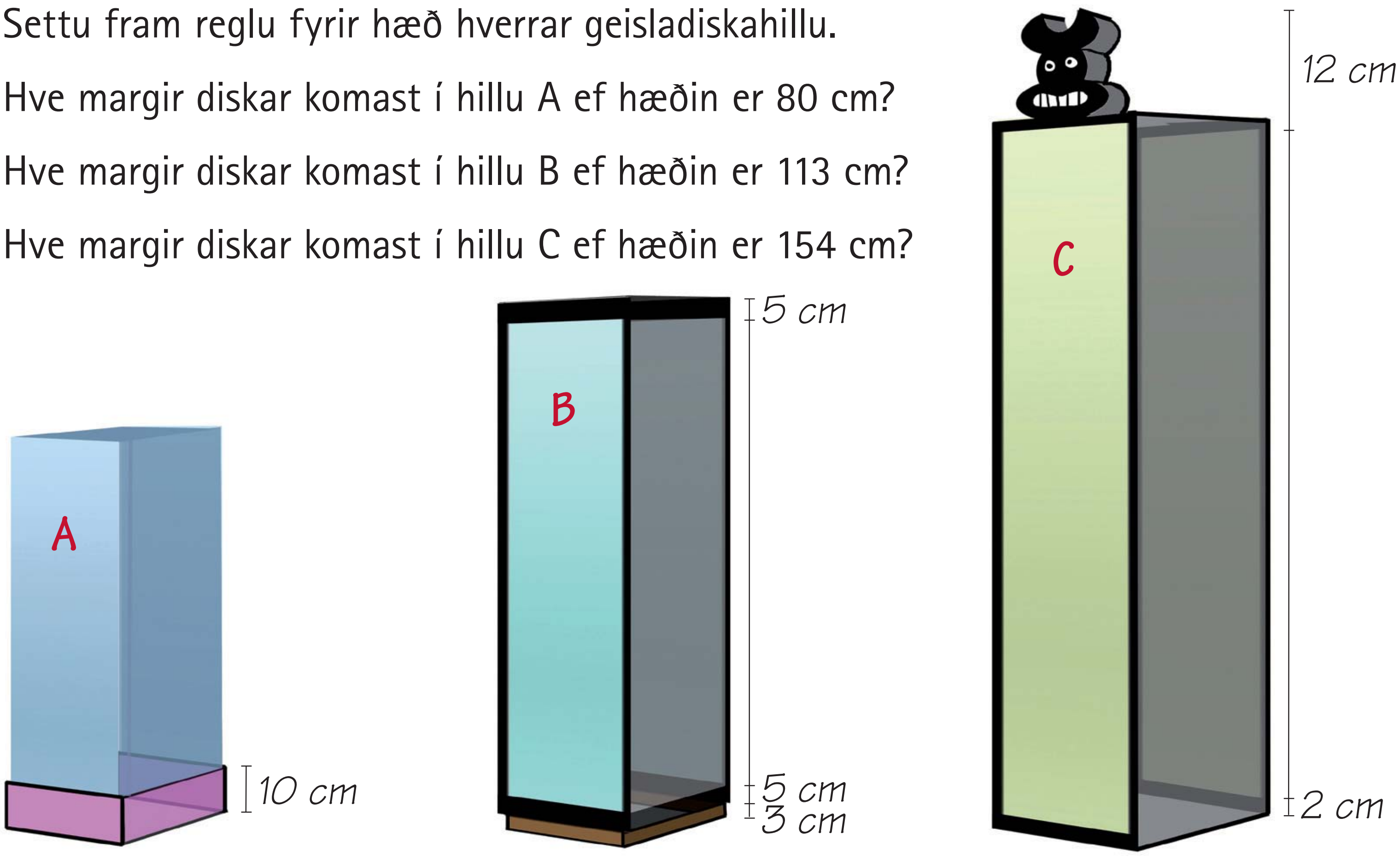
- a Settu fram reglu sem nota má til að finna hæð sams konar hillu fyrir hvaða fjölda geisladiska sem er.
- b Guðbjörg á 250 geisladiska. Getur hún komið þeim fyrir í einni einfaldri hillu? Rökstyddu svar þitt.
- c Notaðu grunnhönnun Guðbjargar og hannaðu hillu fyrir um það bil 250 geisladiska.

55 Settu fram reglu fyrir hæð hverrar geisladiskahillu.

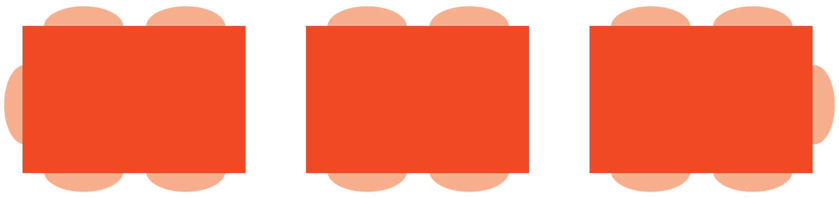
Hve margir diskar komast í hillu A ef hæðin er 80 cm?

Hve margir diskar komast í hillu B ef hæðin er 113 cm?

Hve margir diskar komast í hillu C ef hæðin er 154 cm?



56 Í veitingahúsi er borðum raðað upp á ýmsa vegu. Raða má upp borðum fyrir 14 manns í eina röð þar sem notuð eru þrjú borð.



a Settu fram jöfnu sem sýnir samband á milli fjölda borða og stóla þar sem x er fjöldi borða og y fjöldi stóla.

b Hve marga stóla þarf ef notuð eru 12 borð?

c Von er á 98 gestum. Hve mörgum borðum þarf að raða í röð?

d Settu upp jöfnu þar sem fjöldi stóla er 146 en fjöldi borða óþekktur.

e Hver er þá fjöldi borða? En ef fjöldi stóla er 206?

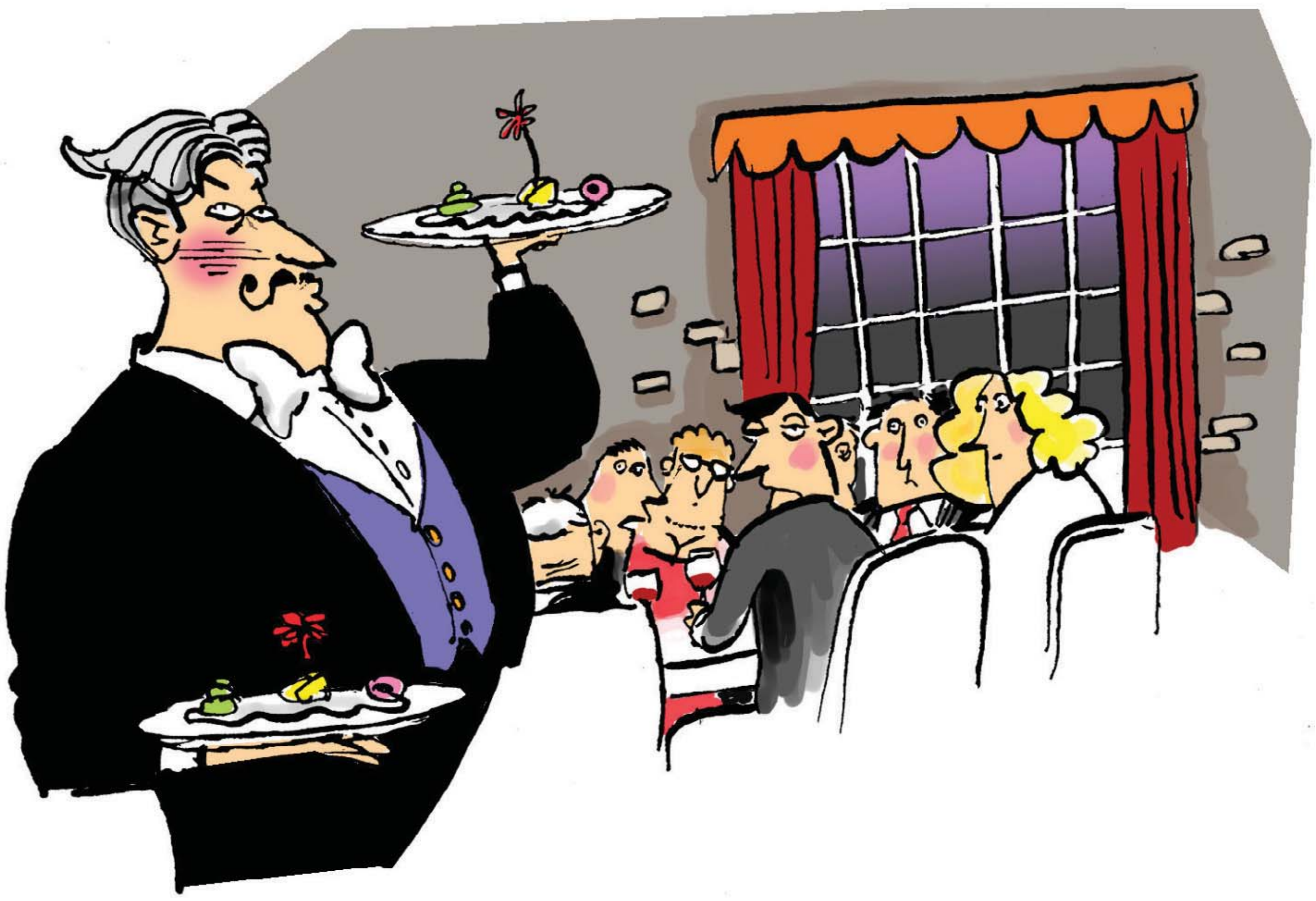
f Hver er fjöldi stóla ef borðin eru 32?

57 Hverjar af þessum jöfnum má nota til að finna út fjölda borða (x) ef fjöldi stóla (y) er þekktur?

$x = \frac{y-2}{4}$ $\quad y = 4x + 2$ $\quad x = 4y - 2$ $\quad x = \frac{y}{4-2}$

58 Veitingahúsið á stærri borð þar sem tveir geta setið við endann og þrír við hvora hlið.

a Settu fram jöfnu sem sýnir samband á milli fjölda borða (x) og stóla (y).



b Hve marga stóla þarf ef notuð eru 12 borð?

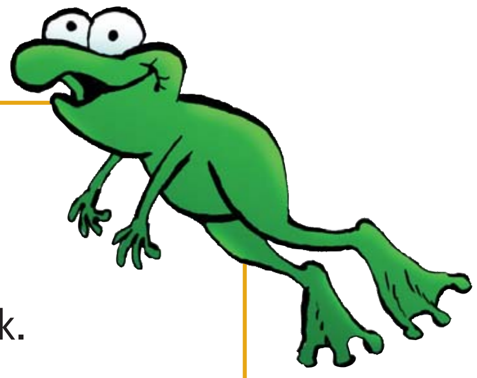
c Von er á 98 gestum. Hve mörgum borðum þarf að raða í röð?

d Settu upp jöfnu þar sem fjöldi stóla er 146 en fjöldi borða óþekktur.

e Hver er þá fjöldi borða? En ef fjöldi stóla er 206?

f Hver er fjöldi stóla ef borðin eru 32?

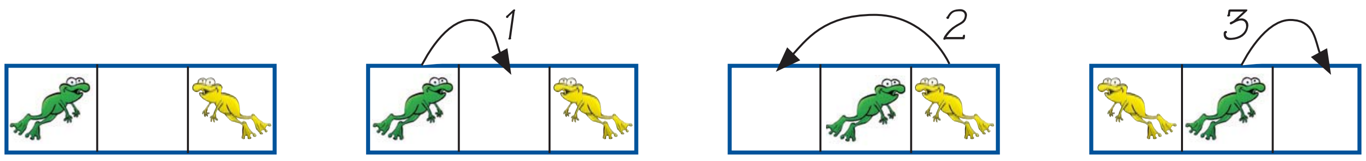
HÓPVERKEFNI



FROSKAHOPP – REGLUR

Tveir froskar geta skipt um stað með þremur færslum.
Froskur getur annaðhvort farið á næsta reit eða hoppað yfir einn frosk.

Gulir froskar geta bara farið frá hægri til vinstri.
Grænir froskar geta bara farið frá vinstri til hægri.



59a Þrír gulir og þrír grænir froskar geta skipt um stað með 15 færslum. Útskýrið hvernig.

b Búið til töflu og skráið skipulega hjá ykkur fjölda af hoppum og fjölda af hliðarfærslum.

Fjöldi froska af hvorum lit	*1*	*2*	*3*	*...*	*n*
Fjöldi hoppa	*1*				
Fjöldi hliðarfærslna	*2*				
Fjöldi færslna	*3*		*15*		

c Hve margar færslur þarf til að 20 gulir og 20 grænir froskar skipti um stað?

d Setjið fram reglu sem gefur fjölda færslna fyrir n gula og n græna froska.

e Hve margar færslur þarf ef froskar af hvorum lit eru 50?

60 Ég hugsa mér tölu.
Ég margfalda hana með 3 og dreg útkomuna frá 21.
Svarið er fjórföld talan sem ég hugsaði mér. Hver er talan?

61 Ég hugsa mér tölu.
Ég dreg 2 frá tölunni og margfalda útkomuna með 3.
Svarið er tveimur hærra en talan sem ég hugsaði mér. Hver er talan?

62 Ég hugsa mér tölu.
Ég tvöfalda hana og dreg útkomuna frá 15 og margfalda síðan þá útkomu með 7.
Svarið er talan sem ég hugsaði mér. Hver er talan?

63 Helgi og Hanna eru að búa til talnagátur.

- Þau byrja með sömu töluna.
- Helgi margfaldar töluna með 5 og bætir síðan 1 við.
- Hanna margfaldar töluna með 3 og bætir 9 við.
- Þau verða hissa þegar þau komast að því að þau enda líka með sömu töluna. Settu upp jöfnu og leystu gátuna.

64

- Björn og Birta hugsa sér sömu töluna.
- Björn margfaldar sína tölu með 5 og bætir síðan 10 við.
- Birta margfaldar sína tölu með 3 og bætir 28 við.
- Þau fá sömu útkomu. Hvaða tölu hugsuðu þau sér?

65

- Erna og Einar hugsa sér sömu töluna.
- Erna tvöfaldar sína tölu og dregur útkomuna frá 12.
- Einar dregur sína tölu frá 12 og margfaldar síðan útkomuna með 3.
- Þau fá sömu útkomu.
- Hvaða tölu hugsuðu þau sér og hver var útkoman?

66 Leystu þessar jöfnur.

a $2x + 3 = 47$
c $\frac{x}{3} = 12$
e $\frac{x}{3} - 2 = 7$
g $3m = m + 8$
b $4y + 2y - 4 = 52$
d $46 = 3x - 19$
f $172 = 27 + 5a - 15$
h $\frac{x}{7} - 4 = 3$

67 Gönguskór kosta 1980 krónum meira en íþróttaskór.

a Veldu bókstaf til að tákna verð á íþróttaskóm.

b Skráðu stæðu fyrir verð á gönguskóm.

c Jónína keypti sér gönguskó og íþróttaskó og kostaði það hana 22 734 kr. Settu fram jöfnu og leystu hana til að finna verð á gönguskóm.

68 Í sparibauk eru nokkrir 50 króna peningar og tvisvar sinnum sá fjöldi af hundrað króna peningum. Gerðu ráð fyrir að fjöldi 50 króna peninga sé a.

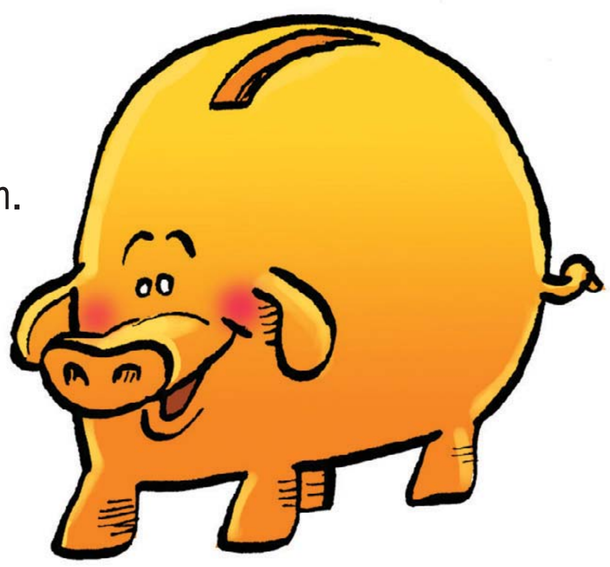
a Skráðu stæðu fyrir fjölda 100 krónu peninganna.

b Skráðu stæðu fyrir heildarfjölda peninga í bauknum.

c Skráðu stæðu fyrir heildarupphæð peninganna í bauknum.

d Það eru samtals 33 peningar í bauknum. Skráðu jöfnu og leystu hana til að finna a.

e Hve há upphæð er í bauknum?



Í þessum kafla hafa verið dæmi úr ýmsum þáttum algebrunnar. Áhersla hefur verið lögð á dæmi þar sem skrá á stæður og vinna með þær. Mikilvægt er að ná færni í að einfalda stæður til þess að fá þægilegri stærðir til að nota í áframhaldandi útreikningum.

69 Dragðu saman líka liði.

a $7b - 8b + 4b - 2b + 7b + 2b$

b $5g + \frac{1}{2}g + \frac{7}{4}g - \frac{3}{4}g + \frac{7}{2}g$

c $\frac{1}{2}x + 8x - \frac{5}{2} - 3$

d $12 + 3y - \frac{2}{5}y + \frac{9}{10}y$

70 Hver er forgangsröð aðgerða?

71 Reiknaðu.

a $4 + 5 \cdot 12 : 3 - 16$

b $12 - 6^2 + 2 \cdot 3^3$

c $2 \cdot (4 + 3) - 37 + 32 : (8 \cdot 2)$

d $3^2 - 3 \cdot 2 + (12 - 8) \cdot 3$

72 Finndu gildi stæðu ef a = 3.

a $4a + 3 - \frac{1}{3}a$

b $2a \cdot 4 + a - 3a$

c $6a + a - 3 \cdot 3a - \frac{5}{2}a$

d $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - 2a + 3 \cdot \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a$

73 Margfaldaðu inn í sviga.

a $4(x + 2)$

b $3(x - 3)$

c $5(a^3 - 2)$

d $3a(4 + a^2)$

e $8k(3k + k^2)$

f $k^3(k + 17)$

74 Tvöfaldaðu.

a $2x - 5$

b $6(x + 2)$

c $\frac{1}{2}(4 + 2x)$

d $-3x + 4$

e $5 - 4x$

f $\frac{1}{3}(3 - 9x)$

75 Þáttaðu þessar stæður.

a $4x - 8$

b $8x + 13x$

c $24a + 6$

d $x^2 + 3x$

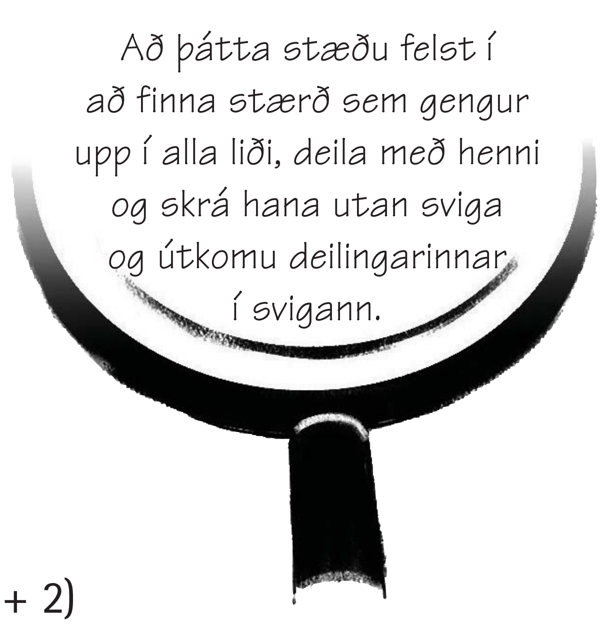
e $42b - 14$

f $y + 13y$

g $4x^2 + 3x^2$

h $5h^2 + 8h^3$

j $8j^3 - 6j$



76 Stundum þarf að margfalda tvo sviga saman. Spreyttu þig á því.

a $(4 + 2) \cdot (3 + 1)$

b $(a + 3) \cdot (4 + a)$

c $(m + 2m^2) \cdot (m + 2)$

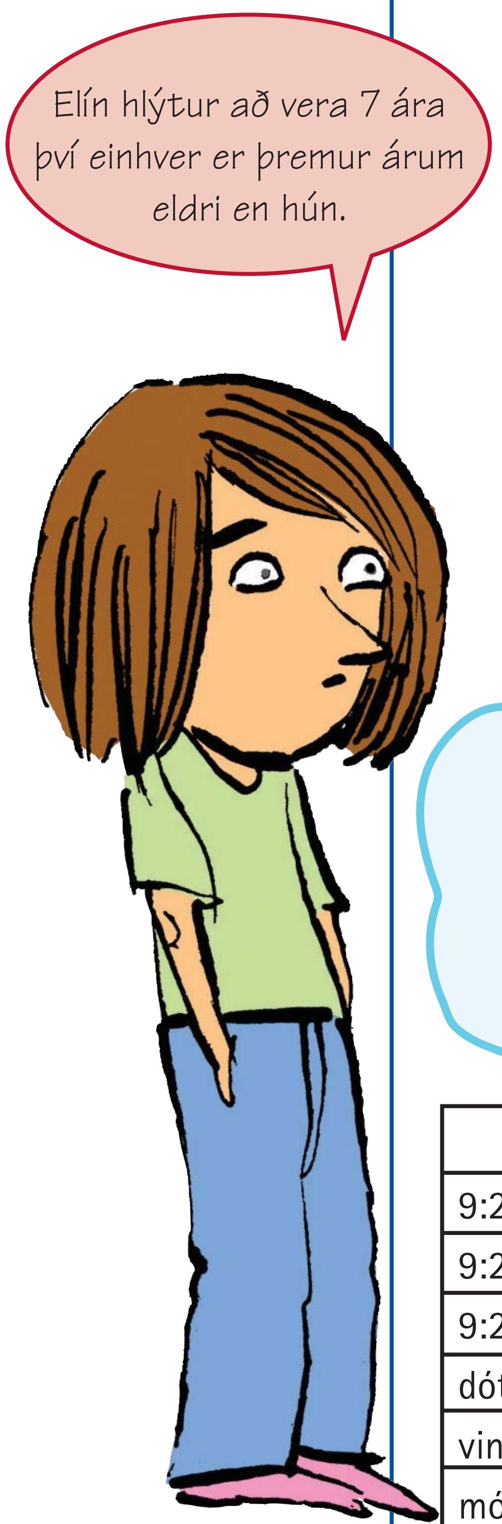
ÞRAUT

Margir hafa gaman af því að glíma við vísbendingaþrautir. Með því að skrá upplýsingar í töflu verður auðveldara að átta sig á sambandi þeirra. Við lausn þrautanna skaltu teikna upp töflur og merkja x ef upplýsingar passa saman og 0 ef þær gera það ekki.

1 Þrjú börn búa í sömu götu. Skoðaðu töfluna. Með því að fá tvær vísbendingar getur þú fundið eiginnafn, kenninafn og aldur.

Vísbendingar:

1 *Sú sem er Jónsdóttir er þremur árum eldri en Elín.*
2 *Barnið sem hefur eftirnafnið Hafstað er níu ára.*



	Jónsdóttir	Briem	Hafstað	7	9	10
Anna						
Brjánn						
Elín				x	0	0
7						
9						
10						

2 Brynjar, Magnús og Páll hringdu nánast samtímis. Með því að nota töfluna og vísbendingarnar fjórar getur þú fundið nafn þess sem hringdi, í hvern hann hringdi og röð símtalanna.

Vísbendingar:

1 *Brynjar hringdi næsta símtal eftir að einhver hafði hringt í mömmu sína.*
2 *Magnús hringdi í Aðalheiði.*
3 *Lára var vinurinn sem hringt var í.*
4 *Dóttirin var sú sem hringt var í eftir að hringt hafði verið í Jóhönnu.*

	Brynjar	Magnús	Páll	Aðalheiður	Jóhanna	Lára	dóttir	vinur	móðir
9:20									
9:22									
9:25									
dóttir									
vinur									
móðir									
Aðalheiður									
Jóhanna									
Lára									

Jöfnur og gröf

Mikilvægur hluti af algebrunámi er að ná valdi á að vinna með jöfnur. Til eru ólíkar leiðir við að skrá regluleika og samband stærða.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Þekkir leiðir til að sýna samband stærða með orðum, jöfnum, töflum og gröfum (línuritum).*
- *Kunnir að teikna graf jöfnu.*
- *Þekkir einkenni á jöfnu beinnar línu og getir notfært þér þau til að setja fram jöfnu með því að skoða graf.*

1 a Teiknaðu hnitakerfi og merktu kílógrömm á x-ásinn og verð í krónum á y-ásinn.

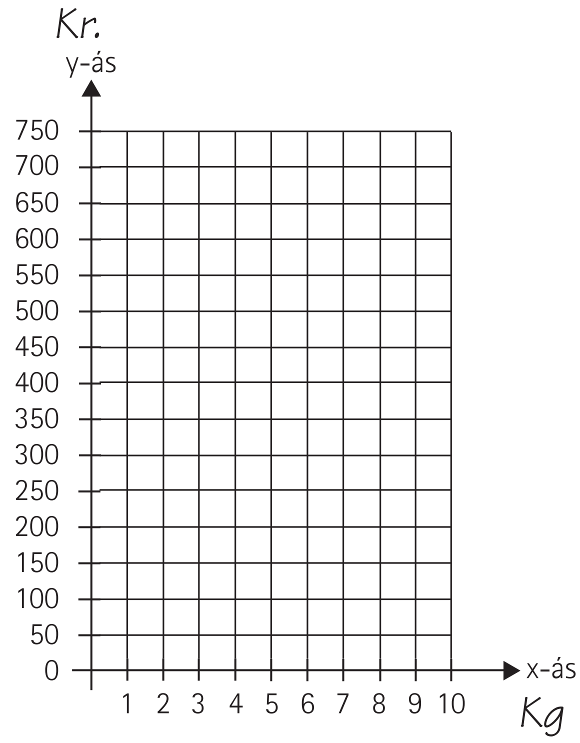
b Merktu punktinn (3, 450) í hnitakerfi.

c Merktu punkt inn í hnitakerfið sem sýnir verð á 1,5 kg af banönum.

d Dragðu beint strik á milli punktanna. Framlengdu strikið í báðar áttir. Gengur það í gegnum punktinn (0,0)? Hvers vegna?

e Hve mikið kostar 1 kg af banönum?

f Hve mörg kg fást fyrir 675 krónur?



2 Auður keypti 250 g af blandi í poka og borgaði 300 kr. fyrir það.

a Teiknaðu línurit sem sýnir verð á blandi í poka.

b Hve mikið kosta 100 g af blandi í poka?

c Hve mörg grömm fást fyrir 90 krónur?

3 9. bekkur efnir til áheitasunds og ákveður að synda í einn sólarhring. Þeir sem heita á bekkinn borga 10 krónur fyrir hvern syntan kílómetra.

a Búðu til töflu fyrir gildin 10 km, 30 km, 50 km og 70 km.

b Teiknaðu línurit sem sýnir hve mikið einstaklingur sem heitir á liðið þarf að borga ef bekkurinn syndir: 30 km 60 km 45 km 72 km

c Settu fram jöfnu sem nota má til að finna út hve mikið einstaklingur sem heitir á liðið þarf að borga. Láttu x tákna fjölda kílómetra og y upphæð.

Freyja kaupir $\frac{1}{2}$ kíló af vínberjum á 200 krónur.
Sambandinu á milli þyngdar vínberjanna og verðs þeirra má lýsa á fjóra vegu.

Með orðum

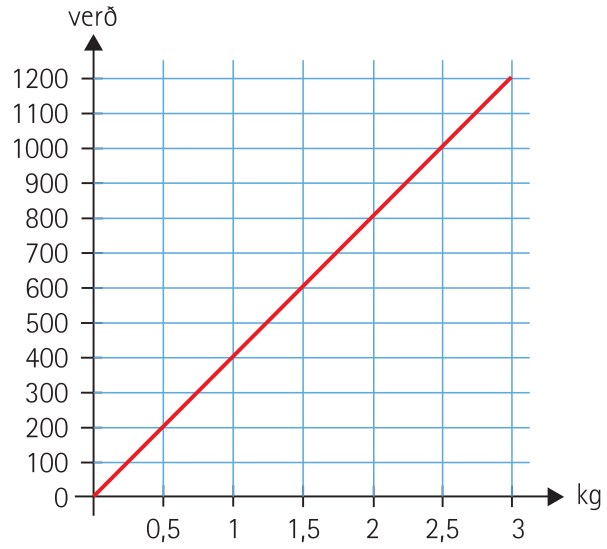
Verð á vínberjum er fjöldi kílógramma margfaldaður með kílóverði sem er 400 krónur.

Í gildistöflu

Fjöldi kg	0,75	1	1,5	2	3
Verð	300	400	600	800	1200

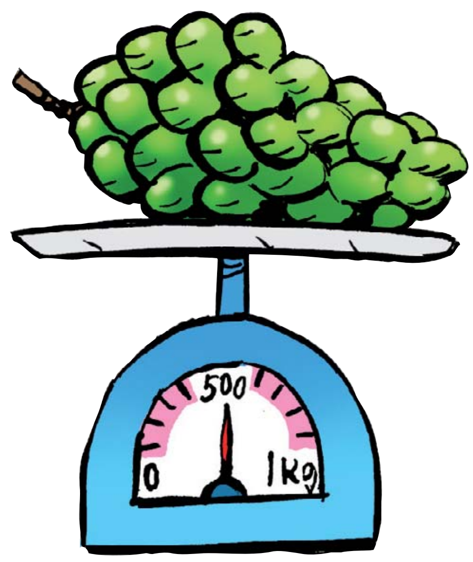
Með línuriti

Ein leið til að lýsa sambandi á milli tveggja breyta er að skrá það með línuriti. Oft er sagt að línan sem sýnir sambandið sé graf jöfnunnar.



Með jöfnu

Sambandinu má líka lýsa með jöfnu.
$a = 400 \cdot b$
a táknar verð
b táknar fjölda kílógramma



HÓPVERKEFNI

4 Ræðið saman:

Hverja af þessum fjórum leiðum við að lýsa sambandi mynduð þið nota ef þið ættuð að

- finna nákvæmt verð fyrir 2,25 kg?
- áætla verð fyrir 1,78 kg?
- finna nákvæmt verð fyrir 4,3 kg?

Hvað er líkt með þessum fjórum leiðum til að lýsa sambandi stærða? Hvað er ólíkt?

5 Freyja kaupir sér burðarpoka sem kostar 15 kr fyrir vínberin. Það hefur áhrif á sambandið milli verðs og magns.

a Lýstu sambandinu með orðum, í jöfnu, í gildistöflu og með grafi.

b Hvernig hafa kaupin á burðarpokanum áhrif á lýsingarnar?

6 Paraðu saman orð og jöfnu.

a Hannes er þrefalt eldri en María.

b Yfirborðsflatarmál tenings með hliðarlengd a er sex sinnum flatarmál hliðanna.

c Selma er þremur árum yngri en Oddur.

d Ummál reglulegs sexhyrnings er sexföld hliðarlengd hans.

$b = 6 \cdot a \cdot a$

$y = x - 3$

$m = 6k$

$y = 3x$

7 Hvaða jöfnur gætu átt við gildistöfluna?

$y = x$

$y = 2x - 1$

$y + 1 = 2x$

$y = 3x - 2$

$2x - y = 1$

x	y
1	1
2	3
3	5
4	7

8 Aðeins ein af jöfnunum hér fyrir neðan getur ekki átt við gildistöflurnar. Hver er hún?

$y = 2x$ $y = -3x$ $x = \frac{1}{2}y$ $x = -\frac{1}{3}y$ $y = -2x$

x	1	2	3
y	2	4	6

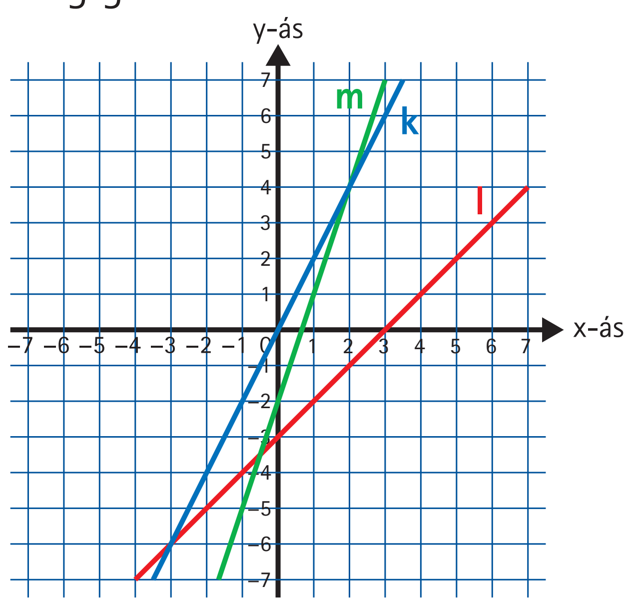
x	1	2	3
y	−3	−6	−9

9 Paraðu saman jöfnu og graf.

a $y = x - 3$

b $y = 3x - 2$

c $y = 2x$



10 Segðu með orðum hvaða sambandi milli breytanna x og y þessar jöfnur lýsa?

a $y = x - 3$ b $y = 3x - 2$ c $y = 2x$

11 Í símakosningu eru greiddar 99 krónur fyrir hvert atkvæði.
Búðu til gildistöflu sem sýnir tekjur af 1000, 2500, 5000 og 10 000 atkvæðum.

12 Það kostar 8 krónur að senda smáskilaboð.
Búðu til gildistöflu sem sýnir kostnað við að senda 10, 40, 50, 80 og 100 smáskilaboð.

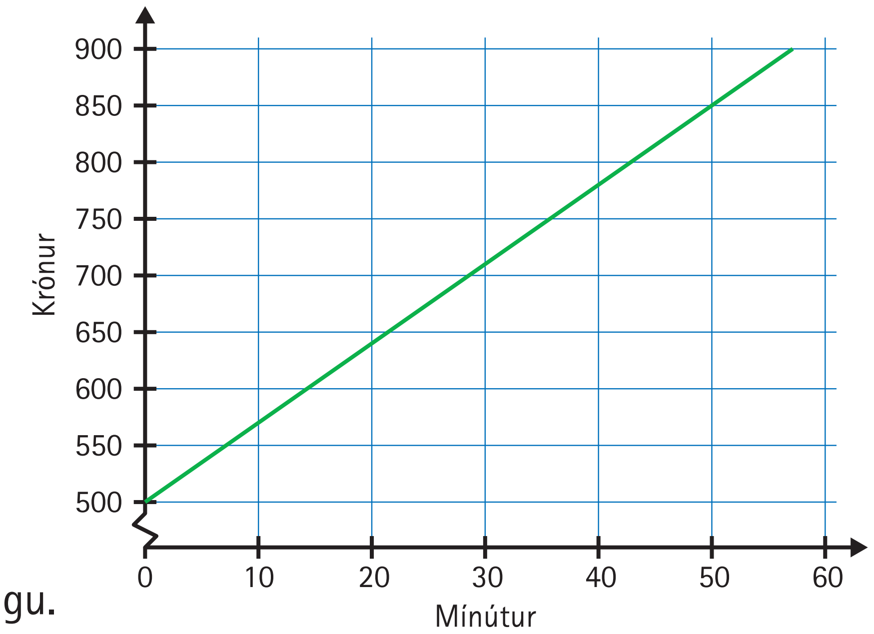
13 Mánaðargjald fyrir farsíma er 600 krónur og mínútugjald er 9 krónur. Búðu til gildistöflu sem sýnir kostnað við að tala í 50 mínútur, 200 mínútur, 600 mínútur og 1500 mínútur á mánuði.

14 Grafið sýnir kostnað við að senda smáskilaboð.

Skráðu jöfnu sem sýnir kostnað við að senda smáskilaboð samkvæmt þessu grafi.

15 Grafið sýnir kostnað við að nota farsíma.

Skráðu jöfnu sem sýnir kostnað við að nota farsíma samkvæmt þessu grafi.



16 Fyrirtæki gerði samning við bílaleigu.

	Verð á dag	Verð á kílómetra
Bíll í flokki A	2200	18
Bíll í flokki B	2800	25
Bíll í flokki C	4200	32

a Settu upp gildistöflu fyrir 0 km, 100 km, 200 km og 500 km fyrir bíl í A flokki.

b Teiknaðu graf og settu fram jöfnu fyrir leigu á bíl í flokki A þar sem x er fjöldi km og y heildarkostnaður.

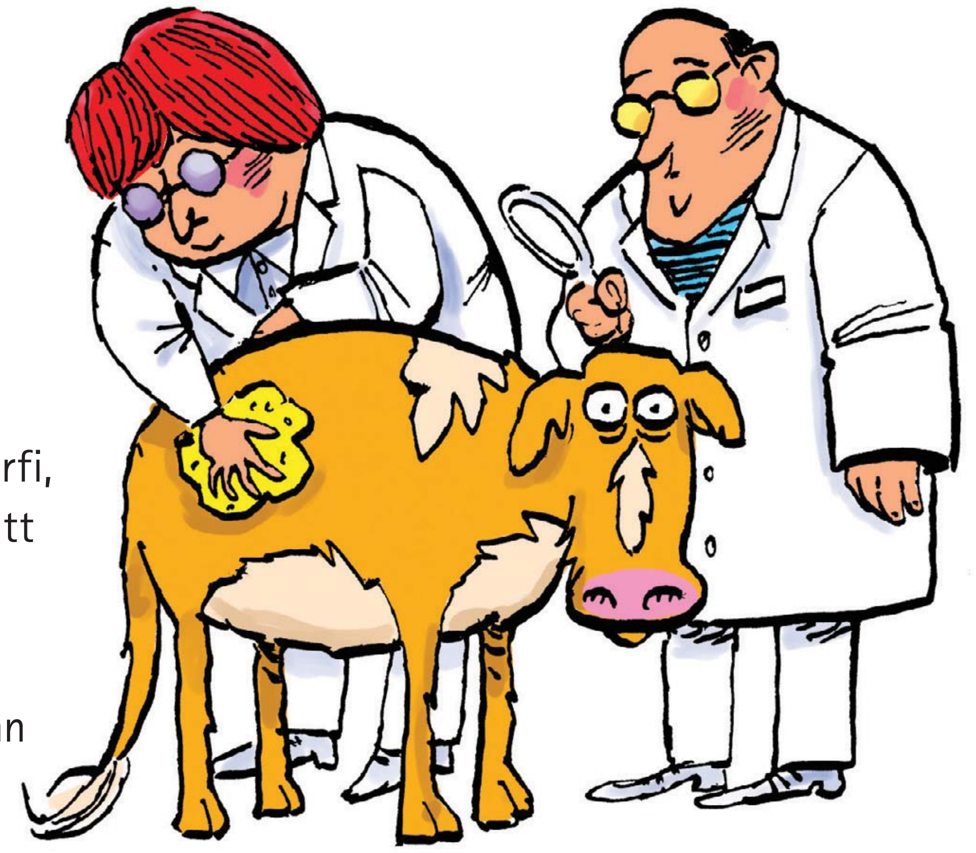
c Búðu til gildistöflu, teiknaðu graf og settu fram jöfnu fyrir bíl í flokki B og C.

d Hvert er verðið í hverjum flokki fyrir sig ef eknir eru 100 km á dag? En 250 km?

e Berðu línuritin saman fyrir bíla í flokki A, B, C.

17 Fræðimenn hafa komist að því að orkunotkun kálfs er í réttu hlutfalli við þyngd hans og það hversu hratt hann hreyfir sig.

Ganga: 0,1 kílókaloría á kílógramm á mínútu.
Hlaup: 0,3 kílókaloríur á kílógramm á mínútu.



a Kálfur er 20 kg. Búðu til tvö gröf í sama hnitakerfi, annað sem sýnir orkunotkun hans á göngu og hitt orkunotkun hans á hlaupum.

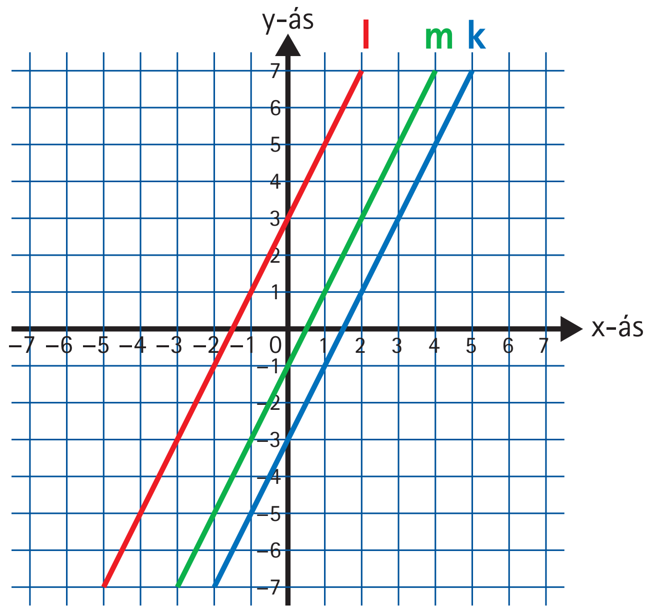
b Hve margar mínútur þarf kálfurinn að hlaupa til að brenna 50 kílókalóríum? En ganga? En ef hann þyngist um 4 kíló?

c Miðað er við að gengið sé á hraðanum 60 metrar á mínútu og að hlaupið sé á hraðanum 240 metrar á mínútu. Orkunotkun er 0,1 kílókaloría á kg á mínútu við göngu en 0,3 kílókaloríur á kg við hlaup. Lýstu sambandinu á milli orkunotkunar og hraða.

d Teiknaðu graf sem lýsir þessu sambandi þar sem x er hraði og y orkunotkun á kílógramm. Hve mikil er orkunotkun á kílógramm ef hraðinn er 100 metrar á mínútu? En ef hraðinn er 300 m?

18 **a** Hvar skera þessar línur y-ásinn?

$y = 2x + 3$ $y = 2x - 1$ $y = 2x - 3$



b Er hægt að sjá hver skurðpunktur við y-ás er með því að skoða jöfnurnar?

19 Skráðu hnit skurðpunkts við y-ás.

a $y = 3x - 3$ **b** $y = 5x + 7$ **c** $y = 4x - 3$ **d** $y = 2x + 4$

20 a Teiknaðu graf fyrir þessar þrjár jöfnur í sama hnitakerfi.

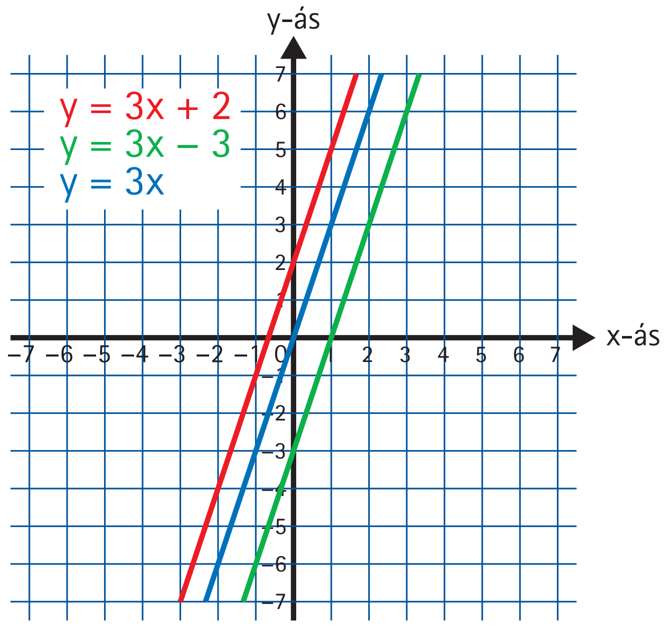
$y = x + 2$ $y = 2x + 2$ $y = 4x + 2$

b Þessar línur skera allar y-ásinn í punktinum (0,2). Hvað greinir þær að?

21 a Hvað eiga þessi gröf sameiginlegt og hvað greinir þau að?

b Hve mikið hækkar y ef x hækkar um einn í jöfnunni $y = 3x + 2$?

c Hve mikið hækkar y ef x hækkar um einn í jöfnunni $y = 3x - 1$?



22 a Teiknaðu gröf fyrir þessar þrjár jöfnur í sama hnitakerfi.

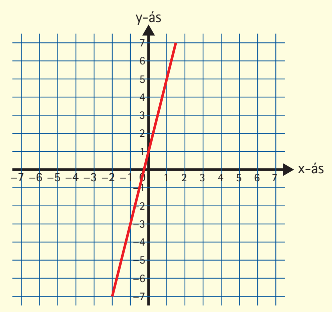
$y = 2x + 1$ $y = 2x + 4$ $y = 2x - 1$

b Hvaða graf er brattast?

c Hve mikið hækkar y ef x hækkar um einn í jöfnunni $2x + 1 = y$?

d En ef x hækkar um einn í jöfnunni $2x - 1 = y$?

Hallatala fyrir beina línu er sú tala sem lýsir breytingu á y-gildi þegar x-gildið hækkar um einn.



23 a Hvernig má lesa út úr jöfnu beinnar línu hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás?

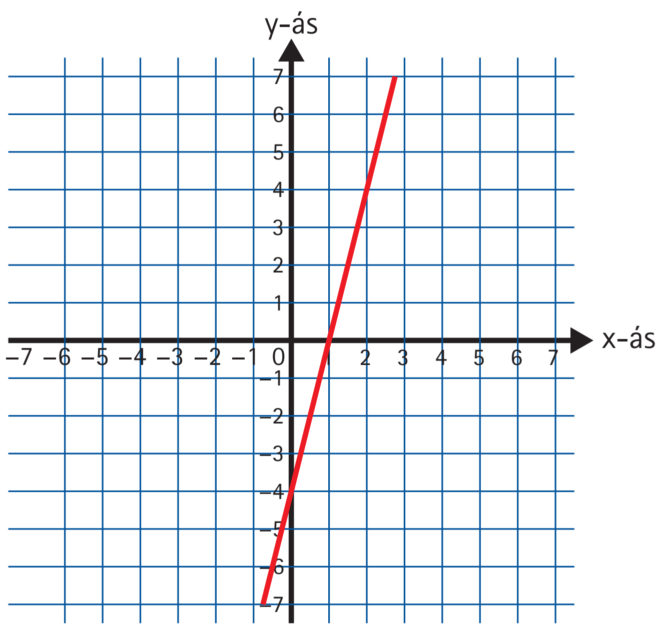
b Hvernig má lesa út úr grafi beinnar línu hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás?

24 Skoðaðu jöfnurnar og gröfin. Skráðu hallatölu og skurðpunkt við y-ás.

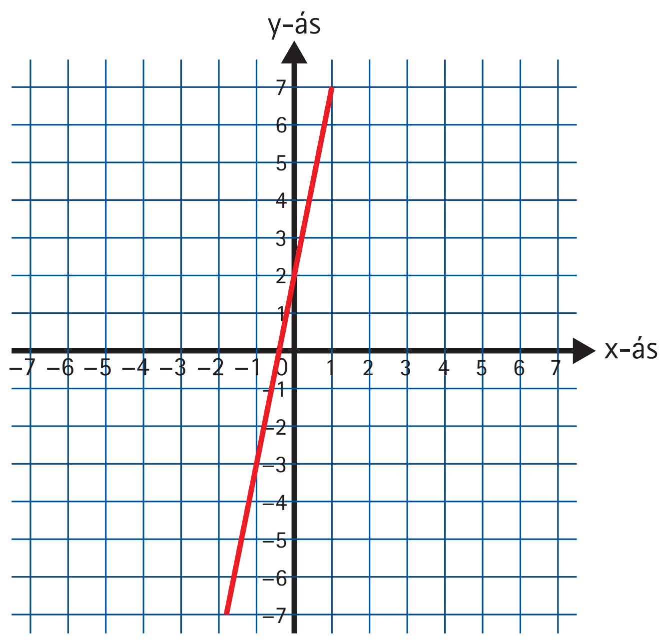
a Jafnan $y = 4x + 5$

c Jafnan $y = 9x + 32$

b



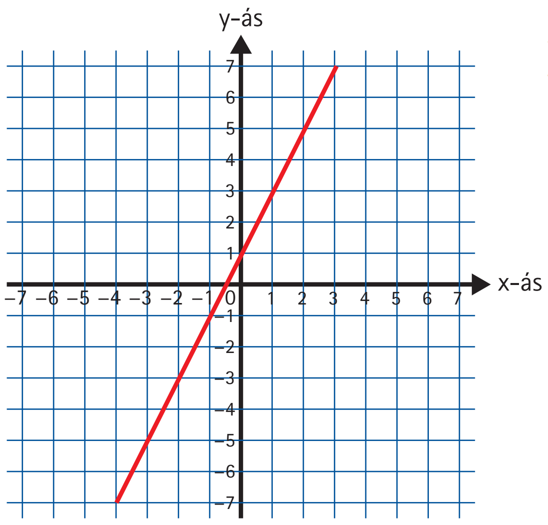
d

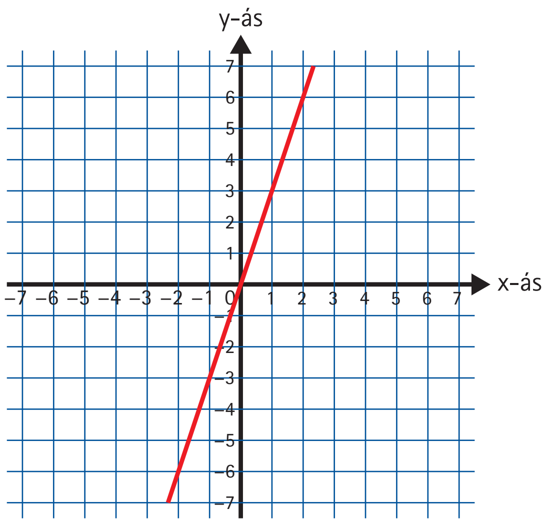


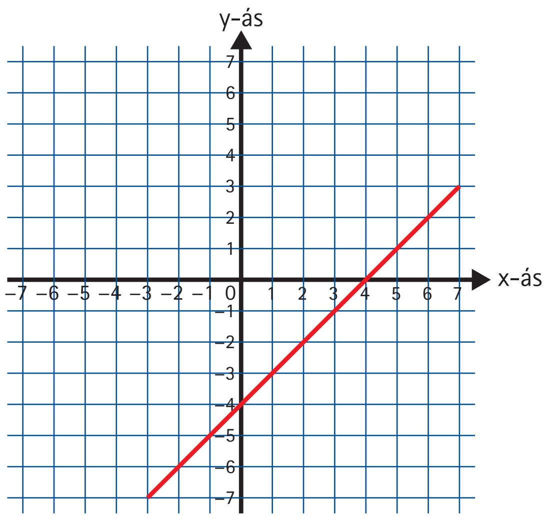
Þú hefur nú séð hvernig nota má jöfnur og gröf til að lýsa sambandi milli stærða í daglegu lífi. Þær jöfnur sem þú hefur skoðað hafa allar verið jöfnur beinnar línu. Þú hefur lært að finna hallatölu beinnar línu sem teiknuð er í hnitakerfi og skurðpunkt hennar við y-ás.

Jafna beinnar línu hefur formið y = ax + b þar sem a og b eru tilteknar tölur en x og y breytur.

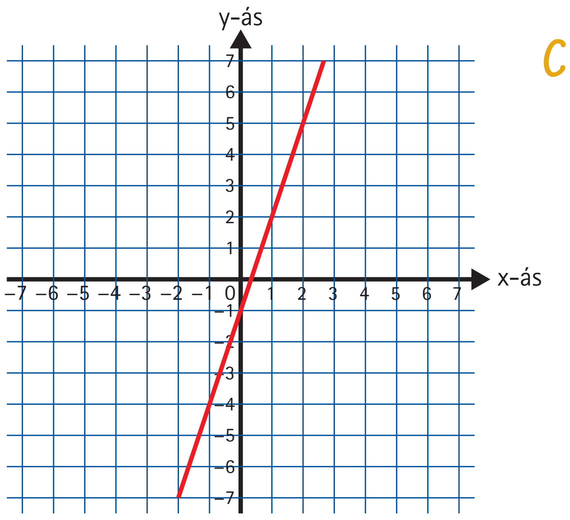
25 Hver er hallatala þessara lína og hver er skurðpunktur þeirra við y-ás?

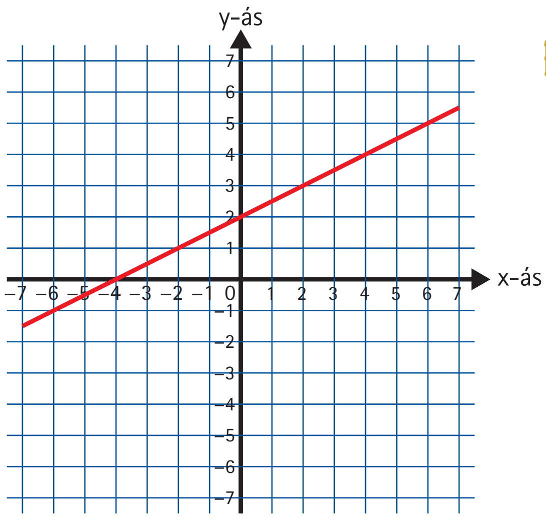
a


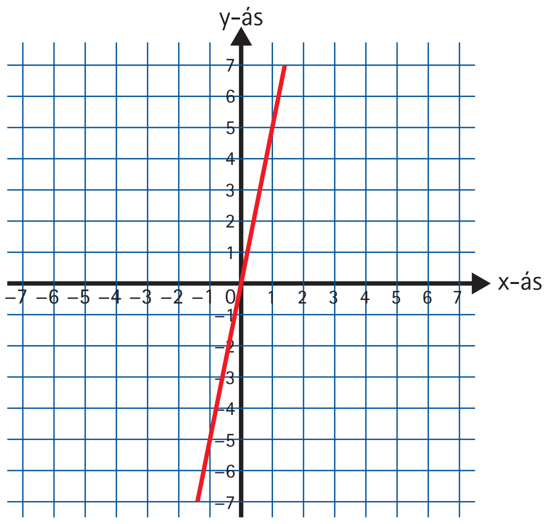
b


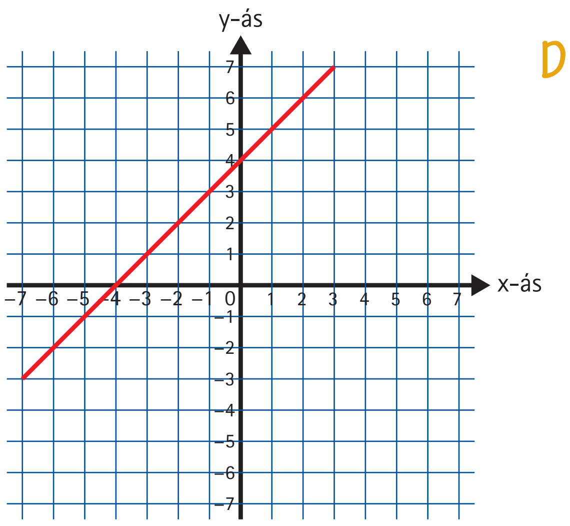
c


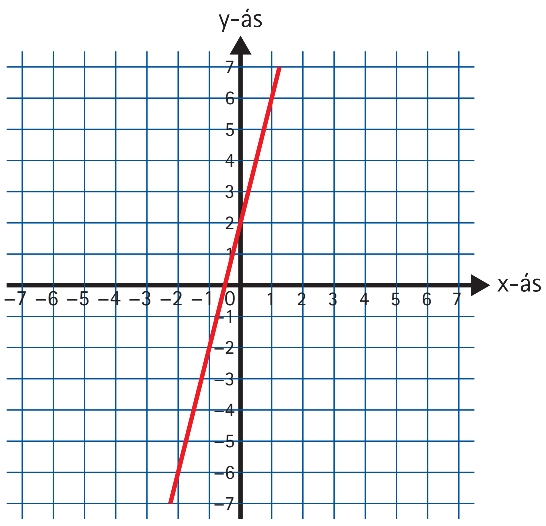
26

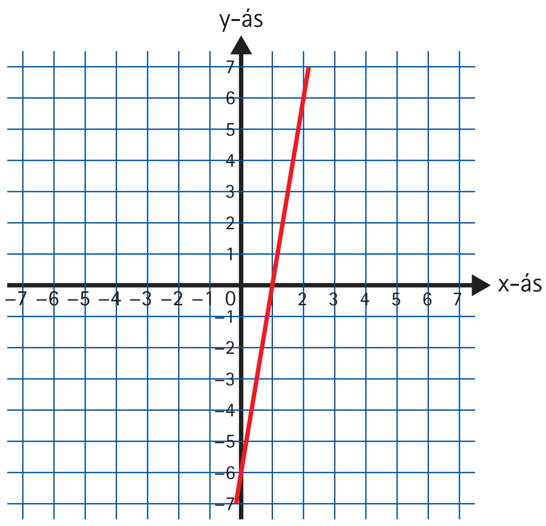
A


C


E


B


D


F


a Skoðaðu gröfin A–F og finndu hallatölu og skurðpunkt við y-ás.

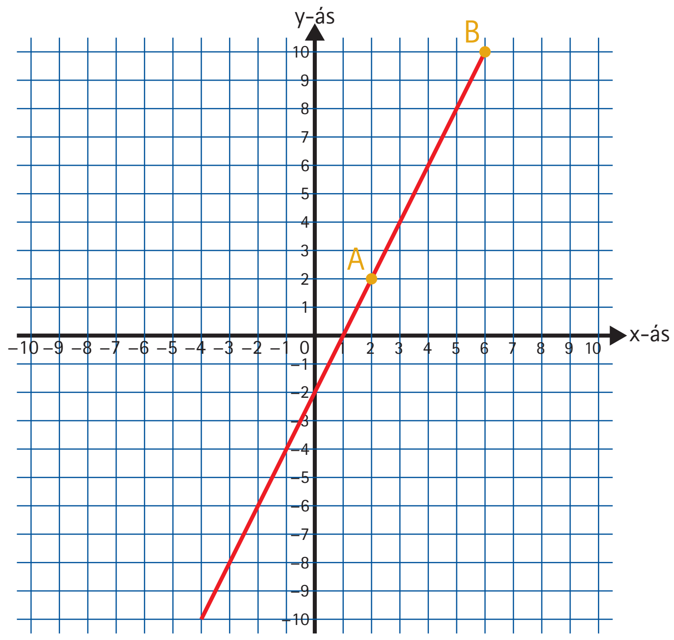
b Skráðu jöfnu hvers þeirra.

c Skoðaðu grafið á mynd B. Hvert er gildi y ef

x = 2 x = 0 x = −2 x = 1 x = 3

27 a Hvaða punktur á grafinu liggur mitt á milli punktanna A og B ?

b Hvaða punkt færðu fram ef þú tekur x-hnit punktanna A og B og finnur meðaltal þeirra og y-hnit punktanna A og B og finnur meðaltal þeirra? Er sá punktur á grafinu?



28 Punktarnir A (1,1) og B (5,17) liggja á grafi jöfnunnar $y = 4x - 3$.

a Finndu miðpunkt striksins AB.

b Punkturinn C (–1,–7) liggur á sama grafi.

c Hver er miðpunktur striksins CA?

d Hver er miðpunktur striksins CB?

29 Punktarnir A (0,6) og B (2,12) liggja á sama grafi.

a Hver er miðpunktur striksins AB?

b Finndu tvo aðra punkta á grafinu og punkt sem er mitt á milli þeirra.

30 Punktarnir A (2,–1) og B (7,19) liggja á sama grafi.

a Hver er miðpunktur striksins AB?

b Finndu tvo aðra punkta á grafinu og punkt sem er mitt á milli þeirra.

31 Punktarnir A (–5,0) og B (–1,4) liggja á sama grafi.

a Hver er miðpunktur striksins AB?

b Finndu tvo aðra punkta á grafinu og punkt sem er mitt á milli þeirra.

32 Lýstu leið sem fara má við að finna miðpunkt striks á grafi í hnitakerfi.

33 Færðu rök fyrir því að nóg sé að þekkja tvo punkta á grafi til að geta sett fram jöfnu ef vitað er að um beina línu sé að ræða.

Graf jöfnu á forminu y = ax + b er alltaf bein lína.
Stærðirnar a og b geta verið hvaða tala sem er, líka 0.
Til eru margs konar jöfnur og ekki verða gröf allra jafna beinar línur.

34 a Skoðaðu þessar jöfnur og finndu hverjar þeirra eru jöfnur beinnar línu. Rökstyddu svar þitt.

$y = 2x + 7$ $\quad$ $y = 3 + x$

$y = 2x$ $\quad$ $y = \frac{1}{x}$

$y = 2x^2$ $\quad$ $y = -x$

b Búðu til gildistöflur og teiknaðu gröf þeirra jafna sem þú telur að séu ekki beinar línur.

c Lýstu sambandinu á milli y og x með orðum.

35 Prófaðu að teikna gröf nokkurra jafna sem þú býrð til með því að nota tölvu, t.d. með forritinu *Flott föll*.

36 Teiknaðu grafið og skráðu jöfnuna.

a Graf sker y-ás í punktinum (0,2) og hallatala þess er 2.

b Graf sker y-ás í punktinum (0,-4) og hallatala þess er 4.

c Graf sker y-ás í punktinum (0,0) og hallatala þess er $\frac{1}{2}$.

37 Punktarnir (2,3) og (5,6) liggja á grafi l sem er bein lína.

a Merktu punktana í hnitakerfið og teiknaðu grafið.

b Finndu jöfnu grafsins.

38 Teiknaðu gröf sem liggja í gegnum þessa punkta og finndu jöfnu þeirra.

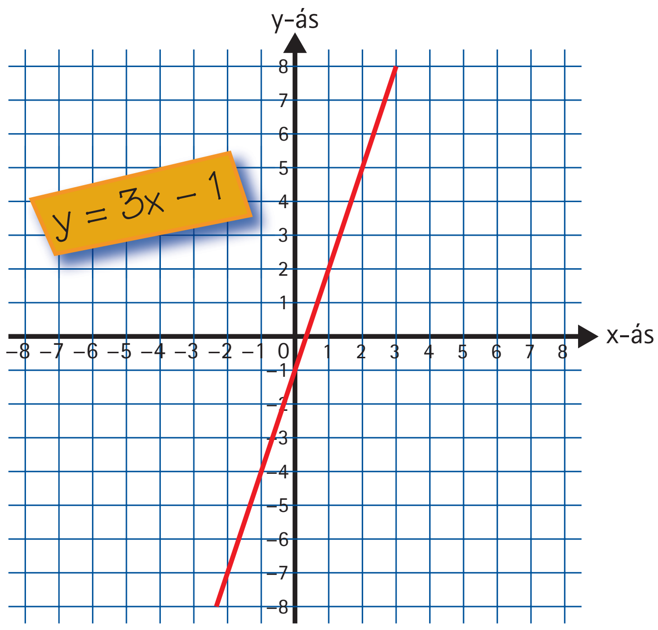
a Grafið m fer í gegnum punktana (4,3) og (6,11).

b Grafið n fer í gegnum punktana (0,4) og (–2,–3).

c Grafið o fer í gegnum punktana (3,6) og (10,6).

39 Nota má gröf til þess að finna lausnir á jöfnum.

Notaðu grafið til að finna lausn jöfnunnar.



a $3x - 1 = 8$

b $3x - 1 = 2$

c $3x - 1 = -7$

d Hvert er gildi y ef x er jafnt og 0?

e Hvert er gildi y ef x er jafnt og –1?

40 Vatn rennur í baðkar með hraðanum 20 lítrar á mínútu. Baðkarið tekur 210 lítra. Vatnsmagnið í baðkarinu má skrá með jöfnunni $y = 20x$.

a Hvað tákna x og y í jöfnunni?

b Hvað er x þegar $y = 210$?

c Hvað er y þegar $x = 6$?

d Eftir hve langan tíma er baðkarið hálffullt?

e Hve mikið er komið af vatni í baðkarið eftir $8\frac{1}{2}$ mínútu?

f Leystu jöfnuna $140 = 20x$.

g Leystu jöfnuna $190 = 20x$.

Tilboð

Allir geisladiskar á **800 kr.**

Sendingarkostnaður **300 kr.** sama hve margir diskar eru keyptir.

41 Fyrirtæki selur geisladiska á Netinu.

a Teiknaðu graf sem sýnir samband kostnaðar (y) og fjölda geisladiska (x).

b Lestu af grafinu lausnir jafnanna.

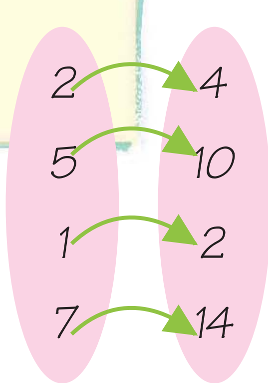
$4300 = 800x + 300$ $6700 = 800x + 300$ $9900 = 800x + 300$

c Sveinlaug keypti 16 geisladiska. Hve mikið þurfti hún að borga?

d Þórður keypti 21 geisladisk. Hve mikið þurfti hann að borga?

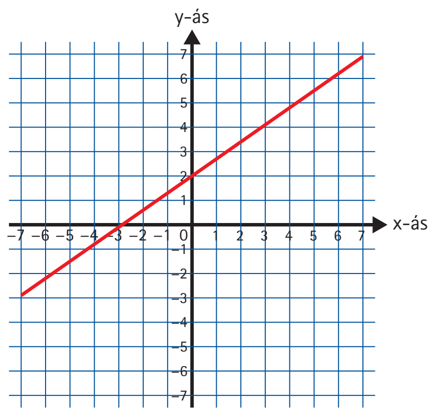
Föll tákna samband milli tveggja breytistærða. Önnur breytan kallast óháða breytan (oftast táknað með x) og hin háða breytan (oftast táknað með y).
Ef óháðu breytunni er gefið tiltekið gildi má finna gildi háðu breytunnar.
Dæmi $y = 2x$
Ef x fær gildið 5 verður gildi háðu breytunnar 10.
Háða breytan er oft kölluð y. Skráningin $y = f(x)$ þýðir að y er fall af x.
Í stað þess að skrá jöfnu sem $y = 2x$ má því skrá jöfnuna sem $f(x) = 2x$.

y er fall af x ef hvert x-gildi gefur aðeins eitt y-gildi.

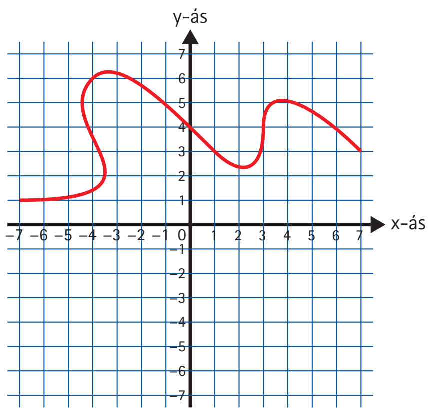


42 Hvor þessara mynda sýnir ekki fall? Rökstyddu svar þitt.

a



b



43 Verð á ýmsum matvörum er reiknað út frá kílóverði.
Þá er verðið háð magni en kílóverðið er föst stærð.
Ef kílóverð á ýsu er 795 krónur er hægt að finna verð fyrir mismunandi magn með fallinu $f(x) = 795\,x$.

a Fyrir hvað stendur óháða breytan? En háða breytan?

b Finndu f(x) ef

$x = 0{,}5$ $x = 3$ $x = 1{,}5$

HÓPVERKEFNI

44 Víða í samfélaginu notar fólk föll í störfum sínum.
Veljið ykkur starfssvið.

- Kjötverslun.
- Blómaverslun.
- Heilsugæslustöð.
- Tölvuviðgerðir.
- Bílaleiga.
- Skólamötuneyti.

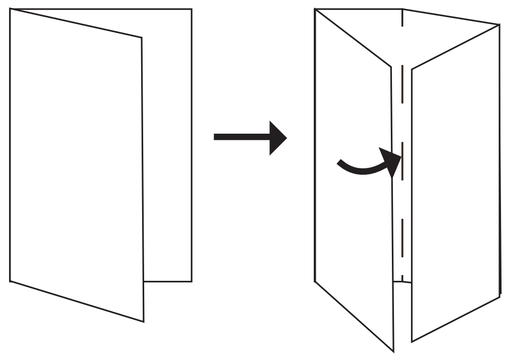
Finnið dæmi um 2–3 föll sem gætu verið notuð af starfsmanni á því sviði.
Setjið hvert fall fram með orðum, jöfnu, töflu og grafi.

Hallandi mávar

Þú getur búið til hallandi máva úr ferningslaga blaði með einföldu pappírsbroti. Ef búnir eru til nokkrir mávar má setja þá saman og búa til ýmiss konar þrívíð form.

① ②

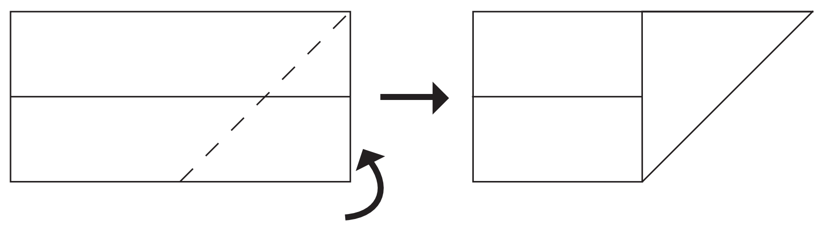
Brjóttu blaðið saman.



Opnaðu það aftur og brjóttu inn að brotinu í miðju.

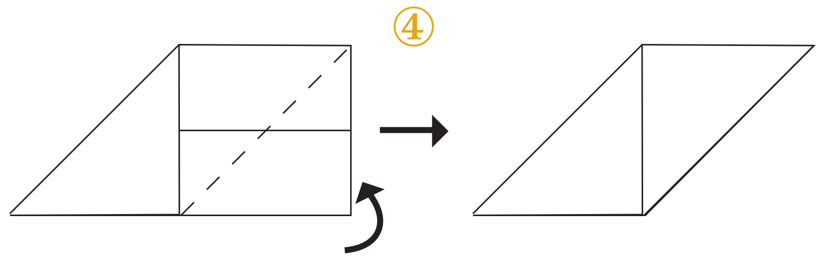
③

Brjóttu neðra hægra hornið upp.



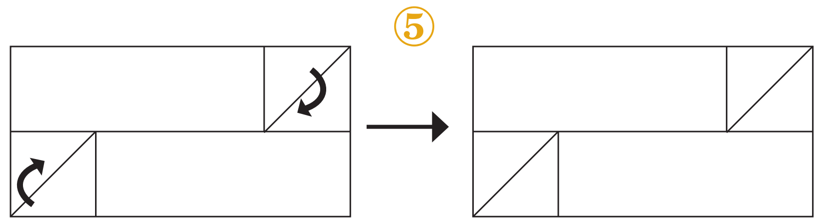
④

Snúðu blaðinu 180 gráður og brjóttu á sama hátt.



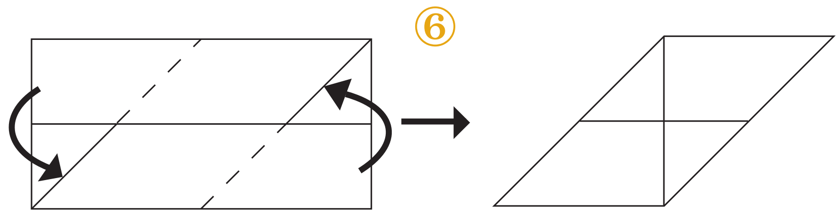
⑤

Opnaðu blaðið aftur og þú sérð að tveir litlir þríhyrndir flipar hafa myndast í efra hægra horni og neðra vinstra horni. Brjóttu þessa flipa til baka og stingdu þeim undir eins og myndin sýnir.



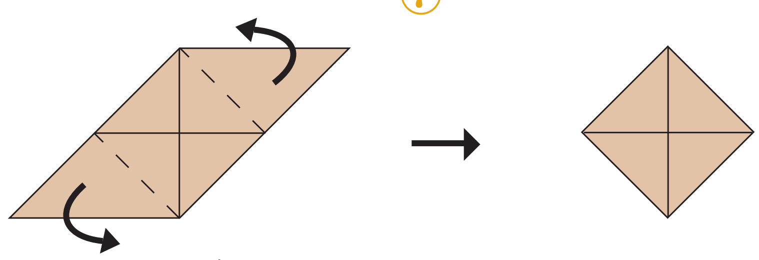
⑥

Brjóttu nú neðra hægra hornið undir flipann fyrir ofan það þar sem þú stakkst þríhyrningnum undir. Snúðu blaðinu 180 gráður og farðu eins að.

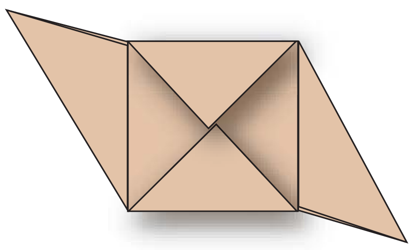


⑦

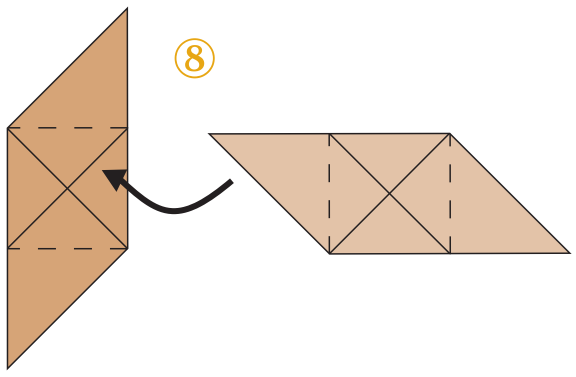
Brjóttu þríhyrndu flipana tvo til baka þannig að þeir brjótist yfir þá hlið ferningsins í miðjunni sem er alveg slétt.



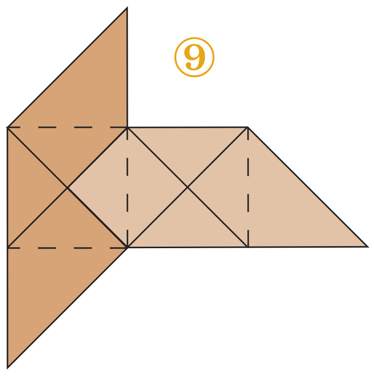
Þú hefur nú lokið við að búa til hallandi máv.



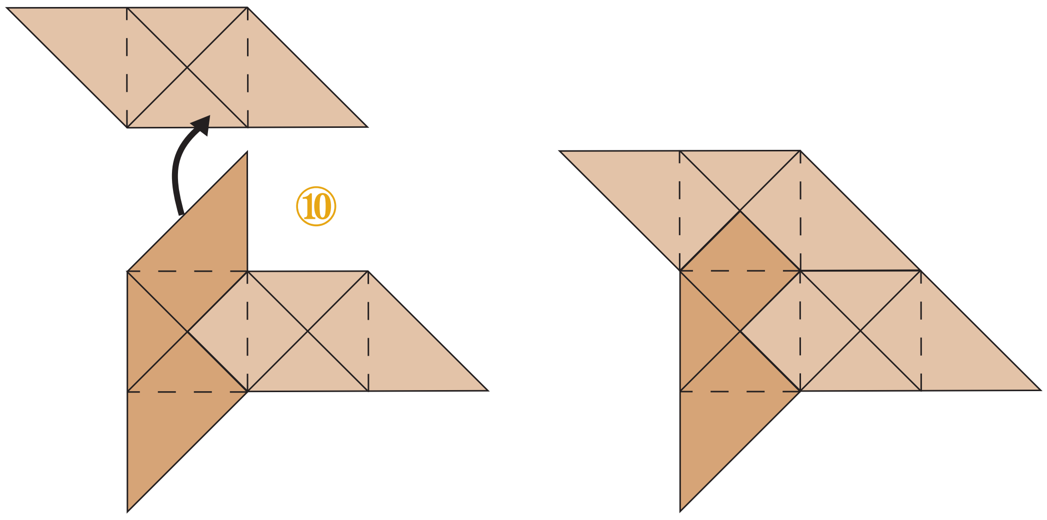
Þríhyrndu fliparnir eru notaðir til að tengja mávana saman. Þeim er smeygt inn í raufarnar sem myndast hafa í ferningnum í miðjunni við brotið.



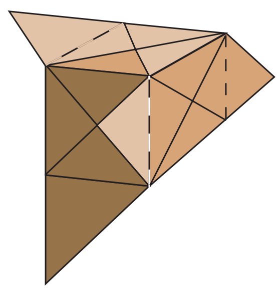
Einfaldast er að búa til tening. Til þess þarf sex hallandi máva. Gott er að byrja á að hafa einn mávinn láréttan og þann næsta lóðréttan og flétta þá saman eins og myndin sýnir.

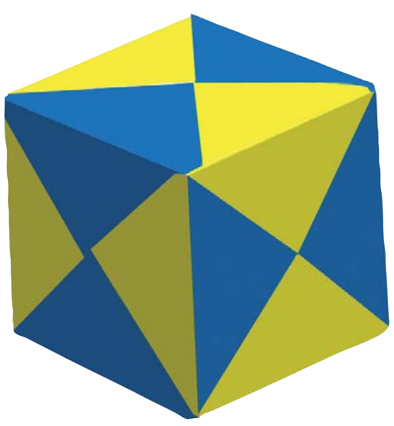


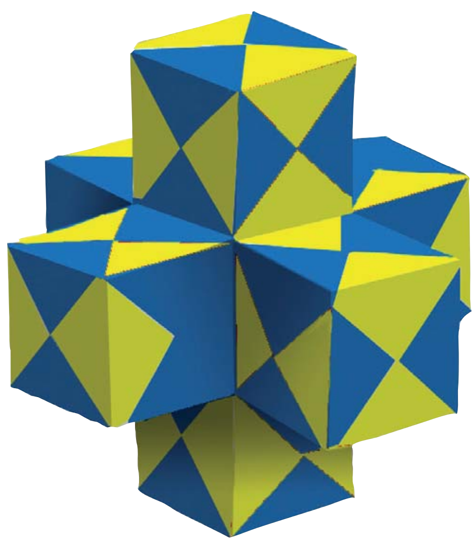
Síðan er þriðja mávinum bætt við og þessir þrír mynda eitt horn og þrjár hliðar teningsins. Síðan má búa til annað horn úr þremur ferningum og tengja þau saman í tening.



Hægt er að búa til margs konar þrívíð form úr hallandi mávum og tengja þau saman á ýmsa vegu. Skemmtilegt er að nota pappír í ýmsum litum.







Talnameðferð

Í stærðfræðinámi skiptir máli að hafa gott vald á tölum og reikniaðgerðum. Þekking á tölum og leikni í meðferð þeirra nýtist í námi í flestum þáttum stærðfræðinnar.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Eflir skilning þinn á helstu reiknireglum, svo sem víxlreglu, tengireglu og dreifireglu.*
- *Öðlist leikni í að reikna með jákvæðum og neikvæðum tölum.*
- *Æfir þig í að nýta þér við útreikninga þekkingu þína á sætiskerfinu, einkennum reikniaðgerðanna og á talnastaðreyndum.*
- *Náir góðu valdi á samsettum útreikningum og forgangsröð aðgerða.*

Samlagning er sú reikniaðgerð sem flestir læra fyrst. Litlir krakkar telja saman og finna út að ef þeir fá fyrst þrjá kubba og svo fjóra eiga þeir samtals sjö kubba. Væntanlega þarft þú ekki að reikna slík dæmi heldur kannt svarið utan að.

1 Skoðaðu dæmin hér fyrir neðan.
Hver þeirra þarftu að reikna? Hvaða svör veistu án þess að reikna?

a 8 + 9 b 15 + 15 c 75 + 125 d 1250 + 1250

Ýmis önnur samlagningardæmi reiknar þú væntanlega í huganum. Hugareikningur er mjög mikilvægur og oft kemur sér vel að vera sleipur í honum.

2 Reiknaðu þessi dæmi í huganum. Skráðu helstu skref sem þú tekur við lausn dæmanna.

a 51 + 52 b 703 + 75 + 97 c 20 350 + 19 650

Við hugareikning umrita margir tölurnar í viðkomandi dæmi upp í tölur sem þeir þekkja og kunna samlagningarstaðreyndir um.
Við reikning á dæmum eins og 51 + 52 segja margir að þeir nýti sér að vita að 50 + 50 eru 100 og 1 + 2 eru 3 og að lokum að 100 + 3 séu 103.

3 Reiknaðu í huganum og skráðu hvaða leið þú fórst.

a $798 + 305 + 32$

b $1250 + 507 + 250$

c $1892 + 108 + 2348 + 37$

d $7 + 2993 + 1292 + 108$

e $25\,973 + 23\,037 + 987$

f $16\,987 + 25\,713 + 268$

g Skoðaðu leið bekkjarfélaga þíns. Ræðið saman um leiðir ykkar.

Til eru nokkrar reiknireglur sem gagnlegt er að þekkja. Víxlregla, tengiregla og dreifiregla eru dæmi um slíkar reglur. Þegar tvær tölur eru lagðar saman skiptir ekki máli hvor talan er á undan. Víxlregla gildir því í samlagningu.

4 Útskýrðu að víxlregla gildi í samlagningu fyrir hvaða tölur sem er.

Víxlregla samlagningar er sett fram á almennu formi sem $a + b = b + a$. Þá eru bókstafirnir a og b notaðir til að tákna að um hvaða tölu sem er geti verið að ræða.

Tengiregla gildir líka í samlagningu. Samkvæmt henni skiptir ekki máli hvaða tvo samliggjandi liði í samlagningardæmi byrjað er að leggja saman. $(a + b) + c = a + (b + c)$

5 Notfærðu þér tengireglu þegar þú reiknar eftirfarandi dæmi.

a $372 + 251 + 49$

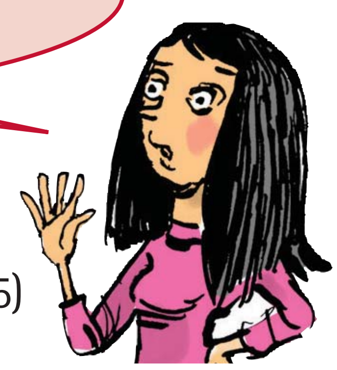
b $621 + 79 + 36$

c $1273 + 1655 + 345$

d $2700 + 2305 + 65$

e $289 + 3892 + 108$

f $(–15) + 234 + 286 + (–15)$



Þekking á **dreifireglu** getur líka komið sér vel. Einhverjum gæti þótt gott að notfæra sér að skoða hvort tölur í samlagningardæmi hafi sameiginlega þætti. Það er til dæmis þægilegt að reikna dæmið $18 + 27$ með því að taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga. $9(2 + 3) = 9 \cdot 5 = 45$.

6 Sýndu fram á hvernig nota má dreifireglu til að reikna eftirfarandi dæmi.

a $56 + 16$

b $44 + 66$

c $28 + 49$

Talan núll er hlutleysa í samlagningu. Það þýðir að ef notuð er samlagning skiptir ekki máli hvort talan 0 er lögð við tiltekna tölu. Segja má að talan 0 sé hlutlaus hvort sem hún er vinstra megin eða hægra megin við samlagningarmerkið. Hlutleysu fyrir samlagningu má skilgreina á eftirfarandi hátt: A er mengi talna sem leggja má saman og fá alltaf út tölu sem líka er í menginu. Þá gildir fyrir töluna 0 og sérhvert annað stak a í menginu að:

$0 + a = a \qquad a + 0 = a$

Talan 0 kallast **hlutleysa** í menginu A með tilliti til samlagningar.

7 Lestu skilgreininguna vel. Skilgreiningar eru yfirleitt orðaðar á knappan hátt og áhersla lögð á að afmarka skýrt. Til að efla skilning sinn á inntaki skilgreininga er oft gott að umorða þær. Útskýrðu með eigin orðum hvað samlagningarhlutleysa er.

8 Hvaða tala er hlutleysa í samlagningu?

Allar ræðar tölur eiga sér samlagningarandhverfu. Talan 7 er samlagningarandhverfa tölunnar –7 og talan –2 er samlagningarandhverfa tölunnar 2. Hugtökin hlutleysa og andhverfa eru oft notuð þegar rætt er um einkenni reikniaðgerða. Hugtökin eru tengd því að ef einhver tala og samlagningarandhverfa hennar eru lagðar saman kemur samlagningarhlutleysan fram. $7 + (-7) = 0$ og $-2 + 2 = 0$

9 Hver er samlagningarandhverfa talnanna?

a 3 b –3 c 36 d $\frac{2}{5}$ e 2367 f –7,5

10 Fyrir hvaða tölu eru eftirfarandi tölur samlagningarandhverfur?

a –23 b 4 c $-\frac{3}{4}$ d 25 e –3,45 f 12,6

Í talnamenginu Z eru allar heilar tölur, bæði jákvæðar og neikvæðar. Hægt er að leggja þær saman og verður summa þeirra alltaf í menginu Z.

11 Reiknaðu.

a $2 + (-5)$ c $-3 + (-4)$ e $34 + 234$ g $34 + (-234)$

b $0 + (-3)$ d $-6 + 8$ f $-34 + 234$ h $-34 + (-234)$

12 Kemur fram jákvæð eða neikvæð tala ef lagðar eru saman

a tvær jákvæðar heilar tölur?

b ein jákvæð og ein neikvæð heil tala?

c tvær neikvæðar heilar tölur?

13 Reiknaðu.

a $4 + 5{,}3 + (-4{,}3)$

c $-\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$

e $367 + (-231) + (-256) + 700$

b $-23 + 45 + (-1{,}9)$

d $\frac{5}{6} + (-\frac{1}{3}) + 1$

f $-258 + (-362) + 498 + 122$

14 Hvað hefur áhrif á hvort summa nokkurra talna er jákvæð eða neikvæð tala?

15 Í hvaða talnamengi rúmast allar tölurnar í dæmi 13?

Í daglegu lífi þarf fólk oft að leggja saman. Iðulega er nóg að námunda til að geta áætlað t.d. hvort rétt er reiknað eða um það bil hve mikið þarf af tilteknu efni.

16 Nefndu dæmi um aðstæður í daglegu lífi þar sem þú telur nægilegt að námunda.

17 Námundaðu að næsta hundraði og reiknaðu.

a $290 + 325$

b $2921 + 8211 + 7854$

c $278 + 3992 + 59$

18 a Við hvaða tölu er miðað þegar ákveðið er hvort hækka eigi upp eða lækka niður þegar námundað er að næsta hundraði?

b En þegar námundað er að næsta þúsundi?

19 Námundaðu að næstu heilu tölu og reiknaðu.

a $5{,}4 + 5{,}5$

c $5{,}35 + (-3{,}7) + 7{,}8 + (-5{,}1)$

e $\frac{4}{5} + \frac{5}{4}$

b $7{,}1 + 2{,}9$

d $-4{,}5 + 8{,}3 + 4{,}8 + (-3{,}8)$

f $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{10}$

20 Hvort er summa hærri eða lægri en 5?

a $2{,}5 + 3{,}6 + (-2{,}7)$

b $6\frac{3}{4} + (-2\frac{4}{7}) + 1$

c $3{,}7 + (-2\frac{3}{5}) + 3{,}9$

21 Notaðu vasareikni og reiknaðu dæmi 20 nákvæmlega. Skráðu hve langt frá 5 summan var í hverju tilviki.

Með því að nota reikniaðgerðina frádrátt er auðvelt að átta sig á hve mikið verður eftir ef eitthvað er tekið frá. Frádrætti er líka beitt til að finna út hve mikið vantar upp á og til að bera saman stærðir. Dæmin 60 – 12 = x og 12 + x = 60 eru í raun sama dæmi þar sem ólíkum leiðum er beitt. Þessi dæmi gætu verið skráning á hugsun Mána um svarið við spurningunum.

- Hve mikið á Ólafía eftir ef hún eyðir 12 af 60 krónum sínum?
- Hve mikið vantar upp á að Ólafía eigi 60 krónur ef hún á 12 núna?
- Hve miklu munar á peningaeign Ólafíu sem á 12 krónur og Elmars sem á 60 krónur?

22 Skoðaðu dæmin um Ólafíu og Elmar. Hvernig myndir þú skrá dæmin með tölum og táknum?

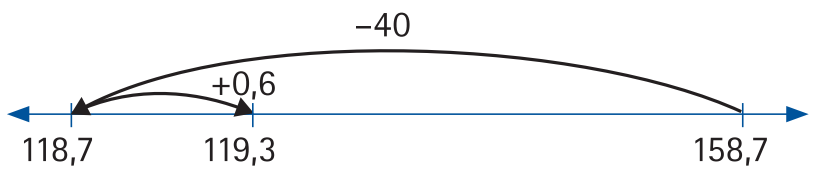
23 Skoðaðu dæmin og flokkaðu þau eftir því hvort þú kannt svörin eða myndir reikna þau.

a 10 – 3	d 1000 – 750	g 6347 – 6000
b 245 – 67	e 1111 – 999	h 17 – 9
c 2 – 5	f 1 milljón mínus hálf milljón	i bættu við þremur dæmum í hvorn flokk

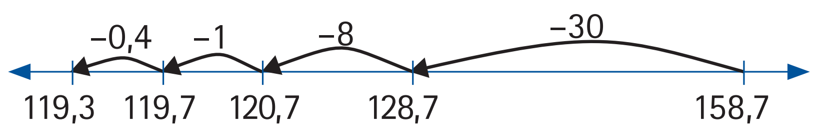
Ef lítill munur er á tölum í frádráttardæmum finnst mörgum þægilegt að telja á fingrum sér. Þið hafið væntanlega kynnst ýmsum fleiri hjálpargögnum sem nota má við frádrátt svo sem hundraðrúðuneti, sætisgildiskubbum, talnalínum og vasareiknum. Einnig hafið þið lært að nota mismunandi leiðir við frádrátt. Margir eiga sér sína uppáhaldsleið þó segja megi að engin ein leið sé alltaf best.

24 Hvaða aðferð myndir þú nota til að reikna dæmið 583,3 – 274,8?

25 a Hvaða dæmi er verið að reikna? Skráðu hvert skref og útkomu úr því.



b Hvor leiðin finnst þér rökréttari?



c Hvor leiðin finnst þér fallegri?

26 a Sýndu fram á það með nokkrum talnadæmum að víxlreglan gildir ekki um frádrátt.

b Sýndu á talnalínu að $3 - 6$ er ekki skráning á sömu stærð og $6 - 3$.

27 Gildir tengiregla í frádrætti? Rökstyddu svar þitt með því að gefa nokkur dæmi.

Víxlregla gildir í samlagningu en ekki í frádrætti.
$a + b = b + a$
$a - b \neq b - a$

28 Reiknaðu.

a $52 - 13 - 8$ **c** $175 - 45 - 65$ **e** $-56 - 44 - 32$ **g** $4 - 5 - 2$

b $52 - (13 - 8)$ **d** $175 - (45 - 65)$ **f** $-56 - (44 - 32)$ **h** $4 - (5 - 2)$

Dreifireglu er ekki oft beitt við frádrátt. Dæmi eins og $52 - 39$ má þó reikna með því að finna sameiginlega þáttinn 13 og skrá $13(4 - 3) = 13 \cdot 1 = 13$.

Dreifireglu er oft beitt þegar reiknað er með margfeldi af 10 eða 100. Margir nýta sér að vita að $3 - 2 = 1$ þegar þeir reikna $300\,000 - 200\,000$ eða $0{,}03 - 0{,}02$.

29 Sýndu hvernig nota má dreifireglu við að reikna dæmin.

a $35\,000 - 29\,000$ **b** $72 - 45$ **c** $32 - 24$ **d** $15 - 25$

30 Rökstyddu fullyrðinguna: Það er engin hlutleysa í frádrætti.

31 Á talan -5 sér frádráttarandhverfu? Rökstyddu svar þitt.

32 Berðu saman dæmin $-8 - 5$ og $8 - 5$.

33 Oft er gott að grípa til námundunar. Námundaðu að einum aukastaf og reiknaðu dæmin.

a $43{,}58 - 34{,}32$ **b** $6{,}3 - 2{,}1256$ **c** $-2{,}48 - 3{,}732$ **d** $-12{,}821 - 9{,}837$

34 Finndu mismun talnanna.

a -4 og -8 **b** -13 og 97 **c** -15 og -7 **d** -39 og -42

35 Reiknaðu hve mikið vantar upp á að

a -12 verði 60 **b** -60 verði -12 **c** -8 verði 0 **d** -235 verði -36

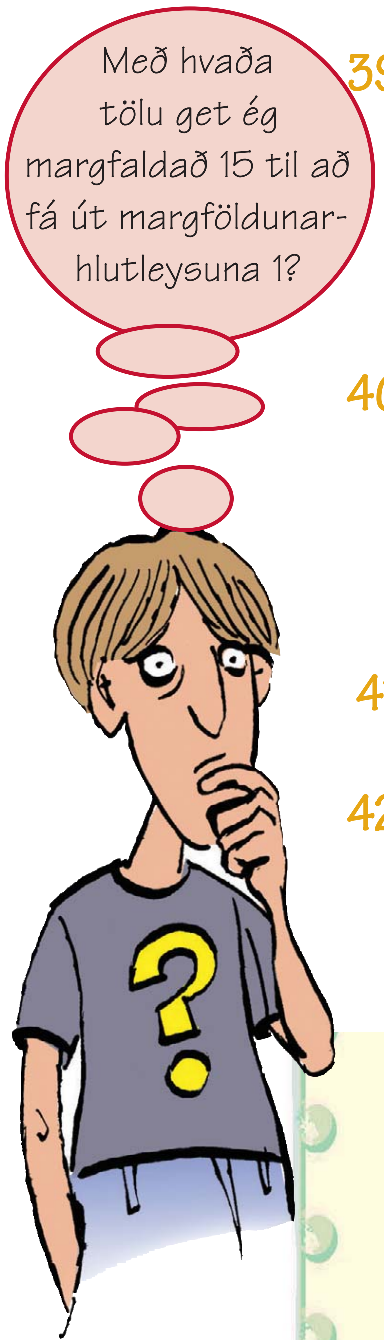
36 Hve mikið er eftir af skuld Hönnu ef hún greiðir 25 000 krónur upp í skuldina?

a $-35\,000$ kr. **b** $-278\,450$ kr. **c** $-28\,000$ kr. **d** $-69\,999$ kr.

37 Margföldun er oft skilgreind sem endurtekin samlagning. **Víxlregla**, **tengiregla** og **dreifiregla** gilda í margföldun eins og í samlagningu. Útskýrðu hverja reglu og gefðu dæmi sem sýna að þær gildi í margföldun.

Talan einn er hlutleysa í margföldun. Það er sama hvaða tölu þú margfaldar með einum, svarið verður alltaf talan sjálf. Það skiptir heldur ekki máli hvort þú margfaldar einhverja tölu með einum eða einn með tölunni, margfeldið verður það sama. Ef bókstafurinn a stendur fyrir hvaða tölu sem er þá gildir að $1 \cdot a = a$ og $a \cdot 1 = a$.

38 Skráðu fjögur margföldunardæmi þar sem sést að nota megi víxlreglu með hlutleysunni. Notaðu bæði heilar tölur og brot.



39 a Margföldun er aðgerð sem á sér hlutleysu. Ef ræð tala er margfölduð með andhverfu sinni kemur hlutleysan fram. Sýndu þrjú dæmi um það.

b Skoðaðu dæmi bekkjarfélaga þinna. Hvað einkennir margföldunarandhverfur ykkar?

40 Finndu margföldunarandhverfu talnanna.

a 8	c 14	e 49	g $\frac{1}{6}$	i $\frac{1}{3}$
b 12	d 3	f 25	h $\frac{1}{101}$	j $\frac{2}{3}$

41 Hvað einkennir margfeldi af 0?

42 Námundaðu að næstu heilu tölu og margfaldaðu.

a $7{,}3 \cdot 8{,}98$ b $12{,}9 \cdot 9{,}8$ c $0{,}8 \cdot 3{,}2$ d $24{,}5 \cdot 49{,}75$ e $125{,}3 \cdot 25{,}2$

Við námundunarreikning er oft hentugt að reikna í skrefum. Þá getur stundum verið þægilegt að skrá tölur á staðalformi. Skoðaðu þessa aðferð. Reikna á dæmið $23{,}2 \cdot 312{,}6$.

$2{,}32 \cdot 10^1$ $3{,}126 \cdot 10^2$ Fyrst eru tölurnar skrifaðar á staðalformi.

$2{,}32 \cdot 3{,}126 \approx 6$ og svolítið meira eða um það bil 7

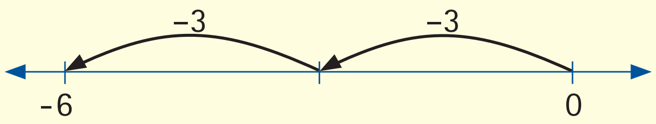
$10^1 \cdot 10^2 = 10^3 = 1000$

Námundunin verður því $23{,}2 \cdot 312{,}6 \approx 7 \cdot 1000 \approx 7000$

43 Reiknaðu með því að skrá á staðalformi.

a $52{,}6 \cdot 5{,}9$ b $39{,}7 \cdot 51{,}3$ c $315{,}3 \cdot 0{,}4$ d $0{,}35 \cdot 8254{,}3$

Allar tölur er hægt að margfalda saman.
Í námsefni fyrri ára hefur verið fjallað um margföldun jákvæðra heilla talna og brota.

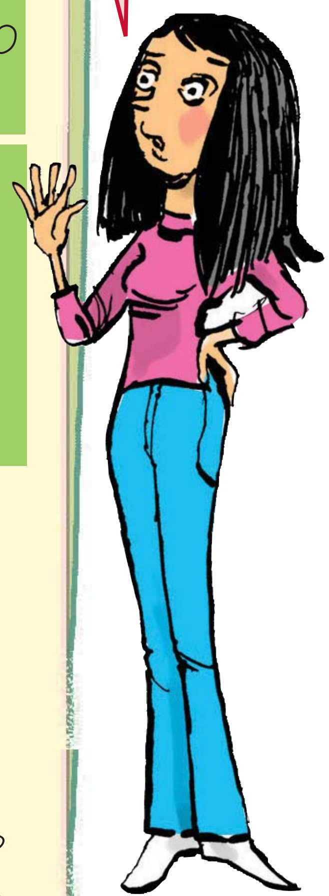


Einnig hefur þú væntanlega kynnst dæmum á borð við $2 \cdot (-3)$. Hvort kemur út jákvæð eða neikvæð tala ef þú margfaldar saman neikvæða og jákvæða tölu?

44 Reiknaðu á talnalínu. Merktu dæmin þar sem þú notfærir þér víxlreglu.

a $2 \cdot (-5)$	c $6 \cdot (-7)$	e $-4 \cdot 5$	g $-8 \cdot 3$
b $3 \cdot (-4)$	d $3{,}7 \cdot (-10)$	f $-10 \cdot 5{,}4$	h $4 \cdot (-9)$

45 Ef margfaldaðar eru saman tvær jákvæðar tölur kemur alltaf út jákvæð tala. Skoðaðu svör þín við dæmi 44. Þar margfaldaðir þú saman jákvæða og neikvæða tölu. Eru öll svörin annaðhvort jákvæðar eða neikvæðar tölur?



Reikniregla fyrir margföldun tveggja neikvæðra talna segir:

Margfeldi tveggja neikvæðra talna er jákvæð tala.

Mörgum finnst það skrýtið að tvær neikvæðar tölur geti orðið að jákvæðri tölu.

Skoðaðu útreikningana og áttaðu þig á hvaða reglur eru notaðar í hverju skrefi.

Við útreikningana eru notaðar eftirfarandi reglur:

1. Núll sinnum hvaða tala sem er verður alltaf 0. Til dæmis: $0 \cdot 12 = 0$

2. Núll má skrifa sem töluna a lagða við andhverfu sína. $a + -a = 0$ Til dæmis: $4 + -4 = 0$

3. Dreifiregla. Ef margfalda á liðastærð með tiltekinni tölu þarf að margfalda alla liði með tölunni. Til dæmis: $2(4 + x + 2y) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot y = 8 + 2x + 4y$

Útreikningar:

$$0 = -2 \cdot 0$$
$$0 = -2 \cdot (4 + (-4))$$
$$0 = -2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-4)$$
$$0 = -8 + (-2) \cdot (-4)$$

Hér má sjá að ef leggja á tölu við -8 og fá út 0 verður $-2 \cdot (-4)$ að vera 8.

46 Notaðu útskýringarnar hér að ofan til að sýna fram á að það hljóti að vera regla að margfeldi tveggja neikvæðra talna sé alltaf jákvæð tala.

47 Skoðaðu listana og bættu fjórum liðum við.

Þrítaflan	Fimmtaflan	Sextaflan
.	.	.
.	.	.
$2 \cdot (-3) = -6$	$2 \cdot (-5) = -10$	$2 \cdot (-6) = -12$
$1 \cdot (-3) = -3$	$1 \cdot (-5) = -5$	$1 \cdot (-6) = -6$
$0 \cdot (-3) = 0$	$0 \cdot (-5) = 0$	$0 \cdot (-6) = 0$
$-1 \cdot (-3) = 3$		

Önnur leið til að skoða margfeldi tveggja neikvæðra talna er að búa til lista.

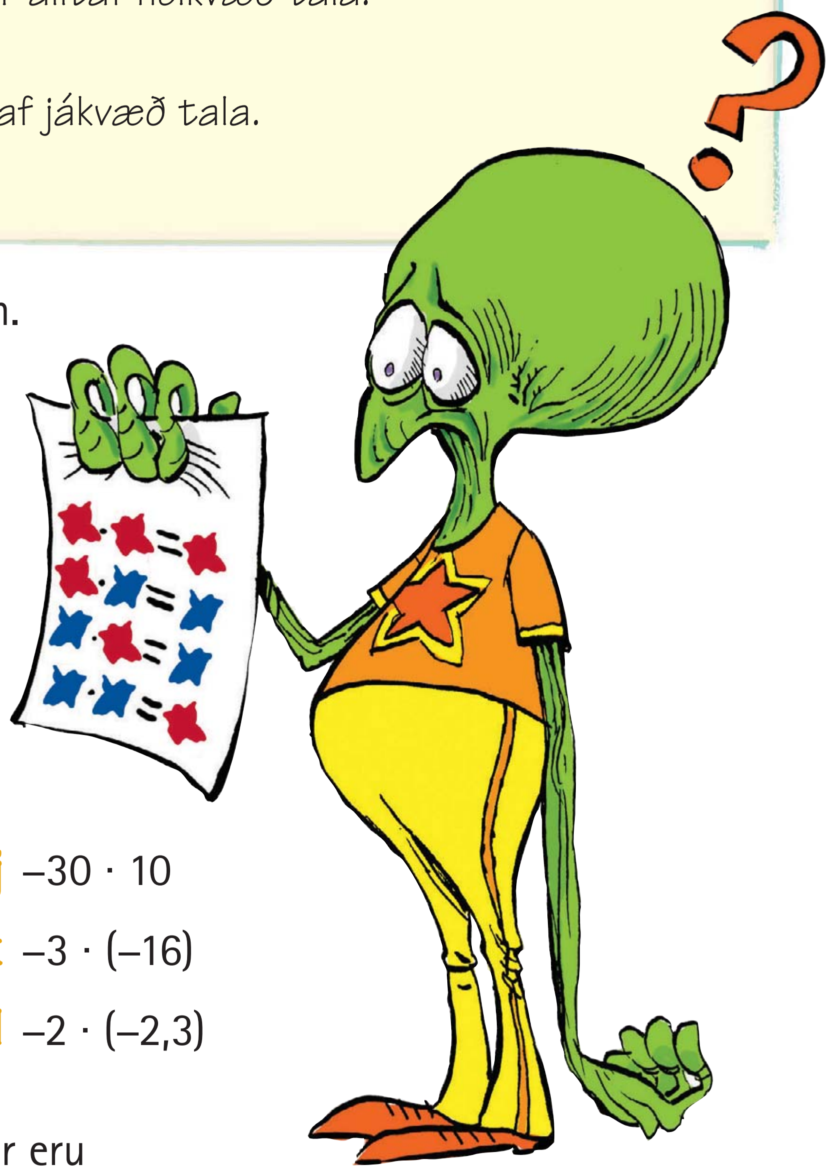
Margfeldi tveggja jákvæðra talna er alltaf jákvæð tala. $2 \cdot 2 = 4$ $3{,}2 \cdot 2 = 6{,}4$

Margfeldi jákvæðrar og neikvæðrar tölu er alltaf neikvæð tala.

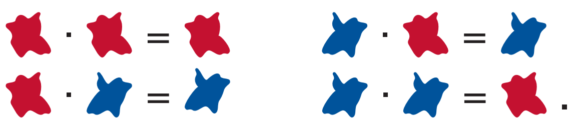
$2 \cdot (-2) = -4$ $-3{,}2 \cdot 2 = -6{,}4$

Margfeldi tveggja neikvæðra talna er alltaf jákvæð tala.

$-2 \cdot (-2) = 4$ $-3{,}2 \cdot (-2) = 6{,}4$



48 Þú hittir geimveru á ferð þinni um bæinn.
Hún er með blað sem á stendur:



Geimveran spyr: Hvað þýðir þetta?
Svaraðu spurningunni og útskýrðu eins nákvæmlega og þú getur.

49 Reiknaðu.

a $17 \cdot (-3)$ d $12 \cdot 5$ g $4{,}5 \cdot (-3)$ j $-30 \cdot 10$

b $-8 \cdot (-7)$ e $-12 \cdot (-5)$ h $-4 \cdot (-8)$ k $-3 \cdot (-16)$

c $-4 \cdot 2{,}5$ f $12 \cdot (-5)$ i $-6 \cdot 15$ l $-2 \cdot (-2{,}3)$

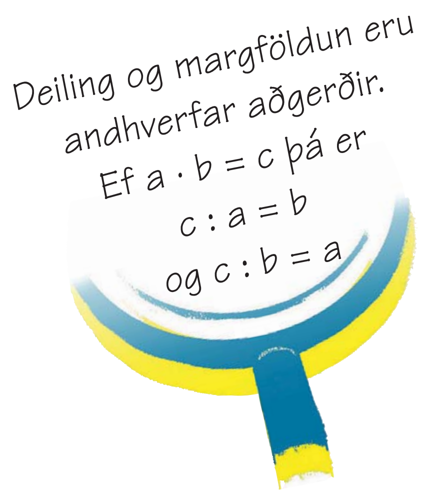
50 Ef tala og margföldunarandhverfa hennar eru margfaldaðar saman kemur margföldunarhlutleysan út.

a Hvaða tala er hlutleysa í margföldun?

b Sýndu þrjú dæmi um að margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar sé margföldunarhlutleysan.

51 Finndu margföldunarandhverfur.

a 17 b 245 c 6 d $\frac{1}{8}$ e $\frac{4}{5}$ f $\frac{12}{5}$



Neikvæðar tölur eiga sér líka margföldunarandhverfur.

52 Finndu margföldunarandhverfur.

a -3 b $-\frac{1}{4}$ c -17 d $-3{,}5$ e $-\frac{4}{5}$ f -1

53 Sýndu nokkur talnadæmi þar sem fram kemur að deiling og margföldun séu andhverfar aðgerðir.

54 Vanda ætlar að skreyta íþróttasvæði með 325 blöðrum. Hún hefur gleymt gastækinu heima og þarf að finna krakka til að blása upp allar þessar blöðrur. Hvað þarf marga krakka í verkið? Sýndu nokkur mismunandi deilingardæmi fyrir ólíkan fjölda af krökkum.

55 Deilingu jákvæðra talna má bæði líta á sem endurtekinn frádrátt og skiptingu.

a Búðu til tvö deilingardæmi þar sem eðlilegt er að horfa á deilinguna sem endurtekinn frádrátt.

b Búðu til tvö deilingardæmi þar sem eðlilegt er að horfa á deilinguna sem skiptingu.

56 Sýndu fram á að einn sé ekki hlutleysa í deilingu.

57 Sunna fullyrðir að víxlregla og tengiregla gildi í deilingu. Sýndu með mótdæmum að hvorug þessara reglna gildi í deilingu.

58 Reiknaðu.

a $24 : 4 : 2$ b $24 : (4 : 2)$ c $42 : 3 : 2$ d $99 : 11 : 3 : 3$ e $2 : 3$

Samlagningu, frádrætti og margföldun má beita á hvaða tölur sem er. Það gildir ekki um deilingu. Þar kemur upp vandamál með töluna 0. Ef litið er á deilingu sem endurtekinn frádrátt er búið að deila þegar útkoman er orðin núll. Ómögulegt er að draga núll endurtekið frá tölu þannig að núll komi út. Sama vandamál kemur upp ef litið er á deilingu sem skiptingu. Ekki er hægt að skipta 8 bílum í 0 staði. Þetta þýðir að ekki er hægt að deila með núlli.

59 Hvers vegna er hægt að deila með 0,01 og $-0{,}01$ en ekki 0?

60 Hvað kemur út ef deilt er í núll? $0 : 5$ $0 : 100$ Útskýrðu svar þitt.

HÓPVERKEFNI

61 Skoðið á vasareikni hvað gerist ef neikvæðri tölu er deilt í jákvæða tölu. Prófið a.m.k. 8–10 dæmi. Skráið dæmin og svör við þeim. Prófið stórar tölur og brot.

Skoðið á sama hátt hvað gerist ef jákvæðri tölu er deilt í neikvæða tölu.

Ef jákvæðri tölu er deilt í jákvæða tölu kemur alltaf jákvæð tala út. Hvað teljið þið að gerist ef neikvæðri tölu er deilt í neikvæða tölu?

Berið saman margföldun og deilingu með jákvæðum og neikvæðum tölum. Setjið fram reiknireglur fyrir margföldun og deilingu með jákvæðum og neikvæðum tölum.

62 Námundaðu að næsta tug og reiknaðu.

a 367 : 12 **b** 4578 : 21 **c** 12 341 : 19 **d** 79 997 : 39 **e** 263 996 : 62

63 Námundaðu að næstu heilu tölu og reiknaðu.

a 9,1 : 2,9 **b** $\frac{9}{5}$: 2,1 **c** 3,2 : 1,1 **d** 124,9 : 25,1 **e** 325,3 : 31,9

64 a Reiknaðu dæmi 63 með vasareikni og námundaðu svörin að næstu heilu tölu.

b Berðu svörin í dæmum 63 og 64 saman.

Við námundunarreikning er oft hentugt að reikna í skrefum. Skoðaðu þessa aðferð.
Reikna á dæmið 312,6 : 23,2.
Fyrst eru tölurnar skrifaðar á staðalformi. $3{,}126 \cdot 10^2$ $2{,}32 \cdot 10^1$
$3{,}126 : 2{,}32 \approx 1{,}5$
$10^2 : 10^1 = 10^1 = 10$
Námundunin verður því $312{,}6 : 23{,}2 \approx 1{,}5 \cdot 10 \approx 15$

65 Prófaðu þessa aðferð.

a 52,6 : 5,9 **b** 399,7 : 51,3 **c** 315,3 : 0,4 **d** 8254,3 : 0,35

66 Í dæmi 65 prófaðir þú að notfæra þér að skrá tölur á staðalformi til að einfalda námundun við deilingu. Hverja telur þú helstu kosti þessarar aðferðar?

HÓPVERKEFNI

67 Í stærðfræðinámi er nauðsynlegt að hafa góðan skilning á reikniaðgerðunum samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu. Skilningur á eðli reikniaðgerðanna er mikilvægur en einnig þekking á helstu reiknireglum.

Vinnið saman í litlum hópum og fjallið um reikniaðgerðirnar fjórar og einkenni þeirra. Sýnið dæmi um mismunandi leiðir við reikning. Búið til tvær til þrjár talnagátur þar sem þið gefið vísbendingar um tölur sem á að finna.

Búið til veggspjald eða setjið umfjöllun ykkar á tölvutækt form þannig að hún sé aðgengileg fyrir alla í bekknum.

Í útreikningum í daglegu lífi þarf oft að beita fleiri en einni reikniaðgerð. Þá þarf að huga að hvað reikna á fyrst. Í stærðfræðinni hafa menn komið sér saman um ákveðna forgangsröð aðgerða. Ef brjóta þarf hana eru notaðir svigar til að gefa til kynna að fyrst eigi að reikna það sem er í sviganum. Dæmi $\frac{(72+8)}{2^2} + 12 =$

1 Reikna út úr svigum → $\frac{(80)}{2^2} + 12 =$

2 Reikna veldi og rætur → $\frac{80}{4} + 12 =$

3 Margfalda og deila → $20 + 12 =$

4 Leggja saman og draga frá → 32

Sumir velta fyrir sér hvort margfalda eigi fyrst eða deila. Svarið er að reiknað er í þeirri röð sem aðgerðirnar eru skráðar.

68 Reiknaðu.

a $45 + 2 \cdot 3{,}2 - 45 : 9$ **b** $39 : 3 \cdot 4 - 72 : 6 + 4 \cdot (-8)$

c $64 + 2\,(15 : 3) + (3 - 2) \cdot 8$

69 Skráðu dæmin með tölum og reiknaðu þau.

a Sylvía ber út blöð. Hún fær 8 krónur á mánuði fyrir að bera út hvert Borgarblað en 12 krónur fyrir að bera út hvert Hverfisblað. Á fimmtudögum ber hún auk þess út auglýsingablað og fær hún 5 krónur fyrir blaðið. Öll blöð eru borin í hvert hús og ber Sylvía út á 120 heimili. Hve mikið þénar Sylvía í hverjum mánuði? En á ári?

b Freyr ber út sömu blöð á 245 heimili. Hve mikið þénar hann á mánuði? En á ári?

Til þess að efla leikni sína í að reikna með jákvæðum og neikvæðum tölum er gott að glíma við fjölbreytt dæmi og vera vakandi fyrir því að finna eigin leiðir við reikning.

Skoðaðu dæmin og veldu þau sem þú telur þig hafa gagn af að glíma við. Byrjaðu á því að áætla á hvaða talnabili svarið liggur og reiknaðu síðan dæmin með forgangsröð aðgerða í huga.

70 Reiknaðu.

a $32 + 4 \cdot (-5) : 2$ b $-320 + 7 \cdot (-5) - 700$ c $260 : (-2) + 9 : (-3) \cdot (-8)$

71 Hvaða tölur gætu staðið undir miðunum? Finndu tvö dæmi um hvert talnapar.

a 45 : ■ + 3 – 2 · 5 = ■

b ■ + 75 : 2,5 – ■ · 3 = 14

c 729 : 9 – ■ : 4 + ■ = 85

d 459 – 325 : 25 + ■ = ■

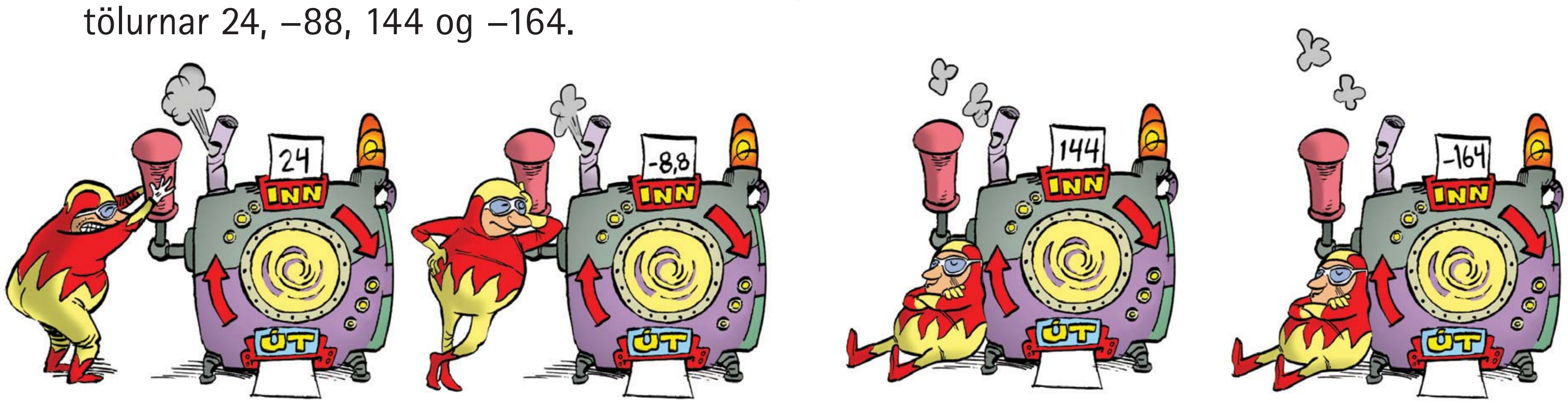
72 Hákon, Kristín og Jónína stóðu fyrir tónleikum. Niðurstaða bókhaldsins varð –350 000 kr. Þau skiptu tapinu á milli sín þannig að Hákon ætlaði að greiða helminginn, Kristín $\frac{1}{5}$ og Jónína afganginn. Þau sömdu um að greiða skuldina með fjórum jöfnum afborgunum. Þau þurftu ekki að greiða vexti.

- Reiknaðu út hve mikið alls hvert þeirra þurfti að greiða og finndu hve há hver afborgun var hjá hverju þeirra.
- Reiknaðu einnig út stöðuna á skuldinni eftir hverja afborgun.

73 Ljúktu við setningarnar.

a Ef tvær jákvæðar tölur eru lagðar saman kemur ...
b Ef tvær neikvæðar tölur eru lagðar saman kemur ...
c Ef jákvæð tala er dregin frá annarri jákvæðri tölu kemur stundum ...
d Ef neikvæð tala er dregin frá annarri neikvæðri tölu kemur stundum ...
e Ef tvær jákvæðar tölur eru margfaldaðar saman kemur ...
f Ef tvær neikvæðar tölur eru margfaldaðar saman ...
g Ef jákvæðri tölu er deilt í jákvæða tölu kemur fram ...
h Ef neikvæðri tölu er deilt í neikvæða tölu kemur fram ...

74 Finndu hvaða tölum breytivélin $\boxed{-4}$ $\boxed{\cdot 2}$ $\boxed{+7}$ skilar ef inn í hana fara tölurnar 24, –88, 144 og –164.



75 Skráðu dæmin og reiknaðu þau.

Páll rekur bónstöð. Hann þarf því oft að kaupa bón og fær reikning á tveggja mánaða fresti. Bóninu er pakkað í kassa þar sem eru 4 stæður með $4 \cdot 6$ brúsum. Hann greiðir 230 krónur fyrir hvern brúsa. Í marsbyrjun var ekkert bón á lager og keypti hann 5 kassa. Viku seinna skilaði hann einum kassanum vegna galla. Hann keypti síðan 7 kassa í apríl. Hann fékk reikning í aprílok. Hve hár var reikningurinn? Þá átti hann enn þá $2\frac{1}{2}$ kassa eftir. Hve mikið bón hafði hann notað á þessum tveimur mánuðum?

76 Sigrún Helga rekur bakarí. Hún selur hverjum viðskiptavini margar vörutegundir og þarf að reikna út verð þeirra. Reiknaðu út hvað hver á að borga.

Sunna kaupir tvær kleinur og fjögur rúnnstykki og greiðir skuld upp á 385 krónur.

Andri kaupir tertu, fjögur vínarbrauð og 2 pela af rjóma.

Eiður skilar fimm gölluðum tertusneiðum og fær í staðinn vínarbrauðslengju og innleggsnótu.

Ólöf kaupir skírnartertu og fær leigðar borðskreytingar, 12 stk. Hún kaupir líka 2,3 kg af kransakökudeigi. Skilagjald vegna borðskreytinganna er 2000 krónur.

Verðlisti

Kleina	105 kr.
Kringla	90 kr.
Brauð fínt	195 kr.
Brauð gróft	245 kr.
Rúnnstykki fínt	90 kr.
Rúnnstykki gróft	95 kr.
Vínarbrauð	140 kr.
Vínarbrauðslengja	395 kr.
Súkkulaðiterta	1495 kr.
Gulrótarterta	1350 kr.
Tertusneið	240 kr.
Skírnarterta 16 m.	8400 kr.
Skírnarterta 20 m.	9600 kr.
Kransakökudeig	2250 kr./kg
Borðskreyting	75 kr./stk.

Rökfræði og mengi

Í þessum kafla er sjónum einkum beint að leiðum til að flokka og koma skipulagi á upplýsingar til að greina eiginleika og möguleika.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Náir valdi á nokkrum leiðum til skrá upplýsingar skipulega og draga ályktanir af þeim.*
- *Kynnist helstu hugtökum mengjafræðinnar svo sem mengi, stak, sniðmengi, sammengi og hlutmengi.*
- *Getir lýst mengjum með orðum, upptalningu, mengjamyndum eða táknmáli stærðfræðinnar.*

1 Finndu hve margir nemendur eru:

a ljóshærðir

b dökkhærðir

c rauðhærðar stúlkur

d drengir

e stúlkur

f ljóshærðir eða stúlkur

g drengir eða dökkhærðir

2 Skráðu allar tveggja stafa tölur sem búa má til með því að nota tölustafina 1, 2, 3, 4.

a Hve margar mismunandi tölur er hægt að búa til?

b Hve margar þeirra byrja á tveimur?

c Hve stór hluti þeirra er minni en 30?

d Hve stór hluti þeirra er deilanlegur með þremur?

e Hve margar þeirra eru oddatölur og minni en 23?

3 Þórhildur, Halldór og Þórdís fá sér öll einn drykk og bæði aðalrétt og eftirrétt.

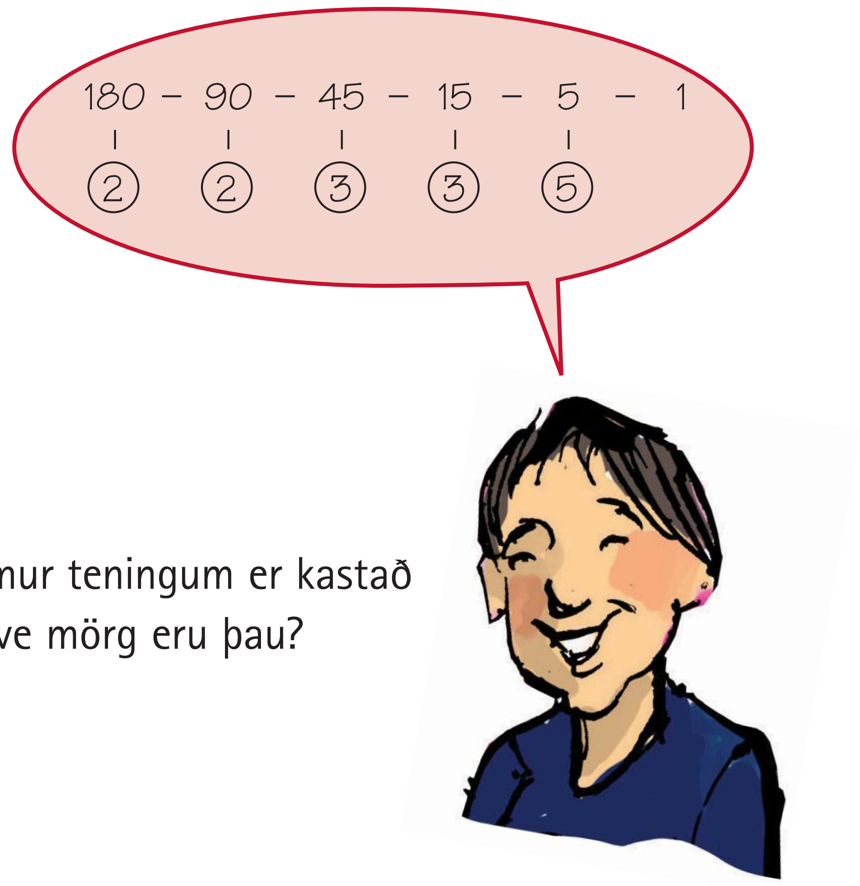
a Settu fram dæmi um hvað þau geta fengið sér.

b Gefið er að Þórhildur velur sér tómatsúpu. Hve marga mismunandi samsetningarmöguleika hefur hún á að velja sér drykk og eftirrétt?

c Gefið er að Halldór velur að drekka mjólk. Hve marga ólíka samsetningarmöguleika hefur hann á að velja sér saman aðalrétt og eftirrétt?

d Hve margir eru samsetningarmöguleikarnir á mismunandi máltíðum?

4 Frumþættir tölunnar 180 eru $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Frumþættir tölunnar 315 eru $3^2 \cdot 5 \cdot 7$



a Hver er hæsta tala sem gengur bæði upp í 180 og 315?

b Hver er lægsta tala sem gengur bæði upp í 180 og 315?

c Hvaða tölur ganga upp í aðra töluna en ekki hina?

d Hver er minnsti samnefnari talnanna 180 og 315?

5 a Finndu öll möguleg margfeldi sem hægt er að fá ef tveimur teningum er kastað og þær tölur sem upp koma eru margfaldaðar saman? Hve mörg eru þau?

b Hver stór hluti þeirra er í 5-töflunni? En í 4-töflunni?

c Hve mörg þeirra eru annaðhvort í 4- eða 5-töflunni?

d Hve mörg þeirra eru bæði í 4- og 5-töflunni?

e Hve stór hluti þeirra er hvorki í 4- eða 5-töflunni?

6 Á skíðamóti komust aðeins fjórir þátttakendur í úrslit í bruni. Það voru þeir Guðmundur, Trausti, Ólafur og Haukur.

a Hve margir mismunandi möguleikar eru á skipan í vinningssætin þrjú?

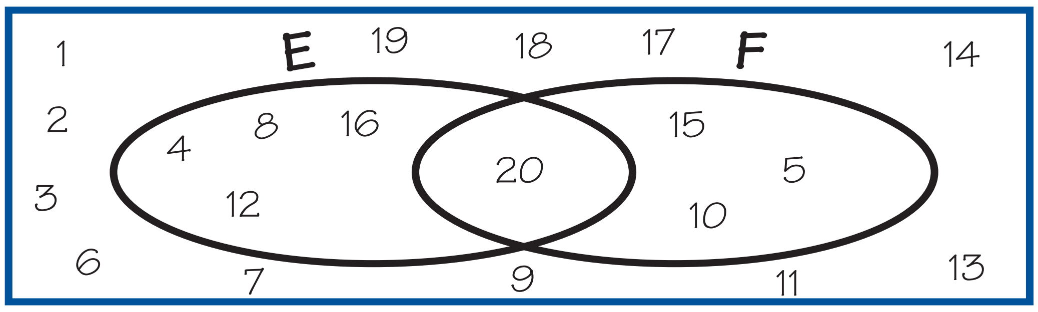
b Ef Guðmundur vinnur hvernig gætu hinir þá raðast í þau tvö sæti sem eftir eru?

7 Þegar leysa á verkefni þar sem fá þarf yfirlit yfir fjölda möguleika er oft gott að nota eitthvert kerfi við skráningu. Í dæmunum hér á undan hefur þú væntanlega notað kerfi til að flokka og skrá upplýsingar. Greindu frá þeim leiðum sem þú fórst í dæmum 1–6.

Hér er lýst nokkrum leiðum sem nota má til að koma skipulagi á upplýsingar og skoða möguleika á samsetningum. Fjallað er um hvernig nota má mengi, talningartré og samsetningartöflur.

Í stærðfræðinni er hugtakið **mengi** *notað um skýrt afmarkað safn gripa eða hugtaka. Til þess að mengi teljist skýrt afmarkað verður að vera hægt að segja til um það með ótvíræðum hætti hvort gripur eða hugtak tilheyri því eða ekki. Gripur eða hugtak sem tilheyrir mengi nefnist* **stak** *í menginu.*

Oft er hentugt að nota táknmyndir fyrir mengi. Þær lýsa mengjum og tengslum þeirra á myndrænan hátt.



Ef settir eru þrír punktar fyrir aftan upptalninguna merkir það að mengið er óendanlegt en stökin sem talin eru upp segja til um einkenni þess.
B = {2, 4, 6, 8, …}

Á þessari mengjamynd má sjá á hvern hátt náttúrlegar tölur milli 1 og 20 raðast í mengi talna sem eru í 4-töflunni, 5-töflunni eða falla utan þessara mengja.

8 Mengjum eru oft gefin nöfn eða þau merkt með stórum bókstöfum. Mengið E er mengi talna í 4-töflunni sem eru lægri en 21 og mengi F er mengi talna í 5-töflunni sem eru lægri en 21. Gera má skrá yfir stök mengis og er þá hafður slaufusvigi { } utan um upptalninguna. E = {4, 8, 12, 16, 20}

Gerðu skrá yfir stök mengisins F.

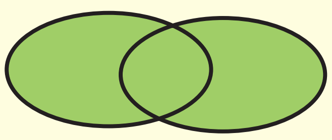
Þegar fengist er við afmarkað **grunnmengi** *er það oft táknað G. Hér er grunnmengið mengi náttúrlegra talna sem eru minni en 21. G = {1, 2, 3, …, 20}*

Þær tölur sem eru stök í annaðhvort E eða F eða í þeim báðum eru sagðar vera í **sammengi** *E og F.*

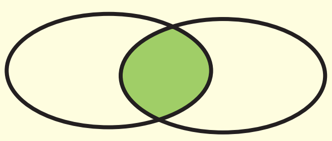
Þær tölur sem eru stök í bæði E og F eru sagðar vera í **sniðmengi** *E og F.*

Í mengjafræðinni eru til ýmis tákn sem nota má til að einfalda skráningu.

Sammengi E og F má tákna $E \cup F$



Sniðmengi E og F má tákna $E \cap F$

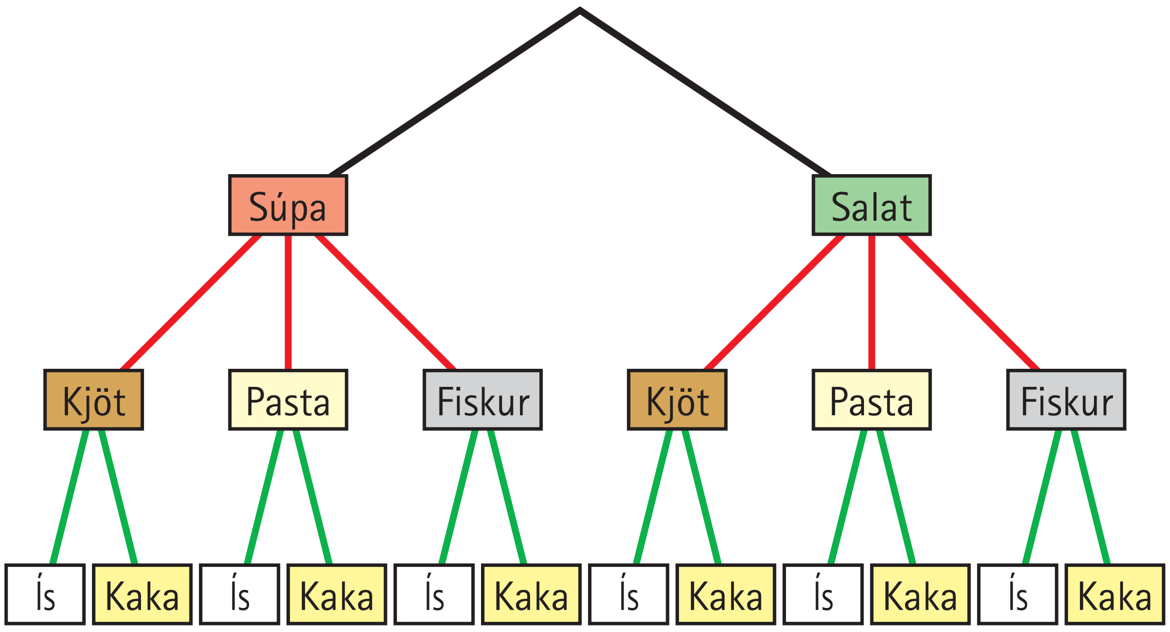


9 *a* Gerðu skrá yfir stök í sammengi E og F. $E \cup F$

b Gerðu skrá yfir stök í sniðmengi E og F. $E \cap F$

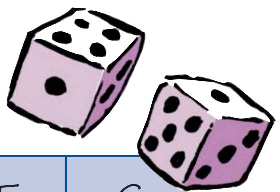
c Hvaða tölur eru það sem eru í grunnmenginu en tilheyra hvorki E né F?

Gott getur verið að nota talningartré ef leita á svara við spurningnum eins og: Hve margar máltíðir má setja saman úr tveimur forréttum, þremur aðalréttum og tveimur eftiréttum?



Þegar skoða á mögulegar samsetningar og hlutfall tiltekinna möguleika af heildarfjölda möguleika er gott að setja upp samsetningartöflu.

Tveimur teningum er kastað og fundin summa talnanna sem upp kemur.



T1 \ T2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

10 Hve stórt hlutfall af summum er hærra en 9?

Leystu þessi verkefni. Athugaðu hvort þú getur notað mengjamyndir, talningartré eða samsetningartöflur til að fá yfirlit yfir möguleika og samsetningar.

11 a Hve margar mismunandi tveggja stafa tölur má skrá með tölustöfunum 2, 4, 6 og 8?

b Hve margar mismunandi þriggja stafa tölur má skrá með tölustöfunum 0, 1, 2?

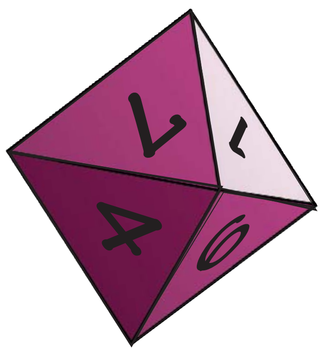
c Þú átt fernar buxur. Á hve marga vegu væri hægt að vera í þeim í mismunandi röð?

12 Mengi A er mengi allra þeirra talna sem ganga upp í 18.
Mengi B er mengi allra þeirra talna sem ganga upp í 24.

a Hvaða tölur eru í sammengi A og B?

b Hvaða tölur eru í sniðmengi A og B?

13 Kötturinn hennar Auðar eignaðist fjóra kettlinga. Hún gaf þeim nöfnin Branda, Kolur, Snúður og Birta. Birna vinkona hennar ætlar að taka tvo þeirra í fóstur. Hve margir möguleikar eru á að velja tvo kettlinga?



14 a Skráðu allar mögulega útkomur þegar tveimur áttflötungum er varpað og fundinn mismunur talnanna sem upp koma.

b Hve stór hluti niðurstaðnanna er minni en 5?

c Hve stór hluti niðurstaðnanna er stærri en 2?

d Hve stór hluti niðurstaðnanna er margfeldi af þremur og stærri en einn?

15 Skoðaðu allar heilar tölur frá og með 21 til og með 40.

a Hverjar af tölunum eru sléttar?

b Hverjar af tölunum eru margfeldi af þremur?

c Hverjar af tölunum eru margfeldi af fjórum?

d Eru einhverjar af tölunum bæði margfeldi af þremur og fjórum?

e Eru einhverjar af tölunum sléttar tölur en ekki margfeldi af fjórum?

f Eru einhverjar af tölunum sléttar tölur en ekki margfeldi af þremur?

16 a Finndu hæstu tölu sem gengur upp í bæði 126 og 420.

b Hvaða tala væri minnsti samnefnari þessara talna?

c Finndu tvær tölur sem ganga bæði upp í 126 og 420.

17 **a** Hve margar mismunandi þriggja stafa tölur má skrá með tölustöfunum 1, 2, 3 og 4?

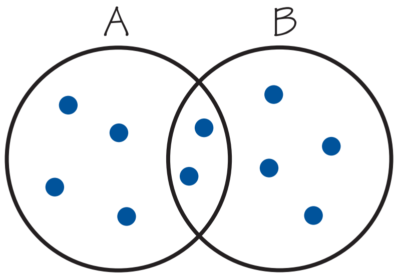
b Hve margar þeirra byrja á þremur?

c Hve margar þeirra eru oddatölur?

d Hve margar mismunandi þriggja stafa tölur má skrá með tölustöfunum
1, 2, 3, 4, 5, 6?

e En með tölustöfunum frá 1–9?

18 Í mengi A eru tölur sem ganga upp í 12.
Í mengi B eru tölur sem ganga upp í 63.



a Teiknaðu upp mengjamyndina og skráðu tölur í stað punktanna.

b Hvaða tölur ganga upp í bæði 12 og 63?

c Bættu inn á myndina mengi C sem er mengi þeirra talna sem ganga upp í 98.

d Hvaða tala er í sniðmengi A, B og C?

e Skráðu mengi talna sem annaðhvort ganga upp í 12 eða 63 en ekki upp í 98.

19 Helgi ber út þrjú mismunandi blöð: Borgarblaðið, Hverfablaðið og Kvöldblaðið, 30 eintök af hverju blaði. Margir af viðskiptavinum hans fá meira en eitt blað en enginn fær tvö eintök af sama blaði. Fjórir viðskiptavinir fá öll þrjú blöðin. Það eru margir sem kaupa tvö blöð. Tólf viðskiptavinir fá bæði Borgarblaðið og Hverfablaðið. Átta viðskiptavinir fá bæði Hverfablaðið og Kvöldblaðið. Sjö viðskiptavinir fá bæði Borgarblaðið og Kvöldblaðið. Hvað ber Helgi út blöð til margra viðskiptavina?

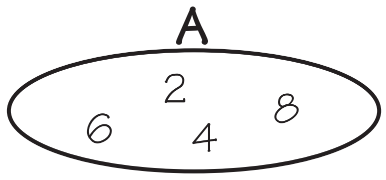
20 Frímerkjasafnari flokkar frímerkin sín eftir því í hve góðu ástandi þau eru og eftir verði. Ástandsflokkarnir eru *viðunandi*, *gott*, *mjög gott* og *gallalaust*. Verðflokkarnir eru *verðlaust*, *ódýrt*, *í meðallagi*, *dýrt*, *mjög dýrt* og *verðmætt*.

a Hve marga mismunandi flokka notar safnarinn?

b Í hve mörgum flokkum eru frímerki sem eru verðlaus eða ódýr jafnvel þó ástand þeirra sé meira en gott?

21 Hvaða leiðir notaðir þú til að koma skipulagi á upplýsingar og átta þig á möguleikum í dæmum 10–20?

Þú hefur kynnst því hvernig lýsa má mengjum með því að teikna af þeim mengjamynd eða gera skrá yfir stök mengis.



A = {2, 4, 6, 8}

K er mengi bókstafa í orðinu köttur K = {k, ö, t, u, r}
Þó stak komi fyrir oftar en einu sinni í mengi
er það aðeins talið upp einu sinni.

Lýsa má mengjum með orðum. Dæmi um það er: A er mengi sléttra talna minni en tíu. Í mörgum tilvikum er ómögulegt að telja upp eða gera mynd sem sýnir öll stök mengis. Þá verður að lýsa þeim á annan hátt til dæmis með orðum.
Dæmi: Mengi bíla sem skráðir eru á Íslandi.

Einnig má nota táknmál stærðfræðinnar til að lýsa mengjum.
A = {x | x er slétt tala minni en 10}
Þetta er lesið: A er mengi þeirra talna x þannig að x er slétt tala minni en 10. Öll stök mengisins A þurfa að uppfylla það skilyrði að vera sléttar tölur minni en 10.

B = {x | x er 15 ára drengur á Íslandi}

B er mengi þeirra x sem hafa þennan eiginleika, það er að segja mengi allra 15 ára drengja á Íslandi.

22 Skráðu öll stök þessara mengja og lýstu þeim með orðum.

A = {x | x er oddatala minni en 15}

B = {x | x er náttúrleg tala sem gengur upp í 8}

C = {x | x er frumþáttur tölunnar 15}

D = {x | x er stafur í nafninu mínu}

E = {x | x er mánuður sem endar á -ber}

F = {x | x er bókstafur í orðinu krakki}

23 Lýstu þessum mengjum með orðum og skráðu þau með því að nota táknmálið {x | x er ...}

K = {1, 2, 3, 4, 5}

L = {2, 3, 5, 7, 9}

M = {janúar, júní, júlí}

O = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Í mengjafræðinni eru til ýmis tákn sem nota má til að einfalda skráningu. Þú hefur kynnst táknunum $\cup$ og $\cap$ sem notuð eru um sammengi og sniðmengi.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

24 Gerðu skrá yfir stökin í

a $A \cup B$ d $B \cap C$

b $A \cap B$ e $B \cup C$

c $A \cup C$ f $A \cap C$

Ef ekkert stak er í tilteknu mengi er sagt að það sé tómt eða tómamengi. Ef gefa á til kynna að mengi sé tómt má annaðhvort nota tóman hornklofa { }eða táknið Ø.

$A \cap C = \{\}$ $A \cap C = \emptyset$

25 Eru þessar fullyrðingar sannar eða ósannar?

a $2 \in B$ c $5 \in B$ e $2 \in A \cup B$ g $9 \in A \cap C$

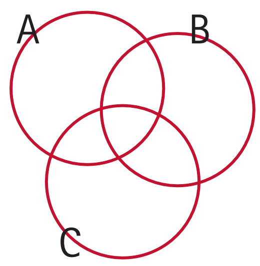
b $2 \in C$ d $7 \notin C$ f $2 \notin A \cap B$ h $7 \notin B \cap C$

Táknið $\in$ er notað þegar tilgreina á hvort ákveðið stak tilheyrir mengi eða ekki. Ef litið er á mengið A sem skráð er hér fyrir ofan má sjá að talan 4 er stak í menginu A. Þetta má skrá $4 \in A$. Það er mun einfaldara en að skrifa að talan 4 sé stak í mengi sléttra talna sem eru minni en 10. Ef tiltekið stak er ekki stak í menginu má nota táknið $\notin$. $1 \notin A$

26 $A = \{x \mid x \text{ spilar tennis}\}$

$B = \{x \mid x \text{ er bloggari}\}$

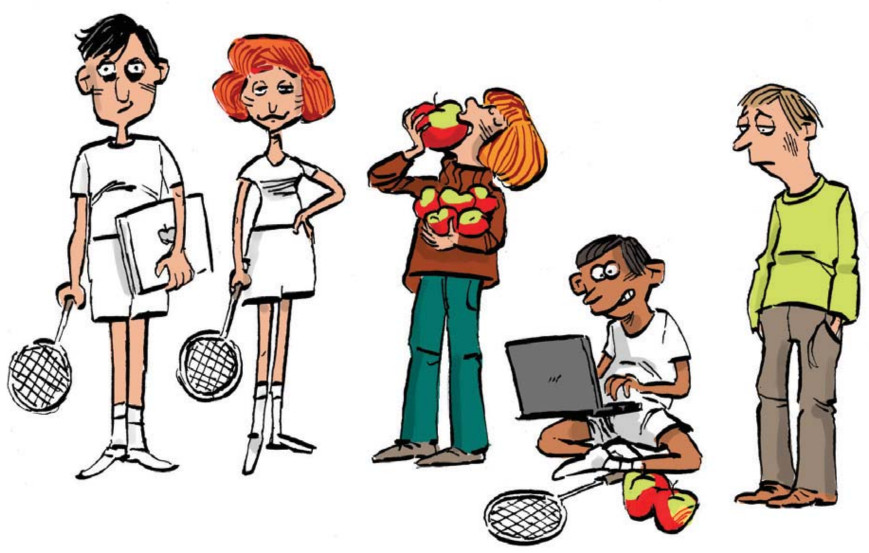
$C = \{x \mid x \text{ borðar epli}\}$



a Teiknaðu mengjamynd fyrir mengin A, B og C þannig að mengin skarist.

b Hvar myndir þú staðsetja þessa einstaklinga á mengjamyndinni?

- Þórður er bloggari sem spilar tennis en borðar ekki epli.
- Sigga spilar tennis en borðar ekki epli og bloggar ekki.
- Lóa elskar epli en bloggar ekki og spilar ekki tennis.
- Viðar bloggar daglega, æfir tennis tvisvar í viku og borðar tvö epli á dag.
- Daníel stundar engar íþróttir, borðar ekki epli og kann ekki að blogga.



c Hverjar af þessum fullyrðingum eru sannar? Rökstyddu svar þitt.

Daníel $\in$ C Þórður $\in B \cap C$ Sigga $\notin$ A Þórður $\in A \cup B$ Lóa $\notin B \cap C$

d Lýstu með orðum.

$A \cap B$ $B \cap C$ $A \cap C$ $A \cup B$ $C \cup B$ $A \cap B \cap C$

27 G = mengi spila í spilastokki
M = {x | x er mannspil}
R = {x | x er rauð spilategund}
T = {x | x er tígull}

a Teiknaðu mengjamynd sem sýnir tengsl þessara mengja.

b Lýstu hverju mengi fyrir sig með orðum.

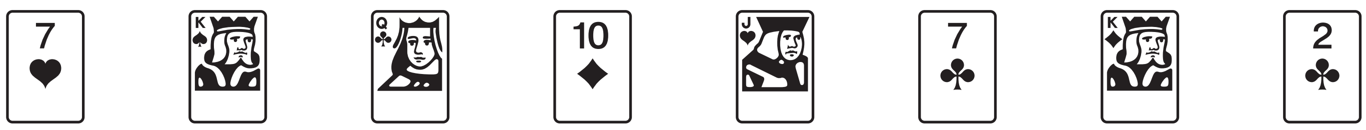
c Lýstu $M \cap R$ með orðum og skráðu síðan öll stökin í $M \cap R$.

d Lýstu $R \cap T$ með orðum.

e Lýstu $M \cup T$ með orðum.

f Lýstu sniðmengi M, R og T.

g Eru þessi spil stök í mengjunum M R T $M \cap R$ $M \cup T$ $R \cap T$



h Hve mörg stök eru í M? Hve mörg stök eru í $M \cap R$? Hve mörg stök eru í $R \cap T$.

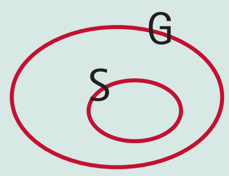
28 Ef litið er á spilastokk sem eitt mengi má sjá að honum má skipta upp í ýmis mengi. Gefðu að minnsta kosti tvö dæmi um hvernig skipta má spilastokki upp í tvö aðgreind mengi.

29 G = mengi spila í spilastokki
S = {x | x er spaði}
M = {x | x er mannspil}

a Ef tilgreind eru mengin S og M myndu þá öll spil í spilastokki falla innan þessara mengja? Ef ekki hver myndu þá falla utan þeirra en innan mengisins G ?

b Skoðaðu mengin G, S og M. Svaraðu spurningunum og rökstyddu svar þitt.
Er M hlutmengi í G? Er $M \subset S$? Er $S \subset M$?

Mengið S er hlutmengi mengisins G.
Það má tákna $S \subset G$.



Sérhvert stak í S er stak í G.

30 a Lýstu með orðum fjórum mismunandi mengjum sem eru hlutmengi í menginu G ef G er mengi spila í spilastokki.

b Skráðu tvö mengi sem eru hlutmengi í S og tvö mengi sem eru hlutmengi í M.

31 Grunnmengið G = {x | x er heil tala hærri en –20 og lægri en 20}

H er mengi náttúrlegra talna lægri en 20.

I er mengi frumtalna hærri en 10 en lægri en 20.

J er mengi neikvæðra talna hærri en – 20.

K er mengi oddatalna hærri en 10 en lægri en 22.

a Skráðu stök mengjanna G, H, I, J og K.

b Er talan 2 $\in$ H? Er talan 2 $\in$ J? Er talan 2 $\in$ K?

c Skráðu K $\cap$ I og lýstu síðan K $\cup$ I.

d Er K hlutmengi í I? Er I hlutmengi í K?

e Hver mengjanna H, I, J og K eru hlutmengi í G?

f Hver mengjanna I, J, K eru hlutmengi í H?

g Skráðu H $\cap$ J og lýstu H $\cup$ J.

h Er H $\cup$ J hlutmengi í G? Eru einhver stök í G sem eru ekki í H $\cup$ J? Ef svo er hvaða stök eru það?

Í kassa með rökkubbum eru:

- Tvær stærðir af kubbum.
- Tvær þykktir af kubbum.
- Þrír litir af kubbum.
- Fimm mismunandi form af kubbum.

32 Hve margir kubbar eru í kassanum?

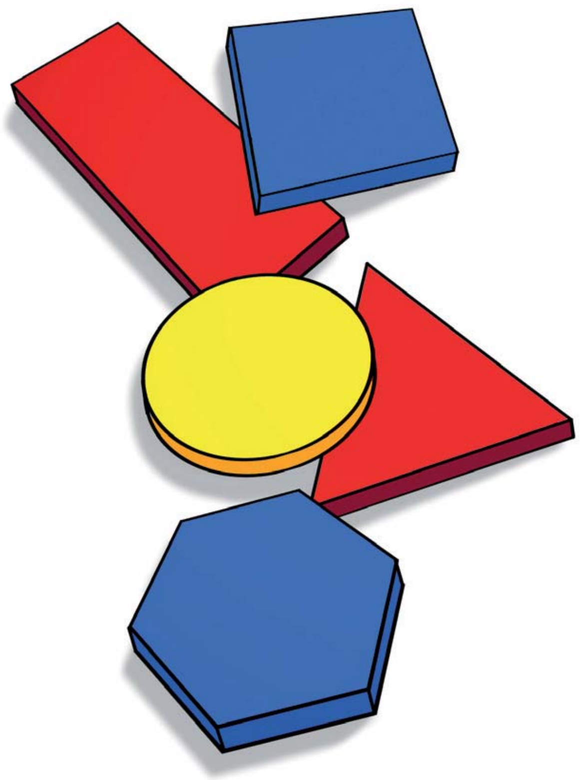
33 R er mengi rauðra rökkubba.
Þ er mengi þykkra rökkubba.

a Hve margir kubbar eru í R $\cap$ Þ?

b Hve margir kubbar eru í R en ekki í Þ?

c Hve margir kubbar eru í Þ en ekki í R?

d Hve margir kubbar eru í R $\cup$ Þ?



34 S er mengi stórra rökkubba.
G er mengi gulra rökkubba.

a Hve margir kubbar eru í S $\cap$ G?

b Hve margir kubbar eru í S en ekki í G?

c Hve margir kubbar eru í G en ekki í S?

d Hve margir kubbar eru í G $\cup$ S?

HÓPVERKEFNI

35 Veljið sem grunnmengi einhvern afmarkaðan hóp af fólki sem þið getið aflað ykkur ýmiss konar upplýsinga um. Í hópnum eiga að vera að minnsta kosti 15-20 einstaklingar. Þið getið líka búið hópinn til en þá þurfið þið að gefa hverjum einstaklingi nafn og ýmis kennimerki. Þið getið til dæmis tiltekið þær upplýsingar sem koma fram í passa viðkomandi.

<table>
<tr><td colspan="3">Kenninafn</td></tr>
<tr><td colspan="3">Eiginnöfn</td></tr>
<tr><td colspan="2">Þjóðerni</td><td>Hæð</td></tr>
<tr><td>Fæðingardagur</td><td colspan="2">Kennitala</td></tr>
<tr><td>Kyn</td><td colspan="2">Fæðingarstaður</td></tr>
</table>

Búið til veggspjald sem sýnir á hvern hátt má skipta hópnum í mengi út frá ýmiss konar upplýsingum.

Þið getið til dæmis

- skráð mengi þeirra sem heita einu nafni, eru fæddir fyrir 1998, eru yngri en 15 ára eða heita nafni sem er styttra en þrír bókstafir
- sýnt með mengjamynd mengi þeirra sem eru fæddir í maí og hærri en 178 cm
- lýst mögulegum hlutmengjum í grunnmenginu eða á hvern hátt flokka mætti eiginnöfn í hlutmengi

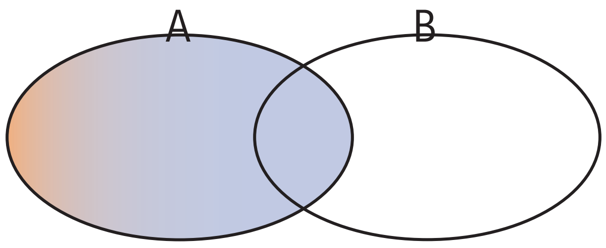
Notið veggspjaldið til að sýna þekkingu ykkar og skilning á táknum og hugtökum mengjafræðinnar.

HÓPVERKEFNI

36 Nota má mengjamyndir til að sýna rökfræðilegt samhengi. Skoðum tvö mengi A og B. A er mengi dýra. B er mengi ferfætlinga.
Teiknið mengjamynd og látið mengin skarast.

Skoðið þessar fullyrðingar.
1. Öll dýr eru ferfætlingar.
2. Engin dýr eru ferfætlingar.
3. Sum dýr eru ferfætlingar.
4. Sum dýr eru ekki ferfætlingar.

A Mengi dýra
B Mengi ferfætlinga

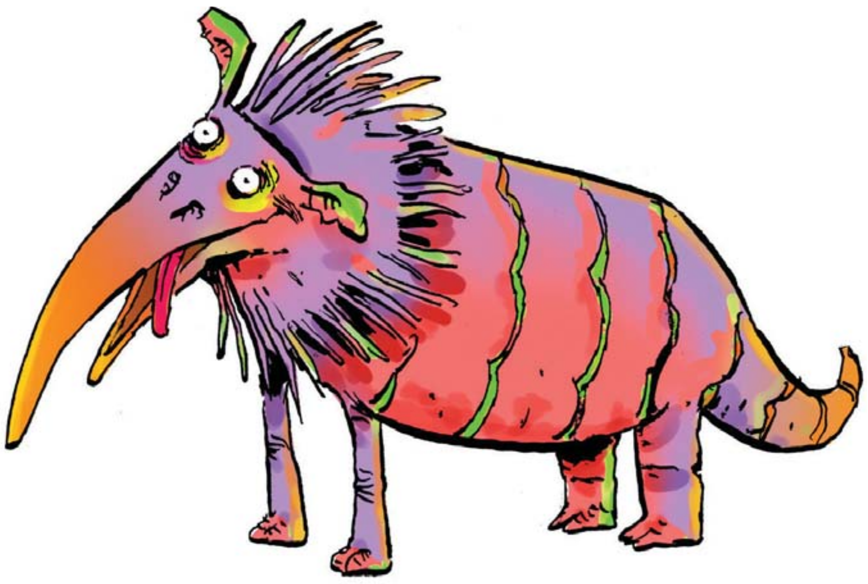


Ef litið er á fyrstu fullyrðinguna og gert ráð fyrir að hún sé sönn er ljóst að öll stök í A eru jafnframt í B. Sá hluti A sem fellur utan B er því tómur því það eru engin dýr til sem ekki eru ferfætlingar. Það gætu hins vegar verið til ferfætlingar sem ekki eru dýr en það vitum við ekki og getum því ekki sagt fyrir um með vissu hvort sá hluti B sem fellur utan A er tómur eða ekki.

Skoðið hinar fullyrðingarnar hverja fyrir sig. Gerið ráð fyrir að þær séu sannar og teiknið mengjamyndir sem sýna hvort einhver hluti mengjanna er örugglega tómur eða inniheldur örugglega einhver stök.

Hvað er það sem við getum ekki sannreynt á grundvelli fullyrðinganna?

Dæmi. Ef við gefum okkur að ekki sé til neitt dýr sem er ferfætlingur, vitum við þá að það eru til dýr sem ekki eru ferfætlingar? Eru þá örugglega til ferfætlingar sem ekki eru dýr?



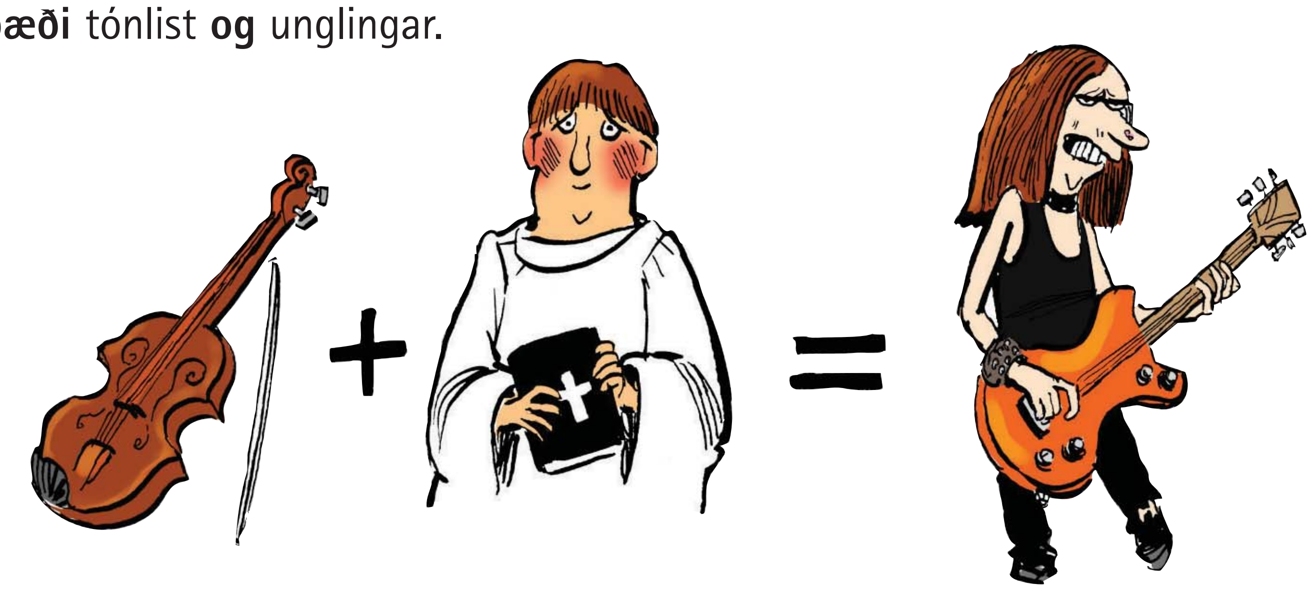
Á Netinu eru margar leitarvélar, bæði íslenskar og erlendar, sem hjálpa okkur við að finna upplýsingar. Flestar leitarvélar vinna á svipaðan hátt. Ef slegið er inn stakt leitarorð eins og t.d. tónlist þá er líklegt að finnist mikill fjöldi af síðum og ógerlegt er að kanna þær allar. Mikilvægt er því að kunna að þrengja leit og vita hvernig leitarvélar vinna. Einnig er gagnlegt að velta fyrir sér áreiðanleika og notagildi upplýsinga sem finnast á Netinu. Leitarvél gerir ekki greinarmun á því hvort hún finnur leitarorðið á bloggsíðu eða í grein eða efni sem skrifað er af viðurkenndum fræðimanni.

37 Skrifaðu leitarorðið tónlist inn í leitarvél og veldu að þú viljir leita á íslenskri vefsíðu ef sá möguleiki er í boði.
Hve margar niðurstöður fundust?

38 Skrifaðu leitarorðið unglingar inn í leitarvél og veldu að leita á íslenskri vefsíðu ef sá möguleiki er í boði.
Hve margar niðurstöður fundust?

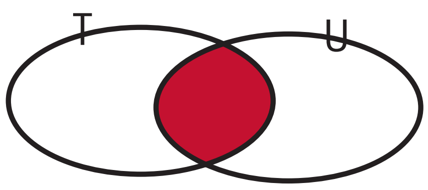
39 Skrifaðu nú tvö leitarorð, t.d. tónlist og unglingar.
Hve margar niðurstöður fundust?

Þú ættir að hafa fengið mun færri niðurstöður. Ef slegin eru inn tvö orð leita flestar leitarvélar að síðum sem innhalda bæði orðin. Í dæminu hér er leitað að síðum sem innhalda **bæði** tónlist **og** unglingar.



tónlist *unglingur* *??*

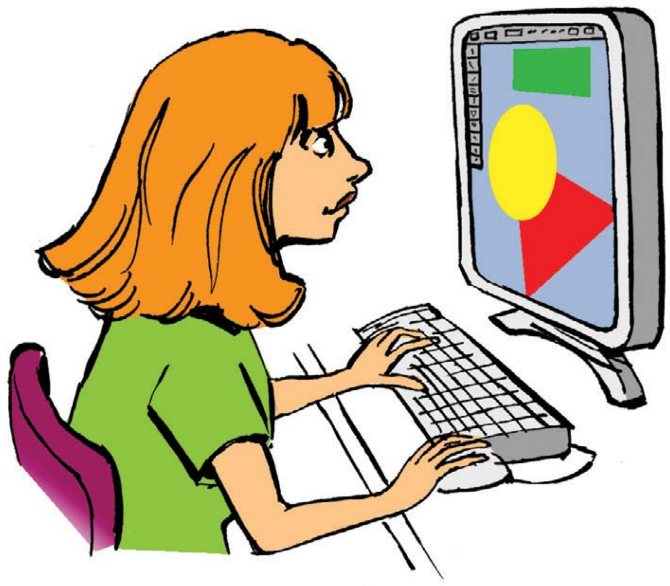
Ef þetta er skoðað á mengjamynd má segja að niðurstöðurnar séu það sem er í sniðmengi mengjanna tónlist og unglingar.



40 a Teiknaðu mengjamynd eins og þá sem er hér að ofan. Skráðu í sniðmengið hve margar síður fundust sem innihalda bæði orðin tónlist og unglingar.

b Hve margar síður innihalda orðið tónlist en ekki orðið unglingar?

c Hve margar síður innhalda orðið unglingar en ekki orðið tónlist?



41 Prófaðu aðra leitarvél og berðu saman fjölda niðurstaðna.

42 Veldu þér þín eigin leitarorð og skráðu niðurstöður með mengjamynd á sama hátt og gert er í dæmi 40.

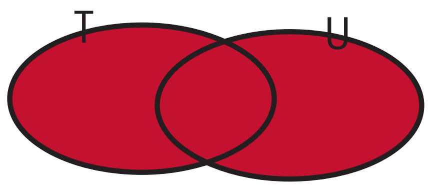
43 Ef þrengja á leit enn frekar má setja inn fleiri orð. Prófaðu að bæta við einu leitarorði í viðbót. Sýndu með mengjamynd svæði sem er sniðmengi þriggja mengja. Gefðu mengjunum nafn út frá þeim leitarorðum sem þú notaðir og skráðu í sammengi mengjanna þriggja hve margar niðurstöður fundust sem innihalda öll leitarorðin þrjú. Hve oft þarftu að leita til að geta skráð niðurstöður í öll önnur svæði mengjanna þriggja?

Einnig má leita eftir orðasamböndum eða síðum þar sem einhver orð, tvö eða fleiri, standa hlið við hlið. Þá eru settar enskar gæsalappir (" ") utan um orðin.

44 Prófaðu að setja gæsalappir utan um einhver tvö af þeim leitarorðum sem þú notaðir og kannaðu hve margar niðurstöður þú færð.

45 Til að útvíkka leit má nota **eða** (OR). Sláðu inn leitarorðin tónlist OR unglingar og kannaðu hver margar niðurstöður fundust.

Þegar leitarorð eru tengd saman með OR er leitað að öllum síðum sem innhalda annaðhvort eða bæði leitarorð. Leitað er í sammengi mengjanna tónlist og unglingar.



46 Kannaðu hvort röð leitarorða skiptir máli í þeirri leitarvél sem þú notar. Kannaðu hvort hástafir eða lágstafir skipta máli.

Í þessum kafla hefur þú kynnst ýmsum hugtökum úr mengjafræði. Mörgum þeirra hefur þú kynnst áður en einnig bætast við nokkur ný.

47 Skoðaðu kaflann og leitaðu svara við því hvað er

a mengi
b stak $\boxed{\in}$
c hlutmengi $\boxed{\subset}$
d grunnmengi G $\boxed{G}$
e sniðmengi $\boxed{\cap}$

48 a Lýstu menginu A með orðum og mynd.
A = {x | x er margfeldi af sex milli 40 og 70}

b Skráðu stök mengisins A.

c Lýstu leiðum sem fara má til að skrá og/eða lýsa mengjum.

ÞRAUT

Árið 1872 var lestarræninginn Páll Snari tekinn til fanga í Bretlandi og dæmdur í fangelsi. Í viðtali við blaðamann sagðist hann iðrast gerða sinna. Jafnframt taldi hann það mikla gæfu að enginn af sonum hans hefði, þrátt fyrir allt, fetað í fótspor hans. Allir fimm væru þeir góðir og heiðarlegir borgarar. Einn starfar sem læknir, annar sem lyfsali, þriðji sem smiður, fjórði sem lestarstjóri og sá fimmti sem prestur.

Hann lýsti sonum sínum og störfum þeirra á eftirfarandi hátt.

- Elsti sonur minn hefur verið á vinnumarkaði síðan 1869. Hann er ekki smiður.
- Einn af sonum mínum hefur starfað sem kennari síðan 1865. Það er ekki Nói og hann er ekki prestur.
- Jón er mikilsmetinn lyfsali.
- Yngsti sonur minn heitir Sveinn.
- Næstyngsti sonur minn er lestarstjóri.
- Pétur sem hefur starfað síðan 1861 er ekki sá næstyngsti.
- Hvorki Bjarni né sá bróðir sem hefur starfað síðan 1867 eru prestar.
- Þriðji elsti sonurinn fór fyrr út á vinnumarkaðinn en sá elsti.
- Einn af sonum mínum hefur verið á vinnumarkaði í nákvæmlega 10 ár.

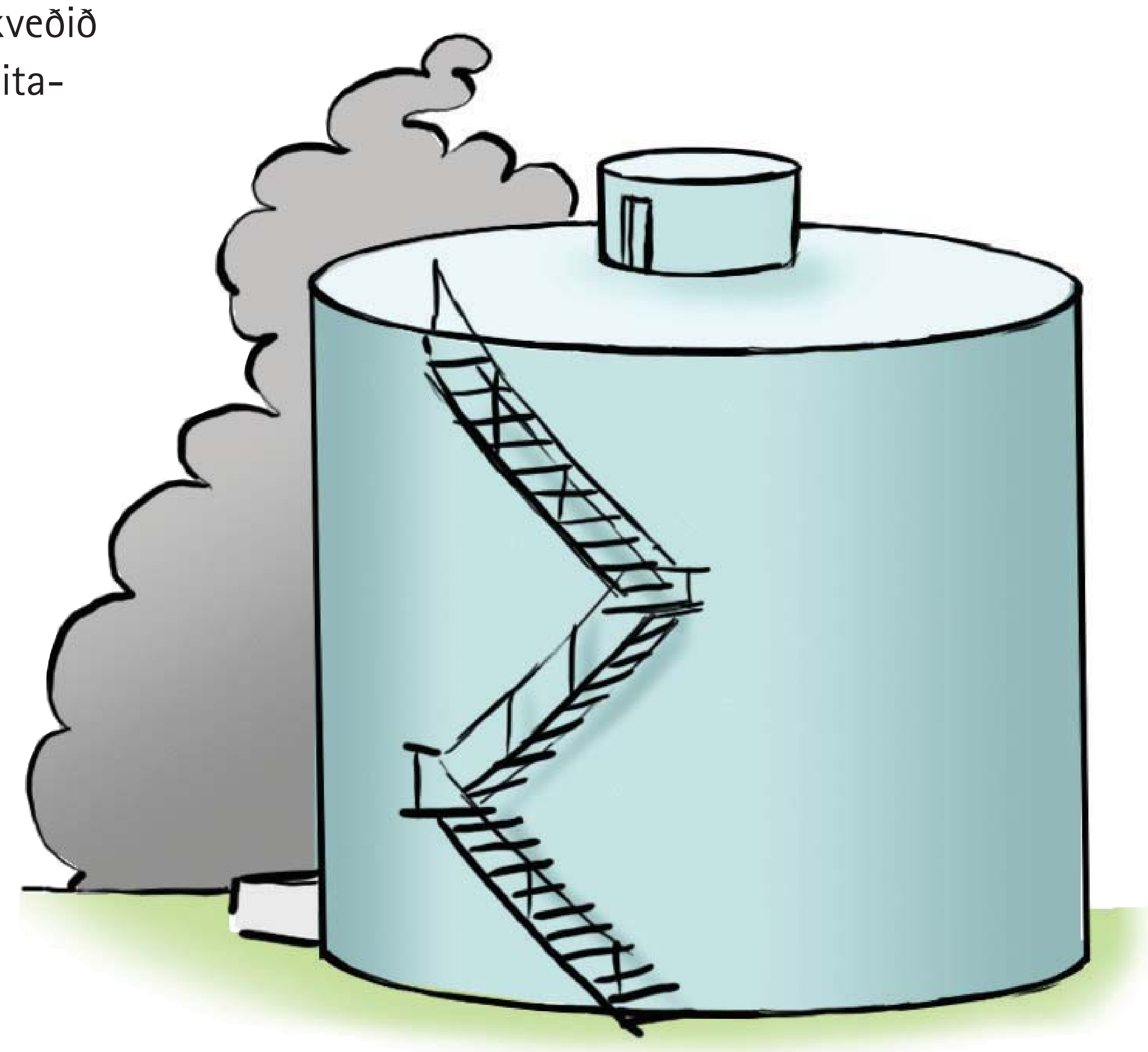
Hvaða sonur (nafn og aldursröð) starfar við hvað og hve lengi hefur hann sinnt viðkomandi starfi?

Stærðfræði í daglegu lífi

Í þessum kafla eigið þið að nota stærðfræðilega þekkingu ykkar til að lýsa ákveðnum hlut eða vörutegund eða til að lýsa og greina ákveðið viðfangsefni. Sem dæmi mætti skoða hitaveitutank eða bíl sem samgöngutæki.

Gert er ráð fyrir að þið ræðið ykkar á milli bæði þá stærðfræði sem kemur við sögu og þau vandamál sem þið glímið við. Því er æskilegt að þið vinnið saman í litlum hópum og að allur nemendahópurinn ræði líka saman um viðfangsefnið.

Hér eru sett fram nokkur almenn atriði sem mætti skoða í stærðfræðilegri rannsókn en einnig gefin dæmi um spurningar sem gætu vaknað ef viðfangsefnið væri hitaveitutankur.



STÆRÐFRÆÐILEG RANNSÓKN OG LÝSING

Hægt er að lýsa hlut með því að greina lauslega frá litum, lögun, notkunarmöguleikum og því hvað manni finnst um hann. Ef um er að ræða stærðfræðilega rannsókn og lýsingu þá þarf að nota mælingar, útreikninga og aðra þætti stærðfræðinnar til að lýsa hlutnum eins nákvæmlega og kostur er.

Hitaveitutankur

- Hvert er rúmmál hans?
- Hvað kallast svona form?
- Hve lengi er hann að tæmast?
- Hvernig er hæð hans mæld?
- Hvað kostar einn rúmmetri af heitu vatni?
- Er verð á heitu vatni það sama alls staðar á landinu?

HVAÐA STÆRÐFRÆÐI ER NOTUÐ?

Þið þurfið að gera grein fyrir hvaða stærðfræði þið notið í rannsókn ykkar og lýsingum. Þið getið til dæmis notað graf í hnitakerfi til þess að lýsa samhengi milli verðs og fjölda. Flatar- og rúmmálsreikninga má nota til að bera saman stærðir hluta og umbúðum má lýsa með því að nota hugtök úr rúmfræðinni.

Hitaveitutankur
- Rúmmálsútreikningar
- Reikniaðgerðir
- Formskoðun
- Mælingar og mælieiningar
- Gröf

AÐ KAFA Í STÆRÐFRÆÐINA

Þið eigið að dýpka þekkingu ykkar á einum eða fleiri þáttum stærðfræðinnar sem þið hafið notað í rannsókn ykkar og lýsingu. Ef þið hafið til dæmis notað gröf til að lýsa samhengi milli fjölda og verðs þá skuluð þið gera grein fyrir því sem þið vitið um jöfnur og gröf, svo sem hallatölu, jöfnu beinnar línu og rétt hlutfall. Ef þið hafið mikið fengist við þríhyrninga getið þið greint frá leiðum til að finna flatarmál þeirra, mismunandi gerðum þríhyrninga o.s.frv.

Hitaveitutankur
- Rúmmál þrívíðra hluta
- Mælieiningar og samband þeirra
- Notkun reiknireglna við verðútreikninga
- Sívalningar

KYNNING Á NIÐURSTÖÐUM

Þið eigið að undirbúa munnlega kynningu á niðurstöðum. Mikilvægt er að þið gerið grein fyrir framvindu vinnunnar og nýtið ykkur hluti, líkön, myndrit og önnur gögn sem þið hafið notfært ykkur eða hafa orðið til við vinnuna.

Hitaveitutankur
- Sýnd líkön af mismunandi hitaveitutönkum
- Frásögn og lýsing
- Myndasýning af mismunandi sívalningum
- Línurit sem sýna flæði inn og út úr hitaveitutanki

1 Skráið hvert og eitt niður hugmyndir að viðfangsefnum sem mætti rannsaka út frá stærðfræðilegu sjónarhorni. Safnið hugmyndunum saman á einn lista og hengið upp.

Hægt er að vinna út frá fjölmörgum hugmyndum. Hér er dæmi um hvernig stór hópur sem velur að rannsaka sama viðfangsefnið frá mismunandi sjónarhornum getur unnið saman og skipt með sér verkum. Hópurinn byrjar á að velta fyrir sér spurningunni:

HVAÐA STÆRÐFRÆÐI GÆTI KOMIÐ VIÐ SÖGU VIÐ MORGUNVERÐARBORÐIÐ?

Til eru mjög margar gerðir af morgunkorni og þær eru seldar í misstórum pakkningum. Á morgnana fá margir sér morgunkorn og því ákveður hópurinn að skoða morgunkorn nánar.

Fram komu þessar spurningar.

- Í hverju felst munurinn á mismunandi tegundum morgunkorns?
- Hver eru hagstæðustu kaupin?
- Er samband á milli verðs og magns?
- Hvert er næringarinnihald í einum skammti af morgunkorni?
- Hvaða tegund morgunkorns er vinsælust?
- Hve mikið magn af morgunkorni er flutt til landsins árlega?

Áður en hafist er handa við stærðfræðilegar rannsóknir þarf að hafa í huga hvað megi rannsaka og lýsa, á hvern hátt megi framkvæma rannsókn og í hvaða röð þurfi að vinna einstök verk.

A

Hópurinn skiptir sér í 4–5 manna hópa. Hver hópur setur fram lista yfir hugmyndir sem hann telur að megi rannsaka í tengslum við morgunkorn. Hann kynnir hugmyndir sínar fyrir bekknum, þær eru ræddar og búinn er til listi yfir allar hugmyndir sem fram koma. Hver hópur setur fram óskir um það sem hann hefur mestan áhuga á að rannsaka. Reynt er að velja hugmyndir þannig að sem flest svið stærðfræðinnar komi við sögu.

B

Ræða þarf hvaða stærðfræði má notfæra sér við að lýsa morgunkorni og rannsaka það út frá þeim hugmyndum sem settar hafa verið fram. Jafnframt þarf að ræða hvaða leiðir má fara við rannsóknirnar. Hver hópur skráir á hugmyndalistann hvaða stærðfræði hann ætlar að nota.

Morgunkorn – Hugmyndalisti

Hugmynd	*Val á stærðfræði*	*Stærðfræði sem á að kafa í*
Samband verðs og magns	*Gröf í hnitakerfi*	*Jöfnur og gröf*
Lögun og stærð umbúða	*Rúmmáls-útreikningar og formskoðun*	*Rúmmál strendinga*
Árlegur innflutningur		

C

Rætt er í hópnum hvaða svið stærðfræðinnar væri hægt að kanna nánar í tengslum við þær hugmyndir sem komu fram. Hver hópur ákveður hvaða svið hann hyggst kafa í og skráir það á hugmyndalistann.

Hver hópur þarf í samráði við kennara að:

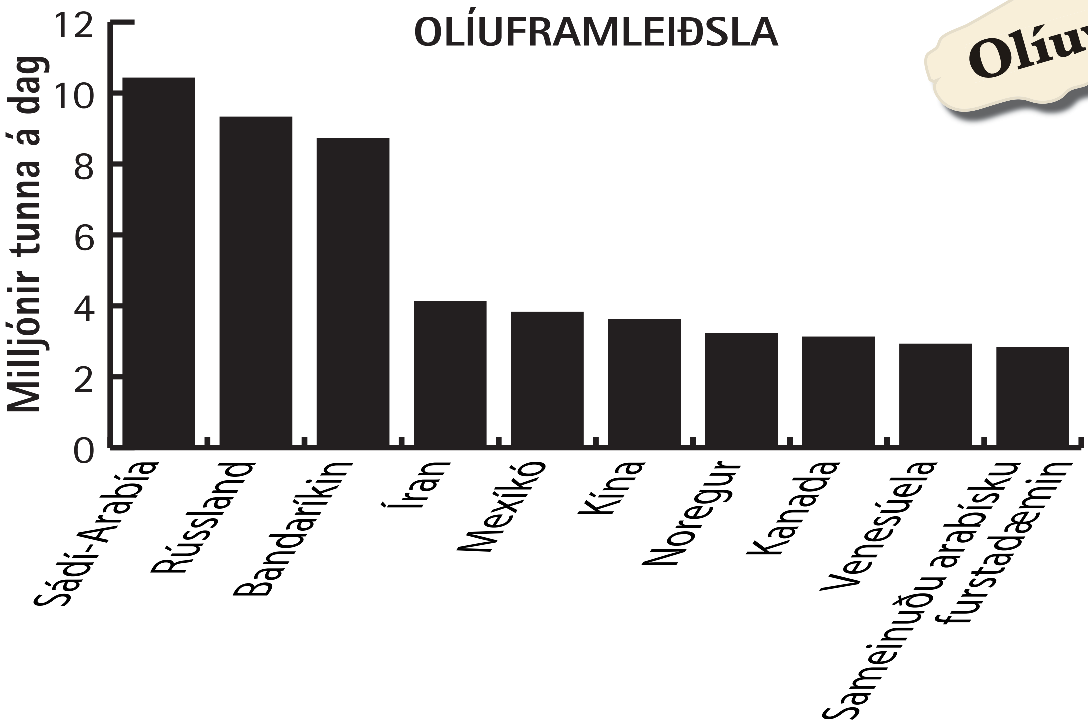
- Búa til vinnuáætlun og ákveða verkaskiptingu.
- Afla nauðsynlegra gagna.
- Framkvæma rannsóknina og vinna úr henni.
- Ákveða á hvern hátt eigi að kynna verkefnið og gæta þess að allir í hópnum komi að kynningunni.

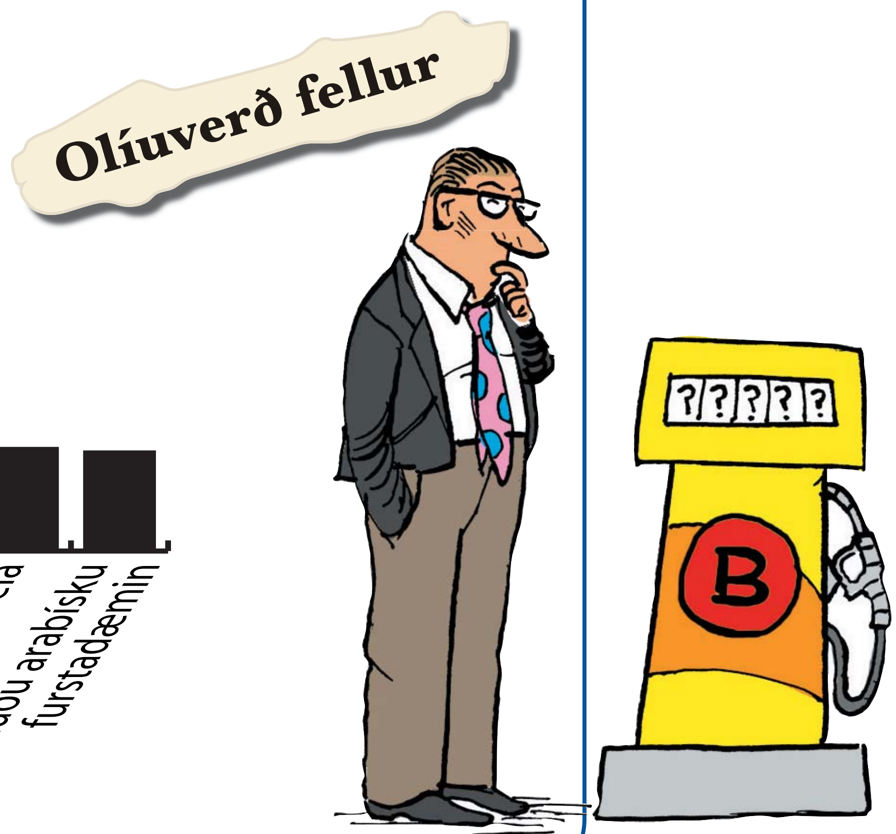
2 Farið yfir vinnuferlið í verkefninu um morgunkornið og skráið á hugmyndalistann hvernig mætti vinna úr fleiri hugmyndum í tengslum við þetta viðfangsefni.

3 Framkvæmið stærðfræðilega rannsókn út frá tilteknu viðfangsefni. Hér eru gefin fjögur dæmi sem þið getið valið að skoða nánar. Þið getið líka valið eitthvað annað, til dæmis af hugmyndalista ykkar úr dæmi 1.

OLÍA

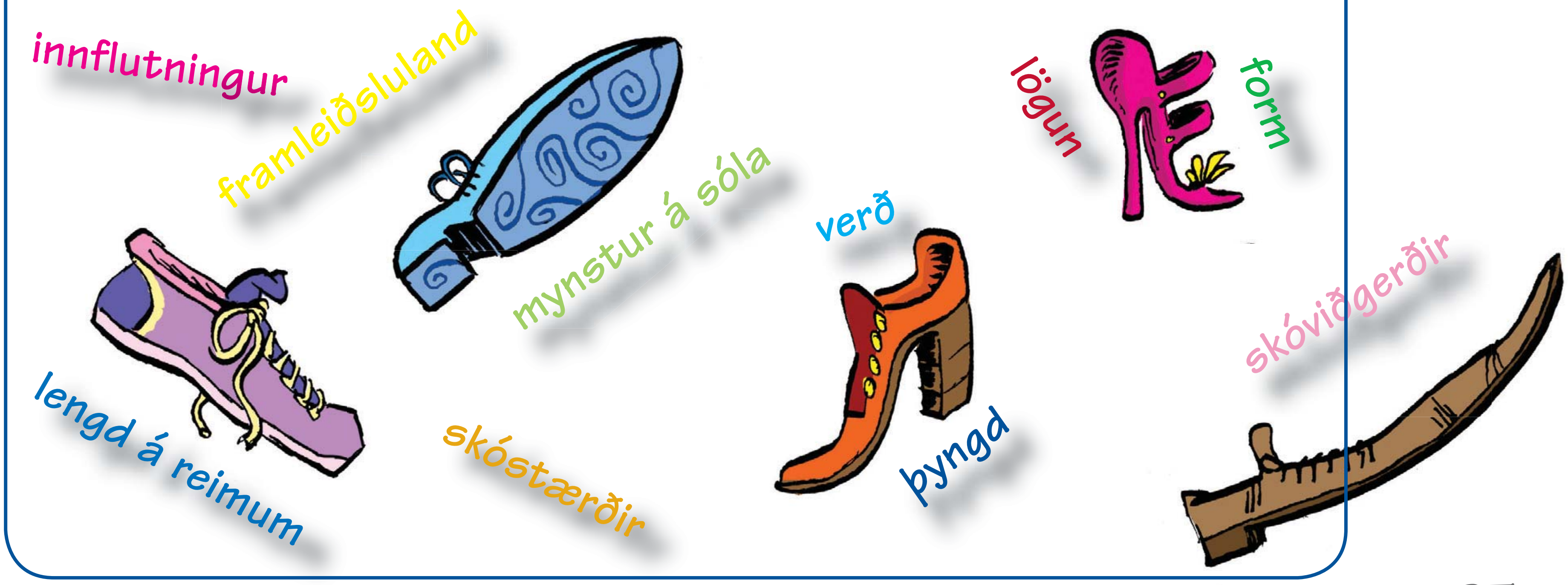
Olía skiptir miklu máli í nútímasamfélagi. Sífellt heyrast í fréttum upplýsingar um heimsmarkaðsverð á olíu og áhrif þess á efnahagsmál bæði hér á landi og úti í hinum stóra heimi.





SKÓR

Flestir eiga mörg pör af skóm sem þeir nota við mismunandi aðstæður. Til eru margar gerðir af skóm svo sem sandalar, gúmmístígvél, kuldaskór, inniskór, lakkskór, sauðskinnsskór, fótboltaskór og skíðaskór.



VATN

Vatn er stór þáttur í lífi okkar. Við drekkum vatn, notum það í matargerð og við hreingerningar. Við syndum í því og stór hluti af mannslíkamanum er vatn. Það er líka notað í atvinnustarfsemi svo sem til hreingerninga, vökvunar og íblöndunar.

75% heilans eru úr vatni.

Árið 2000 höfðu 18% jarðarbúa ekki aðgang að hreinu drykkjarvatni.

3% af vatni í heiminum er ferskvatn.

Vatnsneysla í Reykjavík jókst úr 18 lítrum á dag í 200 lítra á dag á einstakling fljótlega eftir að Vatnsveita Reykjavíkur tók til starfa árið 1909.

120 milljónir Evrópubúa hafa ekki aðgang að hreinu drykkjarvatni.

SVEITARFÉLAGIÐ MITT

Stærðfræði má nota á ýmsan hátt til að lýsa sveitarfélagi. Skoða má þróun fólksfjölda, aldurssamsetningu íbúa, notkun skatttekna, kostnað við rekstur skóla, niðurstöður kosninga, atvinnumöguleika og nýtingu landrýmis svo nokkur dæmi séu tekin.

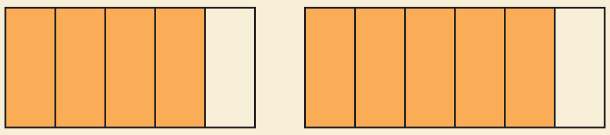
Almenn brot

Með almennum brotum má skrá stærðir mun nákvæmar en með heil-um tölum.

Markmið þessa kafla eru að þú:

- *Eflir skilning þinn á almennum brotum og hæfni þína til að lesa og skrá heilar tölur og brot.*
- *Þekkir ýmsar leiðir við brotareikning og náir valdi á reikningi með almennum brotum.*
- *Eflir tilfinningu þína fyrir niðurstöðum úr brotareikningi.*
- *Æfir þig í að útskýra og rökstyðja niðurstöður þínar.*

1 Skoðaðu svar Birtu úr 4. bekk við eftirfarandi spurningu.
Hvort er stærra landsvæði $\frac{4}{5}$ af hektara eða $\frac{5}{6}$ af hektara?

Ég teiknaði 

þá gat ég séð að $\frac{4}{5} = \frac{5}{6}$, því báða vantar einn hluta til að verða einn heill, svo þeir eru það sama.

a Hvaða villu gerir Birta?

b Hvernig gætir þú útskýrt fyrir henni rétta svarið?

2 Oft má sjá fyrir sér hluta úr heild með því að nýta sér margföldun.
Úlfur kaupir 48 geisladiska. Hann brennir myndir á $\frac{5}{8}$ þeirra.

Töluna 48 má sjá fyrir sér sem margfeldi tveggja þátta. Úlfur veit að nefnarinn er átta og því er gott að hugsa sér að skipta heildinni í átta hluta.

a Hve margir geisladiskar eru $\frac{1}{8}$ hluti diskanna?

b Hve margir diskar eru $\frac{5}{8}$ hlutar diskanna?

c Úlfur brennir kvikmyndir á $\frac{2}{6}$ af diskunum 48. Hve margir geisladiskar eru það?

d Úlfur brennir ljósmyndir á $\frac{6}{16}$ hluta diskanna. Hve margir geisladiskar eru það?

3 Fjórir menn skipta jafnt á milli sín þremur snúðum.

a Sýndu með myndum hvernig þeir gátu skipt þeim á milli sín. Skráðu brotastærðirnar við. Sýndu að minnsta kosti tvö dæmi.

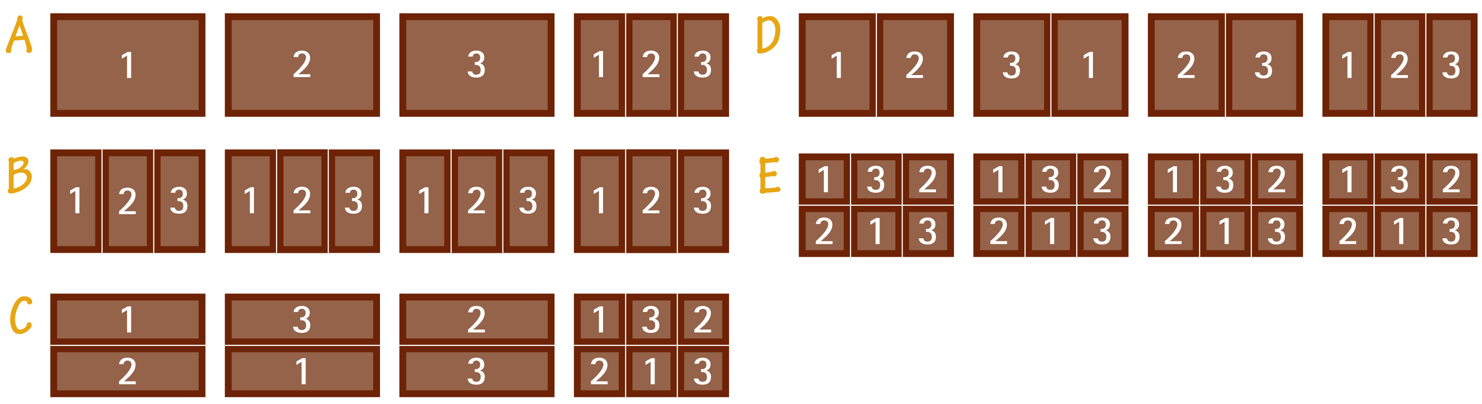
b Hve stóran hluta fær hver þeirra?

4 Í dæmi 3 fannst þú út hvað hver maður fær stóran hluta úr einum snúð í sinn hlut ef jafnt er skipt. Ef miðað er við að x sé kökumagn á mann þá eru $4x = 3$.

a Hvaða gildi hefur þá x?

b Hve stór hluti af öllum snúðunum kemur í hlut hvers og eins?

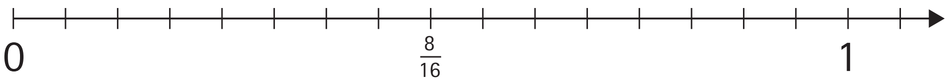
5 Þrír menn skipta fjórum súkkulaðistykkjum jafnt á milli sín.
Hér eru dæmi um fimm leiðir.



a Skráðu fyrir hverja mynd almennu brotin sem koma fram og plúsheitin sem fram koma. Hve stóran hluta af súkkulaðistykki fær hver og einn?

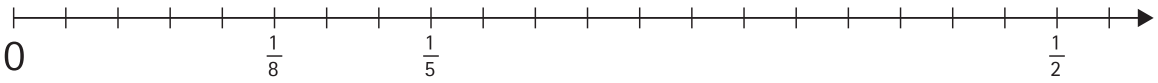
6 Í dæmi 5 þarf að finna hve stóran hluta úr súkkulaðistykki hver fær ef þrír skipta með sér fjórum súkkulaðistykkjum. Hve stóran hluta af öllum súkkulaðistykkjunum fær hver ef jafnt er skipt?

7 a Skráðu tvö almenn brot sem eru jafngild $\frac{8}{16}$.

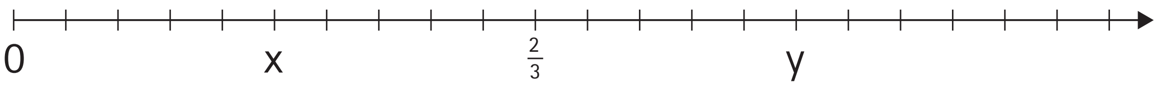


b Skráðu tvö almenn brot milli 0 og $\frac{8}{16}$.

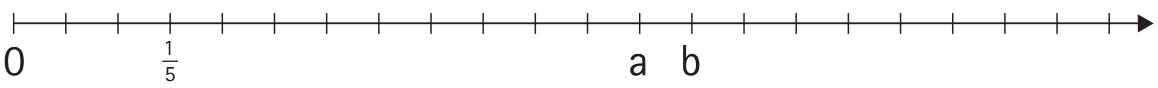
8 Finndu fjögur almenn brot á milli $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{5}$.



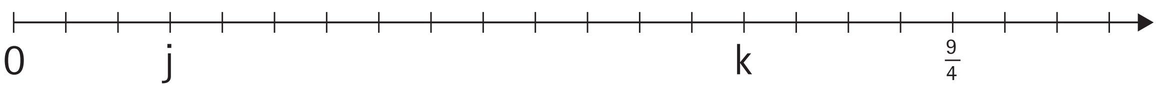
9 Stærðin $\frac{2}{3}$ er skráð á talnalínuna. Finndu gildi x og y.



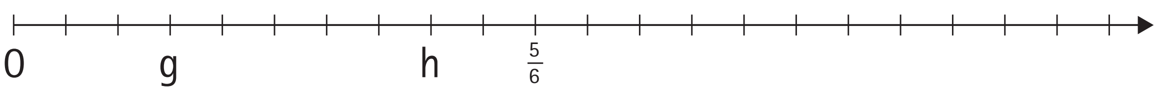
10 Stærðin $\frac{1}{5}$ er skráð á talnalínuna. Finndu gildi a og b.



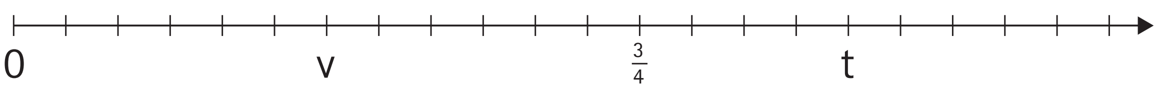
11 Stærðin $\frac{9}{4}$ er skráð á talnalínuna. Finndu gildi j og k.



12 Stærðin $\frac{5}{6}$ er skráð á talnalínuna. Finndu gildi g og h.



13 Stærðin $\frac{3}{4}$ er skráð á talnalínuna. Finndu gildi v og t.

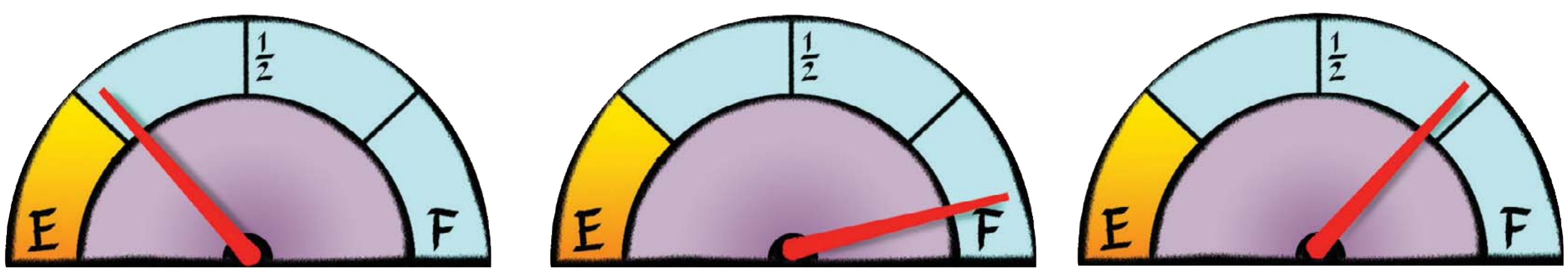


14 a Teiknaðu talnalínubút sem er 10 cm langur og merktu strik með hálfs sentímetra millibili.

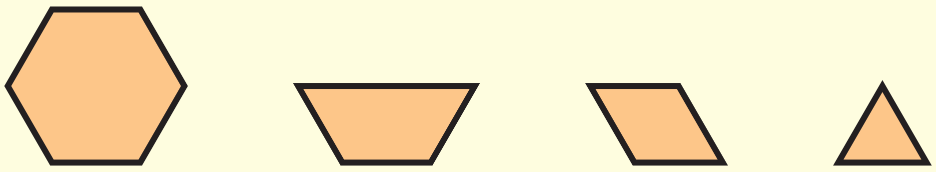
b Skrifaðu $\frac{6}{10}$ við strik númer sjö.

c Merktu $\frac{7}{5}$ og $\frac{12}{20}$ inn á talnalínuna.

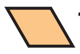
15 Skráðu hve stór hluti hvers bensíntanks er fullur.



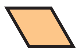
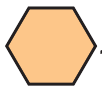
Almenn brot eru skráning á hluta miðað við þekkta heild. Ef aðeins er skráð $\frac{7}{8}$ er átt við $\frac{7}{8}$ af einum heilum. Heildin getur verið misstór, til dæmis misstór flötur og mismunandi fjöldi.

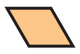


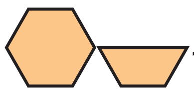
16 Skoðaðu formin og ákvarðaðu samband milli stærða þeirra. Gott getur verið að teikna þau á þríhyrningapappír.

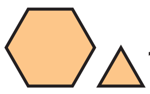
a Hve margir  eru í ?

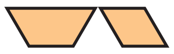
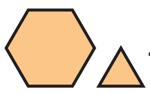
b Hve margir  eru í ?

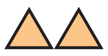
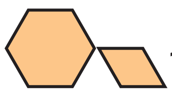
c Hve margir  eru í ?

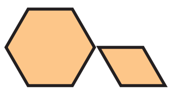
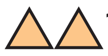
d Hve margir  eru í ?

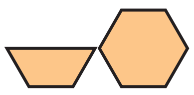
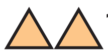
17 a Hve stór hluti er  ef heildin er ?

b Hve stór hluti er  ef heildin er ?

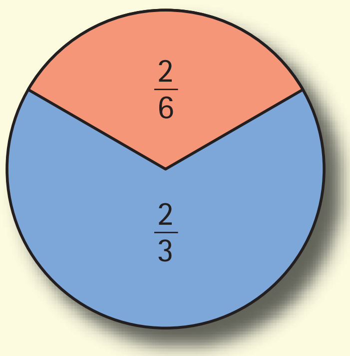
c Hve stór hluti er  ef heildin er ?

d Hve stór hluti er  ef heildin er ?

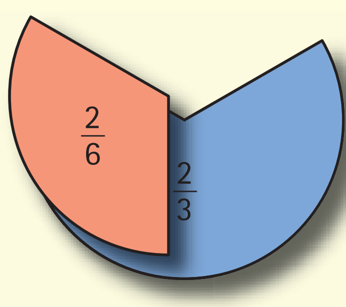
e Hve stór hluti er  ef heildin er ?

f Hve stór hluti er  ef heildin er ?

Nota má ýmis hjálpargögn þegar almenn brot eru lögð saman og dregin frá. Brotabútar geta verið mjög hentugir.



$\frac{2}{3} + \frac{2}{6} = 1$



Hver er mismunurinn á $\frac{2}{3}$ og $\frac{2}{6}$?

18 Sýndu summu og mismun með teikningu.

a $\frac{5}{6} + \frac{3}{6}$

b $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$

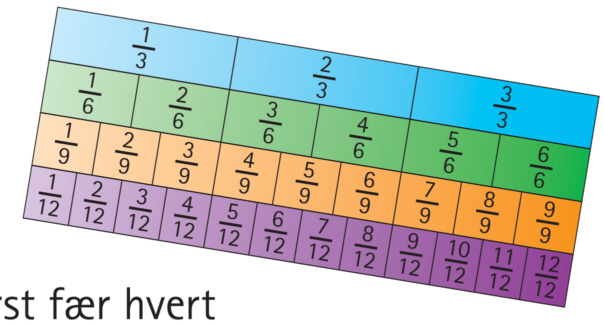
c $\frac{5}{9} - \frac{2}{6}$

d $\frac{9}{12} - \frac{7}{12}$

e $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

f $\frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$

19 Notaðu brotatöflu til að reikna.



a $\frac{1}{3} + \frac{5}{12}$ b $\frac{4}{5} - \frac{4}{15}$ c $\frac{17}{18} - \frac{2}{3}$ d $\frac{4}{9} + \frac{7}{18}$

20 Þorsteinn ætlar að gefa börnum sínum þremur hrossastóð sitt. Fyrst fær hvert þeirra $\frac{1}{6}$ hluta. Guðný sem er elst fær auk þess $\frac{1}{9}$, Ingibjörg $\frac{4}{18}$ og Einar fær $\frac{2}{12}$ í viðbót við sjötta hlutann sinn.

a Hve stóran hluta stóðsins fékk hvert þeirra?

b Hve margir hestar gátu verið í stóðinu?

21 Kristján vann tíu milljónir króna í happdrætti. Hann ákveður að leyfa nágrönnum sínum að njóta þess með sér. Bergþóra í næsta húsi fær $\frac{1}{5}$ hluta, Svava í kjallaranum fær $\frac{1}{4}$ og Þórður í húsinu á móti fær $\frac{1}{8}$. Kristján er að velta fyrir sér hve stór hluti sé eftir og hve stóran hluta Ásgeir í risinu eigi að fá.

- Reiknaðu út hve stóran hluta Kristján á eftir.
- Hve stóran hluta finnst þér að hann eigi að láta Ásgeiri eftir?
- Hve stór hluti er þá eftir handa Kristjáni?

22 Reiknaðu.

a $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$ c $\frac{15}{18} + \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4} + \frac{5}{16} + \frac{3}{8}$

b $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ d $3 - \frac{6}{7}$ f $\frac{7}{9} - \frac{5}{18} - \frac{1}{6}$

Þú hefur oftast reiknað almenn brot með tölum milli 0 og 1. Við samlagningu og frádrátt almennra brota er líka oft unnið með hærri tölur og neikvæðar tölur.

Summa $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{2}$ er til dæmis meira en einn, þ.e. $1\frac{1}{4}$ og mismunur brotanna $4\frac{1}{2}$ og $\frac{7}{12}$ er $3\frac{11}{12}$.

23 Reiknaðu.

a $2 + 1\frac{2}{3}$ c $\frac{7}{8} + 2\frac{1}{4}$ e $5\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$

b $2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}$ d $4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}$ f $4\frac{3}{5} - 2\frac{4}{10}$

Við samlagningu og frádrátt almennra brota þarf oft að byrja á að gera brot samnefnd. Byrjað er þá á að finna samnefnara. Þú hefur kynnst nokkrum leiðum til þess. Samnefnari þarf að uppfylla það skilyrði að allir nefnarar í viðkomandi dæmi gangi upp í hann.

- Finna má samnefnara með því að skrá margfeldi hvors nefnara fyrir sig.
  Ef nefnararnir eru 12 og 18 þá koma talnarununnar, $\boxed{12}$, 24, 36, 48 $\boxed{18}$, 36
- Margfalda má nefnarana saman og nota margfeldið sem samnefnara.
  Ef nefnararnir sem um ræðir eru 4 og 6 yrði samnefnarinn 24.
- Með frumþáttun má finna lægsta mögulegan samnefnara. Þættir tölunnar fjórir eru 2 og 2 og tölunnar sex 2 og 3.
  Tveir er því sameiginlegur þáttur.

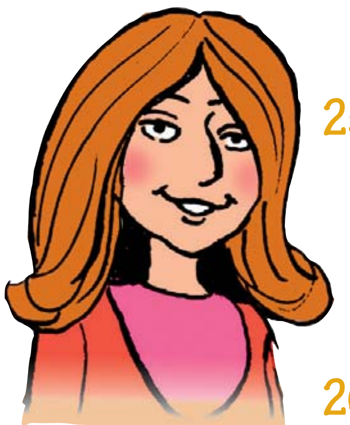
$\boxed{4}$ — 2 — 1 $\boxed{6}$ — 3 — 1
2   2   2   3

$4 = 2 \cdot 2$ $6 = 2 \cdot 3$

Þegar fundinn er samnefnari er nóg að taka sameiginlega þætti einu sinni. Samnefnari fyrir 4 og 6 getur því verið 12. Tölurnar 4 og 6 ganga báðar upp í 12.

24 Sýndu hvaða leið þú notar til að finna samnefnara. Hvaða samnefnara myndir þú nota ef þetta eru nefnararnir?

a 5 og 4   b 12 og 16   c 15 og 18   d 35 og 70   e 30, 18 og 42



25 Hvaða samnefnara valdi Fjóla?

a $\frac{2}{3} + \frac{5}{18} = \frac{12}{x} + \frac{5}{x}$ b $\frac{7}{9} - \frac{5}{6} = \frac{14}{x} - \frac{15}{x}$

c Hefði hún getað valið lægri samnefnara? Rökstyddu svar þitt.

26 Reiknaðu.

a $\frac{2}{6} + \frac{5}{12}$ b $\frac{5}{6} + \frac{5}{4}$ c $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ d $\frac{2}{3} - \frac{1}{9}$

68 – 34 – 17 – 1
2   2   17

27 Frumþáttaðu tölurnar. Hvaða samnefnara má nota ef þetta eru nefnarar?

a 4, 12, 18   b 16 og 24   c 6 og 10   d 27 og 45

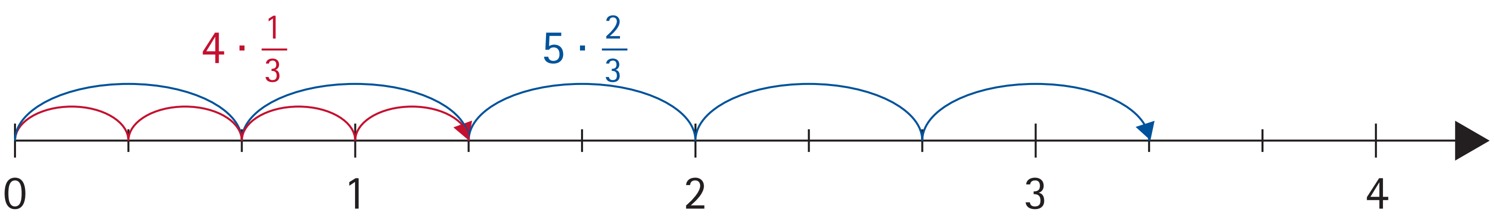
28 Reiknaðu.

a $\frac{7}{27} + \frac{42}{45}$ b $\frac{8}{6} - \frac{7}{10}$ c $\frac{5}{16} + \frac{12}{24}$ d $\frac{7}{4} - \frac{5}{12} - \frac{7}{18}$

29 Reiknaðu.

a $\frac{11}{15} + \frac{5}{6}$ c $\frac{7}{8} - \frac{17}{20}$ e $\frac{5}{8} - \frac{5}{12}$ g $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}$

b $\frac{7}{12} - \frac{5}{42}$ d $\frac{11}{9} - \frac{5}{6}$ f $\frac{20}{72} + \frac{13}{24}$ h $\frac{9}{16} - \frac{5}{12} - \frac{1}{8}$



30 Lýstu með myndum og orðum hvernig þú reiknar þessi dæmi.

a Finndu $\frac{2}{5}$ af 360.

b Finndu $\frac{2}{5}$ af 15.

c Finndu $\frac{2}{5}$ af 4.

d Finndu $\frac{2}{5}$ af $\frac{1}{2}$.

Þegar finna á $\frac{2}{5}$ af einhverri heild eða fjölda má fara ýmsar leiðir. $\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5}$

- Ef finna á $\frac{2}{5}$ af 10 má margfalda 10 með tveimur og deila síðan með 5 í þann fjölda.
- Einnig mætti byrja á að finna $\frac{1}{5}$ af 10 eða deila með fimm í tíu og margfalda síðan þann fjölda með tveimur.

31 a Finndu $\frac{3}{7}$ af 429.

b Finndu $\frac{3}{8}$ af 3208.

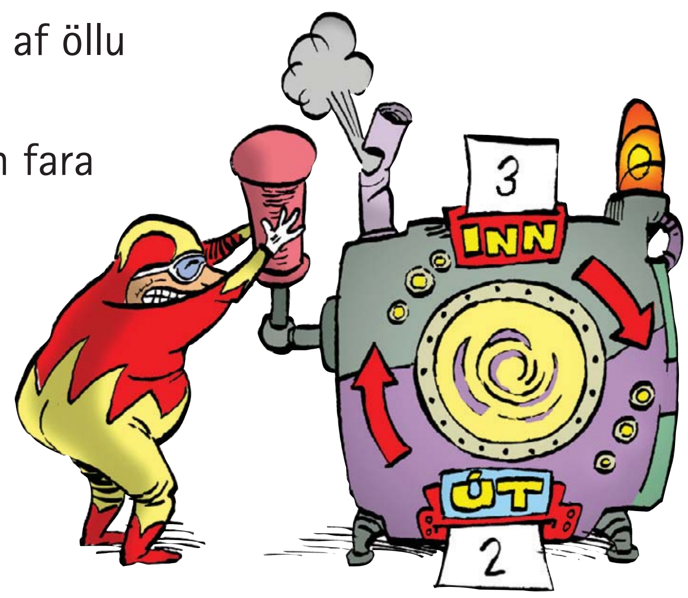
c Finndu $\frac{3}{5}$ af 7890.

d Finndu $\frac{8}{9}$ af 2772.

e Finndu $\frac{5}{4}$ af 6800.

f Finndu $\frac{7}{12}$ af 60.

32 Þessi breytivél finnur $\frac{2}{3}$ af öllu sem inn í hana fer.
Fyrir hverja þrjá sem inn fara koma tveir út.



Teiknaðu töfluna upp og fylltu í auða dálkinn

12	
60	
663	

33 a Hvaða tölur voru settar í breytivélina?

$\frac{1}{4}$	
INN	ÚT
?	12
?	250
?	57

b Hver er reglan?

?	
INN	ÚT
12	8
1260	840
128	?

c Hvaða tölur koma út úr breytivélinni?

$\frac{2}{5}$	
INN	ÚT
250	?
555	?
1290	?

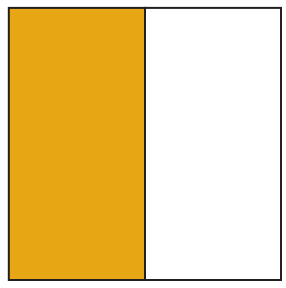
d Hver er reglan?

?	
INN	ÚT
93	31
459	153
200	?

Veldu fleiri tölur til að setja inn í breytivélarnar og kannaðu hvað kemur út.

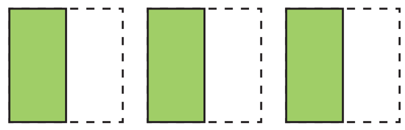
34 Prófaðu þessar þrjár leiðir til að finna $\frac{3}{4}$ af $\frac{1}{2}$.

a Teiknaðu ferning og afmarkaðu helming hans eins og myndin sýnir.
Finndu $\frac{1}{4}$ af helmingnum með því að skipta honum upp í fjóra hluta.
Hve stór hluti af upphaflega ferningnum er hver hluti?
Hvað eru $\frac{3}{4}$ af $\frac{1}{2}$?



b Teiknaðu ferning og afmarkaðu helming hans.
Litaðu $\frac{3}{4}$ af helmingnum.
Hve stór hluti af upphaflega ferningnum er litaði hlutinn?
Hvað er $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$?

c Margfaldaðu fyrst með þremur og deildu svo með fjórum.



Teiknaðu þrjá hálfa ferninga.
Skiptu hverjum helmingi í fjóra hluta og litaðu $\frac{1}{4}$ hluta af hverjum þeirra.
Hve stóran hluta úr einum heilum mynda þessir fjórðungar úr hálfum?

35 Teiknaðu ferninga og notaðu þá til að reikna þessi dæmi. Veldu þá leið sem þér finnst best að nota.

a $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ **c** $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ **e** $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4}$ **g** $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$

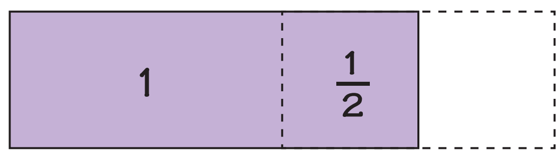
b $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ **d** $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ **f** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$ **h** $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$

36 a Teiknaðu rétthyrninga sem sýna $1\frac{1}{2}$ eða búðu til $1\frac{1}{2}$ með brotabútum.

b Litaðu $\frac{1}{2}$ af $1\frac{1}{2}$.

c Hve stór hluti af einum heilum er litaður?

d Hvað eru $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$?



37 a Teiknaðu rétthyrninga sem sýna $2\frac{1}{3}$.

b Litaðu helming af $2\frac{1}{3}$. Hve stóran hluta af einum heilum litaðir þú?

38 Teiknaðu rétthyrninga og finndu svarið.

a Finndu $\frac{1}{4}$ af $2\frac{1}{2}$ **b** Finndu $\frac{3}{4}$ af $1\frac{1}{2}$ **c** Finndu $\frac{1}{4}$ af $2\frac{2}{3}$

39 Teiknaðu rétthyrninga og finndu svarið.

a $\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$ **c** $\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{2}$ **e** $\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4}$

b $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}$ **d** $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$ **f** $\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{4}$

ÞRAUT

Á vinnustað nokkrum eru $\frac{5}{9}$ starfsmanna konur. $\frac{3}{8}$ af körlunum eru einhleypir og $\frac{1}{3}$ af einhleypu körlunum er eldri en 50 ára. Hve stór hluti starfsmannanna er einhleypir karlar undir 50 ára aldri?

40 Rannveig reiknar margföldunardæmi og notar ferninga sem hjálpartæki.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $\quad \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$ $\quad \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ $\quad \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{27}$

Skoðaðu dæmin og svörin við þeim. Beindu athyglinni að teljurum og nefnurum. Sérðu einhverja reglu í hverju dæmi?

41 Reiknaðu.

a $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{2}$ **b** $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7}$ **c** $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}$ **d** $\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2}$ **e** $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

Þegar margfalda á saman almenn brot getur verið þægilegt að setja brotin á stórt brotastrik. Það á sérstaklega við þegar margfalda á fleiri en tvær tölur saman.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 9}$$

42 Reiknaðu.

a $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ **b** $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}$ **c** $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$ **d** $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

43 Anna á $\frac{3}{4}$ úr metra af efni. Hún notar $\frac{5}{6}$ hluta efnisins til að sauma barnabuxur. Hve mikið efni notar hún í buxurnar?

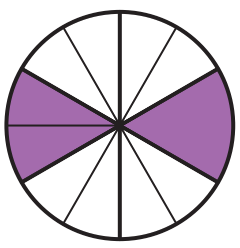
44 Valur á $\frac{3}{4}$ úr metra af trélista. Hann notar $\frac{2}{3}$ hluta listans í lítinn ramma. Hve stór hluti úr metra er ummál rammans?

45 Reiknaðu.

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$ **c** $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$ **e** $\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

b $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ **d** $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9}$ **f** $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4}$

g Skoðaðu svörin í liðum a – f. Má finna jafngild brot með lægri teljurum og nefnurum?



$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Oftast er þægilegra að reikna með lágum tölum en háum. Einnig er auðveldara að átta sig á stærð almennra brota ef nefnari og teljari eru lágir. Hlutfallið $\frac{1}{3}$ má skrá á marga vegu, t.d. $\frac{4}{12}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{120}{360}$.

Flestum finnst þó skráningin $\frac{1}{3}$ skiljanlegust. Það er kallað fullstytt brot þegar almenn brot eru skráð með lægstu mögulegu teljurum og nefnurum.

46 Fullstyttu almennu brotin.

a $\frac{12}{24}$ b $\frac{15}{45}$ c $\frac{35}{105}$ d $\frac{48}{60}$ e $\frac{98}{112}$

Við margföldun brota má oft stytta áður en margfaldað er.

$$\frac{15}{35} \cdot \frac{14}{22} = \frac{15 \cdot 14}{35 \cdot 22} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7}}{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{2} \cdot 11}$$

Stytting byggist á að finna sameiginlega þætti í teljurum og nefnurum og notfæra sér að sama tala í teljara og nefnara gefur 1. Þar sem 1 er hlutleysa í margföldun einfaldar það margföldun mjög.

Ef tölurnar eru þáttaðar kemur fram:

$15 = 5 \cdot 3$

$14 = 2 \cdot 7$

$35 = 5 \cdot 7$

$22 = 2 \cdot 11$

2, 5 og 7 eru sameiginlegir þættir teljara og nefnara.
Eftir standa því aðeins 3 í teljara og 11 í nefnara.

47 Reiknaðu og skilaðu svörunum sem fullstyttu broti.

a $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{8}$ c $\frac{9}{12} \cdot \frac{10}{15}$ e $\frac{9}{16} \cdot \frac{72}{81}$ g $\frac{21}{28} \cdot \frac{8}{9}$

b $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{6}$ d $\frac{5}{42} \cdot \frac{21}{25}$ f $\frac{30}{77} \cdot \frac{11}{6}$ h $\frac{25}{44} \cdot \frac{33}{60}$

48 Reiknaðu og skilaðu svörunum sem fullstyttu broti.

a $\frac{2}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{12}{5}$ b $\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{8}$ c $\frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{22}{4}$ d $\frac{2}{15} \cdot \frac{25}{40} \cdot \frac{3}{7}$

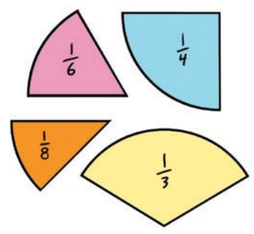
49 Sýndu hve oft má draga

a $\frac{1}{3}$ frá 3 b $\frac{3}{4}$ frá 3 c $\frac{4}{6}$ frá 3 d $\frac{4}{6}$ frá 6

50 Við deilingu almennra brota getur verið hentugt að byrja á að gera brotin samnefnd og deila svo. Reiknaðu.

a $\frac{2}{3} : \frac{2}{6}$ b $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ c $\frac{8}{10} : \frac{2}{5}$ d $\frac{4}{3} : \frac{8}{12}$

51 Í dæmi 49 var svarið alltaf heil tala. Þegar broti er deilt í brot kemur oftast brot út. Reiknaðu og skráðu afgang.

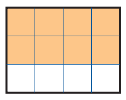


a $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ b $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$ c $\frac{7}{6} : \frac{2}{3}$

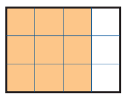
52 Svarið við dæminu $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$ segir til um hve margir $\frac{2}{3}$ hlutar eru í $\frac{3}{4}$.

Finna má svarið með því að nota rúðunet.

- Hvað eru $\frac{2}{3}$ af einum margar rúður?



- Hvað eru $\frac{3}{4}$ margar rúður?



Ef lituðu rúðurnar eru taldar kemur í ljós að taka má $\frac{2}{3}$ einu sinni af $\frac{3}{4}$.

- Hve stór hluti af $\frac{2}{3}$ er afgangurinn?

53 Teiknaðu rétthyrninga og reiknaðu dæmin.

a $\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$ b $\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$ c $\frac{5}{7} : \frac{1}{3}$

54 Á matsölustað eru seldar bökur þar sem í hverjum skammti eru $\frac{1}{3}$ úr böku. Til eru $4\frac{1}{2}$ baka. Hve margar bökusneiðar eru það? Hvað verður afgangurinn stór hluti af einni bökusneið?

55 Júlía þarf að saga trébúta sem eru $\frac{3}{8}$ úr metra hver bútur. Hún er með lista sem er 4 m á lengd. Hve marga búta getur hún fengið úr listanum? Hve stór hluti af fjögurra metra bút gengur af?

Þegar skráður er afgangur er miðað við einn heilan. Ef reiknað er dæmið $\frac{5}{4} : \frac{1}{2}$ er svarið 2 og $\frac{1}{4}$ verður afgangs. Ef reynt er að svara spurningunni hve oft má taka $\frac{1}{2}$ af $\frac{5}{4}$ má skoða að tvisvar má taka hálfan af $\frac{5}{4}$ og hálfu sinni í viðbót því $\frac{1}{4}$ er helmingur af hálfum. $\frac{5}{4} : \frac{1}{2}$ er því jafnt og $2\frac{1}{2}$.

56 Reiknaðu þessi dæmi.

a $450 \cdot \frac{1}{2}$ d $450 : 2$ g $745 \cdot \frac{1}{5}$ j $745 : 5$

b $2560 \cdot \frac{1}{2}$ e $2560 : 2$ h $1540 \cdot \frac{1}{5}$ k $1540 : 5$

c $685 \cdot \frac{1}{2}$ f $685 : 2$ i $6945 \cdot \frac{1}{5}$ l $6945 : 5$

57 Reiknaðu.

a $450 : \frac{1}{2}$ d $450 \cdot 2$ g $12 : \frac{1}{5}$ j $12 \cdot 5$

b $2560 : \frac{1}{2}$ e $2560 \cdot 2$ h $124 : \frac{1}{5}$ k $124 \cdot 5$

c $685 : \frac{1}{2}$ f $685 \cdot 2$ i $512 : \frac{1}{5}$ l $512 \cdot 5$

Einingabrot hafa alltaf einn sem teljara.

58 Skoðaðu svörin í dæmum 56 og 57.

a Hvert er samhengið á milli þess að margfalda með hálfum og deila með tveimur?

b En milli þess að deila með einum fimmta og margfalda með fimm?

c Hvað veistu nú um samband deilingar með einingabroti og margföldunar með nefnara þess?

d En um samband margföldunar með einingabroti og deilingu með nefnara þess?

Talan einn er hlutleysa í margföldun. Allar tölur nema 0 eiga sér líka margföldunarandhverfu. Það þýðir að til er tala sem er þannig að ef hún er margfölduð með andhverfu sinni verður margföldunarhlutleysan 1 svarið. Ef tala og margföldunarandhverfa hennar eru margfaldaðar saman kemur margföldunarhlutleysan út.

Það er góður kostur að nýta sér margföldunarandhverfu við margföldun og deilingu með brotum. Sem dæmi má nefna að það gefur sömu niðurstöðu að margfalda með tiltekinni tölu og að deila með einingabroti þar sem sú tala er nefnari brotsins.

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 1 \qquad 49 : \frac{1}{7} = 49 \cdot 7 \qquad 49 : 7 = 49 \cdot \frac{1}{7}$$

59 Reiknaðu og notfærðu þér að margfalda með margföldunarandhverfu. Skilaðu svörunum sem fullstyttu broti.

a $16 : \frac{1}{2}$ c $11 : \frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5} : \frac{1}{5}$ g $\frac{5}{4} : \frac{5}{6}$

b $\frac{7}{4} : \frac{1}{7}$ d $\frac{2}{9} : \frac{1}{18}$ f $\frac{3}{4} : \frac{1}{10}$ h $\frac{3}{8} : \frac{3}{48}$

60 Reiknaðu og notfærðu þér að deila með margföldunar-andhverfu. Skilaðu svörunum sem fullstyttu broti.

a $\frac{14}{4} \cdot \frac{1}{2}$ b $\frac{42}{7} \cdot \frac{1}{7}$ c $\frac{81}{5} \cdot \frac{1}{27}$ d $\frac{35}{64} \cdot \frac{1}{5}$

61 Reiknaðu.

a $1\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$ b $1\frac{5}{8} : \frac{3}{16}$ c $1\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$ d $2\frac{3}{6} : \frac{5}{3}$

62 Reiknaðu.

a $5\frac{2}{5} : 1\frac{2}{4}$ b $8\frac{2}{3} : 2\frac{2}{3}$ c $6\frac{6}{8} : 2\frac{3}{12}$ d $3\frac{3}{6} : 1\frac{3}{4}$

Skrifa má almenn brot eins og $\frac{8}{6}$ sem $\frac{4}{3}$, $1\frac{2}{6}$ og $1\frac{1}{3}$ svo nokkur dæmi séu nefnd. Við margföldun og deilingu með heilum tölum og brotum er oft heppilegt að byrja á að umskrá brotin og margfalda eða deila svo. Almennt er miðað við að svörum sé skilað sem fullstyttu broti.

63 Í mötuneyti nokkru eru alltaf tveir aðalréttir í boði í hádeginu. Þegar búinn er til ýsuréttur og hakkréttur eru elduð 12,5 kíló af fiskrétti og 32 kíló af hakkrétti.

a Hver skammtur af fiskrétti vegur $\frac{1}{3}$ úr kg. Hve margir geta fengið fiskrétt?

b Hver skammtur af kjötrétti vegur $\frac{3}{7}$ úr kg. Hve margir geta fengið kjötrétt?

Margir vasareiknar eru þannig gerðir að reikna má almenn brot með þeim. Þá er á þeim sérstakur takki. $a^b/_c$

64 Reiknaðu.

a $2\frac{3}{8} \cdot 6\frac{7}{9}$ c $25\frac{7}{15} : 6\frac{4}{5}$

b $14\frac{1}{13} \cdot 29\frac{6}{11}$ d $145\frac{3}{7} : 12\frac{4}{5}$

65 Finndu gildi x.

a $x \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ b $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{9}{32}$ c $x \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$ d $\frac{3}{5} \cdot x = \frac{21}{40}$

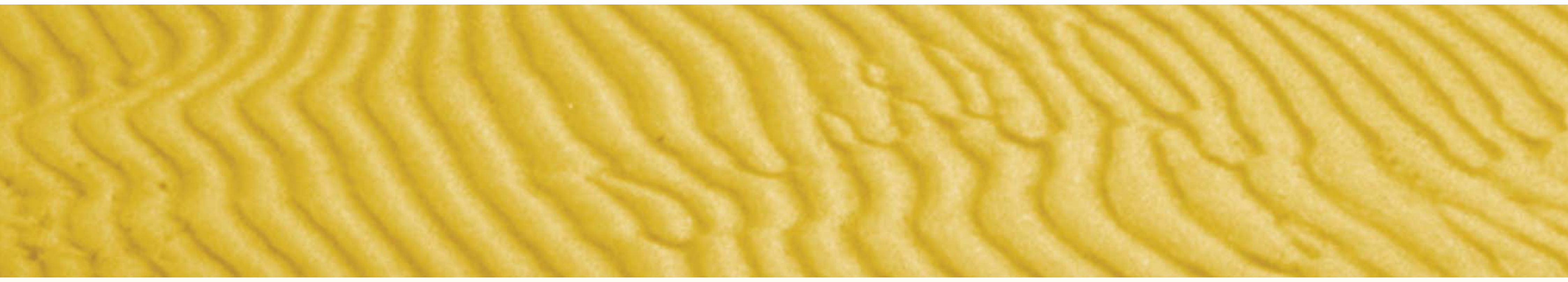
66 Skoðaðu kaflann um almenn brot og skráningu þína í vinnuhefti þitt.

a Skráðu hjá þér helstu aðferðir við reikning með almenn brot.

b Samlagning og frádráttur almennra brota hafa svipuð einkenni. Það sama má segja um margföldun og deilingu. Hvort finnst þér auðveldara að leggja saman almenn brot eða deila almennu broti í almennt brot? Útskýrðu svar þitt.

Atriðisorð

almenn brot 99
Arkímedes 22
áttflötungur 21
billjarður 4
billjón 4
brotabútur 102
dreifiregla 44, 65, 69
fjórflötungur 21
forgangsröð aðgerða 38, 75
frumþáttun 104
föll 61
grunnmengi 80
hallatala 56
heilar tölur 15, 66
hlutleysa 66
hlutmengi 86
hvarfpunktur 32
indó-arabískar tölur 5
jafna beinnar línu 57
langhlið 22
Leonard Euler – regla Eulers 21
liðir 38
lítri 28
margfeldi 44
margföldunarhlutleysa 70
mengi 80, 84
milljarður 4
milljón 4
mælieiningar 31
námundun 67
náttúrlegar tölur 14
neikvæður veldisvísir 10
núllta veldi 6
óræðar tölur 16
Platón 22
rauntala 17
reglulegur margflötungur 21
reiknireglur – margföldun 71
réttur strendingur 24
rúmdesímetri 28
rúmmetri 28
ræðar tölur 15
samlagningarandhverfa 66
samlagningarhlutleysa 66
sammengi 80
samnefnari 104
samsetningartafla 81
skammhlið 22
skurðpunktur 55
sniðmengi 80
staðalform 8
stak 80, 85
strendingur 24
stytting almennra brota 108
stærðfræðileg rannsókn 93
talnamengi 14
talningartré 81
tengiregla 7, 65
teningur 21
tólfflötungur 21
tómamengi 85
trilljarður 4
trilljón 4
tuttuguflötungur 21
töfraferningur 36
tölugildi 18
ummál 42
úthyrndur 23
veldi – reiknireglur 7, 10
veldi 6
veldisstofn 6
veldisvísir 6
víxlregla 6, 7, 65
Zenon frá Eleu 19
þáttun stæðu 44, 49
þúsund 4
þversögn 19



Stærðfræði 3

ÁTTA–tíu 3 er þriðja bókin af sex í námsefnisflokki í stærðfræði fyrir unglingastig. Bókin skiptist í sjö kafla. Hér er fengist við viðfangsefni stærðfræðinnar á fjölbreyttan hátt.

Kennsluleiðbeiningar, lausnir og ítarefni með bókaflokknum eru gefnar út á heimasíðu Námsgagnastofnunar, www.nams.is

Höfundar eru Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir.

Teikningar eru eftir Halldór Baldursson.

NÁMSGAGNASTOFNUN

ISBN 9979-0-1057-6

9 799979 010578

06965