Stærðfræði 2

8tíu

Guðbjörg Pálsdóttir – Guðný Helga Gunnarsdóttir

NÁMSGAGNASTOFNUN

Til nemenda

Námsefnisflokkurinn *Átta–10* er hugsaður fyrir nemendur í 8.–10. bekk. Grunnbókin *8–tíu 2* skiptist í níu meginkafla en auk þess eru nokkur stök verkefni milli kafla. Í hverjum kafla er aðallega fjallað um einn efnisþátt stærðfræðinnar. Þú þarft þó að hafa það hugfast að efnisþættir stærðfræðinnar fléttast saman og styðja hver við annan.

Stór hluti af stærðfræðinámi felst í að temja sér vinnubrögð stærðfræðinnar svo sem að rannsaka og leita að samhengi, finna mögulegar lausnir og rökstyðja þær. Oft reynir það á úthald og þrautseigju og gott getur verið að vinna saman að lausn verkefna.

Námsefninu er ætlað það hlutverk að styðja þig í námi þínu. Þú þarft að fá yfirsýn yfir nám þitt og setja þér markmið. Gagnlegt getur verið fyrir þig að finna í *Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði* hvaða markmið eru sett fram fyrir nemendur. Þú getur síðan skoðað grunnbókina og reynt að gera þér grein fyrir hvernig þú getur unnið að því að ná markmiðum aðalnámskrár.

Gangi þér vel,
höfundar

8–tíu

Stærðfræði 2

ISBN 978-9979-0-1113-2

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2006
2. útgáfa 2007
Námsgagnastofnun
Reykjavík

Útlit: Námsgagnastofnun
Umbrot og prentvinnsla: Oddi hf.

Guðmundur Birgisson, Hákon Sverrisson, Jón Páll Haraldsson, Jónína Vala Kristinsdóttir, Kristín Bjarnadóttir, Sigríður Hlíðar, Steinunn Sigurbergsdóttir og Þórdís Guðjónsdóttir lásu yfir handrit að hluta eða í heild og veittu góð ráð við vinnslu efnisins. Þeim og öðrum sem aðstoðuðu við gerð þessa efnis eru færðar bestu þakkir.

Stærðfræði 2

ÁTTA 10

EFNISYFIRLIT

Brot 4
Hvenær eru páskarnir? 16
Líkindi 17
Jöfnur og línurit 30
Hnitakerfi og flutningar 42
Þrautir 52
Prósentureikningur 53
Þrautir 65
Tölur 66
Stærðfræði í atvinnulífinu 80
Reglur og reikningur 82
KappAbel-stærðfræðikeppnin 93
Tölfræði 96
Metrakerfið 110
Atriðisorð 112

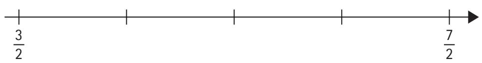
Brot

Brot má skrá sem almenn brot, tugabrot eða prósentur. Hvert almennt brot má skrá á marga vegu en aðeins er ein leið til að skrá brot sem tugabrot eða prósentu. Mikilvægt er að hafa góða tilfinningu fyrir stærð brota og þekkja margar leiðir til að skrá þau.

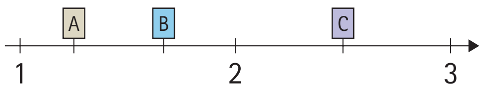
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	1

1 a Teiknaðu talnalínuna. Skráðu tölurnar $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, 1, $\frac{5}{4}$ og $\frac{4}{3}$ á talnalínuna.

b Teiknaðu talnalínuna. Skráðu tölurnar $\frac{7}{3}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{4}$ og $\frac{4}{2}$ á talnalínuna.

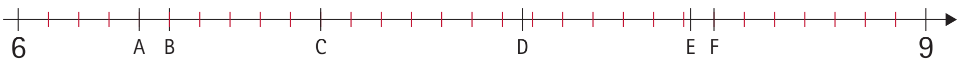


c Hvaða tölur gætu A, B og C verið?



2 Paraðu saman bókstaf og tölu.

a



6,5 $7\frac{2}{3}$ $\frac{28}{4}$ 8,3 $8\frac{2}{9}$ $\frac{32}{5}$

b

$\frac{35}{25}$ 2,69 $\frac{9}{4}$ $2\frac{7}{8}$ 1,65 $\frac{9}{8}$

3 Notaðu námundun. Skráðu tugabrotin með einum, tveimur og þremur aukastöfum.

2,3456   17,2963   236,8712   0,58621   78,152900   7,046

HÓPVERKEFNI

4 Búið til talnalínu með því að nota garnspotta og hengja miða á hann.
Þið skuluð velja verkefni a, b eða c.

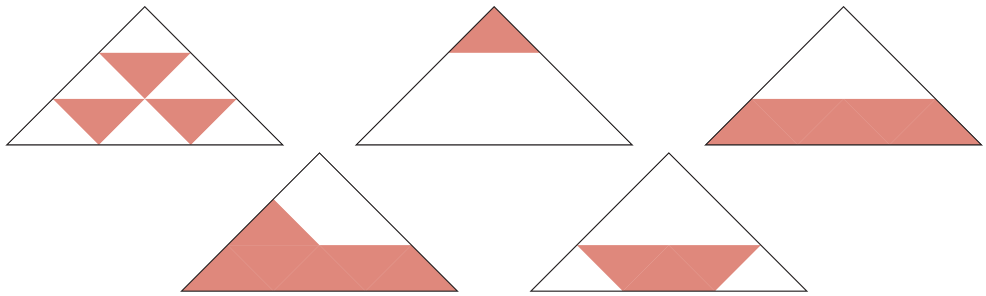
a Setjið $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{4}$ á endana.
Setjið $\frac{3}{4}$ og 1 á viðeigandi staði.
Bætið við fjórum almennum brotum á talnabilinu $\frac{1}{2}$ til $\frac{5}{4}$.

b Setjið $\frac{1}{4}$ og $\frac{7}{5}$ á endana.
Setjið $\frac{3}{4}$ og 1 á viðeigandi staði.
Bætið við fjórum almennum brotum á talnabilinu $\frac{1}{4}$ til $\frac{7}{5}$.

c Setjið $\frac{2}{5}$ og $\frac{7}{4}$ á endana.
Setjið $\frac{4}{5}$ og 1 á viðeigandi staði.
Bætið við fjórum almennum brotum á talnabilinu $\frac{2}{5}$ til $\frac{7}{4}$.

d Búið til fleiri talnalínur. Veljið ykkur talnabil og finnið 5–10 brot sem finnast á því bili.

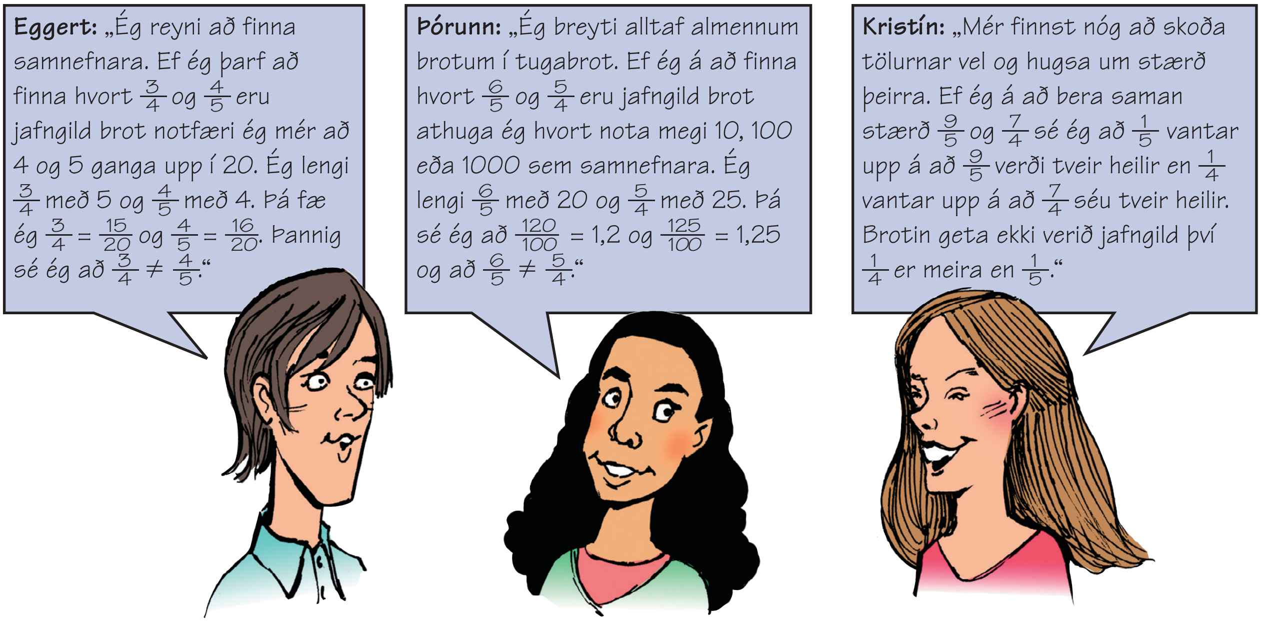
5 Skráðu stærð lituðu flatanna í hverri mynd.



6 Teiknaðu ferning með hliðarlengd 6 cm.
Skiptu honum í hluta með því að nota almennu brotin $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ og $\frac{1}{12}$.
Skráðu hve oft þú notaðir hvert brot. Hver er summa brotanna?
Gætir þú skipt ferningnum í hluta með öðrum brotum?

7 Teiknaðu ferning með hliðarlengd 8 cm.
Skiptu honum í hluta og notaðu að minnsta kosti 3 ólík almenn brot.
Skráðu hvaða brot þú notar og hve mörg af hverri gerð. Finndu summu brotanna.
Gætir þú skipt ferningnum á annan hátt í hluta með sömu brotum?

Ýmsar leiðir má fara þegar finna á hvort almenn brot eru jafngild.



8 a Notaðu aðferð Kristínar til að leysa verkefni Eggerts og Þórunnar.

b Notaðu aðferð Þórunnar til að leysa verkefni Eggerts og Kristínar.

c Notaðu aðferð Eggerts til að leysa verkefni Þórunnar og Kristínar.

9 Segðu til um hvort eftirfarandi almenn brot eru jafngild. Lýstu aðferð þinni.

a $\frac{9}{4}$ og $\frac{9}{5}$ **b** $\frac{13}{5}$ og $\frac{11}{4}$ **c** $\frac{10}{25}$ og $\frac{2}{5}$ **d** $\frac{21}{25}$ og $\frac{4}{5}$

10 Lengdu brotin með 3.

a $\frac{7}{9}$ **b** $\frac{12}{5}$ **c** $\frac{16}{20}$ **d** $\frac{14}{3}$

11 Með hvaða tölu hafa brotin verið lengd?

a $\frac{6}{5} = \frac{42}{35}$ **b** $\frac{12}{7} = \frac{48}{28}$ **c** $\frac{6}{13} = \frac{18}{39}$ **d** $\frac{4}{11} = \frac{44}{121}$

12 Raðaðu brotunum í dæmum 10 og 11 eftir stærð.

13 Raðaðu brotunum eftir stærð.

$2\frac{13}{20}$ $2\frac{1}{4}$ $2\frac{9}{12}$ $2\frac{1}{5}$ $2\frac{9}{10}$

14 a Hvort er stærra 0,23 eða $\frac{3}{16}$?

b Hvort er minna $\frac{9}{24}$ eða 0,303?

c Hvaða brot er helmingur af $\frac{5}{7}$?

d Hvaða brot er mitt á milli $\frac{3}{5}$ og $\frac{5}{7}$?

Alltaf má finna samnefnara með því að margfalda saman nefnarana.
Þegar finna á samnefnara er verið að leita að tölu sem allir nefnararnir ganga upp í.

Dæmi: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $2 \cdot 3 = 6$
6 getur verið samnefnari því bæði 2 og 3 ganga upp í töluna.

Dæmi: $\frac{1}{4} + \frac{4}{6}$ $4 \cdot 6 = 24$
24 getur verið samnefnari því bæði 4 og 6 ganga upp í töluna.
12 getur líka verið samnefnari því bæði 4 og 6 ganga upp í þá tölu.

Oft má finna lægri samnefnara en margfeldi nefnaranna. Það gerir útreikninga einfaldari að nota lægsta mögulega samnefnara. Ýmsar leiðir má fara til að finna samnefnara.
Þegar um lágar tölur er að ræða er oft auðvelt að sjá mögulega samnefnara eins og ef nefnarar eru 2 og 8 eða 6 og 9.

15 Hvaða samnefnara myndir þú nota ef nefnararnir væru?

a 4 og 8 b 4 og 3 c 8 og 12 d 10 og 15

16 Ein leið til að finna samnefnara er að skrá margfeldi hvors nefnara fyrir sig.
Nefnararnir eru 12 og 18

12, 24, 36, 48

18, 36

Notaðu þessa aðferð til að finna samnefnara ef nefnararnir eru:

a 10 og 25 b 6 og 7 c 14 og 35 d 6 og 15

Ekki er nóg að finna samnefnara heldur þarf líka að gera brotin samnefnd.
Hugsaðu þér að þú eigir að reikna dæmið $\frac{4}{6} + \frac{7}{15}$. Þú ákveður að nota 30 sem samnefnara. Hvernig getur þú skráð $\frac{4}{6}$ sem þrítugustu hluta? En $\frac{7}{15}$?

$\frac{4}{6} = \frac{x}{30}$ Með hvaða tölu lengir þú brotið?

$\frac{7}{15} = \frac{x}{30}$ Með hvaða tölu lengir þú brotið?

Hver verður summa $\frac{4}{6}$ og $\frac{7}{15}$?

17 Reiknaðu.

a $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$ c $\frac{6}{10} + \frac{4}{15}$ e $2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}$ g $2\frac{4}{15} + 3\frac{6}{10}$

b $\frac{5}{6} - \frac{3}{7}$ d $\frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ f $4\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5}$ h $1\frac{2}{3} + \frac{7}{4}$

Nota má þáttun til að finna góða samnefnara. Þessa leið er gott að nota þegar um háa nefnara er að ræða. Við þáttun sést hvaða sameiginlega þætti samsettar tölur eiga.

$10 = 2 \cdot 5 \qquad 25 = 5 \cdot 5$

Af þáttuninni má sjá að 2 og 5 verða að vera þættir í samnefnaranum. Í honum þarf 5 aðeins að koma tvisvar fyrir því fimm er sameiginlegur þáttur fyrir 10 og 25.

Lægsta tala sem bæði 10 og 25 ganga upp í verður því $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

Allir frumþættir hvers nefnara verða að koma fyrir í samnefnara.

Samnefnarinn gæti líka verið $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250$ eða $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

18 Frumþáttaðu tölurnar. Hvaða samnefnara má nota ef þetta eru nefnarar?

a 21 og 35 **b** 8 og 12 **c** 30 og 50 **d** 12, 18 og 21

19 Reiknaðu.

a $\frac{8}{21} + \frac{13}{35}$ **b** $\frac{7}{8} - \frac{5}{12}$ **c** $\frac{7}{30} - \frac{7}{50}$ **d** $\frac{5}{12} + \frac{6}{18} + \frac{8}{21}$

Þegar finna á hvort almenn brot eru jafngild er heppilegt að gera þau samnefnd.

20 Kannaðu hvort eftirfarandi brotapör eru jafngild.

a $\frac{4}{6}$ og $\frac{6}{9}$ **c** $\frac{5}{14}$ og $\frac{8}{35}$ **b** $\frac{4}{24}$ og $\frac{3}{18}$ **d** Með hverju lengdir þú brotin?

Þegar stytta þarf brot getur verið hentugt að frumþátta bæði teljara og nefnara. Þannig má sjá hvaða þættir eru sameiginlegir. Dæmi: $\frac{28}{42}$

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Af frumþáttuninni má sjá að tölurnar 2 og 7 eru frumþættir í báðum tölunum.

Því má stytta $\frac{28}{42}$ með 14. $\frac{28:14}{42:14} = \frac{2}{3}$

21 Finndu sameiginlega þætti og styttu brotin.

a $\frac{18}{24}$ **b** $\frac{75}{30}$ **c** $\frac{42}{126}$ **d** $\frac{12}{54}$

ÞRAUT

Summa brotanna $\frac{1}{2}$ og $\frac{4}{8}$ er 1.

$\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$

Brotin eru mynduð úr fjórum ólíkum tölustöfum.
Finndu fleiri brot sem mynduð eru á sama hátt og hafa summuna 1.
Skráðu að minnsta kosti fimm dæmi.

22 a Notaðu vasareikni og breyttu almennu brotunum í tugabrot.

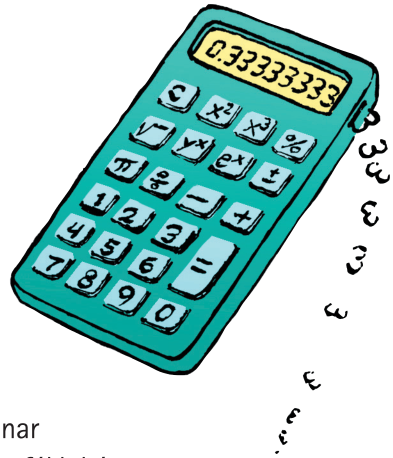
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$

b Hver tugabrotanna hafa nákvæmlega einn aukastaf?

c Hver tugabrotanna hafa nákvæmlega tvo aukastafi?

d Hver tugabrotanna hafa nákvæmlega þrjá aukastafi?

e Skoðaðu tugabrotin sem eftir eru. Sérðu einhverja reglu í aukastafarununum?



23 Birna notaði vasareikni og breytti $\frac{1}{3}$ í tugabrot. Vasareiknirinn hennar sýndi 0,333333333. Hún prófaði að margfalda útkomuna með 3 og fékk þá 0,999999999. Það þótti henni skrýtið því hún var viss um að fá 1 út. Útskýrðu fyrir Birnu hvernig staðið geti á þessu.

24 Sum tugabrot hafa endanlegan fjölda aukastafa en önnur ekki. Hver af tugabrotunum sem þú skráðir í dæmi 22 telur þú að hafi óendanlegan fjölda aukastafa? Rökstyddu svar þitt.

Öll almenn brot má skrá sem tugabrot. Sum tugabrotanna hafa marga aukastafi og því er oft hentugra að nota almenn brot. Þegar fjöldi aukastafa verður óendanlegur má fá meiri nákvæmni í útreikningum með því að nota almenn brot.

25 Breyttu almennu brotunum í tugabrot. Reiknaðu dæmin á vasareikni.

a $\frac{4}{5} + \frac{3}{4}$

b $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$

c $\frac{2}{6} + \frac{1}{4}$

d $\frac{5}{9} + \frac{5}{6} + 6$

e Hver af þessum dæmum gastu reiknað af nákvæmni með því breyta almennu brotunum í tugabrot?

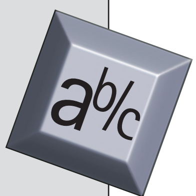
Á mörgum vasareiknum er hægt að reikna almenn brot. Skoðaðu vasareikninn þinn og athugaðu hvort þú getur reiknað dæmi og fengið svar sem almenn brot. Reiknaðu dæmin hér að ofan aftur ef það er brotatakki á vasareikninum þínum.

Hægt er að fá fram tugabrot sem er jafngilt $\frac{3}{5}$ með því að

slá inn [3] [ab/c] [5] [=] [ab/c]

Skoðaðu hvað gerist ef þú slærð $\frac{12}{15}$ og ferð eins að.

Leiktu þér með vasareikninn þinn og skoðaðu hvernig brotatakkinn getur nýst þér við að reikna og einfalda brot.



26 **a** Hvaða tölu þarf að bæta við $\frac{4}{9}$ til að fá út $\frac{11}{18}$?

b Hvaða tölu þarf að draga frá $\frac{12}{18}$ til að fá út $\frac{5}{9}$?

c Hve miklu munar á $\frac{4}{7}$ og $\frac{7}{21}$?

27 Finndu mismun brotanna.

a $\frac{7}{6}$ og $\frac{5}{12}$ **b** $\frac{4}{3}$ og $\frac{5}{6}$ **c** $\frac{5}{8}$ og $\frac{7}{12}$

28 Reiknaðu og einfaldaðu svarið.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$

a Kemur þú auga á reglu í niðurstöðunum?

b Búðu til 2–3 dæmi í viðbót þannig að reglan haldist.

29 Finndu þrjú jafngild dæmi. Hvað getur þú fundið margar þrennur?

a	$0{,}03 \cdot 72$	**f**	3% af 72	**k**	$\frac{1}{100}$ af 72	**p**	$\frac{3}{100} \cdot 72$
b	30% af 72	**g**	$\frac{3}{10}$ af 72	**l**	$33\frac{1}{3}$ af 72	**r**	$\frac{1}{3}$ af 72
c	$1{,}25 \cdot 72$	**h**	$\frac{5}{4}$ af 72	**m**	125% af 72	**s**	$72 : 0{,}01$
d	$72 \cdot 100$	**i**	$72 : \frac{1}{100}$	**n**	$72 : 10$	**t**	$0{,}1 \cdot 72$
e	$\frac{1}{10}$ af 72	**j**	$0{,}01 \cdot 72$	**o**	1% af 72	**u**	$72 : 100$

v Kom þér á óvart hvaða dæmi gáfu sama svar?

ÞRAUT

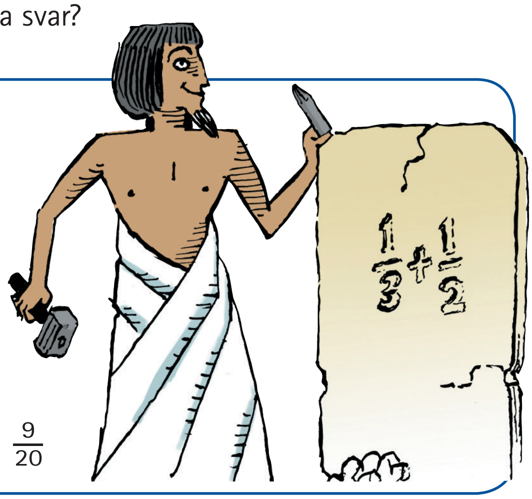
Forn-Egyptar notuðu einingabrot,

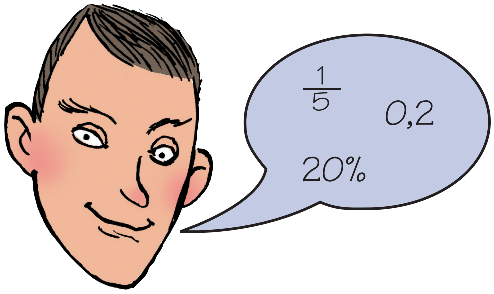
þ.e. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

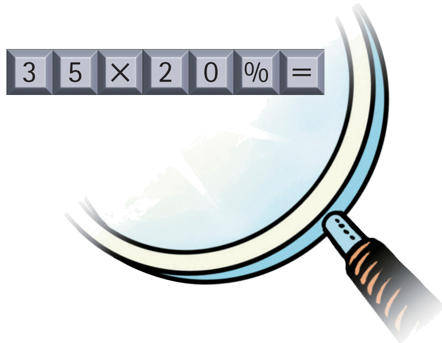
Þeir skráðu brotið $\frac{5}{6}$ *sem summu af brotunum* $\frac{1}{3}$ *og* $\frac{1}{2}$.

Skráðu þessi brot sem summu af einingabrotum.

$\frac{5}{8}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{9}{20}$







30 a Hvað er $\frac{1}{5} \cdot$ ☐

b Hvað er 0,2 · ☐

c Hvað er 20% af ☐

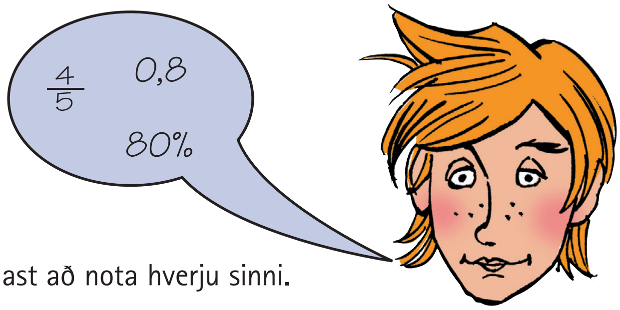
35 60 125

d Fannstu reglu í svörunum?

e Hvaða gerð af broti fannst þér þægilegast að nota þegar heildin var 35?

f Hvaða gerð af broti fannst þér þægilegast að nota þegar heildin var 60?

g Hvaða gerð af broti fannst þér þægilegast að nota þegar heildin var 125?



31 a Hvað er $\frac{4}{5} \cdot$ ☐

b Hvað er 0,8 · ☐

c Hvað er 80% af ☐

45 40 23

d Segðu frá hvaða gerð af broti þér fannst þægilegast að nota hverju sinni.

32 Útskýrðu hvers vegna dæmin $\frac{1}{4} \cdot 60$, $0{,}25 \cdot 60$ og 25% af 60 gefa sömu niðurstöðu.

HÓPVERKEFNI

33 Vinnið saman tvö og tvö.

Veljið ykkur nokkrar tölur milli 1 og 100. Finnið $\frac{4}{5}$, 0,8 eða 80% af hverri tölu.

Greinið frá í hvaða tilvikum ykkur þótti best að nota almenna brotið, tugabrotið eða prósentuna.

Hefðuð þið haft sömu skoðun ef þið hefðuð verið með annað brot, t.d. $\frac{3}{4}$, 0,75 eða 75%?

34 Þú kaupir fjórar tegundir af ávöxtum. Þyngd þeirra er 1,2 kg, 0,75 kg, 0,4 kg og 1,8 kg. Skráðu hvaða ávexti þú myndir kaupa og reiknaðu út hvað það myndi kosta. Gott væri að þú aflaðir nýrra upplýsinga um verð.

Valdir þú lífrænt ræktaðar vörur? Ef ekki, hverju myndi muna á verði ef þú veldir lífrænt ræktaðar vörur þar sem þess er kostur. Hvað heldur þú að geti skýrt verðmuninn?

35 Þú veist að $0{,}7 \cdot 6 = 4{,}2$

Notaðu þá staðreynd til að finna svarið við dæmunum:

a $0{,}07 \cdot 6$ **b** $0{,}7 \cdot 3$ **c** $42 : 0{,}6$ **d** $4{,}2 : 6$

e Finndu fleiri dæmi þar sem nota má þá staðreynd að $0{,}7 \cdot 6 = 4{,}2$

36 Þú veist að $9 \cdot 0{,}3 = 2{,}7$

Notaðu þá staðreynd til að finna svarið við dæmunum:

a $0{,}9 \cdot 3$ **c** $2{,}7 : 0{,}3$ **e** $27 : 0{,}03$ **g** $9 \cdot 0{,}0003$ **i** $27 : 0{,}3$

b $9 \cdot 0{,}03$ **d** $2{,}7 : 9$ **f** $90 \cdot 0{,}3$ **h** $0{,}9 \cdot 0{,}3$

37 Haukur fór í kjötverslun og keypti eftirfarandi:

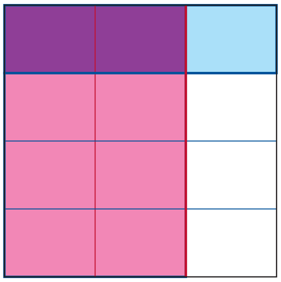
0,3 kg af skinku
2,3 kg af súpukjöti
0,6 kg af nautahakki
2 kg af kjúklingabringum
0,2 kg af kindakæfu

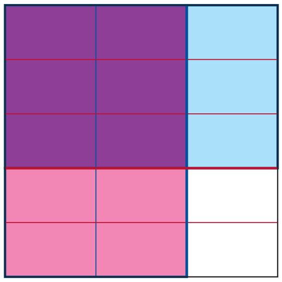
Hve mikið kostuðu kjötvörurnar?

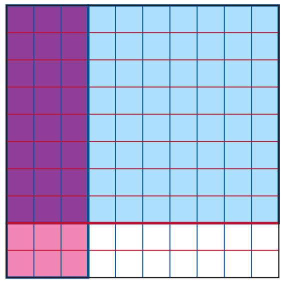
VERÐLISTI

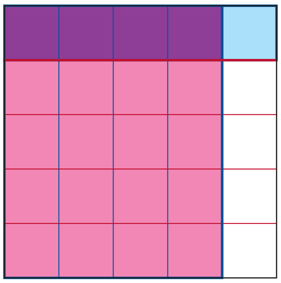
Kindakæfa	1250 kr./kg
Skinka	1860 kr./kg
Spægipylsa	2240 kr./kg
Lambahryggjarsneiðar	1290 kr./kg
Súpukjöt	998 kr./kg
Kjúklingalæri	590 kr./kg
Kjúklingabringur	1780 kr./kg
Nautahakk	1100 kr./kg
Nautasmásteik	1298 kr./kg

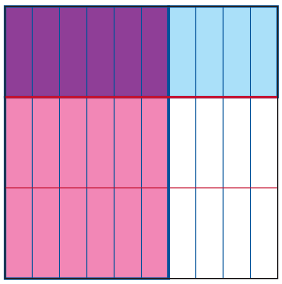
38 Skráðu hvaða dæmi og svör eru sýnd með ferningunum.

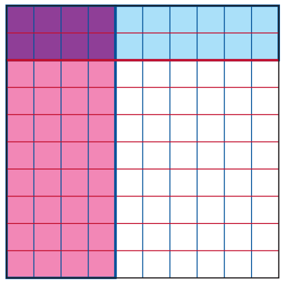
a


c


e


b


d


f


39 Teiknaðu ferning og notaðu hann til að reikna dæmið $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$.

40 Reiknaðu.

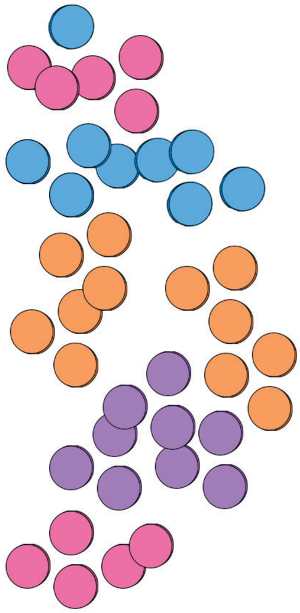
a $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$ c $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$ e $0{,}6 \cdot \frac{4}{5}$ g $0{,}5 \cdot 0{,}9$ i $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5}$

b $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ d $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$ f $\frac{2}{3} \cdot 0{,}5$ h $0{,}7 \cdot 0{,}8$ j $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$

41 Flosi erfði $\frac{1}{3}$ af 12 milljón krónum. Hann ákvað að gefa Guðmundi helminginn af hluta sínum. Hve stóran hluta arfsins fékk Guðmundur? Hve há fjárhæð var það?

42 Börn Jóhönnu erfðu eftir hana $\frac{1}{4}$ hluta úr jörðinni Geitastöðum. Þau voru fjögur og skiptist hlutinn jafnt á milli þeirra. Hve stóran hluta jarðarinnar eiga þau hvert um sig? Eitt barna Jóhönnu seldi sinn hluta fyrir 2,5 milljónir króna. Hve mikils virði væri jörðin öll ef allir hlutar hennar væru jafnverðmætir?

43 Hjónin Lóa og Þröstur ánöfnuðu 5 milljónum króna, þ.e. $\frac{1}{3}$ hluta eigna sinna, til fuglavinafélagsins. Hve stóran hluta fékk hvert barna þeirra, Erla, Haukur, Már, Krummi og Svala, í arf eftir foreldra sína ef þau fengu jafna hluta?



44 a Skoðaðu $\frac{5}{8}$.

Finndu hve oft þú getur tekið $\frac{2}{8}$ af $\frac{5}{8}$.

b Skoðaðu $\frac{9}{10}$.

Finndu hve oft þú getur tekið $\frac{3}{10}$ af $\frac{9}{10}$.

c Skoðaðu $\frac{32}{40}$.

Finndu hve oft þú getur tekið $\frac{5}{40}$ af $\frac{32}{40}$.

45 Reiknaðu.

a $\frac{9}{12} : \frac{3}{12}$ **b** $\frac{7}{8} : \frac{2}{8}$

46 Gerðu brotin samnefnd og deildu svo.

a $\frac{3}{5} : \frac{3}{10}$ **b** $\frac{3}{5} : \frac{1}{8}$ **c** $\frac{9}{12} : \frac{3}{8}$ **d** $\frac{8}{5} : \frac{4}{20}$

47 Gerðu brotin samnefnd. Deildu og námundaðu svarið að heilli tölu.

a $\frac{6}{5} : \frac{2}{3}$ **b** $\frac{5}{6} : \frac{1}{4}$ **c** $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$ **d** $\frac{7}{8} : \frac{1}{6}$

48 Reiknaðu og notfærðu þér að deiling og margföldun eru andhverfar aðgerðir.

a $\frac{5}{10} : \frac{1}{10} = \square$

$\square \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$

b $\frac{8}{24} : \frac{4}{24} = \square$

$\square \cdot \frac{4}{24} = \frac{8}{24}$

c $\frac{12}{27} : \frac{3}{27} = \square$

$\square \cdot \frac{3}{27} = \frac{12}{27}$

d $\frac{12}{2} : \frac{4}{2} = \square$

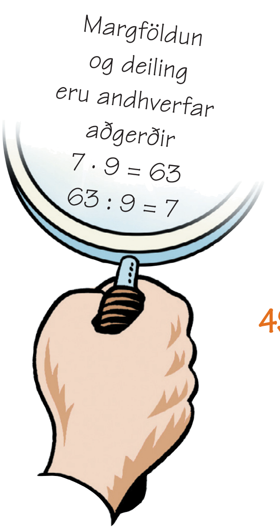
$\square \cdot \frac{4}{2} = \frac{12}{2}$

e $\frac{9}{4} : \frac{3}{4} = \square$

$\square \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

f $\frac{81}{4} : \frac{9}{4} = \square$

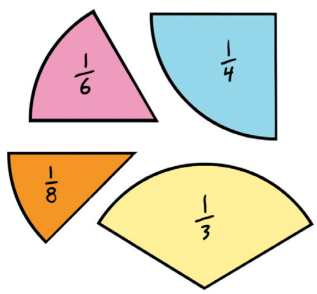
$\square \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4}$



49 Skiptu í þrjá staði.

a $\frac{6}{10}$ **c** $\frac{4}{5}$

b $\frac{2}{4}$ **d** $\frac{24}{5}$



50 Fyrir ættarmót bökuðu systurnar Ása, Signý og Helga 10 tertur. Þær vissu að terturnar yrðu vinsælar og að margir myndu biðja um uppskriftina. Því notuðu þær tímann á leiðinni á ættarmótið til að búa til nokkrar vísbendingar sem fólu í sér uppskriftina.

- Alls vega terturnar 7200 g.
- Eitt egg vegur um það bil 50 g.
- Smjörið vegur 1,7 sinnum meira en eggin.
- Súkkulaðið vegur $\frac{1}{9}$ af heildarþyngdinni.
- Rúsínur vega 60% af því sem súkkulaðið vegur.
- Hveitið vegur 175% af því sem súkkulaðið vegur.
- Sykurinn vegur 225% af því sem hneturnar vega.
- Hveitið vegur $\frac{7}{36}$ af heildarþyngdinni.
- Hneturnar vega 0,7 af því sem súkkulaðið vegur.
- Eggin vega 125% af því sem súkkulaðið vegur.
- Í uppskriftinni eru 20 egg.
- Rúsínurnar vega $\frac{6}{7}$ af því sem hneturnar vega.

Hvernig er uppskriftin?

51 Í kaflanum hefur verið fengist við brot og brotareikning. Farðu yfir helstu atriðin. Skráðu það sem þú kannt en líka það sem þú þarft að ná betri tökum á. Skoðaðu meðal annars:

- Hvernig meta má hvort brot eru jafngild.
- Tengsl almennra brota, tugabrota og prósenta.
- Hvað er samnefnari og hvenær er gagnlegt að finna hann.
- Áhrif þess að deila eða margfalda með broti.
- Hvernig nota má myndir við brotareikning.
- Hvernig nota má vasareikni við brotareikning.

Hvenær eru páskarnir?

Stærðfræðingur setti fram reglu sem nota má til að finna hvaða mánaðardag páskadagur er ár hvert.
Reglan gildir fyrir árin 1900–2099.

Deildu með 19 í ártalið og kallaðu afganginn a.
Deildu með 4 í ártalið og kallaðu afganginn b.
Deildu með 7 í ártalið og kallaðu afganginn c.
Reiknaðu (19a + 24) : 30 og kallaðu afganginn d.
Reiknaðu (2b + 4c + 6d + 5) : 7 og kallaðu afganginn e.
22 + d + e gefur páskadag reiknað frá 1. mars.

Athugaðu þó að ef útreikningarnir gefa 26. apríl er páskadagur 19. apríl og ef svarið er 25. apríl er páskadagur 18. apríl ef d er 28 og a er stærra en 10.

1 Reiknaðu út hvenær páskadagur er á þessu ári.

2 Á hvaða mánaðardegi var páskadagur árið sem þú fæddist?

3 Hvenær verður páskadagur árið 2099?

4 Hvenær var páskadagur árið 2000?

5 Veldu þér 5 ára tímabil og reiknaðu út hvenær páskadagur er.
Sérðu einhverja reglu í hvernig tímasetningin færist til?
Ef þér finnst þú þurfa að skoða lengra tímabil gætir þú fengið upplýsingar frá bekkjarfélaga.

6 Hvítasunnudagur er 7. sunnudag eftir páskadag.
Hvaða mánaðardaga verður hvítasunnuhelgin árið 2099?
En í ár?

7 Helgin fyrir bolludag, sprengidag og öskudag er sjö vikum fyrir páskadag. Finndu dagsetningar fyrir þá helgi, páska og hvítasunnu á næsta ári.

Líkindi

Oft eru teknar ákvarðanir sem byggjast á líkum. Fólk þarf stundum að meta hve mikla áhættu það er tilbúið að taka, t.d. þegar fjárfesta á í fyrirtækjum eða spila í happdrætti.

Mikilvægt er að ná góðum skilningi á hugtökum eins og líkindum til að geta metið hvaða áhætta er tekin og hvort líklegt sé að atburður gerist.

1 Lesið spilareglurnar og spilið **Slétt eða odda** nokkrum sinnum. Setjið fram hugmyndir um hvaða leiðir eru líklegastar til að gefa vinning.

2 Berið leiðir ykkar saman við leiðir annarra bekkjarfélaga.
Hvaða leið finnst ykkur best?
Prófið hana nokkrum sinnum.

3 Hvernig mynduð þið skipta spilapeningunum á svæði ef hvor hefði tíu spilapeninga? En 1000?
Rökstyðjið skiptingu ykkar.

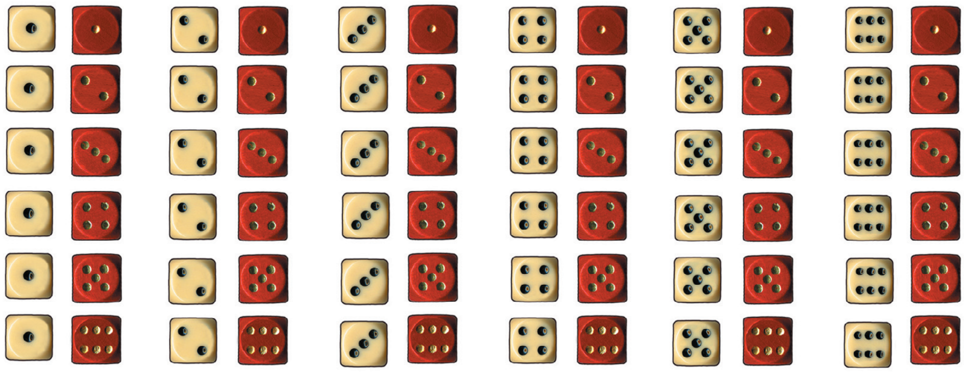
4 Alvin telur að það séu 75% líkur á að fá slétta tölu ef tveimur teningum er kastað og útkomur eru margfaldaðar saman. Hann er því viss um að hann tapi aldrei ef hann leggur 25% spilapeninga sinna á svæðið fyrir oddatölur. Hvernig myndir þú útskýra fyrir honum að hann geti ekki treyst á það? Gæti hann lagt spilapeninga sína skynsamlegar?

SLÉTT EÐA ODDA
Reglur

- Þátttakendur eru tveir.
- Hvor þátttakandi skiptir blaði í tvennt og er skrifað slétt tala á annan helminginn og oddatala á hinn.
- Tólf spilapeningum er dreift í upphafi á blað hvors þátttakanda, eins og þeim finnst skynsamlegt.
- Tveimur teningum er kastað og útkomur á teningunum eru margfaldaðar saman. Ef margfeldið er oddatala er fjarlægður einn spilapeningur af þeim hluta sem merktur er oddatölum en af hinum hlutanum ef margfeldið er slétt tala.
- Ef búið er að taka alla spilapeningana öðrum megin má ekki taka af hinum hlutanum.
- Sá sem fyrst nær að fjarlægja alla tólf spilapeningana vinnur.

Líkur má oft finna með því að skoða allar mögulegar útkomur og telja hve margar þeirra falla í tiltekna flokka. Ef notaðir eru tveir teningar og fundnar allar mögulegar útkomur koma fram 36 möguleikar.

Líkur eru oft skráðar á kvarðanum 0 – 1. Líkur á að fá summuna tvo ef tveimur teningum er kastað eru t.d. $\frac{1}{36}$.



Summa útkomu á tveimur teningum getur verið á bilinu 2 til 12, þ.e. sex sléttar tölur og fimm oddatölur.

5 a Skoðaðu hve margir af möguleikunum 36 hafa útkomur þar sem summan verður oddatala.

b Hverjar eru líkurnar á að fá oddatölu ef tveimur teningum er kastað og fundin summa? En á að fá slétta tölu? En á að fá slétta tölu eða oddatölu?

6 Ef finna á líkur á að fá oddatölu eða 10 eru líkur á hvorum atburði lagðar saman. Hverjar eru líkurnar á að fá slétta tölu eða summuna 11?

7 a Hvaða mismunur getur komið fram á útkomum tveggja teninga?

b Hvort eru meiri líkur á að fá oddatölu eða slétta tölu ef fundinn er mismunur? Rökstyddu svar þitt.

8 a Hvaða tölur geta komið fram ef útkomur tveggja teninga eru margfaldaðar saman og summa þeirra er dregin frá?

b Hvaða líkur eru þá á að fá tölu á bilinu 30 til 36?

c Hvort er líklegra að fá 19 eða 24?

d Myndir þú spila við Alvin ef hann vildi hafa þá reglu að þú fengir stig ef fram kæmi tala sem væri hærri en 18 en annars fengi hann stig?

9 Hver eftirfarandi fullyrðinga er sönn og hver ósönn?

a Það eru meiri líkur en minni á að 8. bekkingur fari í vinnuskólann.

b Allir 8. bekkingar fara í vinnuskólann.

c Það eru litlar líkur á að 8. bekkingur sem valinn er af handahófi fari í vinnuskólann.

d Að meðaltali fer einn af hverjum tíu 8. bekkingum ekki í vinnuskólann.

e Af hverjum tíu 8. bekkingum fara í mesta lagi níu í vinnuskólann.

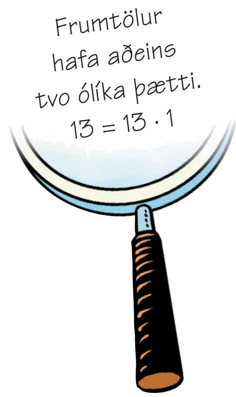
f Það eru 10% líkur á að nemandi í 8. bekk fari ekki í sumarvinnu.

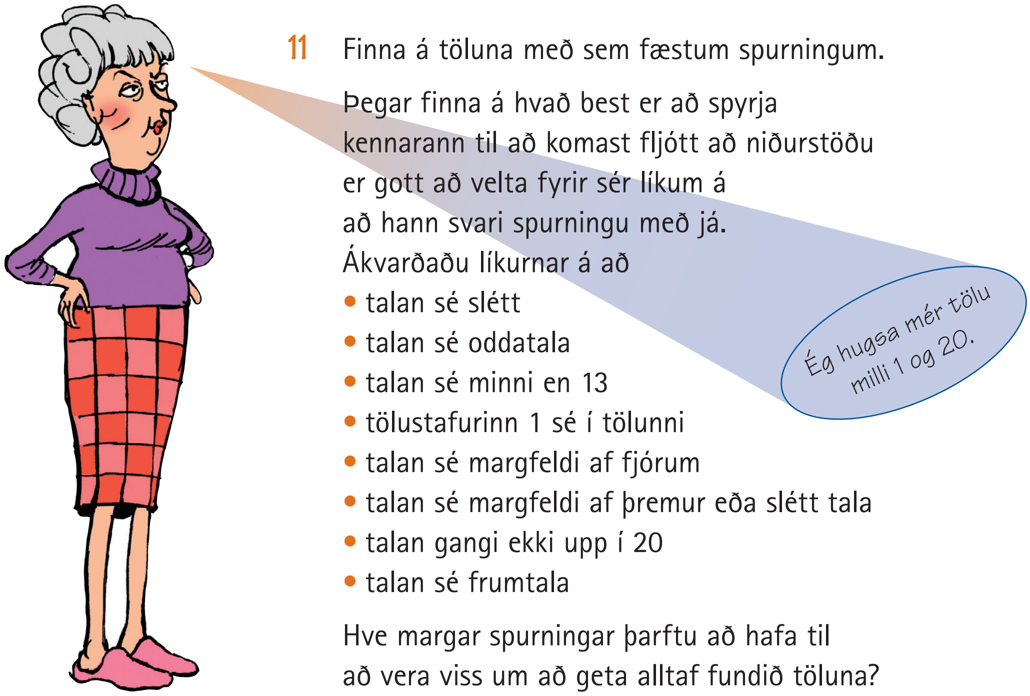
10 Daníel skorar á Högna í teningaleiki. Hverjir eru möguleikar Högna á að vinna í hverjum leik fyrir sig?

a Ef summa þess sem snýr upp og niður á teningi er 7 vinn ég, annars vinnur þú.

b Ef frumtala kemur upp á teningi vinnur þú, annars vinn ég.

c Ef frumtala kemur upp þegar tveimur teningum er kastað og fundin summa vinnur þú, annars vinn ég.





11 Finna á töluna með sem fæstum spurningum.

Þegar finna á hvað best er að spyrja kennarann til að komast fljótt að niðurstöðu er gott að velta fyrir sér líkum á að hann svari spurningu með já.
Ákvarðaðu líkurnar á að

- talan sé slétt
- talan sé oddatala
- talan sé minni en 13
- tölustafurinn 1 sé í tölunni
- talan sé margfeldi af fjórum
- talan sé margfeldi af þremur eða slétt tala
- talan gangi ekki upp í 20
- talan sé frumtala

Hve margar spurningar þarftu að hafa til að vera viss um að geta alltaf fundið töluna?

12 Hverjar eru líkur á að:

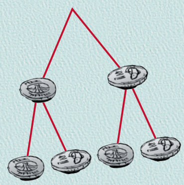
a Krónupeningur sem kastað er lendi á rönd?

b Tveir krónupeningar sem kastað hefur verið snúi með ólíkar hliðar upp?

c Þrír krónupeningar sem kastað hefur verið snúi allir með skjaldarmerkið upp?

Þegar svara á spurningum eins og í dæmi 12 getur verið gott að teikna líkindatré eða skrá alla útkomumöguleika skipulega á annan hátt.

Krónupeningur hefur jafna möguleika á að lenda á hvorri hlið svo lengi sem hann hefur ekki verið skekktur.



13 **a** Búðu til líkindatré sem sýnir alla útkomumöguleika fyrir þrjá peninga.

b Hve margir möguleikar eru á að fá sömu hlið upp á alla peningana? Hve stórt hlutfall er það?

c Hve margir möguleikar eru á að fá tvo fiska og eitt skjaldarmerki? Skráðu möguleikana.

d Hve margir ólíkir möguleikar geta komið fyrir þegar þremur peningum er kastað? Skráðu líkur á hverjum möguleika.

e Búðu til spil þar sem þremur peningum er kastað og allir þátttakendur hafa jafnar líkur á að vinna.

14 Í fjölskyldu eru fjögur börn.

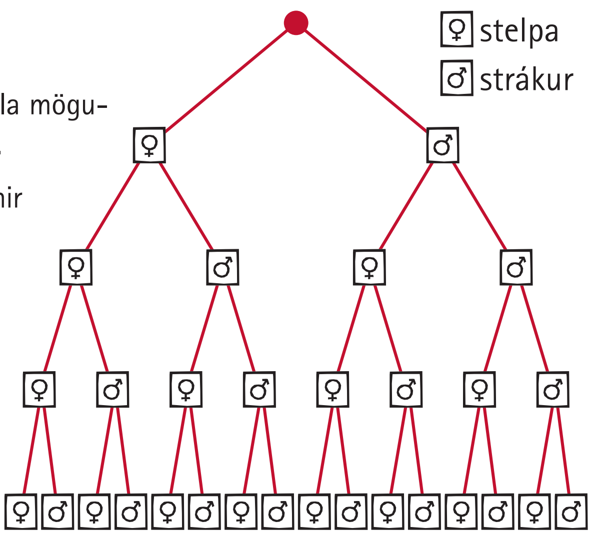
a Notaðu líkindatréð til að finna alla möguleika á samsetningu eftir kynjum.

b Hve miklar líkur eru á að strákarnir séu þrír?

c Hve miklar líkur eru á að stelpurnar séu tvær eða fleiri?

d Hve miklar líkur eru á að stelpa sé elst?

e Hve miklar líkur eru á að strákur sé elstur og stelpa yngst?



15 Stella er í leik þar sem líkur hennar á að vinna eru metnar um það bil 67% eða $\frac{2}{3}$. Eftir fjóra leiki hefur hún tapað þrisvar og unnið einu sinni. Margrét stingur upp á því við hana að biðja andstæðinginn að fara í leikinn alls fimmtíu sinnum og gera þá upp stigin. Er þetta gott ráð?

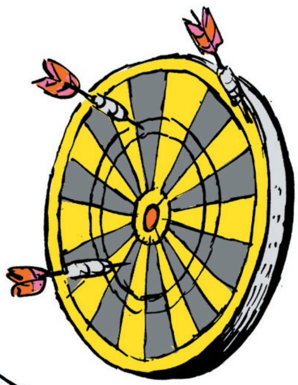
16 Jóhann skorar á Ragnhildi í leik með spilastokk. Hann stingur upp á að reglan sé að hann fái stig ef upp kemur mannspil en annars fái hún stig. Hvaða líkur eru á að Jóhann fái stig? Hvaða líkur eru á að Ragnhildur fái stig?

17 Í teningakasti eru útkomumöguleikar 6. Hvernig má nota tening við tilraun þar sem útkomumöguleikar eiga að vera tveir og líkur á hvorum viðburði eiga að vera jafnar?

HÓPVERKEFNI

18 Leikir og happaspil byggjast á líkum. Hver og einn þarf að gera sér grein fyrir vinningslíkum sínum áður en hann ákveður hvort hann vill taka þátt eða skora á einhvern í leik. Það er góð æfing í að greina vinningslíkur að búa til eigin leiki og leikreglur.

Búið til nokkra leiki þar sem vinningslíkur fyrir hvert lið eru eins og segir í fyrirmælum. Þið getið notað teninga, spilastokk, teiknibólur, peninga, skopparakringlu, mislitar kúlur/kubba í poka, pílukast eða annað sem ykkur dettur í hug. Finnið fleiri en einn leik fyrir hvert lið.



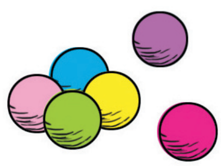
a Líkur eiga að skiptast $\frac{3}{8}$ á móti $\frac{5}{8}$.

b Líkur skiptast 50% á móti 50%.

c Líkur skiptast í $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{4}$.

d Líkur skiptast jafnt í þriðjunga.

e Líkur skiptast í 0,4 á móti 0,6.



Prófið leiki ykkar og athugið hvort það geti gerst að sá sem hafi mestu vinningslíkurnar tapi. Hvernig gæti það gerst?

19 Á veitingastað er viðskiptavinum boðið að setja saman þriggja rétta máltíð. Þeir geta valið á milli tveggja forrétta, þriggja aðalrétta og tveggja eftirrétta.

a Hve margar ólíkar þriggja rétta máltíðir má setja saman?

b Hve margir eru möguleikarnir ef þú vilt fá þér salat í forrétt?

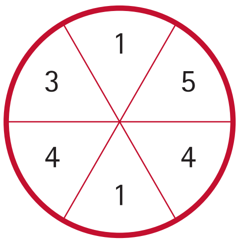
c Hve margir eru möguleikarnir ef þú vilt fá þér kjúkling í aðalrétt?

d Hve margir eru möguleikarnir ef þú vilt fá þér súpu í forrétt og ís í eftirrétt?

e Hverjar eru líkurnar á að fá salat og humar ef dregið er úr mögulegum máltíðum?

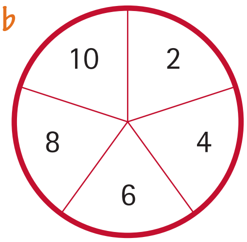
f Hverjar eru líkurnar á að fá salat eða humar ef dregið er úr mögulegum máltíðum?

20 a



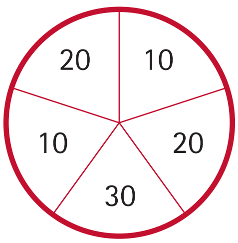
Hverjar eru líkur á að fá 3?
Hverjar eru líkur á að fá 4?
Hverjar eru líkur á að fá oddatölu?

b



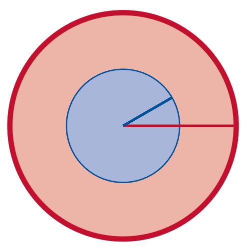
Hverjar eru líkur á að fá oddatölu?
Hverjar eru líkur á að fá tölu sem er hærri en 5?
Hverjar eru líkur á að fá tveggja stafa tölu?

21



Hverjar eru líkur á að fá 20?
Hverjar eru líkur á að fá 10 eða 30?
Hverjar eru líkur á að fá tölu sem er margfeldi af 5?

22 Á skotskífu hafa verið málaðir tveir hringir. Geisli stærri hringsins er 1 metri en geisli minni hringsins er $\frac{1}{2}$ metri. Hverjar eru líkurnar á að bogaskytta, sem ekki er sérlega góð, hitti hvorn hring þegar hún nær að hitta á skífuna?



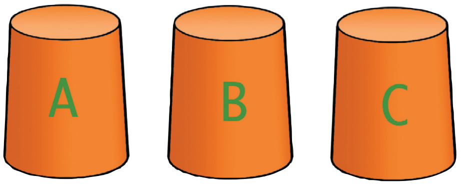
Í bókinni *Furðulegt háttalag hunds um nótt* segir Kristófer Boone sögu sína. Kristófer er fimmtán ára einhverfur drengur sem hefur gaman af því að glíma við stærðfræði. Þegar spjót beinast að honum úr öllum áttum hverfur hann oft inn í vangaveltur um stærðfræðileg vandamál. Í bókinni er sagt frá mörgum áhugaverðum stærðfræðidæmum. Í einum kafla bókarinnar er Kristófer að velta fyrir sér hvort áhuga hans á stærðfræði megi rekja til þess að alltaf finnist endanlegt svar. Kristófer segir frá vel þekktu vandamáli sem oft gengur undir nafninu *Monty Hall-vandamálið*.

Maður tekur þátt í spurningaleik í sjónvarpi. Í þessum leik er hugmyndin sú að maðurinn geti unnið bíl. Stjórnandi þáttarins sýnir manninum þrennar dyr. Hann segir að handan við einar dyrnar sé bíll en bak við hinar tvær séu geitur. Hann biður manninn að velja sér dyr. Maðurinn velur dyr en þær eru ekki opnaðar. Síðan opnar stjórnandi þáttarins aðrar dyrnar sem maðurinn valdi ekki og sýnir honum geit því hann veit hvað er á bak við allar dyrnar. Svo segir hann manninum að hann hafi enn tækifæri til að skipta um skoðun áður en dyrnar séu opnaðar og hann fái annað hvort geit eða bíl. Hann spyr manninn hvort hann vilji skipta og velja óopnuðu dyrnar.

Heimild: Furðulegt háttalag hunds um nótt.

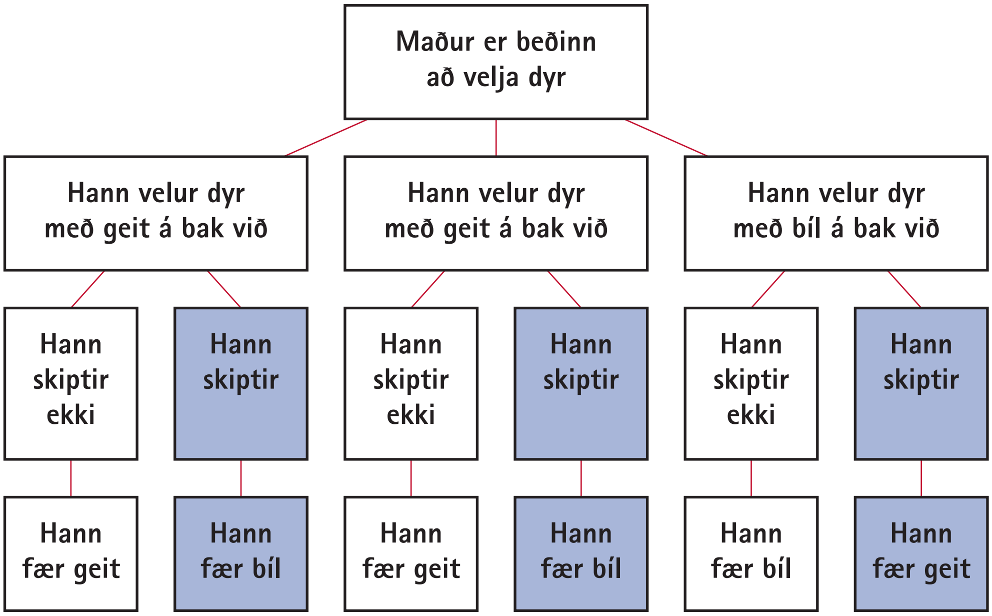
23 Hvað telur þú að maðurinn ætti að gera?

24 Prófaðu þennan leik með bekkjarfélaga. Það er óþarfi að nota geit og bíl. Það má t.d. nota bolla og einhverja smáhluti. Skráðu hve oft kemur vinningur, annars vegar ef það er skipt og hins vegar ef það er ekki skipt.



Kristófer segir frá því að kona að nafni Marilyn vos Savant hafi í tímariti nokkru rökstutt vel að réttast væri að breyta valinu því þá væru líkurnar á að fá bíl tveir af þremur. Margir stærðfræðingar mótmæltu þessu svari því hugboð þeirra sagði þeim að líkurnar væru 50% og því skipti ekki máli hvort valinu væri breytt eða ekki.

25 Skoðaðu myndina vel og færðu rök fyrir því að líkurnar séu $\frac{2}{3}$ en ekki $\frac{1}{2}$.

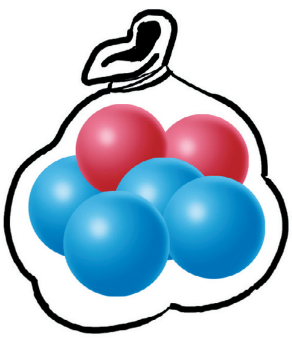


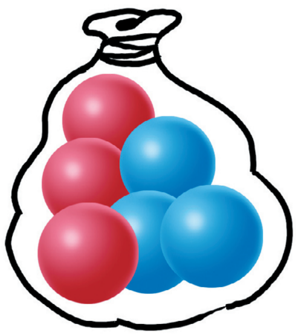
Heimild: Furðulegt háttalag hunds um nótt.

26 Í tilraun eru kúlur dregnar úr poka. Tekin er ein kúla úr pokanum, litur hennar skráður og hún sett aftur í pokann. Þetta er endurtekið nokkrum sinnum. Hvernig telur þú líklegast að næsta kúla verði á litinn? Rökstyddu svar þitt?

a Búið er að draga R B B B

b Búið er að draga B B R B R

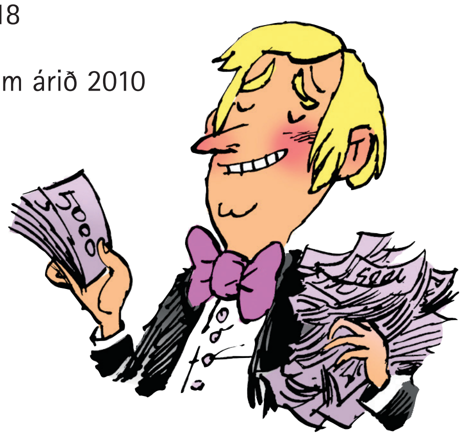




Við ýmsar tilraunir er seinlegt að finna allar útkomur og stundum er það ekki hægt. Oft má nota gagnagrunna til að skoða hvaða útkomur hafa áður komið fyrir og nýta sér þær niðurstöður til að meta líkur. Þegar metnar eru líkur á árekstrum í umferðinni á tilteknum stað eða á tilteknum degi er oftast stuðst við tölfræðilegar niðurstöður um tíðni árekstra.

27 Skoðaðu listann hér fyrir neðan og skráðu hvort skynsamlegt eða mögulegt sé að finna allar útkomur til að meta líkur eða hvort betra sé að meta líkur út frá reynslu. Meta á líkur á að:

- **a** Íslendingum fjölgi um meira en 2000 á næsta ári
- **b** summa tveggja teninga sem kastað er verði 18
- **c** Íslendingur fái Nóbelsverðlaunin í bókmenntum árið 2010
- **d** Kópavogskirkja standist jarðskjálfta sem er 5 stig á Richter-kvarða
- **e** pappírsbátur geti borið 100 nagla
- **f** vinna í happdrætti
- **g** fleiri stelpur en strákar fæðist á næsta ári



28 **a** Hve margar útkomur eru mögulegar ef teningi er kastað?

b Hve margar útkomur eru mögulegar ef peningi er kastað?

c Hve margar útkomur eru mögulegar ef bæði teningi og peningi er kastað?
Skráðu möguleikana skipulega hjá þér.

Teningur	Peningur
1	fiskur
6	skjaldarmerki
2	fiskur

d Hverjar eru líkurnar á að fá oddatölu og skjaldarmerki?

e Hverjar eru líkurnar á að fá oddatölu eða skjaldarmerki?

HÓPVERKEFNI

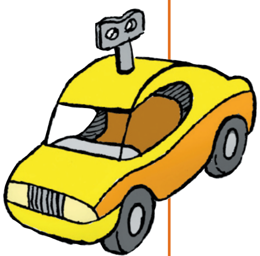
29 Oft eru tekin sýni til að meta hvort gallar leynist í vörum.
Hversu oft þarf að taka sýni til að fá góða mynd af heildinni og hve stórt á sýnið að vera? Til að komast að því getur verið gott að gera tilraun.

Þið skuluð nota sentíkubba eða annað. Þið þurfið að nota tvo liti, 250 kubba af öðrum litnum og um 50 af hinum. Setjið kubbana í poka eða kassa. Ímyndið ykkur að kubbarnir séu tákn fyrir vöru. Kubbarnir 50 tákna gallaða vöru.
Hve stór hluti framleiðslunnar er gallaður? Hve miklar líkur eru á að varan sé gölluð?

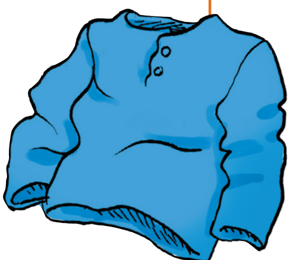
Framkvæmið eftirfarandi tilraun.

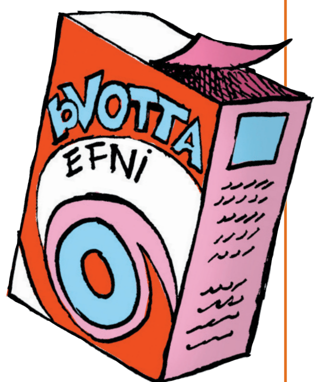
- Takið 10 kubba og skráið hve margir eru gallaðir.
- Setjið kubbana aftur í pokann.
- Takið sýni tíu sinnum.
- Hve oft gaf sýnið rétta mynd af safninu?

Endurtakið tilraunina en takið nú 20 kubba í hvert sinn.
Hve oft gaf sýnið rétta mynd af safninu?
Gaf það betri mynd af safninu að taka 20 kubba í hvert sinn?



Í tilraun ykkar vissuð þið hve stór hluti framleiðslunnar var gallaður eða hve margir kubbar voru öðruvísi á litinn. Yfirleitt er það ekki vitað og þá eru notaðar tilraunir til að reyna að átta sig á því.
Fáið einhvern til að búa til safn þar sem þið vitið ekki hve margir hlutir eru gallaðir.
Reynið að komast að hlutfalli gallaðrar vöru með því að taka sýni.
Hve stór sýni tókuð þið?
Hve mörg sýni tókuð þið?





Athugið með því að skoða safnið hve nálægt þið hafið verið raunveruleikanum.

Fyrirtæki hafa mismunandi viðmið um hve mikla áhættu þau taka um gæði framleiðslu. Í sumum tilfellum er allt gæðaskoðað en oftast er látið nægja að skoða sýni. Ræðið saman um þetta og veltið upp hugmyndum um hvaða vörur eru þannig að skoða þarf allt safnið, hvaða vörur er nóg að skoða eitt stykki af hverjum hundrað og hvers konar vörur þarf ekki að skoða.

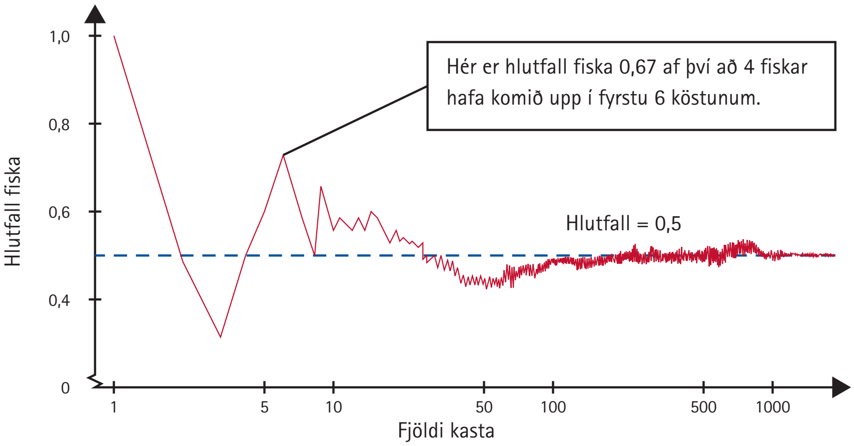
Þegar meta skal líkur á grundvelli tilrauna eru nokkur atriði sem hafa þarf í huga. Hér er tekið dæmi um líkur á að fá fisk ef peningi er kastað.

- Endurtaka þarf tilraun mörgum sinnum, t.d. 500 sinnum.
- Skrá þarf fjölda tilrauna og niðurstöðu eftir hvert kast.
- Tíðni, þ.e. hlutfall tiltekinnar niðurstöðu miðað við heildarfjölda tilrauna, er reiknuð reglulega, t.d. eftir hver 10 köst.
- Ef tíðnin nálgast alltaf meira og meira ákveðna tölu kallast það líkur fyrir niðurstöðunni. Ef tíðnin nálgast ekki neina tiltekna tölu er ekki um neinar líkur að ræða. Það má oft rekja til þess að forsendur tilraunarinnar hafa breyst á meðan á henni stendur.

30 a Hver er niðurstaða tilraunarinnar eftir 10 köst? En eftir 100 köst? En eftir 400 köst?

b Eftir hve mörg köst fór tíðnin meira og meira að nálgast hálfan?

c Hve mörg köst telur þú að þurfi til að geta áætlað líkur á grundvelli tilraunar?



31 a Kastaðu peningi 10 sinnum.
Skráðu hve oft fiskur kom upp sem hlutfall af heildarköstum.
Kastaðu aftur 10 sinnum og reiknaðu hlutfall fiska af heildarköstum.
Haltu áfram þar til þú hefur kastað 100 sinnum og reiknaðu hlutfall af heildarköstum eftir hver 10 köst.

b Er niðurstaða þín svipuð og í línuritinu í dæmi 30?

Gott getur verið að skrá í töflu

köst	fiskur	samtals fiskar	samtals köst	hlutfall
1 – 10	4	4	10	$\frac{4}{10} = 0{,}4$
11 – 20	8	12	20	$\frac{12}{20} = 0{,}6$
21 – 30	6	18		

Seinlegt er að endurtaka tilraunir mjög oft. Í sumum tilfellum er fjöldi manns fenginn til að gera tilraun til að fá nógu margar tilraunir svo treysta megi niðurstöðum. Í öðrum tilfellum eru notaðar vélar til að endurtaka tilraun. Töflureiknir getur verið mjög gagnlegur til að gera tilraunir. Í honum er hægt að endurtaka tilraunir á skjótan hátt og sjá hvort tíðnin nálgast meira og meira einhverja ákveðna tölu.

Teningakast

Ef notaður er töflureiknir sem hermir fyrir teningakast má fara eftirfarandi leið.

- Farið inn í reit A2 og setjið inn: = RANDBETWEEN(1;6).
- Afritið regluna í 1000 reiti (A2 til A1001) með því að fá +tákn í hornið og draga niður og skyggja reitina. Þá hefur verið líkt eftir teningakasti þar sem teningi hefur verið kastað 1000 sinnum.

= RANDBETWEEN(1;6)

	A	B	C	D
1	Útkoma	Tíðni		
2				
3				
4				

Þegar þetta tákn birtist er hægt að afrita niður dálkinn.

Útkomur eru svo margar að seinlegt er að telja sjálfur hve oft hver útkoma hefur komið upp. Gott er því að búa til tíðnitöflu.

Til þess að finna tíðni hverrar útkomu má nota: =COUNTIF(A2:A1001;1). Einn er aftast þegar finna á hve oft 1 hefur verið útkoma. Fjölda annarra útkoma má finna með því að setja þær í staðinn fyrir 1. Athugið að vera með bendilinn í viðkomandi reit í tíðnitöflunni.

	A	B	C	D
1	Útkoma	Tíðni		
2		=COUNTIF(A2:A1001;1)		
3		=COUNTIF(A2:A1001;2)		
4		=COUNTIF(A2:A1001;3)		
5		=COUNTIF(A2:A1001;4)		
6		=COUNTIF(A2:A1001;5)		
7		=COUNTIF(A2:A1001;6)		

Setja má upplýsingarnar fram í myndriti með því að fara í reit  og fylgja þeim skrefum sem þar eru sýnd.

32 Vinnið saman tvö og tvö. Notið töflureikni til að skoða hve oft sex kemur upp á teningi í 100 köstum.
Prófið það nokkrum sinnum.
Er niðurstaðan alltaf svipuð?
Hve oft má vænta þess að fá sex í 100 köstum?
En 1000 köstum?
Getið þið nýtt niðurstöðurnar til að setja fram fullyrðingu um hverjar líkur eru á að fá sex ef teningi er kastað?
Hve oft ætti sex að koma upp ef miðað er við að líkur á að fá sex séu $\frac{1}{6}$?

Því er haldið fram að líkur á að fá sex á teningi séu $\frac{1}{6}$ því hann hafi sex hliðar og allar séu jafnlíklegar til að koma upp. Í teningaspilum finnst mörgum eins og sexan komi sjaldan upp nema þá helst hjá mótherjanum.

33 Skoðið niðurstöður ykkar. Eru jafnar líkur á að fá allar útkomur?
Hvaða niðurstöður hefðuð þið fengið ef hermt hefði verið eftir 100 köstum?
En 200 köstum? En 500 köstum?

34 Í líkindafræðinni er fjallað um fræðilegar líkur og líkur byggðar á tilraunum.
Útskýrið þessi hugtök og notið sem dæmi í tilraun ykkar með teningakast.

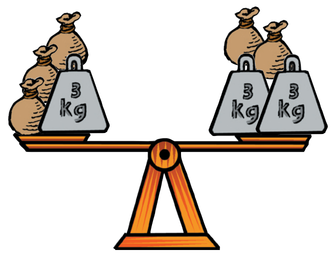
35 Í þessum kafla hefur verið fengist við ýmsa þætti varðandi líkindi. Skoðaðu kaflann bæði í vinnuhefti þínu og í þessari bók. Meginviðfangsefni kaflans var að skoða hvað þyrfti að hafa í huga þegar ákvarða ætti líkur, hvaða leiðir mætti fara og hvenær það ætti við. Rifjaðu upp helstu atriðin.
Hefur þér tekist að gefa góða mynd af aðalatriðum í vinnuhefti þínu?

Jöfnur og línurit

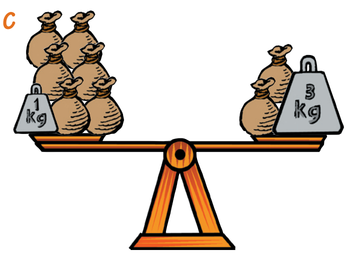
Línurit eru mikið notuð til að koma upplýsingum á framfæri. Við gerð línurita þarf að safna saman upplýsingum og greina samband þeirra. Slíkt samband er oft sett fram sem jafna. Í þessum kafla eru jöfnur meginviðfangsefnið og skoðaðar eru nokkrar leiðir til að leysa þær.

1 Hve þungur er hver poki?

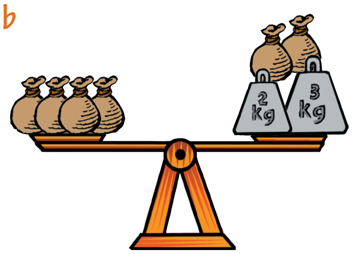
a



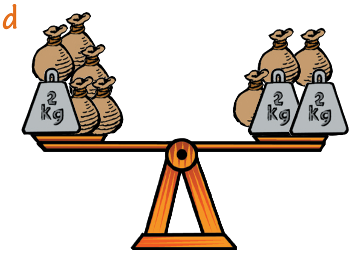
c

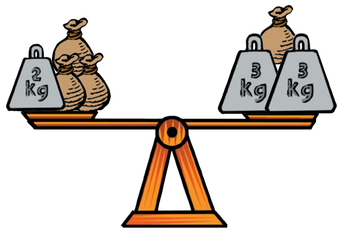


b



d

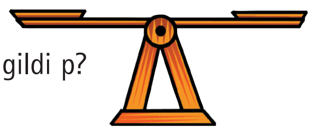




2 Arnaldur skráði jöfnu fyrir vigtun sína. $3x + 2 = x + 6$.
Hve þungur var hver poki hjá Arnaldi?

3 Davíð skráði jöfnu fyrir vigtun sína. $7m + 4 = 2m + 6$.
Hve þungur var hver poki hjá Davíð? Hvert er gildi m?

4 Sandra skráði jöfnuna $4p + 3 = 2p + 9$.
Teiknaðu jafnvægisvog sem sýnir vigtun Söndru. Hvert er gildi p?



5 Vilborg skráði jöfnuna $6 + 6k = 3k + 9$.
Teiknaðu jafnvægisvog sem sýnir vigtun Vilborgar. Hvert er gildi k?

6 Skoðaðu jöfnurnar. Skráðu hvort hver jafna er alltaf rétt, rétt fyrir sum gildi eða aldrei rétt.

a $4 + 3 = 6 + 1$

b $x + 5 = 8$

c $x + 3 = 0 + 5$

d $a + 4 = x + 4$

e $a - 2 = x - 2$

f $x + 2 = x - 2$

g $a + b = b + a$

h $7 + 3 + 12 = 12 + 7 + 3$

i $6 + a + 14 = 5 + a + 14$

HÓPVERKEFNI

7 Vinnið saman í hópum. Skráið hverja jöfnu á miða. Flokkið miðana eftir því hvort jöfnurnar eru alltaf réttar, réttar fyrir sum gildi eða aldrei réttar. Límið miðana á veggspjald. Skráið rökstuðning ykkar við hverja jöfnu.

$4 + n = 11$

$3 + 2x = 5x$

$w + 7 = w + 12$

$n + 5 = 20$

$2b + 4 = 4 + 2b$

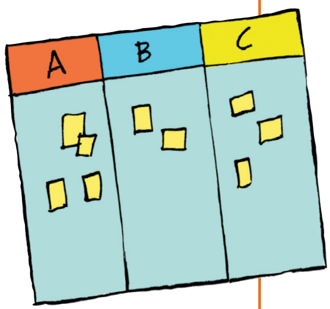
$3 - 3x = 3x - 3$

$y \cdot x = y + x$

$x + y + z = y + z + x$

$x - y - z = x - z - y$

$4(x + 2) = 4x + 2$



Búið til eina jöfnu sem er alltaf rétt, eina sem er rétt fyrir ákveðin gildi á bókstöfunum og eina sem er aldrei rétt.

8 Áður en leitað er lausna er oft gott að draga líka liði saman eða margfalda inn í sviga til að einfalda jöfnurnar.

Finndu óþekktu stærðina.

a $x + x + 5 = 29$

b $x + 2x - x = 40$

c $2 + 3x + 13 + 2x = 40$

d $3(4 + x) = 24$

e $7 + 5(x + 2) = 42$

f $4(2x + 3) - 9 = 19$

9 Stefán er x ára. Pabbi hans er 23 árum eldri.
Samtals eru þeir 79 ára. Skráðu jöfnu og einfaldaðu hana.
Hve gamall er Stefán?

10 a Það eru 7 dagar í einni viku.
Það eru x dagar í y vikum.
Hvaða samband sýna þá jöfnurnar?

$x = 7 \cdot y$ $y = x : 7$

b Það eru 24 klukkustundir í sólarhringnum.
Ég sef í b tíma og vaki a tíma.
Skráðu tvær jöfnur sem lýsa sambandi þessara stærða. Notaðu töluna 24 og bókstafina a og b í hvorri jöfnu.

11 Finndu jöfnu og töflu sem passar við hvern texta.

a Það eru sex stólar við hvert borð á veitingastað.
x er fjöldi stóla.
y er fjöldi borða.

b Ég geng í x klukkustundir á hraðanum y km/klst.
Ég geng sex kílómetra.

c Ísafold er 6 árum eldri en Gísli.
Ísafold er x ára gömul.
Gísli er y ára gamall.

d Á vélhjóli mínu voru x lítrar af bensíni.
Ég kaupi 6 lítra í viðbót.
Nú eru y lítrar á vélhjóli mínu.

A $y = 6 \cdot x$

B $6 = x \cdot y$

C $y = x + 6$

D $6 \cdot y = x$

E $y = x - 6$

1

x	7	8	9	10
y	1	2	3	4

2

x	6	12	18	24
y	1	2	3	4

3

x	1	2	3	4
y	6	12	18	24

4

x	1	2	3	4
y	7	8	9	10

5

x	6	3	2	$1\frac{1}{2}$
y	1	2	3	4

Skoðaðu jöfnurnar og töflurnar sem ganga af. Búðu til sögur sem passa við þær.

Kennari nokkur býður upp á námskeið í spænsku. Kennsla fer fram einu sinni í viku og námskeiðið stendur í 16 vikur. Helstu viðmið í fjárhagsáætlun eru:

- Nemendafjöldi er 15 (y)
- Hver nemandi borgar 15 000 kr. (z)
- Húsaleiga og kynningarkostnaður er 80 000 kr. (x)
- Tekjur kennarans eru 145 000 kr. (v)

12 Áhugavert getur verið að skoða tengsl þessara tölulegu upplýsinga.

a Hvernig hefði verið hægt að reikna út tekjur kennarans ef þær væru ekki þekktar?

b Hvað er verið að reikna þegar dæmið 15 000 · 15 – 145 000 er sett fram?

c Hvernig hefði verið hægt að finna nemendafjöldann ef hann væri ekki þekktur?

d Hvernig hefði verið hægt að finna námskeiðsgjöld ef þau væru ekki þekkt stærð?

13 Húsaleiga og námskeiðsgjöld eru fastar upphæðir frá byrjun en nemendafjöldi og tekjur kennarans breytilegar.

a Búðu til töflu sem sýnir tekjur kennarans ef miðað er við 5, 10, 15 og 20 nemendur.

b Settu upplýsingarnar fram í línuriti.

c Skráðu jöfnu þar sem nemendafjöldi er táknaður með y og tekjur kennarans með v.

d Hve margir þurfa nemendur að vera til að kennarinn hafi 50 000 kr. í tekjur? En 100 þúsund? En 200 þúsund?

14 a Teiknaðu línurit sem sýnir tekjur kennarans ef hver nemandi borgar 18 000 krónur.

b Hve mikið hækka þá laun kennarans fyrir 20 manna hóp?

15 a Teiknaðu línurit sem sýnir tekjur kennarans ef kostnaður hækkar í 95 þúsund krónur.

b Hver yrðu námskeiðsgjöld ef nemendur væru fimmtán og kennarinn vildi fá 250 þúsund krónur í laun?

Jóna rekur hópferðamiðstöð. Hún leigir út bíla og selur sætaferðir.
Jóna skráir oft upplýsingar sem hún þarf að nota sem jöfnur.

r er fjöldi fullorðinna í ferð

s er fjöldi barna í ferð

t er fargjald fullorðinna í krónum

u er barnafargjald í krónum

v er fjöldi sætaraða

x er fjöldi sæta í hverri röð

y er leiga fyrir rútu og bílstjóra í einn dag í krónum

16 Skráðu með orðum hvað jöfnurnar tákna.

a $s = 2 \cdot r$

b $2 \cdot t + 3 \cdot u = 2100$ kr.

c $x \cdot v = 48$

d $r \cdot t + s \cdot u = 12\,600$ kr.

e $y : r = t$

f $r + s = 29$

g $48 - s = 17$

17 Skráðu jöfnur.

a Fjöldi barna í ferð er sexfaldur fjöldi fullorðinna.

b Fargjald fyrir börn er helmingur af fargjaldi fyrir fullorðna.

c Tekjur af fargjöldum fyrir fullorðna.

d Fjöldi barna ef 35 manns eru saman á ferð.

e Fjöldi fullorðinna ef 35 manns eru saman á ferð.

18 Finndu óþekktu stærðina.

a 35 fullorðnir fóru með nokkur börn í ferðalag.
Farþegafjöldi í rútunni var 61. — $35 + s = 61$

b Tuttugu börn borga samtals
24 þúsund krónur. — $20 \cdot u = 24000$

c Sóley leigði rútu í fimm daga.
Hún greiddi 300 000. — $300\,000 : 5 = y$

d Í einni rútu Jónu eru 69 sæti. Í hverri röð eru
fjögur sæti nema aftast er fimm sæta röð. — $4 \cdot v + 5 = 69$

19 **a** Ingibjörg raðaði 590 bókum. Hún setti jafnmargar bækur í 14 hillur og átti þá 30 bækur eftir. Hve margar bækur setti hún í hverja hillu?

b Veigar keypti inn fyrir verslun sína 590 kílógrömm af hrísgrjónum. Hann fékk þau í 14 jafnþungum sekkjum og svo 30 eins kílógramms pakkningar í viðbót. Hve mörg kílógrömm voru í hverjum sekk?

Sambandi milli stærðanna í báðum þessum sögum má lýsa með sömu jöfnunni. Jafnan er $14 \cdot x + 30 = 590$.

c Búðu til tvær sögur í viðbót fyrir þessa jöfnu.

20 Paraðu saman fullyrðingu og jöfnu. Finndu óþekktu stærðina.

a Hörður gekk fimm hundruð kílómetra leið á 25 dögum.

b Jóna á 500 kindur. Hún fækkar þeim um 25.

c Lárus pakkar 500 smákökum í 25 kassa.

d Katrín syndir 500 metra á dag í 25 daga.

$25 \cdot x = 500$

$500 \cdot 25 = k$

$500 : t = 25$

$500 - 25 = z$

21 Finndu óþekktu stærðina.

a $7x = 63$

b $1520 + s = 2120$

c $975 - r = 301$

d $y = 3251 + 37$

e $s - 7250 = 12000$

f $r \cdot 37 = 37000$

g $128 : 4 = h$

h $320 = x \cdot 8$

i $75 : g = 15$

j $m = 7 \cdot 6 + 3$

k $139 = x : 5$

l $12300 = 3d$

22 Fyrir hvaða tölu stendur x? Prófaðu þig áfram.

a $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{5}$

b $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{5}$

c $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{4}$

d $\frac{1+x}{x} = \frac{8}{7}$

e $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$

f $\frac{2}{x+3} = \frac{2}{7}$

Í jöfnunum eru jafngildar stæður sitt hvorum megin við jafnaðarmerkið. Hvor stæða getur haft einn eða fleiri liði. Þegar leysa á jöfnur þarf að gæta þess að liðir báðum megin við jafnaðarmerkið séu alltaf jafngildir.

23 Finndu óþekktu stærðina.

a $3 + x = 17 + 2$

b $4 \cdot 6 = x + 4$

c $42 = 2x + 6 - 2$

d $x - 8 + 4 = 79$

e $x + 4 = 2x$

f $3 + x - 12 = 20 - 3 + 8 - 20$

Hægt er nota ýmsar leiðir til að finna óþekktar stærðir. Þekking á reikniaðgerðunum og tengslum þeirra nýtist vel í dæminu $5x = 35$. Margir vita að $5 \cdot 7 = 35$ og geta því ályktað að x standi fyrir 7.

Hver er óþekkta stærðin?

$8 + x = 20$ $\quad x - 10 = 40$ $\quad 4x = 16$ $\quad 16 : x = 4$

$8 + 2x = 20$. Hér getur verið gott að finna fyrst hvað 2x standa fyrir.
Þá er skoðað: $8 + \boxed{2x} = 20$.

Undir miðanum ætti því að standa 12.
2x jafngilda því 12. $2x = 12$.
$2 \cdot 6 = 12$ og því hlýtur x að standa fyrir 6.

Hægt er að leysa töluvert flóknar jöfnur á þennan hátt.

$$7 - \frac{6}{x + 1} = 5$$

- Ef settur er miði yfir $\frac{6}{x+1}$ má sjá að það jafngildir 2 því $7 - 2 = 5$
- Þá er spurningin með hverju þarf að deila í 6 til að fá 2.

$$7 - \boxed{\frac{6}{x + 1}} = 5$$

$$\frac{6}{x + 1} = 2$$

- Undir miðanum stendur því 3. $6 : 3 = 2$.

$$\frac{6}{\boxed{x + 1}} = 2$$

- $x + 1 = 3$ og þá er $x = 2$.

24 Prófaðu að nota þessa leið til að finna óþekktu stærðirnar.

a $12 - 3x = 6$

b $4x + 7 = 35$

c $\frac{42}{x} + 4 = 11$

d $17 + (x - 1) = 10$

e $(x + 5) - 13 = 2$

f $\frac{27}{x + 1} = 3$

g $3 + \frac{4}{x - 3} = 4$

h $8 - \frac{16}{x - 2} = 6$

i $3 + \frac{x}{3} = 5$

25 a Ummál rétthyrnings er 128 m. Styttri hliðarnar eru 20 m á lengd. Hve langar eru hinar hliðarnar?

b $20 + 20 + y + y = 128$

c $40 + b + 40 + b = 260$

d $2y + 35 + 35 = 216$

e $120 - 86 = 2a$

26 Ummál rétthyrnings er 90 cm.
Önnur hlið hans er tvöfalt lengri en hin.
Finndu lengdir hliðanna.

27 a Í þríhyrningi er eitt hornið 36°. Hin hornin eru jafn stór. Hve stór eru þau?

b $2x + 36 = 180$

c $3x = 180$

d $u + 45 + 63 = 180$

e $180 = 2z + 100$

28 Í þríhyrningi eru stærðir horna þannig að horn A er tvöfalt stærra en B og horn C er þrefalt stærra en B. Finndu stærðir allra hornanna.

Gagnlegt er að teikna mynd af jöfnu þegar finna á óþekkta stærð.

Jafnan er $2x + 10 = 16$.

Lausnin er $x = 3$.

<table><tr><td colspan="2">16</td></tr><tr><td>2x</td><td>10</td></tr></table>

<table><tr><td>16 – 10</td><td>10</td></tr><tr><td>2x</td><td>10</td></tr></table>

<table><tr><td>6</td><td>10</td></tr><tr><td>2x</td><td>10</td></tr></table>

<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>10</td></tr><tr><td>x</td><td>x</td><td>10</td></tr></table>

29 Skráðu jöfnurnar og finndu óþekktu stærðirnar.

a
<table><tr><td colspan="2">25</td></tr><tr><td>x</td><td>8</td></tr></table>

b
<table><tr><td colspan="2">18</td></tr><tr><td>4x</td><td>6</td></tr></table>

c
<table><tr><td colspan="2">25</td></tr><tr><td>3x</td><td>10</td></tr></table>

d
<table><tr><td colspan="2">6x</td></tr><tr><td>12</td><td>2x</td></tr></table>

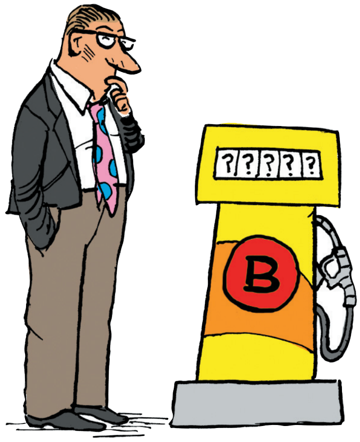
e
<table><tr><td>3x</td><td>8</td></tr><tr><td colspan="2">5x</td></tr></table>

f
<table><tr><td>15</td><td>3x</td></tr><tr><td colspan="2">8x</td></tr></table>

g
<table><tr><td>19</td><td>2x</td></tr><tr><td colspan="2">34</td></tr></table>

h
<table><tr><td>5x</td><td>8</td></tr><tr><td colspan="2">60</td></tr></table>

30 Magnús rekur litla bensínstöð.
Með þjónustu er bensínlítrinn seldur á 108,7 krónur.
Í sjálfsafgreiðslu selur Magnús bensínlítrann á 104,5 krónur.
Fastur kostnaður við rekstur bensínstöðvarinnar eru 40 000 krónur á dag.



a Búðu til töflu sem sýnir tekjur Magnúsar á einni viku. Miðaðu við að seldir séu að **meðaltali** 4000 lítrar af bensíni á dag, þar af 2400 lítrar í sjálfsafgreiðslu.

	í heild	*með þjónustu*	*sjálfsafgreiðsla*
1. dagur	*4400*	*2000*	*2400*
1. og 2. dagur	*7950*	*3500*	*4450*
1., 2. og 3. dagur			

b Notaðu töfluna til að búa til línurit sem sýnir tekjur Magnúsar af sölu
- í sjálfsafgreiðslu
- með þjónustu

c Búðu til jöfnu sem sýnir heildartekjur að frádregnum kostnaði á einni viku. Fjöldi seldra bensínlítra og skipting þeirra eiga að vera óþekktar stærðir í jöfnunni.

d Notaðu jöfnuna til að búa til töflu þar sem miðað er við að salan sé 20 000 lítrar, 25 000 lítrar, 30 000 lítrar og 35 000 lítrar á viku. Miðaðu við að skipting milli sjálfsafgreiðslu og þjónustu sé 3:2.

e Búðu til línurit sem sýnir þessar upplýsingar.

Magnús veltir fyrir sér hvort hann eigi að hætta að vera með þjónustu á bensínstöðinni. Þá myndi fastur kostnaður lækka niður í 15 þúsund krónur á dag. Markaðsfræðingur spáir því að þá myndu viðskiptin dragast saman og salan færi niður í 3000 lítra á dag.

f Miðaðu við þessar forsendur og búðu til töflu og línurit.

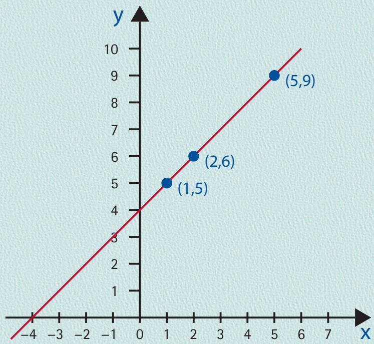
g Myndu tekjur af bensínstöðinni hækka ef þjónustu væri hætt? Hvað myndir þú ráðleggja Magnúsi varðandi reksturinn?

h Hve stóran hluta heildartekna að frádregnum rekstrarkostnaði telur þú að Magnús fái sem eigin tekjur?

Í jöfnum geta verið ein óþekkt stærð, tvær eða fleiri. Þú hefur hingað til aðallega fengist við jöfnur þar sem ein stærð er óþekkt. Þegar tvær stærðir í jöfnu eru óþekktar má nota línurit til að finna lausnir. Þá koma margar lausnir til greina því stærðirnar eru háðar hvor annarri.

Lausnir má finna með því að setja inn einhverja tölu fyrir aðra stærðina og finna út frá því hver hin er. Þar með eru komin hnit punkts í hnitakerfi þar sem önnur stærðin er á x-ásnum og hin á y-ásnum.

Þegar teiknað er línurit þurfa hnit nokkurra punkta að vera þekkt.



31 Teiknaðu línurit fyrir jöfnuna $y = 3x + 2$.
Þú getur byrjað á að finna hvert gildi y verður þegar x er jafnt og 0, 2 eða 4. Þannig færðu hnit þriggja punkta sem liggja á línu jöfnunnar. Þú getur valið hvaða tölur sem er en gott er að þær séu ekki færri en þrjár.

x	$3x + 2 = y$	(x, y)
0	$3 \cdot 0 + 2 = 2$	(0, 2)
2	$3 \cdot 2 + 2 = 8$	(2, 8)
4	$3 \cdot 4 + 2 = 14$	(4, 14)

a Lestu af línuritinu hvert gildi y er þegar $x = 1$. Og ef $x = 3$.

b Lestu af línuritinu hvert gildi x er þegar $y = 5$.

32 Gerðu töflu fyrir jöfnuna $y = 2x + 1$
Notaðu upplýsingarnar í töflunni og teiknaðu línurit.

33 Gerðu töflu fyrir jöfnuna $y = 4x$
Notaðu upplýsingarnar í töflunni og teiknaðu línurit.

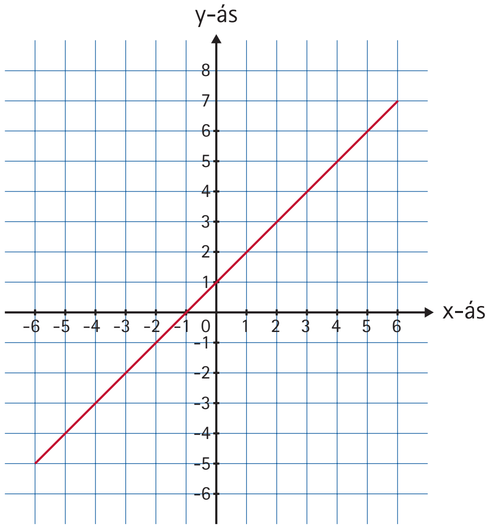
34 Gerðu töflu fyrir jöfnuna $y = x – 3$
Notaðu upplýsingarnar í töflunni og teiknaðu línurit.

35 a Lestu af línuritinu hvert gildi y er þegar:

$x = 0$ $x = 1$ $x = -1$ $x = 3$ $x = -3$

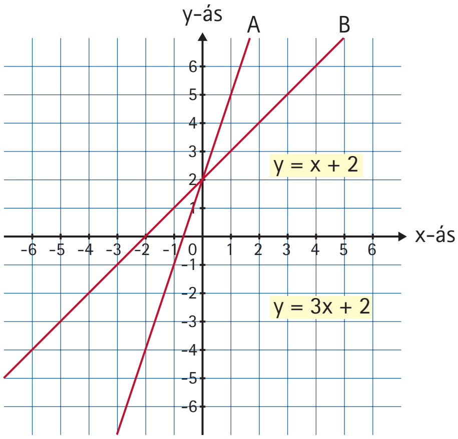
b Lestu af línuritinu hvert gildi x er þegar:

$y = 4$ $y = 0$ $y = -2$ $y = 8$ $y = -4$

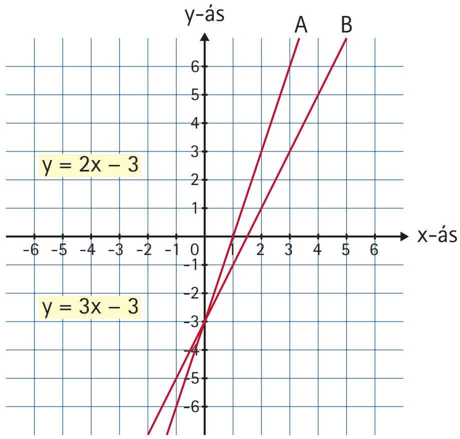


36 Paraðu saman jöfnu og línurit.

a



b



c Hvernig myndir þú lýsa muninum á línuriti jafnanna í a-lið? En í b-lið?

d Hver er munurinn á jöfnunum $y = x + 2$ og $y = 3x + 2$?

37 a Hver er munurinn á jöfnunum $y = 4x + 2$ og $y = x + 2$?

b Lína hvorrar jöfnunnar heldur þú að hafi meiri halla?

c Teiknaðu línurit jafnanna í sama hnitakerfi og sannreyndu tilgátu þína.

d Hvað segir talan 2 í jöfnunum þér?

38 a Gerðu töflu fyrir jöfnuna $y = x + 1$.

b Teiknaðu línurit fyrir jöfnuna.

c Lestu af línuritinu hvert gildi y er ef
$x = 2$ $x = -2$ $x = 1$

d Lestu af línuritinu hvert gildi x er ef
$y = 0$ $y = -1$

e Hvernig breytist gildi y ef x hækkar um 1?

x	x + 1 = y	(x, y)
−3	−3 + 1 = −2	(−3, −2)
0	0 + 1	
3		
5		

39 a Gerðu töflu fyrir jöfnuna $y = 2x - 1$.

b Teiknaðu línurit fyrir jöfnuna.

c Lestu af línuritinu hvert gildi y er ef
$x = 3$ $x = -1$ $x = -2$

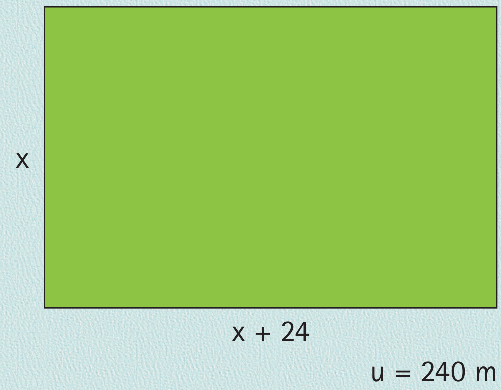
d Lestu af línuritinu hvert gildi x er ef
$y = 1$ $y = -1$ $y = 0$

e Hvernig breytist gildi y ef x hækkar um 1?

x	2x − 1 = y	(x, y)
−4	2 · −4 − 1 = −2	(−4, −9)
0	2 · 0 − 1	
2		
4		

Dæmi má leysa á fleiri en einn veg. Lestu textann vandlega og veltu fyrir þér þeim tveimur leiðum sem farnar eru til að leysa dæmið.

Í íbúðahverfi á að búa til sparkvöll. Ummál vallarins er 240 metrar. Önnur hlið hans er 24 metrum lengri en hin. Hve langar verða hliðar vallarins?



Ein leið til að leysa þetta dæmi er að prófa tölur.

styttri hlið	lengri hlið	ummál
30 m	54 m	168 m (of lítið)
50 m	74 m	248 m (of mikið)
45 m	69 m	228 m (of lítið)
48 m	72 m	240 m (rétt)

Í stað þess að prófa sig áfram má setja fram jöfnu og leysa hana.

Ummál finnst með því að leggja allar hliðarlengdir saman.
Styttri hliðarlengdina má tákna sem x. Hin er 24 metrum lengri og má því tákna sem x + 24.

Jafnan fyrir ummál sparkvallarins er því: $240 = x + x + 24 + x + x + 24$

$$240 = 4x + 48$$

Með því að setja miða yfir 4x má finna að $4x = 192$. Þá eru $2x = 96$ og $x = 48$.
Styttri hliðin er því 48 metrar og sú lengri $48 + 24 = 72$ metrar.

40 **a** Hvora leiðina fannst þér auðveldara að skilja?

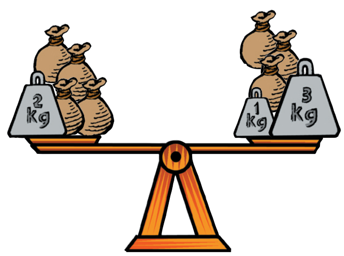
b Hvaða kosti hefur sú leið að prófa sig áfram með tölur?

c Hvaða kosti hefur sú leið að nota jöfnur?

d Hvernig væri jafnan ef ummálið væri 300 metrar?

e Hverjar væru hliðarlengdirnar?

f Hvaða leið valdir þú til að finna hliðarlengdirnar? Rökstyddu svar þitt.



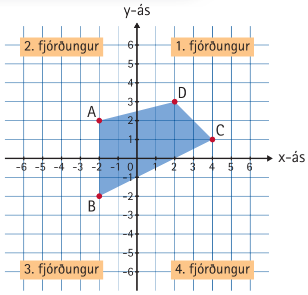
41 Skoðaðu kaflann vel og skráðu hjá þér meginhugtök.

- Hvaða leiðir þekkir þú til að finna óþekktar stærðir í jöfnum?
- Hvaða sambandi gæti þessi jafna lýst? $y = 2500x + 150$
- Hvaða munur er á jöfnu og stæðu?

Hnitakerfi og flutningar

Rétthyrnt hnitakerfi má nota til að lýsa staðsetningu punkta á tvívíðum fleti.

1 Skoðaðu myndina og skráðu hnit merktu punktanna. Punkturinn A er í 2. fjórðungi hnitakerfisins.



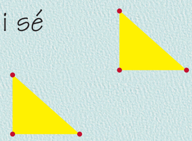
a Hvað einkennir hnit punkta í 2. fjórðungi hnitakerfisins?

b Hvað einkennir hnit punkta í 1. fjórðungi hnitakerfisins?

c Hvað einkennir hnit punkta í 3. fjórðungi hnitakerfisins?

d Hvað einkennir hnit punkta í 4. fjórðungi hnitakerfisins?

Hliðrun er flutningur þar sem mynd er færð til án þess að henni sé snúið eða speglað. Allir punktar myndarinnar flytjast um sömu fjarlægð og í sömu stefnu.



2 Teiknaðu hnitakerfi og merktu ásana með tölum frá –9 til 9.

a Teiknaðu þríhyrning með hornpunktana (–4,1) (–4,3) og (–3,1) í hnitakerfið. Merktu hann X.

b Hliðraðu þríhyrningnum um fimm rúður til hægri og eina rúðu upp. Merktu hann Y.

c Hliðraðu þríhyrningnum X þannig að hann lendi allur inn í 4. fjórðungi hnitakerfisins. Merktu hann Z.

d Hliðraðu þríhyrningnum X um tvær rúður til hægri og fjórar rúður niður. Merktu hann U.

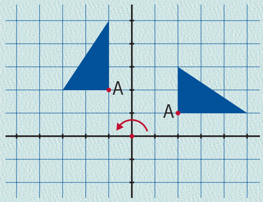
e Lýstu færslu Y til U.

f Lýstu færslu Z til Y.

g Skráðu hnit eins hornpunktsins í þríhyrningnum X og skráðu hnit samsvarandi horna í hinum þríhyrningunum. Er hægt að gera sér grein fyrir hliðruninni með því að skoða eingöngu breytingar á hnitunum?

3 Fimmhyrningi með hornpunkta (1,1) (1,2) (3,3) (5,1) (4,0) hefur verið hliðrað. Hornpunktar eftir hliðrun eru (–1,–4) (–1,–3) (1,–2) (3,–4) (2,–5). Hvernig myndir þú lýsa þessari hliðrun?

Snúningur er flutningur þar sem mynd er snúið um punkt. Til þess að lýsa snúningi nákvæmlega þarf að tilgreina snúningsmiðjuna eða punktinn sem snúið er um. Einnig þarf að tilgreina stærð hornsins sem snúið er um og í hvaða átt er snúið. Ef annað er ekki tiltekið er í stærðfræðinni yfirleitt miðað við að snúa rangsælis.



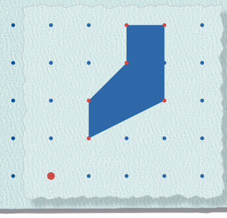
4 Teiknaðu hnitakerfi og merktu ásana með tölum frá –7 til 7.

a Teiknaðu hyrning með hornpunkta í (1,1) (1,3) (6,7) (5,2) og (3,1).

b Snúðu hyrningnum 90° rangsælis um punktinn (0,0). Skráðu hnit hornpunktanna eftir snúninginn.

c Teiknaðu einnig mynd af hyrningnum í sama hnitakerfið eftir 180° og 270° snúning.

Til að auðvelda sér snúning er gott að teikna hyrninginn á gegnsæjan pappír. Snúningspunktinum er haldið á sama stað með penna eða oddhvössum pinna og pappírnum síðan snúið $\frac{1}{4}$ úr hring ef snúa á um 90°. Þannig er auðvelt að sjá hvar myndin lendir eftir snúning.



5 Teiknaðu sams konar hyrning og þann sem er hér að ofan og prófaðu að snúa honum um einhvern af hornpunktum hyrningsins. Byrjaðu á að snúa um 90° og haltu síðan áfram og snúðu aftur um 90° þar til hyrningnum hefur verið snúið allan hringinn.
Teiknaðu hyrninginn eftir hvern snúning.
Veldu einhvern annan hornpunkt og farðu eins að.

6 Ofan á hvaða mynd lendir mynd M ef henni er snúið:

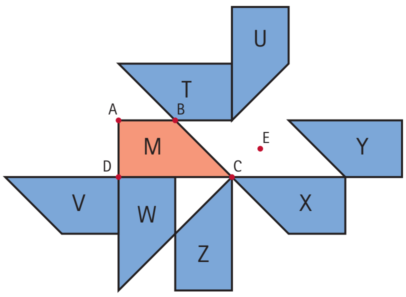
a 90° réttsælis um punktinn D?

b hálfhring um punktinn C?

c 90° rangsælis um C?

d hálfhring um punktinn E?

e 90° réttsælis um punktinn E?



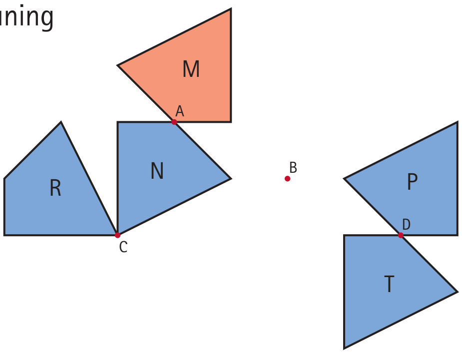
7 Hvaða snúningsmiðju og snúning myndir þú nota til að snúa:

a mynd M yfir í N?

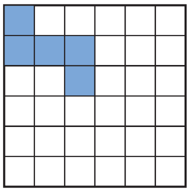
b mynd R yfir í N?

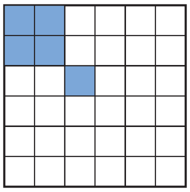
c mynd N yfir í P?

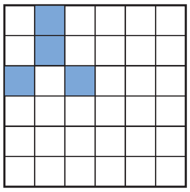
d mynd P yfir í T?



8 Teiknaðu þessar myndir og búðu til mynstur með því að snúa mynstureiningunni (litaða fletinum) um 90°, 180° og 270° um miðpunkt flatarins.

a 

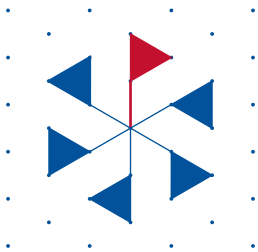
b 

c 

9 Þetta mynstur hefur verið myndað með snúningi á mynstureiningu.

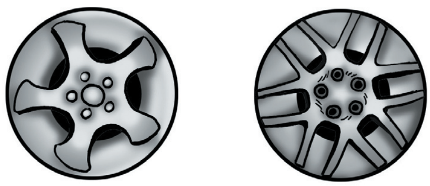
Lýstu þeim snúningum sem notaðir hafa verið við gerð myndarinnar.

10 Hvernig hefur mynstureiningu verið snúið við gerð þessa mynsturs?



11 Búðu til fleiri mynstur með snúningum. Notaðu þríhyrninganet, þríhyrningapappír eða rúðunet.

12 Hvaða snúningur hefur verið notaður til að búa til þessi mynstur?



13 Teiknaðu hnitakerfi og merktu ásana með tölum frá –7 til 7.

a Teiknaðu skálínu í gegnum upphafspunktinn og punktana (5,5) og (–5,–5)

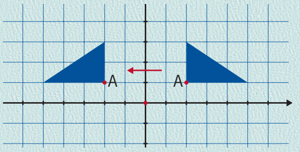
b Teiknaðu aðra skálínu í gegnum upphafspunktinn og (– 5, 5) og (5, –5)

c Teiknaðu hyrning með hornpunktana (2,2) (2,6) (4,6) og (4,4) inn í hnitakerfið.

d Snúðu hyrningnum rangsælis um 90°, 180° og 270° og teiknaðu hann upp eftir hvern snúning. Merktu punktinn (4,6) með bókstafnum A. Skráðu hnit eftir 90°, 180°, og 270° snúning.

e Snúðu hyrningnum um 45° rangsælis og teiknaðu hann upp. Snúðu honum síðan 135° og 225°. Getur þú skráð nákvæmt hnit punktsins A eftir snúninginn?

Speglun er flutningur sem varpar mynd um speglunarás yfir í spegilmynd sína. Spegilmyndin er jafnlangt frá ásnum og upprunalega myndin.



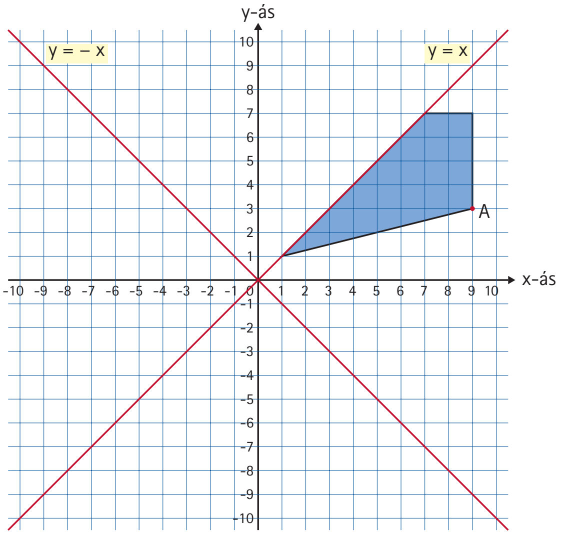
14 Teiknaðu hnitakerfi og merktu ásana með tölum frá –10 til 10.

a Teiknaðu línurnar y = x og y = –x inn í hnitakerfið. Teiknaðu myndina inn í 1. fjórðung hnitakerfisins. Skráðu hnit punktsins A.

b Speglaðu myndina um línuna y = x.

c Speglaðu því næst spegilmyndina um y–ásinn.

d Ljúktu við mynstrið með því að spegla myndina áfram. Skiptir máli um hvaða speglunarás er byrjað að spegla? Verður myndin alltaf eins?



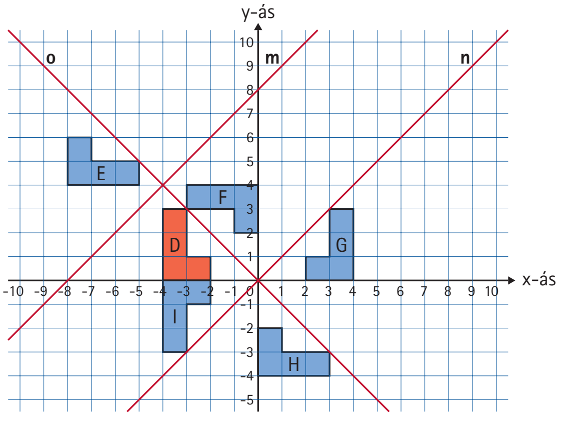
e Skráðu hnit punktsins A eftir að honum hefur verið speglað um alla ásana. Lýstu því hvernig hnit punktsins breytast þegar honum er speglað um þá ása sem sýndir eru á myndinni.

15 Myndir E, F, G, I og H eru allar spegilmyndir myndarinnar D.

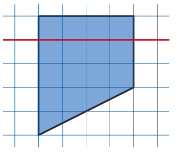
a Tilgreinið um hvaða línu D hefur verið speglað til að fá hverja mynd fyrir sig.

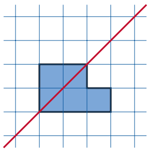
b Hvaða flutningur gæti fært G yfir í I? En E yfir í H?

c Hvað verður um þá punkta sem liggja á speglunarásnum þegar speglað er?

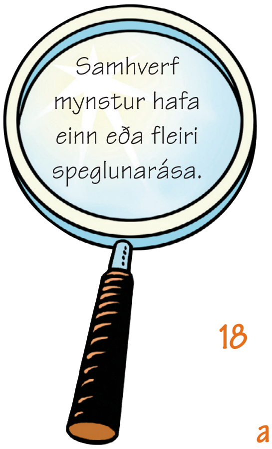


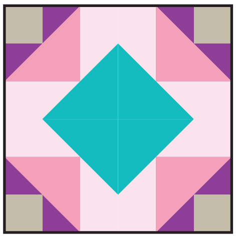
16 Teiknaðu þessar myndir í rúðunet. Notaðu rauðu línurnar sem speglunarás og teiknaðu spegilmyndirnar.

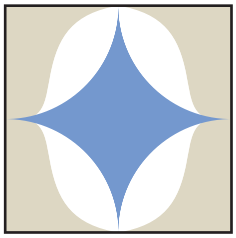




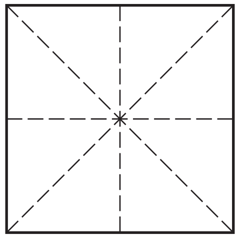
17 Þessi mynstur eru samhverf.
Hve marga speglunarása hefur hvort mynstur?







18 Hér er leið sem nota má við að teikna mynstur með fjóra speglunarása.

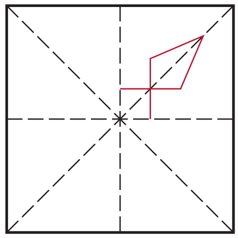


a Teiknaðu fjóra speglunarása í ferningslaga rúðunet.

b Teiknaðu nokkrar línur í einn af þríhyrningunum.

c Speglaðu línurnar um annan speglunarásinn sem er á ská.

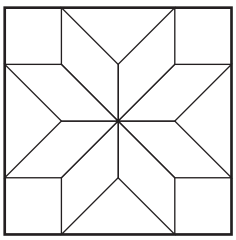
d Speglaðu allar línurnar um hinn speglunarásinn sem er á ská.

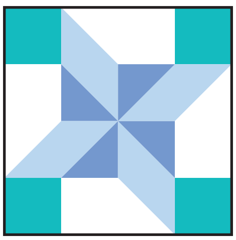


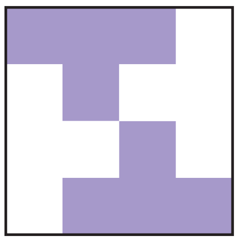
e Speglaðu allar línurnar um lárétta speglunarásinn.

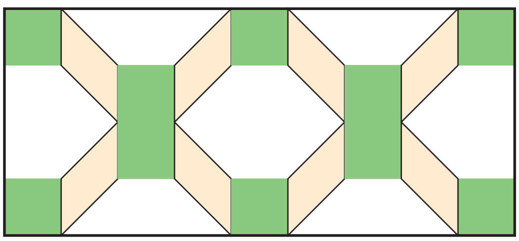
Notaðu þessa aðferð við að búa til nokkur mynstur með fjóra speglunarása.

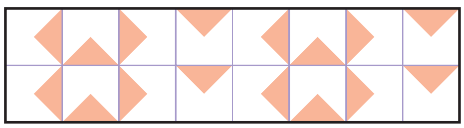
19 Skoðaðu þessi mynstur.
Hvaða form mynda grunneininguna í hverju mynstri?
Lýstu þeim flutningum sem notaðir hafa verið við að búa mynstrin til.





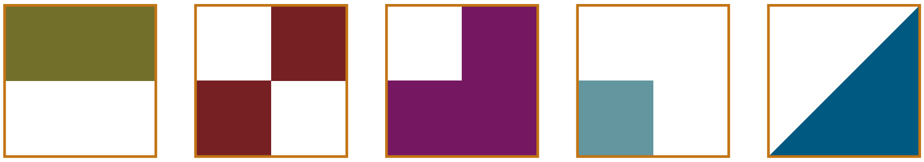






HÓPVERKEFNI

20 Í þessu verkefni eigið þið að búa til flísamynstur með því að nota mismunandi flísar sem grunneiningu.

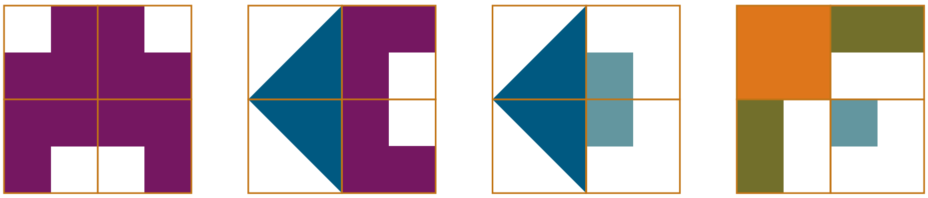


Þið getið teiknað upp flísarnar í rúðunet eða klippt þær út af vinnublaði. Teiknið lausnir ykkar í vinnubók eða búið til veggspjald.

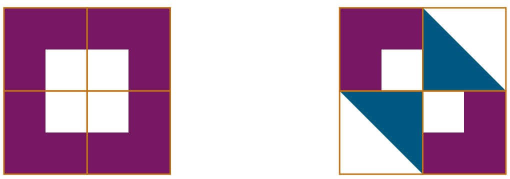
Byrjið með fjórar flísar af sömu gerð. Búið til mismunandi ferningslaga mynstur úr hverri af flísunum fjórum. Búið til mynstur með speglun. Búið til mynstur með því að nota snúning.

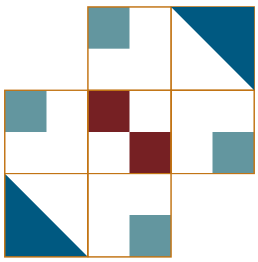
Takið nú tvær flísar af einni gerð og tvær af annarri.
Búið til mismunandi ferningslaga mynstur.
Teiknið mynstrin í vinnubók og greinið frá hvaða flutningar voru notaðir við gerð þeirra.

Notið tvær eða þrjár mismunandi gerðir af flísum og spegil til að búa til mynstur.



Reynið að finna fleiri en eina leið til að búa þessar myndir til með því að nota flísarnar og spegil.



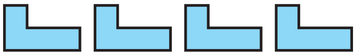


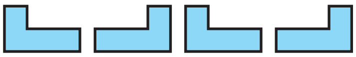
Nota má ýmis teikniforrit til að búa til flísar og flísamynstur. Einnig má nota rúðunet á ýmsa vegu til að búa til mynstur.

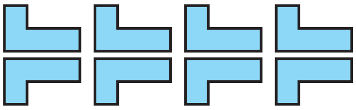
Mynstur eru yfirleitt búin til út frá mynstureiningum sem látnar eru endurtaka sig eftir ákveðnum reglum. Yfirleitt er beitt flutningum við að færa til mynstureininguna.

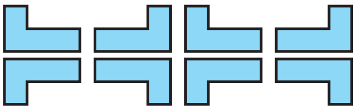
Einfaldasta gerð af mynstrum eru mynsturborðar. Einfaldasta gerð mynsturborða er gerð þannig að mynstureiningunni er hliðrað til að mynda mynstur sem endurtekur sig í eina átt.

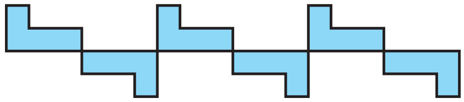
21 Mynsturborðarnir eru myndaðir úr einfaldri mynstureiningu með flutningum. Skoðaðu hvern borða fyrir sig og greindu frá hvernig hann er búinn til.

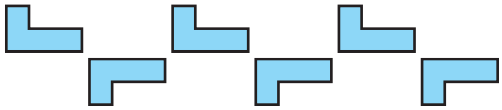
a


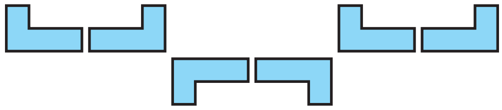
b


c


d


e


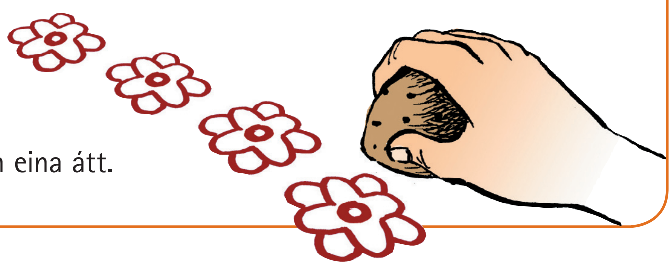
f


g


HÓPVERKEFNI

Búið til ykkar eigin mynsturborða. Skerið út mynstureiningu í kartöflu og notið hana til að þrykkja með. Þið getið líka búið til mót með því að klippa út úr plasti. Notið lítinn svamp til að þrykkja í mótið eða notið tré- eða vaxliti. Gott getur verið að hafa rúðunet undir blaðinu sem þrykkja á mynstrið á til að auðveldara sé að staðsetja mynstureininguna á réttum stað.

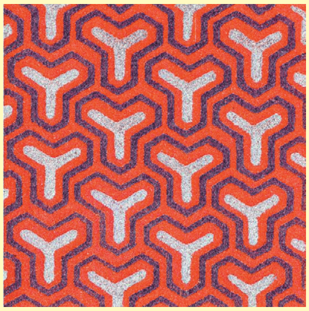
Þegar þið hafið lokið við mynsturborðana getið þið prófað að búa til mynstur sem þekur flöt eins og t.d. veggfóður. Þá skoðið þið leiðir til að búa til mynstur með mynstureiningunni í fleiri en eina átt.



Mynsturgerð hefur heillað manninn í árþúsundir og mismunandi mynsturgerðir tengjast mismunandi tímabilum, menningarheimum og trúarbrögðum.

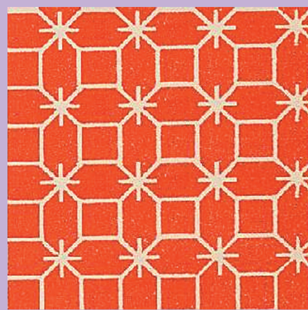
22 Hér eru nokkur mynstur frá mismunandi menningarheimum og tímabilum. Skoðaðu þau vel. Veldu þrjú mynstur. Greindu mynstureininguna og teiknaðu hana upp. Greindu frá því hvaða flutningar hafa verið notaðir til að mynda mynstrið.

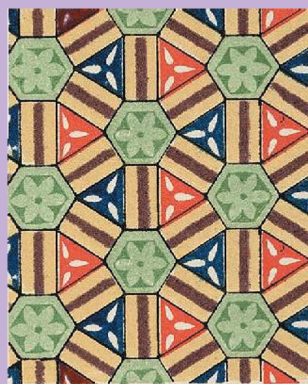
Kínversk mynstur.



Egypsk mynstur.

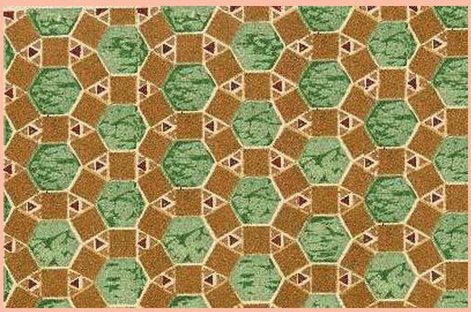
Persnesk mynstur.

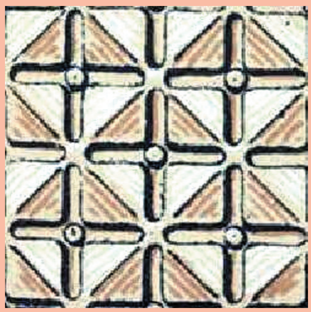




Indverskt mynstur.

Mynstur frá Býsantín-tímanum.

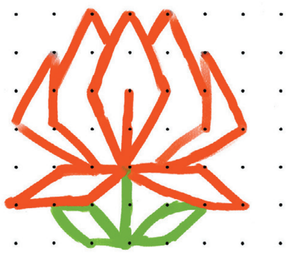


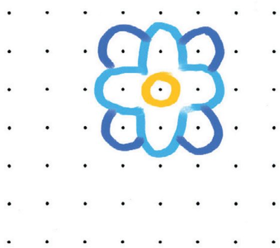


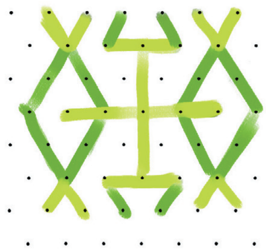
Rangolí-mynstur

Hindúar og Shíkar skreyta oft heimili sín með svokölluðum Rangolí-mynstrum. Fyrir hátíðir og brúðkaup eru oft búin til Rangolí-mynstur fyrir utan útidyrnar. Mynstrin eru búin til úr lituðum hrísgrjónum eða með litaðri krít. Stundum eru mynstrin þakin með blómablöðum, perlum og baunum. Yfirleitt er búinn til grunnur úr punktum sem annaðhvort er raðað í ferninga eða þríhyrninga og punktarnir eru síðan tengdir saman til að búa til mynstur. Oft eru tveir eða fleiri speglunarásar í mynstrunum.

Hér eru nokkur dæmi um Rangolí-mynstur.





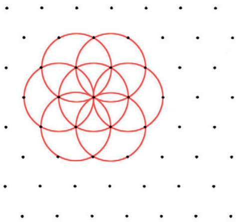
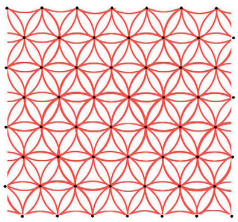
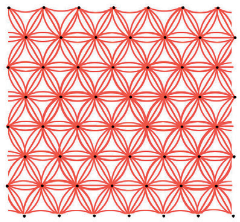


23 Notaðu punktanet og búðu til Rangolí-mynstur með tvo og fjóra speglunarása.

Íslömsk mynstur

Íslömsk mynstur skreyta oft byggingar og helgistaði múslima. Á 10.–13. öld þróuðu listamenn í samstarfi við stærðfræðinga mikinn fjölda rúmfræðilegra mynstra. Mörg þessara mynstra þykja mjög falleg og varpa ljósi á þá eiginleika sem einkenna regluleg rúmfræðileg form. Stjörnur byggðar á reglulegum sexhyrningi eru grunneiningar í mörgum íslömskum mynstrum. Grunnur slíkra mynstra er þríhyrninganet sem myndast þegar hringferli er skipt í sex hluta út frá geisla hringsins. Nýir hringir með sama geisla eru teiknaðir með miðju í þeim sex punktum sem myndast þegar hringferlinum er skipt.

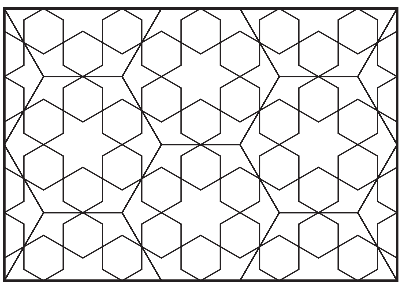
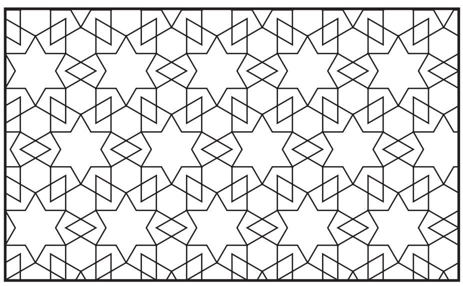
Hér eru dæmi um íslömsk mynstur.

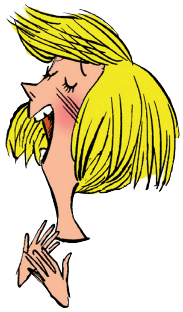
Stjörnur eru regluleg rúmfræðileg form sem vísa jafnt í allar áttir út frá miðpunkti. Allar reglulegar stjörnur sem hafa 6, 8, 10, 12 eða 16 odda eru myndaðar út frá skiptingu hrings í jafna hluta.

24 Prófaðu að teikna mismunandi stjörnur út frá hring. Þú getur líka notað þríhyrningapunktanet og teiknað mismunandi stjörnur í það.
Þegar þú hefur teiknað nokkrar mismunandi stjörnur veltu þá fyrir þér hvaða flutninga má nota til að láta þær þekja flöt. Rannsakaðu leiðir til að tengja þær saman til að mynda samfellt mynstur sem þekur flöt.

25 Skoðaðu mynstrin. Greindu mynstureininguna og segðu frá hvernig mynstrið hefur verið myndað.

Þrautir



SÖNGDROTTNINGAR

Um síðustu helgi komu fimm konur (m.a. Magnea) fram og sungu mismunandi lög.
Notaðu vísbendingarnar til að finna út hver söng hvaða lag og í hvaða röð.

1 Freyja söng lagið *Sweet Surrender*.

2 Ólöf söng númer 2.

3 Vaka söng á eftir konunni sem söng *Baby Love* og næst á undan konunni sem söng *Nothing Compares 2 U*.

4 Fríða Sædís söng ekki strax á eftir konunni sem söng *White Rabbit*.

5 Fimmta lagið var *I will Survive*.

Í BRÚÐKAUPI FRÍÐU OG HALLMARS

Þegar Fríða og Hallmar höfðu dansað brúðarvalsinn vildu ættingjar Fríðu ólmir fá dans. Meðan vinningslagið úr söngvakeppni evrópskra sjónvarpsstöðva frá 2005 var spilað dönsuðu fjórir ættingjar við hana (m.a. pabbi hennar). Finndu í hvaða röð ættingjarnir dönsuðu við hana, nöfn þeirra og skyldleika við Fríðu.

1 Andri Freyr er systursonur hennar.

2 Hún dansaði 3. dansinn við Pál.

3 Afi hennar tók ekki við af Hjalta.

4 Gísli tók við af manni sem tekið hafði við af föðurbróður hennar.

SUNNA FER Í HÁTTINN

Áður en Sunna fór að sofa í gær léku ættingjar hennar (m.a. systir hennar) með henni söguna um Gullbrá og bangsana þrjá. Sunna lék sjálf Gullbrá en ættingjarnir önnur hlutverk (m.a. bangsa litla). Getið þið áttað ykkur á hvaða hlutverk hver lék og hvernig hann er skyldur Sunnu?

1 Helga, sem lék bangsapabba, er ekki mamma Sunnu.

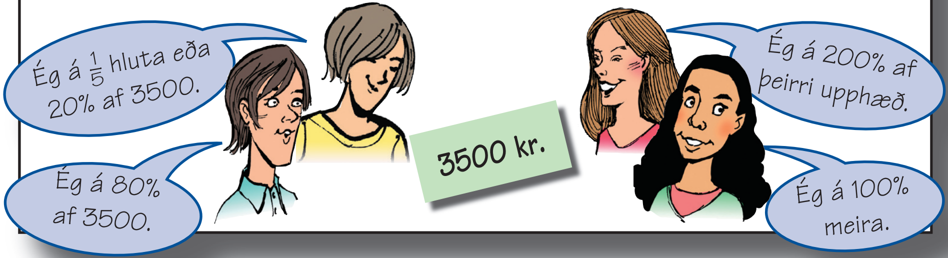
2 Sigrún lék hvorki bangsamömmu né ljóta grimma úlfinn.

3 Fríða, móðursystir Sunnu, lék ekki úlfinn.

4 Hvorki Helga né Soffía eru ömmur Sunnu.

Prósentureikningur

Fólk lýsir oft hlutfalli eða hlutfallslegri skiptingu í prósentum. Einnig eru prósentur notaðar til að lýsa breytingu, bæði aukningu og minnkun. Heildin eða sú stærð sem miðað er við er 100%.



1 Könnun var gerð á vinsældum sjónvarpsþátta. Niðurstöður sýna hve mörg prósent þátttakenda völdu átta vinsælustu þættina.

- Flugan 32%
- Þórunn á tali 46%
- Súrt og sætt 23%
- Spurt er 36%
- Á útleið 12%
- Lögregluvaktin 19%
- Spjallið 14%
- Fréttir 36,2 %

a Raðaðu þáttunum í röð eftir vinsældum.

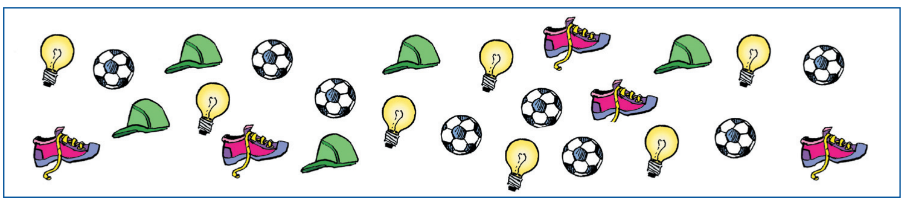
b Áætlaðu hve margir landsmenn horfa að jafnaði á hvern þátt.

2 a Áætlaðu hve mörg prósent myndarinnar eru rauð.

b Áætlaðu hvernig myndirnar skiptast eftir litum.
Skráðu niðurstöður þínar í prósentum.

3 a Hve mörg prósent af heildinni eru boltarnir?

b Hve mörg prósent af heildinni eru húfur?



4 Finndu 30% af

a 300	**c** 650	**e** 3	**g** 1800
b 1000	**d** 65	**f** 2500	**h** 180 000

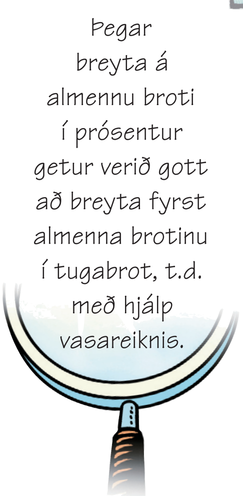
5 Þórunn á 85 000 krónur. Hún leikur sér að því að finna mismunandi prósentuhluta af upphæðinni. Finndu

a 40%	**c** 37,5%	**e** 3%	**g** 48%
b 25%	**d** 55%	**f** 16%	**h** 150%

6 Hver er heildin (100%), ef

a 50% eru 6	**c** 7% eru 56	**e** 3,5 % eru 3,5
b 25% eru 6	**d** 28% eru 14	**f** 81% eru 9

Hugtakið prósenta þýðir af hundraði eða hundraðshluti. Þegar skrá á almenn brot sem prósentur er því gott að lengja eða stytta brotið þannig að nefnarinn verði 100. Einnig er oft þægilegt að lengja brotin þannig að nefnarinn verði 10 eða 1000.



7 Breyttu almennu brotunum í prósentur.

a $\frac{7}{20}$	**c** $\frac{3}{5}$	**e** $\frac{5}{4}$	**g** $\frac{120}{250}$	**i** $\frac{710}{5000}$
b $\frac{16}{25}$	**d** $\frac{85}{125}$	**f** $\frac{350}{500}$	**h** $\frac{190}{2000}$	**j** $\frac{1200}{4000}$

8 Breyttu brotunum í prósentur.

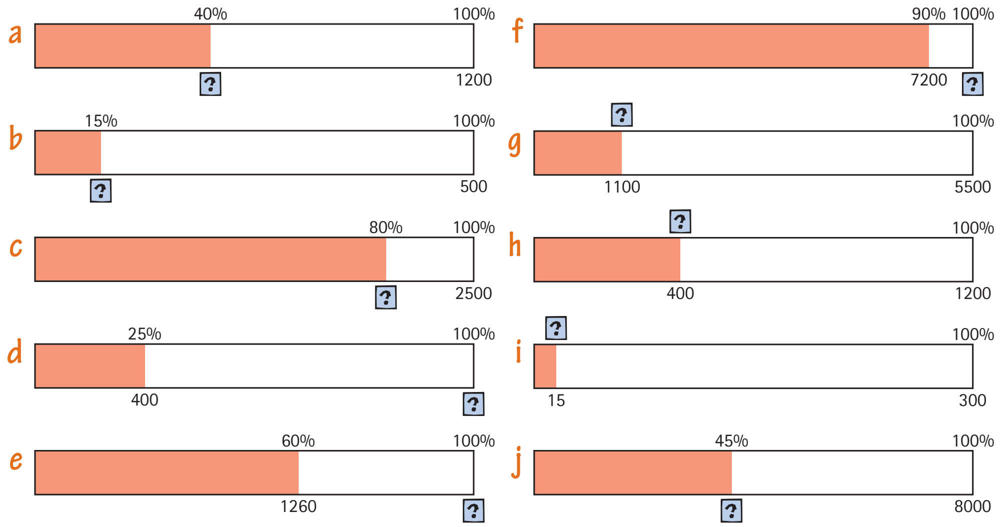
a 0,25	**b** $\frac{99}{75}$	**c** $\frac{1700}{5000}$	**d** $\frac{1316}{2800}$	**e** $\frac{507}{260}$

9 Brot má skrá sem tugabrot, almenn brot eða prósentur. Nemendur í 8. ÁR ætla að fara í skólaferðalag sem kostar 30 000 kr. á mann. Nemendur nota ýmsar leiðir til fjáröflunar. Raðaðu nemendum í röð eftir því hve stórum hluta upphæðarinnar þeir hafa safnað.

Jón	Salvör	Torfi	Sólveig	Áslaug	Eiríkur
60%	0,8	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$	45%	0,25

Nota má ýmsar leiðir við prósentureikning. Oft er gott að nota prósentureit þegar unnið er með þægilegar tölur eða þegar nóg er að áætla.

10 Finndu óþekktu stærðina.



11 Áætlaðu hve mikið 70% er af þessum upphæðum.

a 3000 kr. b 4961 kr. c 7932 kr. d 8234 kr.

12 a Áætlaðu hve mörg % 1521 kr. er af 4500 kr.

b En 15 kr. af 1493 kr.

c En 130 kr. af 510 kr.

d En 401 kr. af 1194 kr.

e En 310 kr. af 1550 kr.

f En 412 kr. af 1620 kr.

g En 53 kr. af 2515 kr.

Þegar finna á prósentur af heild er oft gott að finna fyrst hve mikið eitt prósent er með því að deila með hundrað. Síðan má margfalda niðurstöðuna með fjölda prósenta.

13 Hve mikið eru 12% af

a 7500 c 1200 e 2500

b 12 940 d 7800 f 650

14 Hve mikið eru 72% af

a 7500 c 1200 e 2500

b 12 940 d 7800 f 720

15 a Hvort er meira 50% af 40 eða 40% af 50?

b En 120% af 10 eða 10% af 120?

c Prófaðu fleiri svona dæmi. Heldur þú að niðurstaðan verði alltaf sú sama?

16 Skráðu sem tugabrot

a 63% b 39% c 2% d 124% e 102%

17 Breyttu í tugabrot og finndu

a 63% af 1200
b 39% af 4000
c 2% af 13 724
d 7% af 530
e 124% af 300
f 102% af 1000

18 Af hverju má segja að það komi í sama stað niður að finna 75% af 500 og að finna 0,75 af 500?

19 Á flestum vasareiknum er takki með % merki á. Skoðaðu hvernig nota má % takka til að finna t.d. 75% af 500.

a 45% af 300
b 62% af 1270
c 89% af 254
d 5% af 12395
e 17% af 24
f 105% af 678

20 Útskýrðu af hverju $800 \cdot \frac{4}{5}$, $800 \cdot 0{,}8$ og $800 \cdot 80\%$ gefur sömu niðurstöðu.

21 Nú hefur þú prófað fjórar leiðir til að finna prósentu af heild. Skoðaðu þessar leiðir. Hvaða leiðir finnst þér þægilegar? Er einhver leiðanna sem þér finnst flókin? Ræddu skoðun þína við bekkjarfélaga.

22 Um aldamótin voru jarðarbúar um það bil 6 milljarðar. Reiknað er með að árið 2050 hafi þeim fjölgað um 50%.

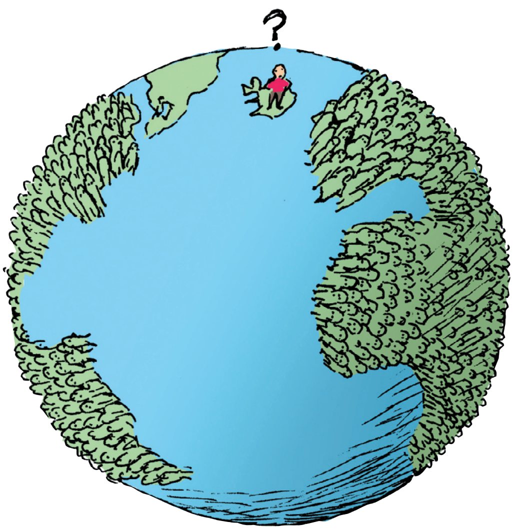
a Hve margir verða jarðarbúar þá?

b Með hvaða tölu gætir þú margfaldað 6 milljarða og fengið út svarið við a-lið?

c Hve margir verða jarðarbúar þegar þeim hefur fjölgað um 75% frá aldamótum?

d Með hvaða tölu gætir þú margfaldað til að fá þá tölu?

e Hvaða samband er milli fjölda prósenta sem maður bætir við heildina og þeirrar tölu sem maður margfaldar heildina með til að finna niðurstöðu?



Í prósentureikningi er notuð prósentujafna. Hún er notuð til að sýna samband milli prósentu, heildar og hluta.
Prósentujafnan er **heild · prósenta = hluti.**

Miðað er við að heildin sé 100%.
Hlutinn getur verið bæði meiri eða minni en heildin (100%) og prósentan líka.

Í prósentudæmum eru yfirleitt tvær breytur þekktar og er leitað að þeirri þriðju.

A Jón á 2800 krónur. Hann ætlar að gefa Sigmundi 60% af peningaeign sinni. Hve stór upphæð er það?

B Jón átti tiltekna upphæð. Hann gaf Sigmundi 1680 krónur og voru það 60% af peningaeign hans. Hve háa upphæð átti Jón?

C Jón átti 2800 krónur og gaf Sigmundi 1680 krónur. Hve mörg prósent af peningaeign Jóns voru það?

23 Skoðaðu skýringardæmin. Skráðu hjá þér hvaða breytur eru þekktar og hver er óþekkt í hverju dæmi.

24 a Búðu til dæmi þar sem hlutinn er óþekktur.

b Breyttu dæminu þínu þannig að heildin verði óþekkt.

c Breyttu dæminu þínu aftur þannig að prósentan verði óþekkt.

25 Lilja á 94 geisladiska. 35 diskanna eru forrit og tölvuleikir. Hve mörg prósent eru það af geisladiskaeign hennar?

26 Þorlákur á 45 diska með djass-tónlist og eru það um það bil 27% af geisladiskaeign hans. Hve marga diska á hann?

27 Kristjana á 105 geisladiska og á um það bil 41% þeirra er hennar eigin tónlist. Hve margir diskar eru það?

28 a 80% af vegalengd er 500 km. Hve löng er öll leiðin?

b 64% af vegalengd er 300 km. Hve löng er öll leiðin?

c 15% af vegalengd er 850 km. Hve löng er öll leiðin?

29 Í þessu dæmi áttu að skoða hvernig finna má prósentur á mismunandi hátt út frá tölunum 15 og 20.

Hve mörg prósent eru?

a 15 af 20

b 20 af 15

c $\boxed{20 - 15}$ af 15

d 15 af $\boxed{20 - 15}$

e $\boxed{20 - 15}$ af 20

f 20 af $\boxed{20 - 15}$

g $\boxed{20 + 15}$ af 15

h 15 af $\boxed{20 + 15}$

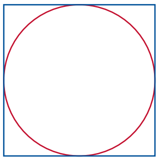
i $\boxed{20 + 15}$ af 20

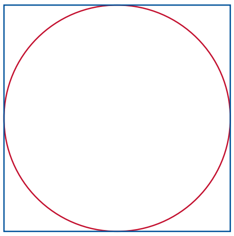
j 20 af $\boxed{20 + 15}$

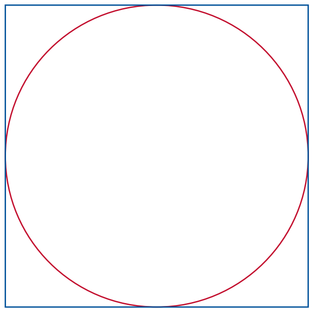
k $\boxed{20 - 15}$ af $\boxed{20 + 15}$

l $\boxed{20 + 15}$ af $\boxed{20 - 15}$

30 Hve mörg prósent eru flatarmál hringsins af flatarmáli umritaða ferningsins?

a 

b 

c 

d Er prósentan alltaf sú sama?

31 a Hve mikið eru 100% ef 112% eru 560?

b Hve mikið eru 100% ef 120% eru 720?

c Hve mikið eru 100% ef 115% eru 1035?

32 Hve mikið eru 100% ef

a 120% eru 600

b 80% eru 400

c 150% eru 750

d 170% eru 850

e 240% eru 1200

f 320% eru 1600

33 Skráðu prósenturnar sem tugabrot og almenn brot.

a 135% b 105% c 279% d 22% e 175% f 91%

Fartölva
179 900 kr.

Borðtölva
149 900 kr.

Prentari
14 900 kr.

Skanni
6990 kr.

Hátalarar
9990 kr.

Mús
5990 kr.

Box með
10 geisladiskum
990 kr.

Bakpoki
fyrir ferðatölvu
7990 kr.

Spilari A
31 990 kr.

Heyrnartól A
8990 kr.

Geisladiskapennar
4 stk.
690 kr.

Geisladiskataska
fyrir 200 geisladiska
2490 kr.

Spilari B
16 990 kr.

Heyrnartól B
1690 kr.

34 **a** Gengi krónunnar hefur veikst undanfarið og því hækkar verð á öllum vörum um 4%. Skráðu nýja verðið.

b Verslunin á 12 ára afmæli. Eigandi verslunarinnar hefur af því tilefni ákveðið að gefa 12% staðgreiðsluafslátt af nýja verðinu á afmælisdaginn. Skráðu verðið þann dag.

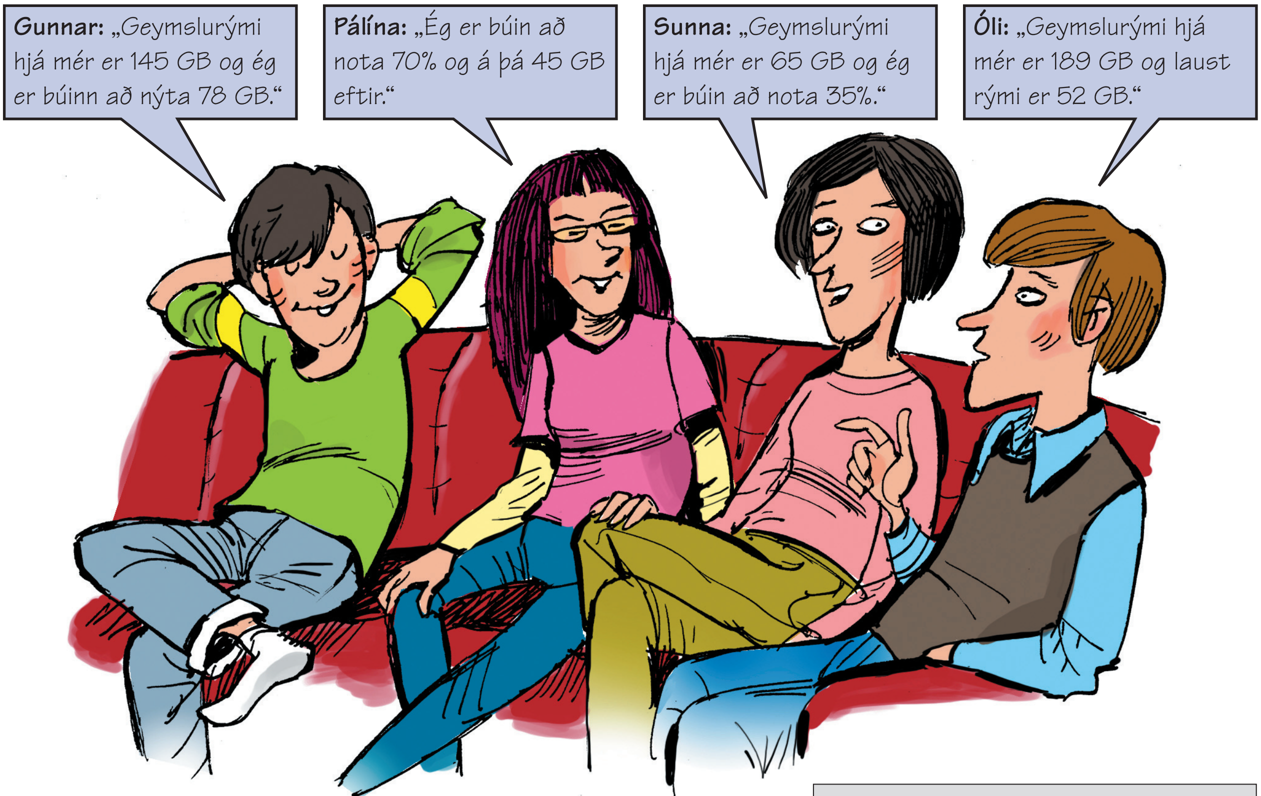
35 Með hvaða tölu getur þú margfaldað heildina ef verð á að hækka um:

a 25% **b** 3% **c** 100% **d** 45% **e** 8%

36 Með hvaða tölu getur þú margfaldað heildina ef verð á að lækka um:

a 25% **b** 3% **c** 100% **d** 45% **e** 8%

37 Óli, Gunnar, Pálína og Sunna hafa mikinn áhuga á tölvum. Þau eignuðust öll tölvu í fyrra og hafa öll sótt töluvert af efni á Netið. Þau skoða hvernig staðan er á harða diskinum sínum.



1 GB = 1000 MB = 1000 000 KB

a Hvert þeirra hefur mest laust rými?

b Hvert þeirra hefur stærsta harða diskinn?

c Hve mörg prósent geymslurýmis á hvert þeirra eftir á harða diski sínum?

d 12% af því sem Óli hefur á harða diskinum sínum er tónlist. Hve mörg GB eru það?

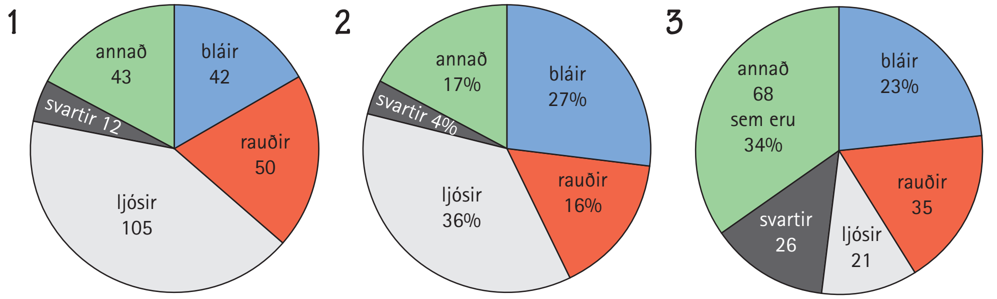
e Gunnar er mikið fyrir tónlist og er með 40 GB af tónlist á sinni tölvu. Hve mörg prósent af geymslurými tölvunnar eru það?

f Pálína er með stórt myndasafn á sinni tölvu. Það tekur u.þ.b. 60% af geymslurými hjá henni. Hve mörg GB er myndasafnið hennar?

g Sunna er með nokkra tölvuleiki í sinni tölvu. Þeir eru samtals 15 GB. Hve stór hluti er það af notuðu geymslurými hjá henni?

h Krakkarnir kaupa sér öll nýjan harðan disk með 189 GB geymslurými. Reiknaðu út hve mörg GB hvert þeirra hefði þá af lausu geymslurými og hve mörg prósent það væru af heildargeymslurými í hverri tölvu.

38 Nemendur í 8. bekk í Happaskóla gerðu könnun á litum bíla. Þeir skiptu sér í þrjá hópa og könnuðu liti bíla sem fóru um þrenn gatnamót. Hver hópur skráði fjölda bíla og lit þeirra frá kl. 8:30–9:00 á þriðjudagsmorgni.



a Skoðaðu skífurit **1**. Finndu hve mörg prósent eru af hverjum lit.

b Skoðaðu skífurit **2**. Skráðir voru 400 bílar. Finndu hve margir bílar voru af hverjum lit.

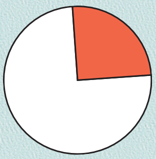
c Skoðaðu skífurit **3**. Finndu hve margir bílar óku um gatnamótin og hve mörg prósent voru af hverjum lit.

d Berðu niðurstöður hópanna saman. Hvað er líkt og hvað er ólíkt?

e Telur þú að niðurstaða yrði svipuð ef skoðaðir væru bílar í þínu byggðarlagi?

Oft eru skífurit gerð í tölvu en einnig má teikna þau með hjálp hringfara og gráðuboga. Skífurit sýna hvernig heild skiptist og því þarf að finna stærð hvers hluta í prósentum. Prósenturnar eru síðan notaðar til að finna skiptinguna í gráðum.

Dæmi:
Hringur er 360° og sýna á 25% á skífuriti.
25% af 360° eru 90°.



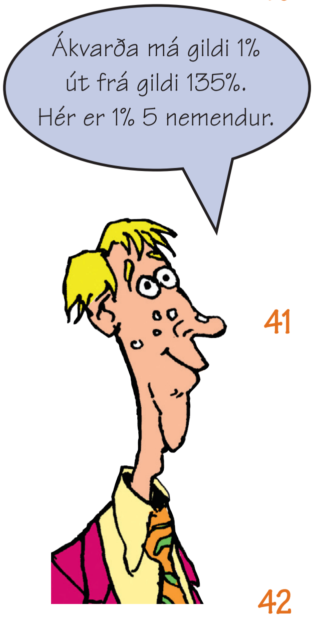
39 Æfðu þig að búa til skífurit með því að nota hringfara og gráðuboga.

a Á rokktónleikum voru 40% áheyrenda á aldrinum 16–20 ára, 50% voru á aldrinum 21–29 ára, 10% áheyrenda voru eldri.

b Á íþróttaleik voru 25% áhorfenda undir 20 ára, 60% á aldrinum 20–40 ára og afgangurinn var eldri.

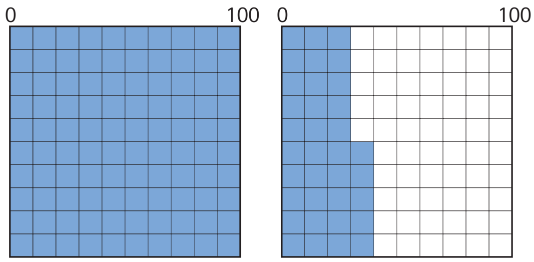
c Í tölvuskóla eru 45% nemenda yfir 20 ára, 250 nemenda eru 15–20 ára og 20% nemenda eru undir 15 ára aldri.

Gott getur verið að nota hundrað rúðu net til að átta sig á hvaða upplýsingar eru gefnar í prósentudæmum.

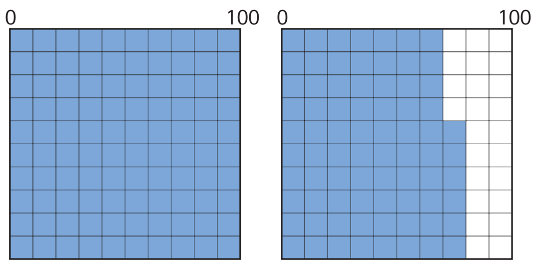


40 Nemendafjöldi í skóla nokkrum verður næsta ár 135% af nemendafjöldanum á síðasta ári. Á næsta ári verða 675 nemendur í skólanum.

Hve margir nemendur voru í skólanum á síðasta ári?



41 Hagnaður í rekstri prentsmiðju á síðasta ári var 3 290 000 kr. Nú virðist allt stefna í að hagnaðurinn aukist um 76%. Hvað má áætla að hagnaðurinn verði mikill á þessu ári?



42 Rekstur vélaverkstæðis hefur gengið brösuglega á síðustu árum. Heldur virðist vera að birta til í rekstrinum. Á síðasta ári var hallinn af rekstrinum 290 000 krónur en miðað við spár eru það 145% af halla yfirstandandi árs. Hvað er reiknað með að hallinn verði í ár?

43 Á undanförnum árum hefur verið tap á rekstri saumastofunnar. Á síðasta ári var tapið 780 000 krónur og nú er því spáð að það verði 76% af tapi síðasta árs. Hvert er áætlað tap í ár?

44 145% af upphæð eru 78 300 kr.
Hve há upphæð er:

a 100% b 75% c 32% d 112%

45 53% af upphæð eru 32 560 kr.
Hve há upphæð er:

a 25% b 69% c 135% d 194%

46 167% af upphæð eru 3210 kr.
Hve há upphæð er:

a 125% b 83% c 190% d 102%

Prósentureikningur er algengur meðal annars þegar verið er að finna afslætti, reikna vöruverð, reikna út hlutfallslega skiptingu og bera saman stærðir. Við lausn prósentudæma er galdurinn fólginn í að greina samband milli uppgefinna stærða og nýta sér það til að finna það sem leitað er að.

Prósentujafnan **heild · prósenta = hluti** er skráning á sambandi milli heildar, hluta og prósentu. Hún er mikið notuð við prósentureikning. Í prósentudæmum er gefin vitneskja um tvær stærðir í jöfnunni sem nýta má til að finna þá þriðju.

Í dæmunum hér fyrir neðan áttu að greina hvaða upplýsingar eru gefnar í hverju dæmi og finna þá stærð sem er óþekkt þannig að þú þekkir heild, hluta og prósentu í hverju tilviki.

47 Magnea vinnur í kvikmyndahúsi. Hún skráir hjá sér sætanýtingu á þremur sýningum.

Skráðu heild, hluta hvers salar sem var nýttur og prósentuhlutfall í hverjum sal.

Salur	Heild	Prósenta	Hluti
A	500		345
B	200	75%	
C		50%	234

48 Freyja forstjóri tilkynnir að miðaverð þurfi að hækka úr 800 í 1100. Það þykir Magneu frekar mikið og veltir fyrir sér hve mörg prósent nýja miðaverðið sé miðað við það gamla. Hvert er samband í prósentum milli nýja verðsins og gamla verðsins? Hve mikil er hækkunin í prósentum?

49 Aðsóknin minnkar mikið eftir hækkunina. Magnea skráir aftur sætanýtingu.

Skráðu heild, hluta hvers salar sem var nýttur og prósentuhlutfall í hverjum sal.

Salur	Heild	Prósenta	Hluti
A			195
B		27%	
C			210

50 Freyja ákveður að lækka verðið um 30%. Magneu finnst það óþarflega mikið. Hvert verður nýja miðaverðið? Hve mörg prósent eru það af upphaflega verðinu?

51 Um hve mörg prósent hækkaði miðaverðið? Um hve mörg prósent lækkaði miðaverðið? Útskýrðu hvers vegna miðaverðið er lægra eftir lækkunina en það var fyrir hækkunina.

52 Freyja ákveður að setja af stað auglýsingaherferð. Hún fær auglýsingastofuna *Allir til mín* til að annast hönnun og dreifingu auglýsinganna. Hjalti sér um að ganga frá tilboði fyrir hönd auglýsingastofunnar. Notaðu fyrirliggjandi upplýsingar og settu tilboð hans fram.

Hönnun	25 000	Birting:	
Þjónustulaun 5%		Dagblöð	35 000
		Ljósvakamiðlar	34 200
		Flutningar 7%	
Staðgreiðsluafsláttur 8%			
Virðisaukaskattur 24,5%			

53 Freyja ákveður að taka tilboðinu. Hún biður Magneu að skrá sætanýtingu helgina áður en auglýsingarnar birtast og næstu helgi eftir að þær birtast.

Dagur	Salur A 500 sæti	Salur B 200 sæti	Salur C 468 sæti
Föstudagur	302	124	289
Laugardagur	202	101	142
Sunnudagur	201	99	231

Dagur	A	B	C
Föstudagur	356	95	305
Laugardagur	345	174	67
Sunnudagur	200	149	299

Skrifaðu ásamt félaga þínum skýrslu þar sem þið gerið grein fyrir því hvort þið teljið líklegt að auglýsingaherferðin muni borga sig. Látið koma fram helstu tölulegar upplýsingar og berið saman sætanýtingu í prósentum.

Þrautir

EINN KRANI EÐA TVEIR?

Í fiskvinnslu Jóhannesar er stórt ker sem notað er til að þvo fisk í. Kerið má fylla á 6 tímum ef skrúfað er frá litla krananum. Ef það er hins vegar skrúfað frá stóra krananum tekur aðeins 3 tíma að fylla kerið. Hve langan tíma tekur að fylla kerið ef skrúfað er frá báðum krönum samtímis?

PENINGAFLUTNINGAR

Hér eru átta peningar lagðir þannig að fyrst eru fjórar krónur í röð og síðan koma fjórir fimmtíukallar í röð. Þú átt nú, með því að flytja tvo peninga í einu, að fá peningana til að liggja til skiptis. Það má ekki færa einn pening í einu. Það má ekki ýta peningunum og búa til pláss á milli þeirra. Peningarnir sem fluttir eru geta verið tveir eins eða hvor af sinni gerðinni.

Málið snýst um að flytja peningana með eins fáum flutningum og mögulegt er. Þetta er framkvæmanlegt með aðeins fjórum flutningum.

AÐ KOMAST YFIR ÁNA

Þrenn hjón voru í gönguferð, þau Anna og Arnar, Birna og Birgir og Davíð og Dagný. Ferðin hafði gengið vel nema að það ástand hafði skapast að karlmennirnir voru orðnir mjög afbrýðisamir og vildu alls ekki að eiginkonur þeirra væru einar með einhverjum af hinum karlmönnunum.

Á síðasta degi komu þau að á sem þurfti að fara yfir. Þar var ekki brú en þar var bátur sem þau gátu notað. Því miður gat báturinn aðeins borið tvær manneskjur í einu og vegna afbrýðisemi karlmannanna mátti engin kvennanna vera með öðrum karlmanni án þess að eiginmaður hennar væri viðstaddur. Það átti við í bátnum, á árbakkanum og þegar bátnum var lagt að. Það þýddi að karlmaður gat ekki flutt eiginkonu sína yfir ána ef fyrir voru konur án eiginmanna sinna.

Aðeins þrír úr hópnum gátu róið, þau Arnar, Birgir og Dagný.

Búðu til ferðaáætlun fyrir hópinn þannig að hægt sé að flytja þessar sex manneskjur yfir ána án vandræða og í eins fáum ferðum og mögulegt er.

Hve margar ferðir þarf að fara?

Tölur

Fólk hefur mismunandi viðhorf til stærðfræði og það hefur áhrif á hvernig því finnst að glíma við stærðfræði. Hans Magnus Enzensberger hefur skrifað bók sem heitir ***Talnapúkinn****. Hún segir frá draumum 12 ára drengs sem þykir stærðfræðitímar leiðinlegir. Hann hittir talnapúka 12 nætur í röð og þeir bralla heilmikið saman í stærðfræði. Í þessum kafla eru verkefni sem sprottin eru úr sama farvegi og hentar því vel að lesa bókina samhliða því að fást við viðfangsefni kaflans.*

Margir hafa velt fyrir sér óendanleikanum, til dæmis í sambandi við fjölda talna. Með tíu tölustöfum, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 má skrifa óendanlega margar tölur.

1 **a** Svandís heldur því fram að allar heilar tölur megi skrá með því að nota eingöngu tölustafinn 1 og samlagningu. Sýndu með mótdæmi fram á að þetta sé ekki rétt.

b Bergdís segir að allar heilar tölur megi skrá með tölustafnum 1 og reikniaðgerðunum fjórum; samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu. Rökstyddu fullyrðingu Bergdísar. Gefðu nokkur dæmi um tölur.

2 Skráðu fjarlægðina á milli punktanna á talnalínunum.

a 0 4 **c** 1 6 **e** 2 7 **g** −7 −2

b −4 0 **d** 247 367 **f** −3 2 **h** 8 13

Þórdís tekur eftir því að fjarlægðin milli punktanna er alltaf jákvæð tala. Hún veltir fyrir sér hvort fjarlægð milli punkta á talnalínu geti verið neikvæð tala. Getur þú fundið dæmi um það? Rökstyddu svarið.

3 Teiknaðu talnalínu og merktu inn á hana punktinn 1.

a Hvaða punktar hafa fjarlægðina 5 frá þessum punkti?

b Hvaða punktar hafa fjarlægðina 12 frá þessum punkti?

Tölustafirnir í arabískri talnaritun 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 eiga uppruna sinn að rekja til Indlands. Þeir bárust til Evrópu í gegnum Araba fyrir um 1000 árum. Rómverjar höfðu þróað talnaritun sem almennt var notuð og árum saman deildu Evrópubúar um hvort væri heppilegra að nota arabíska talnaritun eða rómverska. Helstu tákn í rómverskri talnaritun eru:

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

Við skráningu á fjölda eru táknin síðan sett saman og skiptir þá röð þeirra miklu máli. Tákn sem standa hlið við hlið eru ýmist lögð saman eða dregið er frá. Ef lægra tákn stendur fyrir framan hærra tákn er dregið frá, annars lagt saman.

VI = 6

IV = 4

4 Skráðu með arabískri talnaritun.

a XXXIV b MCMLI c MDCCLXXXIX d CMLXXIX

5 Skráðu með rómverskri talnaritun.

a 2005 b 1447 c 99 d 234

6 a Nefndu dæmi um tölu sem hefur færri tákn í rómverskri talnaritun en í arabískri talnaritun.

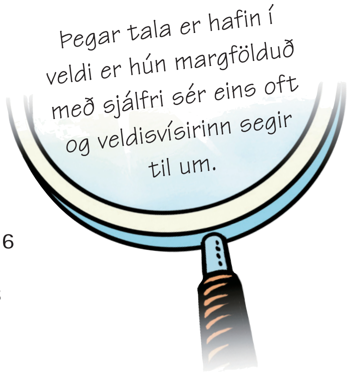
b Nefndu dæmi um tölu sem hefur færri tákn með arabískum tölustöfum en rómverskum.

7 Berðu saman útkomur og reikniaðgerðir í dæmunum hér fyrir neðan.

a $2 + 2 + 2 + 2 + 2$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b 6^3
3^6

c $63 - 7$
$63 : 7$



8 Skráðu dæmin og settu rétt merki. < = >

a $5^2 \square 5 \cdot 2$ c $49^2 \square 7^4$ e $25^4 \square 5^8$ g $17^2 \square 5^6$

b $8^3 \square 3 \cdot 8$ d $14^5 \square 22^5$ f $4^2 \square 2^4$ h $9^3 \square 6^3$

9 Hve oft þarftu að margfalda 2 með sjálfum sér til að fá fjögurra stafa tölu? En 5? En 8?

10 a Breytir það stærð að leggja núll við hana eða draga það frá?

b Er hægt að margfalda með núlli? Gefðu nokkur dæmi.

Ekki er hægt að deila með núlli. Ef litið er á deilingu sem endurtekinn frádrátt má sjá að það er alveg sama hve oft núll er dregið frá, deilistofninn breytist ekki. Ef litið er á deilingu sem skiptingu má sjá að ekki er hægt að skipta í núll staði. Núll er eina talan sem ekki er hægt að deila með. Ef hins vegar er deilt í núll verður útkoman alltaf núll vegna þess að það er sama í hve marga hluta engu er skipt, alltaf verður ekkert í hvern hlut.

11 Deildu í töluna 2540 með heilu tölunum á talnabilinu 6 til –6. Hvaða mynstur kemur fram í svörunum?

12 Deildu í töluna 275 með heilu tölunum á talnabilinu 4 til – 4. Færðu sambærilegt mynstur í svörunum og í dæmi 11?

13 Lýstu því hvernig þú ferð að við að finna út hvort tala er frumtala eða samsett tala.

14 Er talan frumtala?

a 65 **c** 91 **e** 169
b 267 **d** 111 **f** 741 **g** 441

15 a Frumþáttaðu töluna 30.

b Hve marga frumþætti hefur hún?

c Hvað getur þú fundið margar tölur sem ganga upp í 30? Getur þú notað frumþættina til að ganga úr skugga um að þú hafir fundið þær allar?

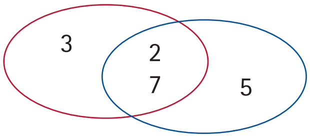
Frumtölur eru allar þær tölur sem hafa einungis tvo þætti. Það má líka segja að frumtölur séu þær tölur sem engin tala gengur upp í nema talan sjálf og einn. Sumum finnst skýrara að tala um tvo þætti til að skýrt komi fram að talan 1 er ekki frumtala þar sem hún hefur aðeins einn þátt.

16 Hvaða heilar tölur ganga upp í tölurnar?

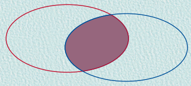
a 12 **b** 154 **c** 195 **d** 175 **e** 54

17 Frumþáttaðu tölurnar 24 og 18.

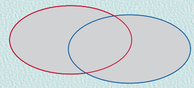
18 Skrá má frumþætti talna með mengjamynd.



Sagt er að þær tölur sem eru bæði í rauða og bláa menginu séu í sniðmengi rauða og bláa mengisins. Allar þær tölur sem koma fyrir í bláa eða í rauða menginu eru í sammengi þeirra.



Sniðmengi



Sammengi

a Frumþættir hvaða tölu eru í rauða menginu?

b Frumþættir hvaða tölu eru í bláa menginu?

c Hvað þættir eru bæði í bláa menginu og rauða menginu?

d Tölurnar sem eru í sniðmenginu ganga upp í báðar tölurnar í a- og b-lið. Notaðu þær til að finna hæstu tölu sem gengur upp í báðar tölurnar.

e Í sammenginu eru þættirnir 2, 3, 5 og 7. Frumþættir hvaða tölu eru þeir? Hvernig tengist sú tala tölunni í bláa menginu? En tölunni í rauða menginu?

19 a Skráðu frumþætti talnanna 24 og 18 í mengjamynd.

b Hvaða frumþættir eru í sniðmenginu? Finndu **hæstu** tölu sem gengur upp í báðar tölurnar.

c Hvaða frumþættir eru í sammenginu? Frumþættir hvaða tölu eru það? Hvernig tengist sú tala 24 og 18?

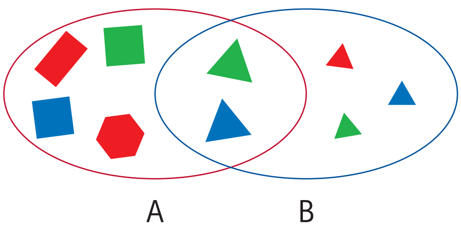
20 a Frumþáttaðu tölurnar 150 og 210. Skráðu frumþættina í mengjamynd.

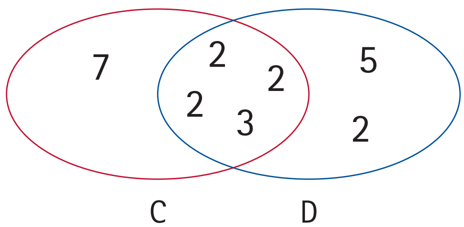
b Hvaða frumþættir eru í sniðmenginu? Finndu **hæstu** tölu sem gengur upp í báðar tölurnar.

c Hvaða frumþættir eru í sammenginu? Frumþættir hvaða tölu eru það? Hvernig tengist sú tala 150 og 210?

Sérhver hlutur, tala eða hugtak sem tilheyrir tilteknu mengi kallast stak í menginu.

21 Hvað einkennir stökin í mengi A? En stökin í mengjum B, C, og D?





Fjöldi talna er óendanlegur. Það er sama hversu há eða lág tala er, það er alltaf hægt að finna tölu sem er einum hærri eða einum lægri. Ef skoðað er bilið á milli tveggja heilla talna má skrá sífellt fleiri tölur með því að bæta við aukastöfum.

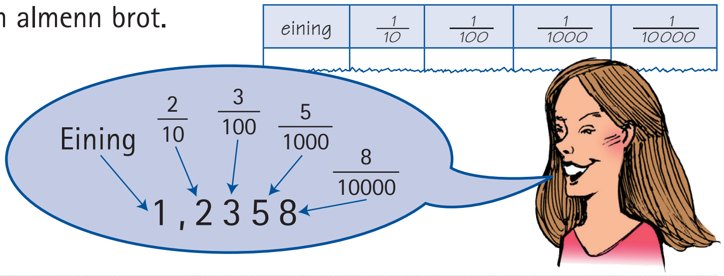
22 Skráðu tugabrotin sem almenn brot.

a 1,2

b 1,23

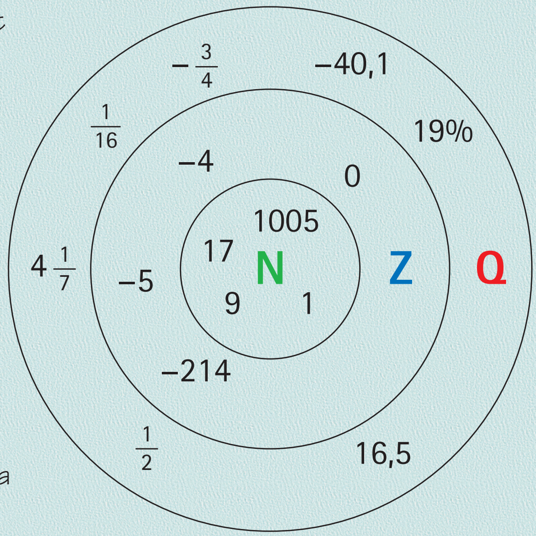
c 1,235

d 1,2358



Tölur eru skráðar á mismunandi formi og má flokka þær í talnamengi.

- Heilar jákvæðar tölur sem talið er með kallast náttúrlegar tölur.
- Mengi þeirra er táknað með N.
- Mengi heilla jákvæðra og neikvæðra talna ásamt núlli er kallað heilar tölur. Mengið er táknað með Z.
- Allar tölur sem skrá má sem almennt brot kallast ræðar tölur. Mengi þeirra er táknað með Q.
- Náttúrlegar tölur eru hlutmengi í mengi heilla talna. Heilar tölur eru hlutmengi í mengi ræðra talna.



23 a Teiknaðu mynd af talnamengjunum og skráðu nokkrar tölur sem eru sérstakar fyrir hvert mengi.

b Skráðu tölurnar inn í mynd þína af talnamengjum.

2	5	$\frac{3}{5}$	$-2,3$	$\frac{7}{9}$
259	4,35	$-5,4$	$\frac{2}{9}$	-24

$\pi = 3,14159265 \ldots$

Til eru tugabrotstölur sem ekki er hægt að skrá sem almenn brot og tölur sem ekki er hægt að skrá nákvæmlega. Dæmi um slíkar tölur er π. Þær falla utan mengisins Q.

Sum almenn brot hafa óendanlegan fjölda aukastafa ef þeim er breytt í tugabrot, t.d. $\frac{1}{3}$. Þá koma fram óendanleg tugabrot.

24 Breyttu í tugabrot.

a $\frac{2}{3}$ b $\frac{5}{6}$ c $\frac{2}{8}$ d $\frac{14}{42}$ e $\frac{7}{18}$ f $\frac{5}{12}$ g $\frac{9}{13}$ h $\frac{39}{52}$

25 a Hver almennu brotanna í dæmi 24 er hægt að skrá sem endanleg tugabrot?

b Skoðaðu almennu brotin sem ekki er hægt að skrá sem endanleg tugabrot og leitaðu að mynstrum í röðun tölustafanna.

Ef finna má endurtekin mynstur í röð aukastafa eru tugabrot sögð vera lotubundin tugabrot.

Lotubundin tugabrot
0,369369369 … 0,17171717 …

26 Breyttu almennu brotunum í tugabrot og skráðu lotu í lotubundnum tugabrotum.

a $\frac{1}{11}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{7}{11}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{10}{11}$ $\frac{11}{11}$

b $\frac{1}{12}$ c $\frac{34}{99}$ d $\frac{7}{9}$ e $\frac{56}{202}$ f $\frac{15}{111}$ g $\frac{13}{37}$

27 Skoðaðu aukastafina sem fram komu þegar þú breyttir elleftu hlutum í tugabrot. Hvað einkennir tölurnar í lotunum sem fram koma?

28 Skráðu tölurnar sem almenn brot og bættu við fjórum liðum.

a 0,33333 …, 0,6666 …, 1,0

b 0,125, 0,25, 0,375, 0,5

c 0,1111 …, 0,2222 …, 0,3333 …, 0,444 …

29 Breyttu tugabrotunum í almenn brot.

a 0,64 b 0,375 c 1, 45 d 7,04 e 37,037 f 0,0034

30 Breyttu almennu brotunum í tugabrot.

a $1\frac{2}{10}$ b $\frac{19}{4}$ c $358\frac{7}{8}$ d $\frac{22}{3}$ e $\frac{1123}{1000}$ f $\frac{22}{1000}$

31 **a** Finndu tíu fyrstu þríhyrningstölurnar.

b Lýstu mynstri þríhyrningstalna. Hver er reglan?

c Hvaða tala er tuttugasta þríhyrningstalan? En sú fimmtugasta?

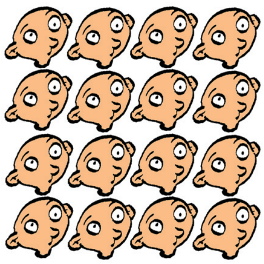
Þríhyrningstölur eru þær tölur sem raða má í jafnhliða þríhyrning.

32 **a** Finndu tíu fyrstu ferningstölurnar.

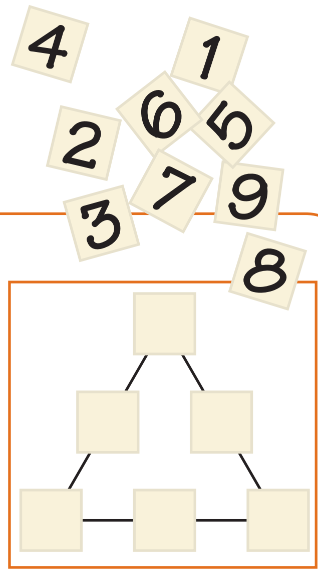
b Lýstu mynstri ferningstalna. Hver er reglan?

c Hvaða tala er tuttugasta ferningstalan? En sú fimmtugasta?

Ferningstölur eru þær tölur sem raða má í ferning.



HÓPVERKEFNI



33 Skoðið möguleikana á að búa til töfraþríhyrning. Gott er að hafa tölustafina 1 til 9 á spjöldum. Teiknið þríhyrning þannig að spjöldin passi.

Notið eingöngu tölurnar 1 til 6 og leggið þær þannig að sama summa myndist á hverri hlið þríhyrningsins.

- Hve marga möguleika getið þið fundið?
- Hvaða summur er mögulegt að mynda?

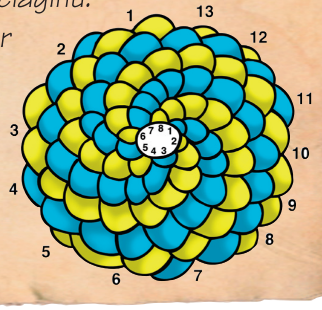
Gerið sams konar rannsókn fyrir tölurnar frá 2 til 7. Er líklegt að þið fáið sambærilegar niðurstöður ef tölurnar frá 3 til 8 eru notaðar? Sannreynið ágiskun ykkar.

Svarið spurningunum fyrir tölurnar 1 til 6, 2 til 7 og 3 til 8.

- Hver er minnsta mögulega summa? Rökstyðjið svarið.
- Hver er stærsta mögulega summa? Rökstyðjið svarið.
- Hvað gerist ef summa talnanna í hornunum er slétt tala?
- Hvað gerist ef summa talnanna í hornunum er oddatala?
- Koma fram svipuð mynstur sama hvaða tölur eru notaðar?

Reynið að skrá reglur fyrir því hvernig fá má fram minnstu og stærstu summu.

Stór þáttur í iðkun stærðfræði er að leita að reglum og mynstrum. Stærðfræðingurinn Leonardo frá Pisa (betur þekktur sem Fibonacci eða sonur Bonacci) greindi að ákveðnar tölur komu endurtekið fyrir í náttúrunni og samfélaginu. Gott dæmi um það er fjöldi vefja í hvora átt á köngli. Þar eru 8 vefjur til hægri og 13 til vinstri. Á ananas má greina sambærilegar vefjur en þar eru þær 13 í aðra áttina en 21 í hina. Á sólblómi má greina 21 vefju í aðra áttina en 34 í hina. Fibonacci áttaði sig á samhengi milli þessara talna og að skrá mætti þær sem talnarunu.



Talnaruna Fibonacci: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

34 Hver er reglan? Finndu tíu næstu Fibonacci-tölurnar.

35 a Hve margar Fibonacci-tölur eru milli 100 og 200?

b Hve margar Fibonacci-tölur eru milli 1000 og 2000?

c Hve margar Fibonacci-tölur eru milli 2000 og 3000?

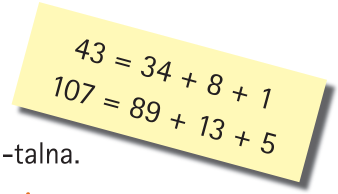
d Hve margar Fibonacci-tölur eru milli 3000 og 4000?

e Hvernig má útskýra að alltaf verður lengra á milli talnanna í rununni?

36 Á myndinni sérðu býflugu við enda á búi sínu. Flugan getur komist inn, annað hvort í hólf 1 eða 2 og hún getur aðeins farið til hægri (þ.e. alltaf í hærra númer).

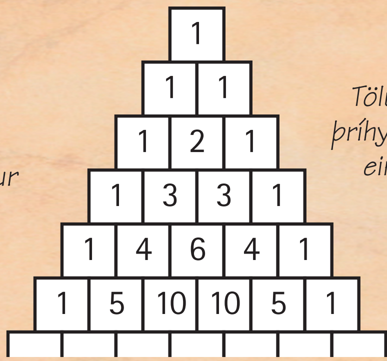
Það er aðeins ein leið í hólf 1. Í hólf 3 eru þrjár leiðir, þ.e. 123, 13 eða 23. Skráðu hve margar leiðir eru í hólf 1 til 10.

37 Allar náttúrlegar tölur má skrá sem summur Fibonacci-talna. Skráðu tölurnar sem summu Fibonacci-talna.



a 52 **b** 143 **c** 88 **d** 2000 **e** 1289 **f** 1750

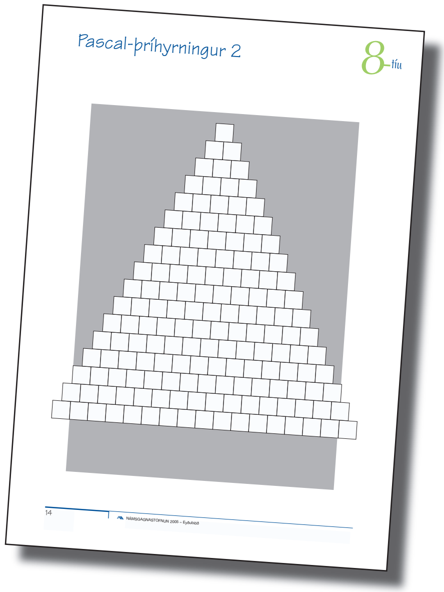
Á sautjándu öld setti stærðfræðingurinn Pascal fram talnamynstur sem raðað hefur verið upp í þríhyrning og kallað Pascal-þríhyrningurinn. Þetta talnamynstur varð uppspretta margra stærðfræðilegra athugana í Evrópu. Áður höfðu bæði Kínverjar og Arabar sett þetta sama talnamynstur fram.



Tölunum er raðað þannig í þríhyrning að byrjað er með einn á toppnum og síðan eru lagðar saman þær tölur sem standa vinstra og hægra megin fyrir ofan hvern reit.

38 a Búðu til Pascal-þríhyrning.
Hafðu að minnsta kosti fimmtán raðir.

b Litaðu allar sléttar tölur.



39 a Finndu summu í hverri röð Pascal-þríhyrningsins þíns.
Skráðu niðurstöður í töflu.

númer raðar	*summa*
1	1
2	2
3	4
4	8

b Hvaða regla kemur fram í summum raðanna?

c Er hægt að skrá allar summurnar sem veldi af tveimur?

d Merktu við raðirnar þar sem frumtala er önnur talan í röðinni (á eftir einum). Því er haldið fram að ef frumtala er í einhverri röð Pascal-þríhyrningsins séu allar tölurnar í röðinni, fyrir utan einn, margfeldi af þeirri frumtölu. Athugaðu hvort þetta stenst.

40 Margs konar mynstur má finna í Pascal-þríhyrningi.

a Litaðu allar tölur sem fimm ganga upp í.

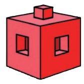
b Finndu fleiri mynstur í Pascal-þríhyrningnum.

HÓPVERKEFNI

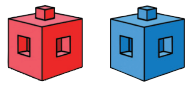
41 Gaman getur verið að velta fyrir sér á hve marga vegu má raða fjögurra manna hljómsveit í einfalda röð á sviði.

Áhugavert er að leita að reglu fyrir fjölda möguleika þannig að einfalt verði að vita hvenær búið er að finna alla möguleika.
Þægilegt er að nota kubba við leitina.

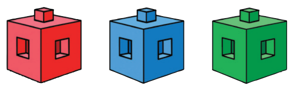
Ef notaður er einn kubbur er aðeins einn möguleiki.



Ef notaðir eru tveir kubbar má setja rauðan – bláan og bláan – rauðan. Þannig að möguleikarnir verða tveir.



- Skráið allar raðir sem búa má til ef notaðir eru þrír kubbar.



- Hve marga möguleika funduð þið?
- Hve margir þeirra eru þannig að rauður kubbur er fremst? En ef grænn kubbur er fremst?
- Skráið allar raðir sem búa má til ef notaðir eru fjórir kubbar. Athugið hvort þið getið nýtt ykkur skráningu ykkar á röðum með þrjá kubba.
- Hve margar raðir funduð þið?
- Hve mörgum sinnum fleiri eru raðir með fjórum kubbum en þremur?
- Leitið að samhengi milli fjölda raða með einum, tveimur, þremur og fjórum kubbum. Hve margar verða raðirnar ef notaðir eru fimm kubbar? Rökstyðjið svar ykkar.
- En ef kubbarnir væru sex?

42 Segðu til um hve mörg spil ég er með á hendi ef raða má:

a spilunum á tvo vegu

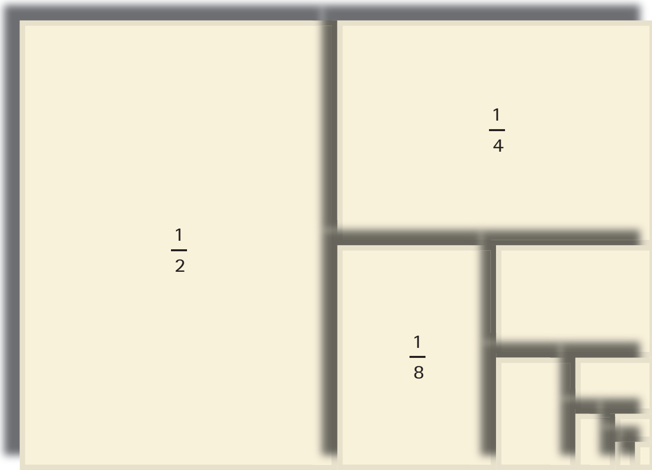
b spilunum á 24 vegu

c spilunum á 120 vegu

d spilunum á 720 vegu

e Skoðaðu dæmin hér á undan. Hve mikið fækkar möguleikum á röðum í hverju tilfelli ef sett er út eitt spil?

43 Einn má skrá sem summu margra ólíkra almennra brota. Ein leið til að skoða hvernig skipta má einum í mörg ólík almenn brot er að taka A4 blað og nota það sem einn heilan. Brjóttu það til helminga og rífðu eftir brotinu. Skráðu $\frac{1}{2}$ á annan helminginn. Taktu hinn helminginn og skiptu honum í tvennt.



A4 blað

Skráðu $\frac{1}{4}$ á annan hlutann og skiptu hinum hlutanum í tvennt. Hvaða almenna brot færðu fram? Haltu áfram á sama hátt þangað til hlutarnir eru orðnir svo litlir að þú getur ekki rifið þá í tvennt. Skráðu bútana þína sem plúsheiti fyrir einn.

44 a Útskýrðu hvers vegna summa almennu brotanna $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ hlýtur að vera minni en 1.

b Útskýrðu hvers vegna svarið við frádráttardæminu hlýtur að vera nálægt núlli.

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

45 Útskýrðu hvers vegna summa almennu brotanna

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ hlýtur að vera meira en 1.

46 Skoðaðu dæmin og finndu þrjú dæmi sem gefa summu sem er hærri en 2. Útskýrðu hvernig þú getur séð að summan er hærri en 2.

$\frac{4}{3} + \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} + \frac{6}{9} + \frac{4}{9}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{7}{9} + \frac{2}{3} + \frac{3}{9}$

$\frac{5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{6}{5} + \frac{2}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

47 Reiknaðu og námundaðu svar þitt að heilli tölu. Útskýrðu svar þitt.

a $5\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$ $\qquad$ **b** $2\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ $\qquad$ **c** $4\frac{3}{5} - \frac{8}{5}$ $\qquad$ **d** $\frac{7}{8} - \frac{1}{9}$

48 a Skráðu þrjú almenn brot sem gefa summuna $\frac{1}{2}$.

b Skráðu tvö almenn brot sem hafa mismuninn $\frac{1}{2}$.

Þegar skoðuð eru hlutföll milli tveggja samliggjandi talna í talnarunu Fibonacci kemur fram að eftir því sem tölurnar verða hærri því nær verður hlutfallið milli samliggjandi talna 1,618.

2:1 = 2	3:2 = 1,5	5:3 = 1,666 …
8:5 = 1,6	13:8 = 1,625	21:13 = 1,615384615 …

49 a Skoðaðu hlutfallið milli tveggja sléttra talna í röð. Finndu hlutföll milli tíu talnapara.

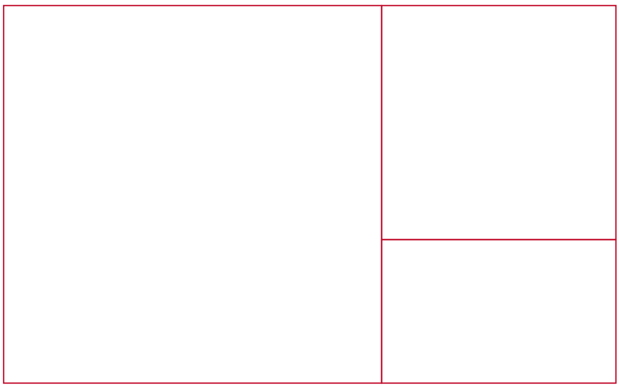
4:2 6:4 8:6 10:8 … … …

Hvaða tölu sýnist þér hlutfallið vera að nálgast?

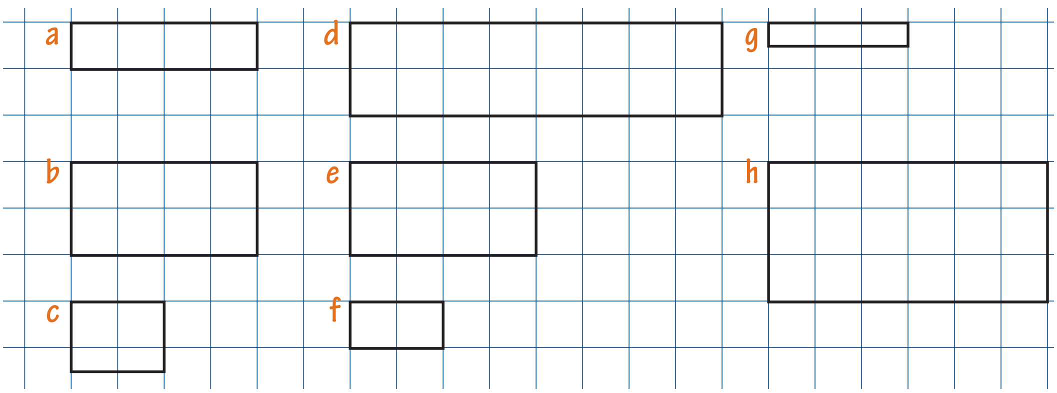
b Skoðaðu hlutfallið milli tveggja oddatalna á sama hátt. Nálgast hlutfallið milli þeirra sömu tölu?

50 Veldu þér fjóra rétthyrninga úr umhverfi þínu. Mældu lengd þeirra og breidd. Finndu hlutfallið milli lengdar og breiddar. Hafa þeir líkt hlutfall? Hvaða hlutfall finnst þér gefa fallegustu rétthyrningana? Berðu skoðun þína saman við skoðanir bekkjarfélaga þinna.

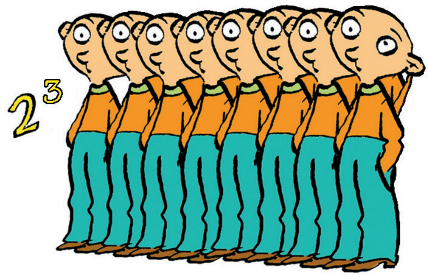
51 Finndu hlutfallið milli lengdar og breiddar allra þeirra rétthyrninga sem finna má á myndinni.

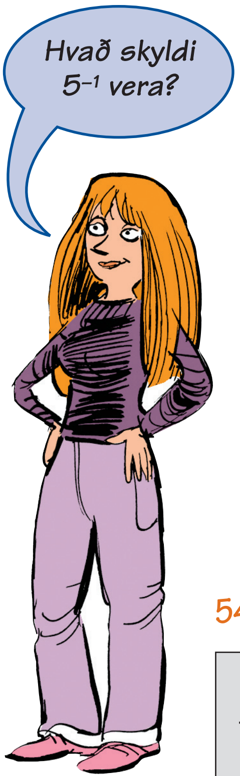


52 Hvaða rétthyrningar hafa sama hlutfall á milli lengdar og breiddar?



Endurtekin margföldun er skráð með því að nota veldi. Þannig táknar 8^3 það sama og 512. $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$





53 Albert rakst á skrýtna tölu í bók sem hann var að lesa. $\boxed{5^0}$
Hann velti fyrir sér fyrir hvaða fjölda þessi tala stæði.
Honum datt í hug að skrá í töflu.

$5^3 = 125$	$3^3 =$	4^3
$5^2 = 25$	3^2	4^2
$5^1 = 5$	3^1	4^1
$5^0 = ?$	3^0	4^0

a Búðu til töfluna og ljúktu við hana.

b Hvaða samband er á milli liða í talnarununni sem fram kemur?
Hve mörgum sinnum minna en 5^3 eru 5^2?
Hve mörgum sinnum minna en 5^2 eru 5^1?
Sérðu einhverja reglu?

c Kemur þú auga á sambærilega reglu fyrir veldi af þremur og fjórum?

d Ef þú notar regluna á núllta veldið hvert ætti svarið þá að vera við $5^0 = ?$
En 3^0? En 4^0?

e Útskýrðu hvernig getur staðið á því að allar tölur í núllta veldi eru sama talan.

54 Lestu dæmið og skoðaðu leiðina sem farin er við að leysa það.

Leitað er að tölu sem hafin upp í sjöunda veldi verður sjö stafa tala sem endar á 2. Til þess að létta sér að leita að tölunni má nýta sér að tíu í sjöunda veldi er átta stafa tala svo talan hlýtur að vera minni en 10.

Talan hlýtur líka að vera slétt því oddatala margfölduð með oddatölu verður alltaf oddatala. Það koma því eingöngu fjórar tölur til greina, þ.e. 2, 4, 6 og 8.
Hver er talan?

Hvaða tala fæst út ef talan sem leitað er að er hafin í sjöunda veldi?

55 Finndu tölustafina sem vantar.

a $\square^7 = \square\,\square\,\square\,\square\,\square\,3$

b $\square^8 = \square\,\square\,\square\,1$

c $\square^4 = \square\,\square\,6$

d $\square^9 = \square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,5$

e $\square^5 = \square\,\square\,\square\,\square\,\square\,4$

f $\square^7 = \square\,\square\,\square\,\square\,\square\,6$

Margir hafa tekið þátt í að setja fram stærðfræðihugmyndir. Slíkar hugmyndir hafa borist milli manna og menningarheima. Merkilegt er að sjá að oft hafa verið settar fram svipaðar hugmyndir á mörgum stöðum í heiminum. Börn og unglingar hafa lagt sitt af mörkum. Fræg er sagan um Gauss sem í barnaskóla fékk það verkefni að leggja tölurnar frá 1–100 saman. Hann sá að þetta var seinlegt verkefni og fór því að leita að kerfi. Hann áttaði sig á að hann gat búið til summuna 101 fimmtíu sinnum.

100 + 1, 99 + 2, 98 + 3, …, 51 + 50.

56 Prófaðu leið Gauss og leggðu saman allar tölur frá

a 1 til 10 **b** 1 til 20 **c** 1 til 30

Gauss setti svar sitt fram á eftirfarandi hátt:

$\frac{1}{2}(100)(1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050$

d Af hverju skyldi Gauss hafa margfaldað með $\frac{1}{2}$?

e Settu reglu Gauss fram þannig að nota megi hana fyrir hvaða talnabil sem er.

f Notaðu regluna til að finna summu talna á bilinu

1 til 500 101 til 200 1 til 100 000

57 Talnafræði er mikilvægur þáttur stærðfræðinnar. Í þessum kafla hefur þú fengið verkefni af sviði talnafræðinnar. Skoðaðu viðfangsefnin og nefndu dæmi um verkefni þar sem

- þú lærðir nýja hluti
- þú rannsakaðir
- notaðir vasareikni
- þér fannst auðvelt að útskýra svar þitt
- þér fannst erfitt að útskýra svar þitt

58 Í kaflanum eru nokkrir stærðfræðingar nefndir. Áhugavert getur verið að kynna sér betur líf þeirra og verk. Skrifaðu stutta ritgerð (1–2 bls.) um einhvern þessara stærðfræðinga eða einhvern annan stærðfræðing sem þú hefur áhuga á.

Stærðfræði í atvinnulífinu

Flestir nota stærðfræði á einhvern hátt við vinnu sína. Hér eru lýsingar vélstjóra og hársnyrtis á því hvernig og hvenær þeir nota stærðfræði í starfi sínu.

Lestu lýsingarnar og greindu hvaða þættir stærðfræðinnar eru nefndir. Segðu frá hvaða stærðfræðikunnáttu þeir þurfa að hafa á valdi sínu. Búðu til þrjú ólík dæmi sem hvor þeirra gæti þurft að glíma við í vinnunni.

HAUKUR HÁRSNYRTIR

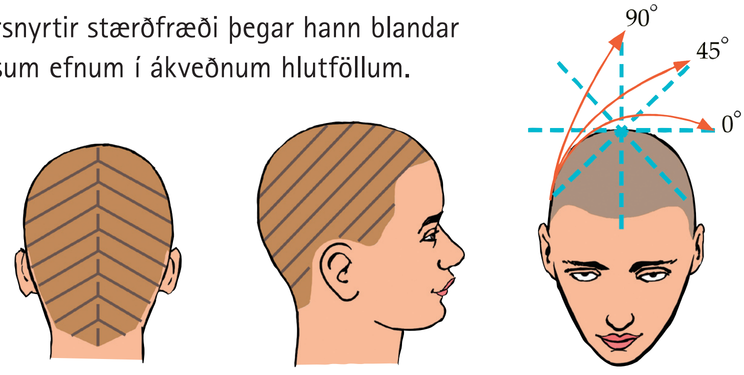
Þegar ég ákvað að opna eigin hársnyrtistofu þá þurfti ég að setja upp rekstraráætlun til þess að kanna hvað þyrfti til að reksturinn gæti gengið upp.

- Hve miklum tekjum má gera ráð fyrir á dag að jafnaði?
- Hverjir eru lánamöguleikar og með hvaða vöxtum og til hve langs tíma er hægt að fá lán?
- Hver er kostnaður við að kaupa húsgögn, búnað og nauðsynlegan lager?
- Hver er rekstrarkostnaður húsnæðis svo sem leiga, rafmagn og hiti?
- Hver er launakostnaður?

Einnig þurfti ég að ákvarða álagningu og verð á hársnyrtivörum og búa til verðskrá miðað við efnisnotkun og lengd meðferðar. Við hönnum stofunnar þurfti að beita rúmfræði við að koma húsgögnum, speglum og öðrum búnaði vel fyrir.

Í daglegum rekstri þarf að gera upp og skrá hve mikið kemur í kassann fyrir vörusölu annars vegar og hársnyrtingar hins vegar og halda til haga öllum kostnaði. Öll vinna á hársnyrtistofu byggist á nákvæmri tímaáætlun. Skipta þarf deginum upp í heppilegar einingar, ákvarða hve langan tíma hver meðferð tekur og hve marga viðskiptavini er hægt að afgreiða dag hvern.

Í daglegu starfi notar hársnyrtir stærðfræði þegar hann blandar saman litarefnum og ýmsum efnum í ákveðnum hlutföllum. Við klippingar vinnur hársnyrtir mikið með línur, horn og stefnur. Höfuð viðskiptavinarins er í raun hálfgerð kúla sem þarf að vinna skipulega með.



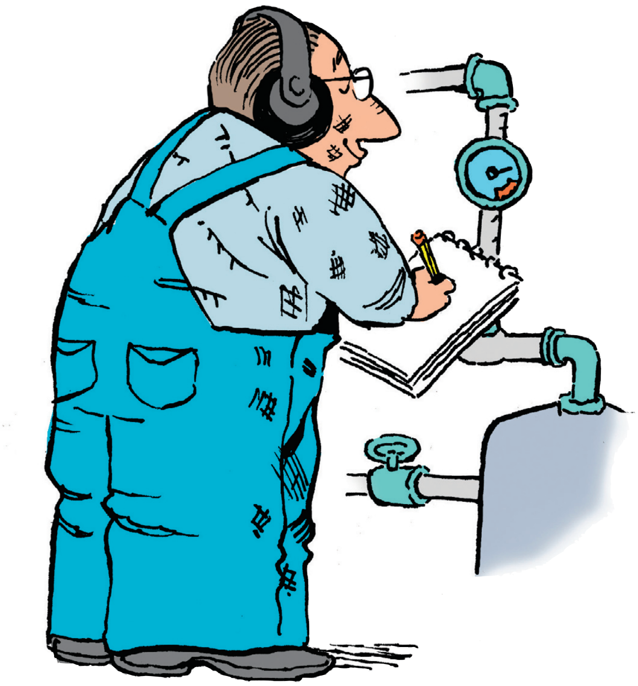
JÓHANN VÉLSTJÓRI

Jóhann segist nota reikniaðgerðirnar fjórar daglega. Eitt af mikilvægustu störfum hans er að fylgjast með olíunotkun. Hann skráir í dagbók það magn sem dælt er í daghylki eldsneytistanks vélarinnar. Stundum þarf að blanda bætiefnum og hreinsiefnum í olíuna. Bætiefni er sett í smurolíu í hlutföllunum 1:14. Hreinsiefni og smurefni eru sett í mismunandi hlutföllum alveg frá 1:50 í 1:350. Um borð í togaranum eru fullkomin tæki þar sem lesa má ganghraða skipsins, áætlaðan siglingartíma og eldsneytiseyðslu.

Tölvutæknin hefur leyst vélstjóra undan ýmsum útreikningum. Þeir þurfa þó enn þá að reikna út ýmis efniskaup, t.d. járnplötur, gúmmí í færibönd og málningu sem nota þarf við almennt viðhald. Þeir þurfa því að taka mál og reikna út flatarmál, kanna þykkt efnis og mæla lengd.

Jóhann notar stærðfræði oft á dag við vinnu sína. Hann safnar saman ýmsum tölulegum gögnum. Hann les af mælum loft- og olíuþrýsting, hita á kælivatni og afgasi (útblæstri véla). Greina þarf þessi gögn og leita skýringa ef eitthvað óvenjulegt kemur fram. Þá kemur fyrir að hann þarf að skoða töflur og/eða línurit sem sýna álagslínurit vélarinnar og meta út frá því hvort hætta sé á ferðum. Stundum þarf að dæla sjó í jafnvægistanka. Dælurnar afkasta ákveðnu magni af sjó á mínútu og því þarf að taka tímann til að vita hve miklu hefur verið dælt í tankana.

Til gamans reiknar Jóhann oft hvaða launum hann eigi von á. Út frá heildarverðmæti afla og skiptaprósentu er hlutur hvers og eins í áhöfninni reiknaður. Áhöfn skipsins fær 30% af skiptaverðmæti aflans og er hlutur vélstjórans einn og hálfur hásetahlutur.



Taktu viðtal við einhvern einstakling sem tekur þátt í atvinnulífinu. Ræddu við hann um hvaða stærðfræði hann notar í starfi sínu, hvaða stærðfræðikunnáttu reynir á og hvaða hjálpargögn hann notar. Skráðu frásögn viðmælanda þíns.

- Safnaðu frásögnum allra í bekknum saman í bók.

Reglur og reikningur

Í reikningi gilda ákveðnar reiknireglur og notuð eru mismunandi reiknirit.

$5 + 7 = 7 + 5$
$(2 \cdot 5) \cdot 7 = 2 \cdot (5 \cdot 7)$

Þú hefur áður kynnst ýmsum reiknireglum sem gilda um reikniaðgerðirnar fjórar, samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu. Sem dæmi má nefna víxlreglu og tengireglu. Reiknireglur eru oft skráðar með bókstöfum til að sýna að þær gildi fyrir allar tölur.

1 Skoðaðu reglurnar vel.
Lýstu þeim með þínum eigin orðum.
Búðu til dæmi sem eiga við reglurnar.
Notaðu bæði heilar tölur og brot.

- **a** $a + b = b + a$
- **b** $a \cdot b = b \cdot a$
- **c** $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **d** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

e Hverjar af reglunum eru kallaðar víxlreglur?

f Hverjar af reglunum eru kallaðar tengireglur?

2 Skoðaðu reglurnar vel.
Búðu til dæmi sem eiga við reglurnar.
Notaðu bæði heilar tölur og brot.

- **a** $a \cdot 0 = 0$
- **b** $0 + a = a$
- **c** $a \cdot 1 = a$
- **d** $a : 1 = a$
- **e** $a : a = 1$, $a \neq 0$
- **f** $0 : a = 0$, $a \neq 0$

g Talan 0 er hlutleysa í samlagningu. Hvaða tala gegnir sama hlutverki í margföldun?

3 Hverjar af þessum fullyrðingum eru sannar?

- **a** $2{,}786 + 0 = 2{,}786$
- **b** $79{,}6 - 79{,}6 = 0$
- **c** $78 + 7 = 78$
- **d** $670 - 0 = 67$
- **e** $48 \cdot 1 = 49$
- **f** $6{,}5 \cdot 0{,}01 = 6{,}5$
- **g** $1 \cdot 5{,}46 = 546$
- **h** $675 : 675 = 1$
- **i** $35{,}2 \cdot 0 = 35{,}2$
- **j** $0 : 35 = 35$
- **k** $13{,}7 + 124 = 124 + 13{,}7$
- **l** $124 + 13{,}7 = 13 + 124{,}7$
- **m** $2{,}5 \cdot 6{,}4 = 6{,}4 \cdot 2{,}5$
- **n** $2{,}5 \cdot 6{,}4 = 5 \cdot 3{,}2$
- **o** $312 - 123 = 313 - 124$
- **p** $312 - 123 = 434 - 234$
- **r** $546 + 234 = 545 + 243$
- **s** $546 + 234 = 445 + 335$

4

57 + 25 = 60 + 22
57 + 25 = 82

47 + 19 = 46 + 20
47 + 19 = 66

a Hvaða leið hefur verið farin til að einfalda útreikninga?

b Notaðu þá leið til að reikna dæmin.
97 + 56
268 + 96
4613 + 987

c Lýstu reglunni x + y = (x + a) + (y – a) með eigin orðum.

5

87 – 48 = 89 – 50
87 – 48 = 39

183 – 97 = 186 – 100
183 – 97 = 86

a Hvaða leið hefur verið farin til að einfalda útreikninga?

b Notaðu þá leið til að reikna dæmin.
74 – 28
262 – 96
3421– 289

c Lýstu reglunni x – y = (x + a) – (y + a) með eigin orðum.

6 a Hvort er rétt?
4 · 78 = 4 · 80 – 2
4 · 78 = 4 · 80 – 8

b Notaðu þá leið sem þú taldir rétta til að reikna þessi dæmi.

7 · 99

9 · 989

25 · 9997

c Lýstu reglunni x · y = x(y + a) – x · a með eigin orðum.

7

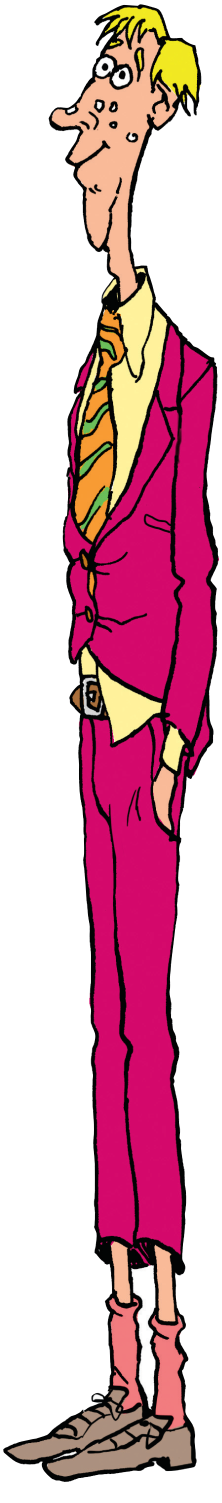
7 · 79 = 7 · 70 + 7 · 9

6 · 357 = 6 · 300 + 6 · 50 + 6 · 7

a Hvaða leið hefur verið farin til að einfalda útreikninga?

b Notaðu þá leið til að reikna dæmin.

5 · 87 7 · 764
6 · 56 17 · 54



Skoðaðu reglurnar vel og athugaðu hvernig þær geta auðveldað þér að finna týndan lið í reikningsdæmunum.

Ef $\boxed{x} + a = b$, þá er $\boxed{x} = b - a$ Ef $\boxed{x} - a = b$, þá er $\boxed{x} = b + a$

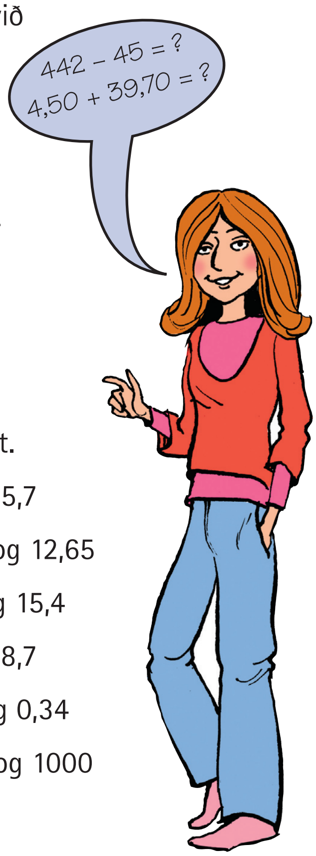
Ef $b = \boxed{x} + a$, þá er $b - a = \boxed{x}$ Ef $a - \boxed{x} = b$, þá er $a - b = \boxed{x}$

8 Notaðu reglurnar. Gerðu yrðingarnar sannar.

a □ + 27 = 431
b 1758 = □ + 652
c □ – 36 = 21
d 237 – □ = 25
e 456 – □ = 79
f 689 = □ + 177
g □ + 98 = 774
h □ – 789 = 641

9 Hvernig getur það að vita að 45 + 397 = 442 nýst þér við að leysa fleiri dæmi?

Búðu til að minnsta kosti sex mismunandi fullyrðingar þar sem þú nýtir þér að þú veist að 45 + 397 = 442.



10 Þú veist að 67 · 128 = 8576. Hvernig getur það nýst þér við að leysa fleiri dæmi?

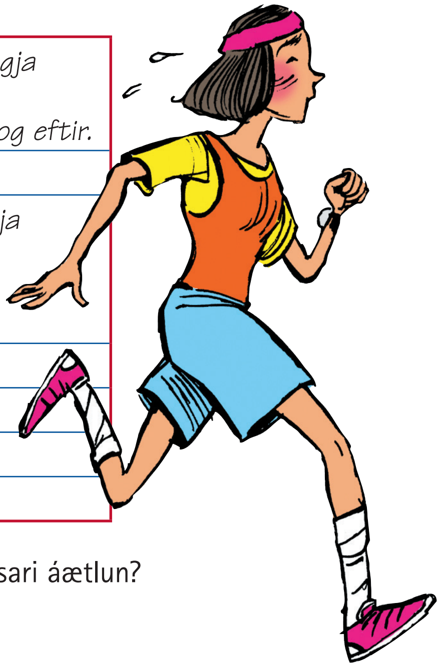
Búðu til að minnsta kosti sex fullyrðingar þar sem þú nýtir þér að þú veist að 67 · 128 = 8576.

11 Hvaða tölur gætu staðið í eyðunum? Rökstyddu svar þitt.

a 1,45 + □ Svarið á að vera tala á milli 5,6 og 5,7
b 1,45 + □ Svarið á að vera tala á milli 12,64 og 12,65
c 13,7 + 0,58 + □ Svarið á að vera tala á milli 15,3 og 15,4
d 122,4 – □ Svarið á að vera tala á milli 8,6 og 8,7
e 6,8 – □ Svarið á að vera tala á milli 0,33 og 0,34
f 1003,2 – □ Svarið á að vera tala á milli 999,9 og 1000

12 Þóra æfir langhlaup. Hún gerir æfingaáætlun og skráir nákvæmlega vegalengdina sem hún hyggst hlaupa.

Mánudagur	*Þrír 1000 m sprettir með þriggja mínútna hvíld á milli, 1200 m rólegt skokk á undan og eftir.*
Þriðjudagur	*Rólegt langhlaup 9,7 km.*
Miðvikudagur	*Þrír 750 m sprettir með þriggja mínútna hvíld á milli og 600 m rólegt skokk á undan og eftir.*
Fimmtudagur	*Rólegt langhlaup 8,8 km.*
Föstudagur	*Hvíld.*
Laugardagur	*Erfitt langhlaup 13,9 km.*
Sunnudagur	*Hvíld.*



a Hve marga kílómetra hleypur hún á viku samkvæmt þessari áætlun?

b Hve marga kílómetra hleypur hún að meðaltali daglega?

c Hve miklu munar á lengstu og stystu vegalengd sem hún hleypur á dag?

13 Reiknaðu:

a 278,3 + 45,6

b 0,32 + 25 + 1,7

c 1,2 + 3,43 – 4,28

d 4,79 – 1,5

e 126,7 – 9,97

f 53 + 2,7 + 0,55

g 32,6 – 17,73

h 1, 2 + 3,43 + 4,28

i 3,5 – 3, 478

14 a Matthías var beðinn að draga 3,04 frá 9,63 en hann dró óvart 3,4 frá. Hve miklu munaði á niðurstöðu hans og réttu svari? Var hún of há eða lág?

b Gunnhildur lagði saman 13,8 m + 5 m og fékk svarið 14,3 m. Henni fannst niðurstaðan ekki geta staðist. Hvað gerði hún rangt? Hve miklu munaði á niðurstöðu hennar og réttu svari.

c Melkorka lagði saman 124,3 + 7, 27 og fékk út svarið 131,30. Hvaða villu gerði hún? Hve miklu munaði á niðurstöðu hennar og réttu svari?

d Daníel átti að finna mismun á 28,7 km og 13,55 km og fékk svarið 15,25 km. Hvaða villu gerði hann? Hvernig myndir þú reikna?

15 Björn er bílstjóri hjá fyrirtæki og skráir í akstursdagbók allar ferðir sem hann fer fyrir fyrirtækið og hve langt hann ekur.

Dags.	Áfangastaður	Vegalengd
12/10	Hafnarfjörður	12,7 km
–	Pósthús	700 m
–	Sundahöfn	3,8 km
–	Mosfellsbær	17,8 km
–	Matvörubúð	1900 m
–	Leifsstöð	107,2 km

a Hve marga kílómetra ekur Björn alls þennan dag?

b Björn vinnur alla virka daga og meðalakstur hans þessa viku var 55,94 km. Hve marga kílómetra ók hann að meðaltali hina dagana?

16 Í fyrirtækinu sem Björn vinnur hjá er lítil vörulyfta. Lyftan tekur 50 kg. Björn þarf að flytja 60 pakkningar sem hver um sig eru 840 grömm. Getur hann sett þær allar í lyftuna í einu?

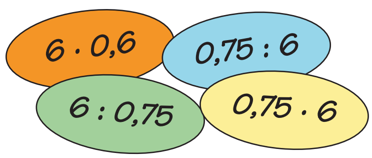
17 Björn þarf að raða dósum í skáp sem er 1,24 m að hæð. Hver dós er 18 cm að hæð. Hve mörg lög af dósum komast í skápinn?

18 Víraverksmiðja framleiðir 100 000 vírherðatré á dag. Í hvert herðatré fara 87,4 cm. Hve marga kílómetra af vír notar verksmiðjan dag hvern?

19 Verksmiðjan ákveður að reyna að spara og nota einungis 85 cm af vír í hvert herðatré. Hve mörg herðatré má framleiða úr 100 metrum af vír?

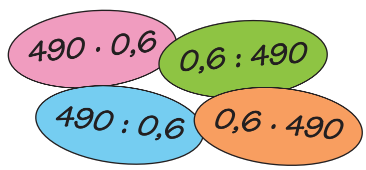
20 Pakka á 0,75 kg af kexkökum í kassa.
Hve marga kassa þarf undir 6 kg af kexi?

Hvernig verður dæmið? Hvert verður svarið?



21 Eitt kíló af kexi kostar 490 krónur.
Hve mikið kostar pakki með 600 g?

Hvernig verður dæmið? Hvert verður svarið?



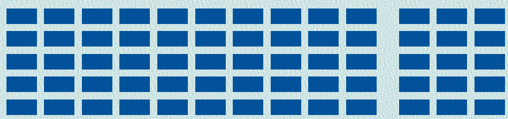
Þú hefur oft nýtt þér dreifiregluna við margföldun.

$6 \cdot 79 = 6 \cdot (70 + 9) = (6 \cdot 70) + (6 \cdot 9)$
$= 420 + 54 = 474$

Dreifiregluna má setja fram með bókstöfum.

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$5 \cdot 13$



$5 \cdot 10 \quad + \quad 5 \cdot 3$
$50 \quad + \quad 15 = 65$

22 **a** Lýstu dreifireglunni með þínum eigin orðum. Hvers vegna skyldi hún vera kölluð dreifiregla?

Notaðu dreifiregluna við að reikna þessi dæmi.

b $6 \cdot 97$	**c** $12 \cdot 32$	**d** $67 \cdot 5$
$6 \cdot 9{,}7$	$12 \cdot 3{,}2$	$6{,}7 \cdot 5$
$6 \cdot 19{,}7$	$12 \cdot 13{,}2$	$67 \cdot 0{,}5$

23 Við margföldun og deilingu má notfæra sér ýmsar leiðir til að auðvelda útreikninga. Skoðaðu fullyrðingarnar og gerðu grein fyrir hvort þær eru sannar eða ósannar án þess að reikna. Hvorn liðinn myndir þú reikna ef þú átt að finna hvaða tölu sönnu fullyrðingarnar standa fyrir?

a $1268 \cdot 25 = 634 \cdot 50$	**f** $8{,}4 : 2{,}8 = 4{,}2 : 1{,}4$
b $398 : 5 = 796 : 10$	**g** $0{,}5 \cdot 232 = 1 \cdot 116$
c $57 \cdot 38 = 58 \cdot 37$	**h** $4{,}2 : 1{,}4 = 42 : 14$
d $84 : 14 = 42 : 28$	**i** $4{,}5 \cdot 0{,}7 = 9 \cdot 7$
e $70 \cdot 9{,}7 = 7 \cdot 97$	**j** $27{,}2 : 0{,}5 = 272 : 1$

24 Notaðu námundun og áætlaðu svarið.

a $31{,}2 \cdot 48{,}5$	**d** $72 \cdot 0{,}56$	**g** $38 : 0{,}19$
b $57 \cdot 0{,}42$	**e** $72 : 0{,}56$	**h** $68 \cdot 0{,}68$
c $157{,}2 : 38{,}2$	**f** $38 \cdot 0{,}19$	**i** $68 : 0{,}68$

Hugtakið margföldun felur í sér að eitthvað margfaldist. Algengur skilningur á margföldun felur í sér að svarið verði allaf hærri tala en þær tölur sem margfaldaðar eru saman. En á það alltaf við þegar tölur eru margfaldaðar?

25 Reiknaðu þessi dæmi.

a 50 · 1247 b 5 · 1247 c 1,5 · 1247 d 0,5 · 1247 e 0,1 · 1247 f 0,9 · 1247

g Í hvaða dæmum verður svarið hærra en 1247?

h Í hvaða dæmum verður svarið lægra en 1247?

i Hvaða ályktun getur þú dregið af þessum niðurstöðum?

26 Veldu texta og gerðu fullyrðingarnar sannar.

örlitlu stærri en	miklu stærri en	örlitlu minni en	miklu minni en

a 3,4 · 0,98 er ______ 3,4

b 0,04 · 1,08 er ______ 0,04

c 127 · 0,009 er ______ 127

d 0,09 · 100,9 er ______ 0,09

e 0,03 · 0,907 er ______ 0,03

27 Veldu þá tölu sem þú telur að fari sem næst réttu svari. Rökstyddu svar þitt.

a 14 027 · 0,49	7	70	700	7000
b 11,97 · 0,098	12	1,2	0,12	0,012
c 0,089 · 1,003	0,009	0,09	0,9	9
d 0,7 · 0,49	350	35	3,5	0,35
e 45,1 · 101,02	45000	4500	450	45

ÞRAUT

Prentuð var ný stærðfræðibók og voru blaðsíður númeraðar á hefðbundinn hátt. Notaðir voru 555 tölustafir við að setja númer á blaðsíðurnar.

a *Hve margar blaðsíður voru í bókinni?*

b *Hve mörgum sinnum kom tölustafurinn fimm fyrir?*

c *Hver yrði summan ef allir tölustafirnir væru lagðir saman?*

Hvað gerist þegar deilt er? Verður svarið alltaf lægri tala en talan sem deilt var í?

28 Reiknaðu þessi dæmi.

a 3582 : 50 b 3582 : 5 c 3582 : 1,2 d 3582 : 0,5 e 3582 : 0,1 f 3582 : 0,9

g Hvaða ályktun getur þú dregið af niðurstöðum þínum?

29 Veldu texta og gerðu fullyrðingarnar sannar.

örlitlu stærri en	miklu stærri en	örlitlu minni en	miklu minni en

a 3,4 : 0,98 er ______ 3,4

b 0,04 : 1,08 er ______ 0,04

c 127 : 0,009 er ______ 127

d 0,09 : 100,9 er ______ 0,09

e 0,03 : 0,907 er ______ 0,03

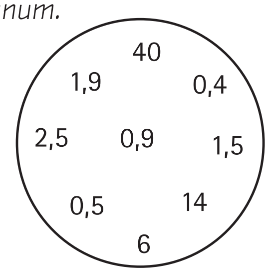
30 Veldu þá tölu sem þú telur að fari sem næst réttu svari. Rökstyddu svar þitt.

a 14 027 : 0,49	28	280	2800	28000
b 11,97 : 0,098	12	120	1200	12000
c 0,089 : 1,003	0,009	0,09	0,9	9
d 0,7 : 0,49	140	14	1,4	0,14
e 45,1 : 101,02	450	45	4,5	0,45

ÞRAUT

Margföldunarleikur fyrir tvo

Veldu tvær af tölunum í hringnum.
Margfaldaðu þær saman.
Það er ekki leyfilegt að breyta.
Leggðu kubb eða smáhlut yfir rétta svarið í ferningnum.
Sá vinnur sem fyrstur fær fjóra í röð lárétt, lóðrétt eða á ská.



0,2	0,6	1,25	26,6	2,4	1,35
12,6	84	16	560	36	2,85
1,71	240	7	1	35	5,6
0,36	20	3	9	100	5,4
0,95	76	21	15	60	0,45
3,75	2,25	0,75	4,75	0,76	0,85

31 $x = 675 \cdot 7$

a Fyrir hvaða tölu stendur x?

b Er talan x deilanleg með 7?

c Er talan x deilanleg með 3?

d Finndu að minnsta kosti fimm mismunandi tölur sem ganga upp í tölunni x.

e Hver verður afgangurinn ef deilt er með tveimur í töluna x?

32 Hver er talan í pokanum?

a Hvað segja þessi dæmi þér um töluna?

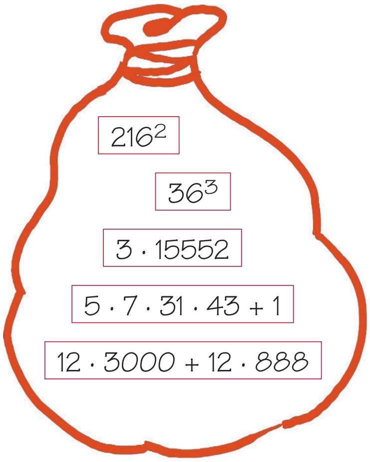
b Býr hún yfir einhverjum sérstökum eiginleikum?

c Finndu nokkrar tölur sem ganga upp í töluna.

d Hver verður útkoman ef deilt er í töluna með 12?

e Ganga 7 upp í töluna?

f Hver verður afgangurinn ef deilt er í töluna með 31?



33 $n = 4 \cdot 38 + 2$

Fyrir hvaða tölu stendur n?
Hver verður útkoman og hver verður afgangurinn ef deilt er í töluna n með 4?

34 $y = 4 \cdot 77 + 1$

Fyrir hvaða tölu stendur y?
Hver verður útkoman og hver verður afgangurinn ef deilt er í töluna y með 4?

35 $x = 5 \cdot 67 + 1$

Fyrir hvaða tölu stendur x?
Hver verður útkoman og hver verður afgangurinn þegar deilt er í töluna x með 5?

36 $m = 6 \cdot 147 + 1$

Fyrir hvaða tölu stendur m?
Hver verður útkoman og hver verður afgangurinn þegar deilt er í töluna m með 6?

37 **a** Reiknaðu dæmi 33–36 með vasareikni.

b Hver verður útkoman ef notaður er vasareiknir og deilt er í n með 4, í y með 4, í x með 5 og í m með 6?

c Berðu saman afganginn sem fram kemur við deilingu og aukastafina sem koma fyrir aftan kommu þegar deilt er með vasareikni. Gefur sami afgangur sama tugabrot? Ef ekki hvernig skyldi standa á því?

38 **a** Hver getur afgangur orðið ef deilt er í tölu með 5?

b Hvaða aukastafir geta komið fram ef deilt er í tölur með 5?

39 **a** Hver getur afgangur orðið ef deilt er í tölu með 8?

b Hvaða aukastafir geta komið fram ef deilt er í tölur með 8?

40 Reiknaðu dæmin og skráðu svarið með tveimur eða þremur aukastöfum.

a 7865 : 8	**d** 127 : 8	**g** 229 : 8
b 654 : 8	**e** 1338 : 8	**h** 2856 : 8
c 4435 : 8	**f** 8820 : 8	**i** 16,8 : 8

41 **a** Hver getur afgangur orðið ef deilt er í tölu með 7?

b Hvaða aukastafir geta komið fram ef deilt er í tölur með 7? Skoðaðu hvernig aukastafirnir raðast.

42 Reiknaðu dæmin og skráðu svarið með fjórum aukastöfum.

a 190 : 7	**c** 346 : 7	**e** 793 : 7
b 7504 : 7	**d** 3938 : 7	**f** 2225 : 7

43 **a** Skoðaðu töluna $7 \cdot 27 + 28$. Getur þú skráð töluna sem margfeldi af 7?

b Skoðaðu töluna $15 \cdot 623 + 60$. Getur þú skráð töluna sem margfeldi af 15?

c Skoðaðu töluna $9 \cdot 366 + 54$. Getur þú skráð töluna sem margfeldi af 9?

44 Reiknaðu dæmin.

a 12,7 : 5	**b** 12,7 : 0,5	**c** 2,28 : 3	**d** 2,28 : 0,3
e 0,69 : 6	**f** 0,69 : 0,6	**g** 125,5 : 4	**h** 125,5 : 0,4

45 Einar vinnur við hellulögn og hönnun á útileiksvæði fyrir börn. Hann kaupir 4,7 rúmmetra af hellusandi, 2 rúmmetra af gróðursandi, 9,2 rúmmetra af smámöl, 0,55 rúmmetra af hnullungum og 1,7 rúmmetra af sandkassasandi.

a Hve mörg tonn af möl og sandi kaupir hann alls?

b Hve mikið þarf hann að borga fyrir efnið?

Möl og sandur	Verð á rúmmetra
Hellusandur	1187 kr./m^3
Þveginn sandur	1427 kr./m^3
Sandkassasandur	1825 kr./m^3
Gróðursandur	1534 kr./m^3
Smámöl	1750 kr./m^3
Steypumöl	1578 kr./m^3
Hnullungar	1854 kr./m^3

Hellur og steinar	Verð á fermetra
Götusteinar	2710 kr./m^2
Götuhellur	2510 kr./m^2
Slitsterkar hellur	3885 kr./m^2
Kantsteinar	788 kr./stk.

46 Einar kaupir einnig nokkrar gerðir af hellum og steinum.
Hann kaupir:

- tvö bretti af götusteini og er hvert bretti 7,68 m^2
- þrjú bretti af götuhellum og er hvert bretti 8,8 m^2
- 8 bretti af slitsterkum steini fyrir bílastæði og er hvert bretti 5,7 m^2
- 14 bretti af 50 cm löngum kantsteinum og eru 30 stykki á hverju bretti

a Hve mikið þarf hann að borga fyrir hellur og steina?

b Hver er heildarkostnaður við efniskaup ef hann kaupir allt efnið hjá sama fyrirtækinu og fær 15% afslátt?

KappAbel-stærðfræðikeppnin

KappAbel-stærðfræðikeppnin var fyrst haldin í Noregi 1998–1999. Keppnin var samstarfsverkefni Frolands-bæjarfélagsins, þar sem Niels Henrik Abel bjó síðasta árið sem hann lifði, og Tækni- og náttúruvísindaháskólans í Þrándheimi. Keppnin nær nú til allra Norðurlandanna. Keppnin er bekkjakeppni og er ætluð fyrir 9. bekk. Fjölmargir 9. bekkir á Íslandi hafa tekið þátt í keppninni á undanförnum árum. Markmiðið er að efla áhuga allra nemenda á stærðfræði og sýna þeim fram á að stærðfræði getur verið skemmtileg, falleg og gagnleg. Lögð er áhersla á viðfangsefni sem bjóða upp á samstarf og umræður innan bekkjanna og rannsóknir í stærðfræðináminu.

Keppnin er margþætt. Bekkirnir glíma við þrautir og verkefni í tveimur lotum fyrri hluta vetrar. Þeim 10–12 bekkjum sem standa sig best er boðið að senda fjóra fulltrúa, tvær stúlkur og tvo stráka, til undanúrslita og í lokakeppni. Sá bekkur sem sigrar öðlast rétt til að senda fulltrúa sína í Norðurlandakeppnina sem haldin er í einu Norðurlandanna. Sigurvegarar fá vegleg verðlaun.

Mikilvægur þáttur keppninnar er bekkjarverkefnið þar sem hver bekkur vinnur verkefni sem tengist ákveðnu þema ár hvert. Allur bekkurinn tekur þátt í vinnu við bekkjarverkefnið.

Mikilvægt er að setja fram góðar rannsóknarspurningar sem varpa ljósi á þau fyrirbæri sem tekin eru til rannsóknar og sýna að bekkurinn hafi náð tökum á þýðingarmiklu stærðfræðilegu innihaldi í þemanu. Einnig þarf að skila skýrslu um framvindu og faglegt innihald og búa verkefnið til sýningar og kynningar. Hér reynir því mjög á frumleika, sköpunargáfu og faglega dýpkun og skiptir bekkjarverkefnið oft sköpum þegar kemur til úrslita. Nánari upplýsingar um KappAbel-keppnina má finna á vefsíðunni **Stærðfræðin hrífur.**

Hér eru nokkur dæmi um verkefni sem hafa verið í keppninni.

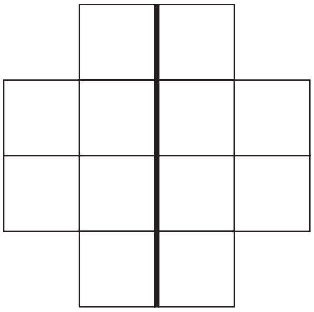
1 Hvert var númerið?

Hannes hafði gleymt PIN-númerinu á kreditkortinu sínu. Hann mundi þó að í því voru fjórir tölustafir og að númerið var oddatala. Hann mundi líka að tölustafirnir voru 0, 5, 6, og 7. Og svo mundi hann að númerið byrjaði ekki á 0. Hve mörg mismunandi númer geta passað við lýsingu Hannesar?

Veljið þá tölu sem þið teljið vera rétta svarið.

a 2 **b** 8 **c** 10 **d** 12 **e** 18 **f** 24

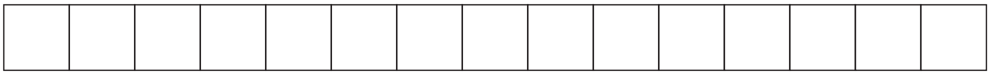
2 Þið eigið að setja 6 svarta og 6 hvíta spilapeninga í rúðurnar á fletinum þannig að mynstrið verði samhverft um svörtu línuna. Hve mörg ólík mynstur eru til? Mynstrin teljast lík ef þau hverfa hvort í annað við hliðrun eða snúning.



a 10 **c** 6 **e** 8

b 5 **d** 4 **f** 12

3 Raðaðu heilu tölunum frá 1 til 15 í reitina fyrir neðan þannig að summa tveggja talna, sem standa hlið við hlið, sé ferningstala.
Notaðu hverja tölu aðeins einu sinni.



Niels Henrik Abel 1802–1829

Stærðfræðingurinn Niels Henrik Abel fæddist árið 1802 á Rogalandi í Noregi og lést í Frolands-bæjarfélaginu í Suður-Noregi árið 1829. Þó hann hafi ekki náð háum aldri, en hann dó úr berklum aðeins tæplega 27 ára gamall, er hann þekktasti stærðfræðingur Norðurlandanna og afrek hans þykja hafa skipt sköpum í þróun og rannsóknum á sviði stærðfræðinnar. Franskur stærðfræðingur á að hafa sagt um hann að rannsóknir hans hefðu tryggt að stærðfræðingar hefðu næg rannsóknarverkefni næstu 500 árin. Sænskur stærðfræðingur lét hafa eftir sér að 6. janúar 1829 væri merkilegri dagur í menningarsögunni en fæðingardagar þekktra þjóðhöfðingja og þjóða. Þann dag tókst Abel að standa upp úr sjúkrabeði sínu og skrá niður mikilvæg atriði úr rannsóknum sem hann hafði gert grein fyrir í svokallaðri Parísarskýrslu og hann óttaðist að hefðu glatast. Skýrslan fannst síðar og fékk Abel þá viðurkenningu fyrir verkið og erfingjar hans verðlaunafé. Árið 2002, á 200 ára fæðingarafmæli Niels Henrik Abel, afhenti Haraldur Noregskonungur í fyrsta sinn Abelsverðlaunin. Þau verða veitt árlega fyrir sérstök afrek í stærðfræði og er þeim ætlað að verða hliðstæða Nóbelsverðlaunanna.

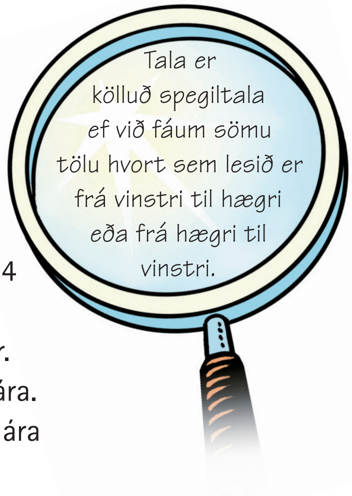
4 Dæmi um spegiltölur:

181 25199152 66666

Hve margar spegiltölur koma fyrir á milli 100 og 1000?

Svarkostir:

a 75 b 80 c 86 d 90 e 92 f 104



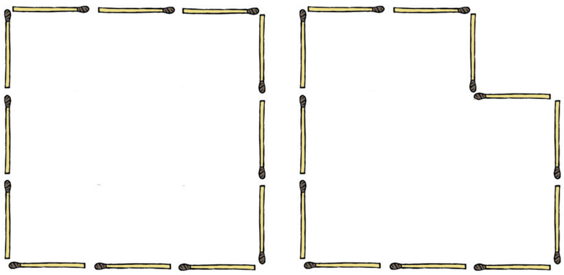
5 Hinn 1. júní 2001 var meðalaldur 33 kennara í KappAbel-skólanum 47 ár. Þann 31. maí 2002 hættu þrír kennarar sem voru 65 ára, 58 ára og 62 ára. Þegar í stað voru ráðnir fjórir nýir kennarar sem voru 24 ára, 31 árs, 26 ára og 28 ára.

Hver var meðalaldur kennaranna í KappAbel-skólanum þann 1. júní 2002? Námundið að næstu heilu tölu.

Í undanúrslitum og lokakeppni eru ekki gefnir upp svarkostir og keppendur hafa takmarkaðan tíma til að glíma við hvert verkefni. Hér er dæmi um eitt slíkt verkefni.

6 Þið þurfið 12 eldspýtur eða pinna.

Með 12 eldspýtum er hægt að mynda marghyrninga á marga mismunandi vegu þannig að flatarmálið verði heil tala. Ein flatareining er jöfn flatarmáli fernings þar sem hliðin er ein eldspýta. Fyrir neðan eru sýndir tveir marghyrningar. Annar er 9 flatareiningar og hinn er 8 flatareiningar.



Notið pinnana tólf til þess að mynda marghyrninga þar sem flatarmálið er nákvæmlega:

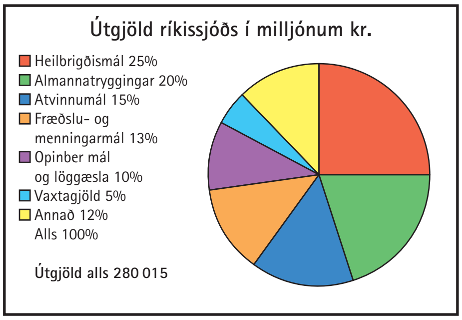
a 6 flatareiningar b 5 flatareiningar c 4 flatareiningar

Teiknið lausnirnar á blað. Þið fáið aukastig fyrir allt að tveimur ólíkum lausnum í hverjum lið af dæminu. Lausnirnar teljast ólíkar ef þær geta ekki speglast, hliðrast eða snúist hvor yfir í aðra. Athugið að hver lausn á að vera einn samfelldur marghyrningur.

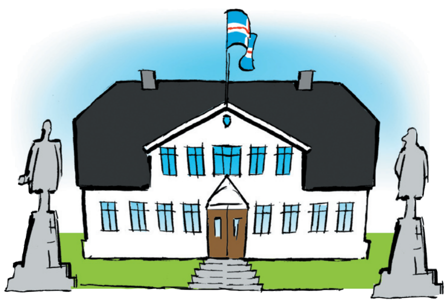
Tölfræði

Á síðustu árum hefur árlega verið varið milli tvö og þrjú hundruð milljörðum króna til verkefna á vegum íslenska ríkisins. Í íslenska stjórnkerfinu er gert ráð fyrir að ábyrgð og rekstur á ákveðnum málaflokkum sé í höndum ríkisins. Þetta á til dæmis við um heilbrigðismál. Til þess að standa straum af kostnaði vegna þessa aflar ríkið tekna með sköttum. Samkvæmt reikningum ríkisins var skipting tekna og útgjalda árið 2003 eftirfarandi:

Tekjur ríkissjóðs í milljónum kr.	
Skattar á tekjur og hagnað	80 141
Tryggingagjöld	26 315
Eignaskattar	8666
Skattar á vöru og þjónustu	123 087
Aðrir skattar	650
Aðrar tekjur	35 017
Tekjur alls	273 876



Heimild: http://www.rikiskassinn.is/



1 a Hver var stærsti tekjuliður ríkissjóðs?

b Hver var stærsti útgjaldaliður ríkissjóðs?

c Hve stór hluti tekna ríkisins voru skattar af tekjum og hagnaði?

d Um hve mörg prósent minnka tekjur ríkisins ef ákveðið verður að fella niður eignaskatt?

e Hve stór hluti útgjalda ríkissjóðs fór til fræðslu- og menningarmála? Hve há upphæð er það í milljónum króna?

2 a Búðu til skífurit sem sýnir skiptingu tekna ríkisins og töflu þar sem fram kemur hve háar upphæðir fara í hvern útgjaldalið. Notaðu töflureikni.

b Hvort finnst þér betra að setja upplýsingar af þessu tagi fram í töflu eða skífuriti? Rökstyddu svar þitt.

HÓPVERKEFNI

3 Útgjöld ríkisins árið 2003 voru rúmir 280 milljarðar króna (280 015 000 000). Það er stór tala sem erfitt er að gera sér grein fyrir.

Búið til veggspjald þar sem þið sýnið hvað getur falist í þessari upphæð. Fara má margar leiðir. Hér eru nokkur dæmi sem þið getið nýtt ykkur.

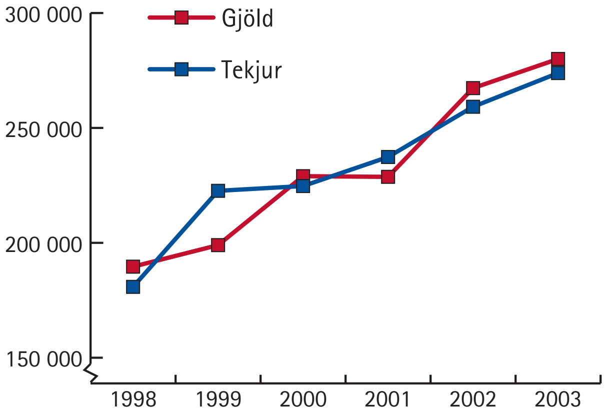
- Hve margir 5000 króna seðlar eru í 280 milljörðum króna?
- Hve langa röð væri hægt að búa til úr þeim?
- Hve lengi væri verið að telja þessa upphæð í 5000 króna seðlum?
- Hve mikið vega 280 milljarðar í 5000 króna seðlum?

Þið getið einnig nýtt þessar upplýsingar til að hjálpa fólki til að gera sér grein fyrir stærð tölunnar 280 milljarðar.

- Árslaun Guðmundar kennara eru 2,4 milljónir króna.
- Nýr jeppi getur kostað 5 milljónir króna.
- Fjögurra herbergja íbúð á höfuðborgarsvæðinu getur kostað 24 milljónir króna.
- Mjaðmakúluaðgerð kostar um það bil 700 þúsund krónur.
- Kostnaður vegna nýbura sem tekinn er með keisaraskurði er um það bil 400 000 krónur.
- Kostnaður við bundið slitlag þjóðvegar eru 2,5 milljónir króna á hvern kílómetra.
- Kostnaður ríkisins vegna eins framhaldsskólanema er um það bil 600 þúsund krónur á ári.

Upplýsingar um ríkisrekstur má finna á Netinu. Einnig má nota upplýsingar um verð á vöru og þjónustu.

Þróun tekna og útgjalda ríkisins 1998–2003



Íslenska ríkið fær stóran hluta tekna sinna af sköttum af vöru og þjónustu. Á innfluttar vörur falla ýmis gjöld svo sem tollar og vörugjöld. Auk þess er lagður virðisaukaskattur á seldar vörur og þjónustu. Á hverju ári eru margs konar vörur fluttar til og frá landinu.

Skipting innflutnings og útflutnings eftir vöruflokkum í milljónum króna á gengi ársins 2004

Innflutningur	m.kr.
Matvörur og drykkjarvörur	20 831,4
Hrávörur og rekstrarvörur	61 085,6
Eldsneyti og smurolíur	21 858,6
Fjárfestingarvörur t.d. vélar	52 823,7
Flutningatæki	40 013,2
Aðrar neysluvörur	43 317,9
Aðrar vörur	229,6
Samtals	240 160

Útflutningur	m.kr.
Sjávarafurðir	121 745,7
Landbúnaðarafurðir	4261,3
Iðnaðarvörur	71 073,5
Aðrar vörur	5292,5
Samtals	202 373

Heimild – Hagstofa Íslands

4 a Búðu til súlurit og berðu saman innflutning eftir vöruflokkum.

b Er mikill munur á milli vöruflokka?

c Hve stór hluti innflutnings eru matvörur og drykkjarvörur?

5 Á árinu 2004 varð mikil aukning á innflutningi flutningatækja. Aukningin var 50% eða um 13,3 milljarðar króna.

a Hvert var verðmæti innfluttra flutningatækja árið 2003?

b Hvað gæti skýrt þessa miklu aukningu á innflutningi flutningatækja árið 2004?

6 a Búðu til súlurit sem sýnir skiptingu útflutnings eftir vöruflokkum.

b Er mikill munur á milli vöruflokka?

c Hve stór hluti útflutnings eru sjávarafurðir? En iðnaðarvörur?

7 Munur milli innflutnings og útflutnings er kallaður vöruskiptajöfnuður. Ef meira er flutt út en inn er vöruskiptajöfnuðurinn hagstæður. Var vöruskiptajöfnuðurinn hagstæður árið 2004?

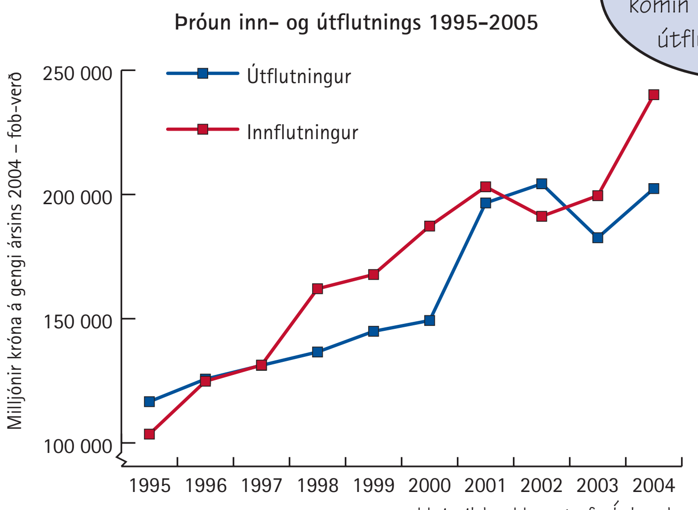
8 a Lýstu því hvernig verðmæti innflutnings hefur þróast frá árinu 1995.

b Hvaða ár var útflutningur mestur?

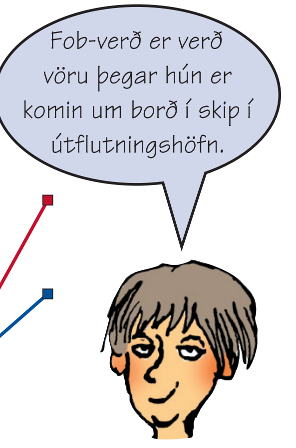
c Berðu saman þróun innflutnings og útflutnings á þessu 10 ára tímabili.

d Hvaða ár var vöruskiptajöfnuður hagstæður?

e Hvenær var mestur munur á milli inn- og útflutnings?



Heimild – Hagstofa Íslands



HÓPVERKEFNI

Á vef Hagstofu Íslands er mikið af upplýsingum um utanríkisverslun Íslendinga. Þar má skoða vöruskipti við einstök lönd.

- Farið inn á vefinn, veljið ykkur fimm lönd og skoðið viðskipti Íslendinga við þau lönd.
- Hvert er verðmæti heildarinnflutnings frá hverju landi og verðmæti innflutnings í hverjum vöruflokki?
- Hvert er verðmæti heildarútflutnings til hvers lands og hvernig skiptist hann milli vöruflokka?

Útflutningur eftir einstökum löndum og vöruflokkum (Hagstofuflokkun) 2002–2004

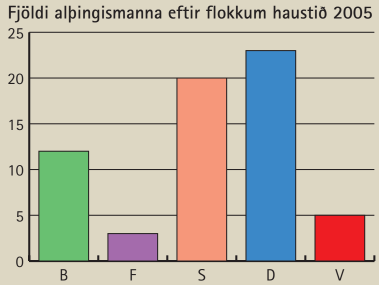
	Fob-verð millj. kr.
Ástralía	
Sjávarafurðir	57,1
Landbúnaðarafurðir	0,0
Iðnaðarvörur	475,6
Aðrar vörur	11,5

Búið til myndrit og berið saman verðmæti inn- og útflutnings til landanna sem þið völduð. Eru þetta lönd sem Íslendingar eiga í miklum viðskiptum við?

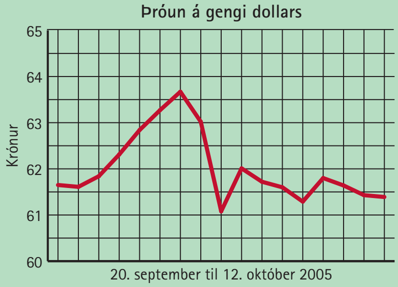
Þið hafið kynnst ýmsum gerðum myndrita svo sem súluritum, línuritum, skífuritum og punktaritum. Við val á myndritum þarf að hafa í huga hvers konar upplýsingar er um að ræða.

9 Skoðaðu myndritin og greindu frá hvaða upplýsingar má lesa úr þeim.

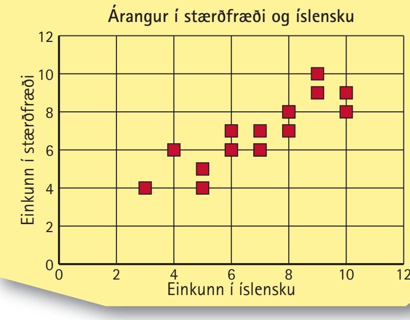
Súlurit eru gagnleg þegar bera þarf saman stærðir og fjölda. Þau má einnig nota til að sýna skiptingu innan flokka.



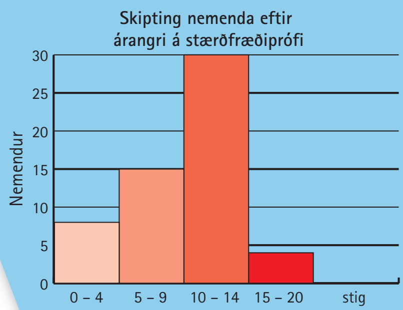
Línurit sýna þróun.



Punktarit eru einkum notuð til að skoða hvort samhengi er á milli tveggja breyta.



Stuðlarit eru notuð þegar sýna á stærð eða fjölda á tilteknu bili.



Skífurit henta vel til að sýna skiptingu.

10 Hvers konar myndrit myndir þú nota ef þú ættir að sýna

a þróun útflutnings á hestum?

b fjölda fólks í tilteknum aldurshópum, þ.e. 0–19 ára , 20–39 ára og 40–59 ára?

c skiptingu kjósenda eftir flokkum?

d niðurstöður skoðanakönnunar um vinsælasta sjónvarpsþáttinn?

e sölu á bókum í bókaverslun á 12 mánaða tímabili?

f samhengi á milli farsímaeignar og bílaeignar?

Þegar gagnasöfn eru skoðuð er oft fundið hæsta og lægsta gildi, tíðasta gildi og dreifing gagnanna. Einnig er oft athugað hvar miðja gagnanna er bæði með því að finna meðaltal og miðgildi. Slíkar upplýsingar lýsa gagnasafni á annan hátt en myndrit.

11 Nemendur í 10. bekk í Takkaskóla hafa tekið að sér að selja penna til styrktar heyrnarlausum. Í bekknum eru 29 nemendur og skipta þeir sér í fimm hópa. Sá hópur sem stendur sig best fær verðlaun.

a Hvaða hópur ætti skilið að fá verðlaunin? Rökstyddu svar þitt. Eru allir í bekknum sammála? Ræðið saman og berið rökstuðning ykkar saman.

Í töfluna hefur verið skráð hve marga penna hver einstaklingur seldi.

Hópur 1	Hópur 2	Hópur 3	Hópur 4	Hópur 5
50	50	100	70	70
40	50	45	60	60
35	35	20	50	50
30	25	20	20	20
30	25	15	10	10
25	25	10	0	

b Hvaða hópur seldi flesta penna?

c Hve marga penna seldi hver hópur að meðaltali?

d Hve marga penna seldi hver einstaklingur í hópi 1 að meðaltali?

e Í hvaða hópi var meðaltalið hæst?

f Í hvaða hópi var mestur munur á frammistöðu einstaklinganna?

g Í hvaða hópi stóðu allir sig nokkuð vel?

h Hver var meðalsala á nemenda í 10. bekk?

i Í hvaða hópi seldu flestir minna en meðaltal bekkjarins?

j Skráðu miðgildi í hverjum hópi fyrir sig.

k Hvert er miðgildið fyrir alla einstaklinga í bekknum?

l Hefur þú skipt um skoðun á því hvaða hópur ætti að fá verðlaunin? Rökstyddu svar þitt.

12 Gerum ráð fyrir að þú sért með gagnasafn með þessum tölum:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5.

a Finndu miðgildi og meðaltal þessara talna.

b Hvaða raunverulegar aðstæður gæti þetta gagnasafn endurspeglað?

c Hvaða áhrif hefur það á meðaltalið ef talan 2 bætist við gagnasafnið?
Útskýrðu hvers vegna þetta gerist.

d Hvaða áhrif hefur það á meðaltalið ef talan 8 bætist við gagnasafnið?
Útskýrðu hvers vegna þetta gerist.

e Hvaða áhrif hefur það á meðaltalið ef tölunni 0 er bætt við gagnasafnið?
Útskýrðu hvers vegna þetta gerist.

f Hvaða áhrif hefur það á meðaltalið ef tölunum 2 og 3 er bætt við gagnasafnið?
Útskýrðu hvers vegna þetta gerist.

g Finndu tvær tölur sem bæta má við gagnasafnið án þess að meðaltalið breytist.
Rökstyddu hvernig þú valdir þessar tvær tölur.

h Finndu þrjár tölur sem bæta má við gagnasafnið án þess að meðaltalið breytist.
Rökstyddu hvernig þú valdir þessar þrjár tölur.

i Hvaða áhrif hefur það á meðaltalið ef tölunni 30 er bætt við gagnasafnið?
Hve vel lýsir meðaltalið þessu nýja gagnasafni?
Getur þú fundið aðra tölfræðilega leið til að lýsa gagnasafninu?

j Finndu tvær tölur sem má bæta við gagnasafnið sem breyta meðaltali en ekki miðgildi.
Rökstyddu hvernig þú valdir þessar tvær tölur.

k Er hægt að finna tvær tölur sem bæta má við gagnasafnið sem breyta miðgildinu en ekki meðaltalinu.
Rökstyddu svarið.

13 Hvað segir það um talnasafn ef

a mikill munur er á meðaltali og miðgildi?

b lítill munur er á meðaltali og miðgildi?

c meðaltal helst ef hæsta og lægsta gildi er tekið frá?

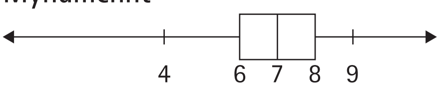
d miðgildi helst ef hæsta og lægsta gildi er tekið frá?

e miðgildi, meðaltal og tíðasta gildi er sama talan?

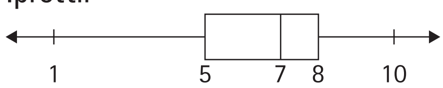
Þegar dreifing gagna er skoðuð er byrjað á að finna hæsta og lægsta gildi gagnasafns og mismun þeirra. Einnig er gagnlegt að skoða hvernig gildin dreifast. Þetta má sýna með rammariti. Í slíku riti er rammi sem afmarkar þann helming gagnanna sem er næstur miðjunni. Lóðrétt lína inni í þessum ramma sýnir hvar miðgildið liggur. Til að finna efri og neðri mörk rammans þarf að finna miðgildi, annars vegar gagna fyrir ofan miðgildi og hins vegar gagna fyrir neðan miðgildi. Út frá þessum ramma eru gerð strik að hæsta og lægsta gildi.

Þessi rammarit sýna dreifingu einkunna í myndmennt og íþróttum í 24 manna bekk.

Myndmennt



Íþróttir



14 Hve margir nemendur eru með einkunn í myndmennt á bilinu 6–8? Hve mörg prósent nemenda eru það? Hve mörg prósent nemenda eru með einkunn sem er hærri en 8 í íþróttum? Hvort er dreifing einkunna meiri í íþróttum eða myndmennt? Í hvorri greininni telur þú að nemendur standi sig betur?

Þegar búa á til rammarit er gott að flokka gögnin með því að setja þau upp í laufrit.

Hæð drengja í 8. bekk mæld í sentímetrum

162, 170, 163, 172, 164, 167, 169, 152, 160, 164, 155, 177, 161 159

Laufrit – drengir

tugir cm	cm
15	2, 5, 9
16	0, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 9
17	0, 2, 7

Miðgildi fyrir drengi er á milli 163 cm og 164 cm.
Helmingur gildanna er á milli 160 cm og 169 cm.

15 Hæð stúlkna í 8. bekk mæld í sentímetrum

170, 159, 171, 164, 154, 159, 155, 161, 158, 161, 162, 160, 157

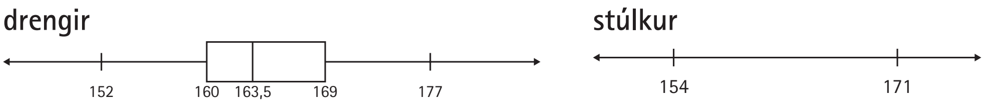
a Búðu til laufrit fyrir stúlkur.

b Finndu miðgildið fyrir stúlkur.

c Finndu einnig miðgildi fyrir þann helming stúlkna sem er fyrir neðan miðgildi og helminginn sem er fyrir ofan miðgildi.

d Á hvaða bili er hæð þeirra 50% stúlkna sem eru í miðjunni?

16 a Teiknaðu rammarit fyrir stúlkur þannig að þú getir borið hópana saman. Notaðu upplýsingar úr dæmi 15.

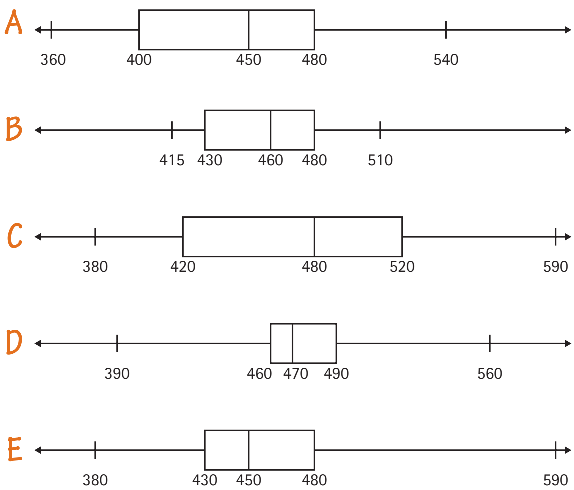


b Skoðaðu rammaritin. Hvað segja þau um dreifingu á hæð stúlknanna samanborið við dreifingu á hæð drengjanna?

c Hvernig er hæð stúlknanna samanborin við hæð drengjanna?

17 Búðu til laufrit og rammarit fyrir allan bekkinn.

18 Þessi rammarit sýna niðurstöður úr alþjóðlegri rannsókn á læsi. Ritin sýna dreifingu stiga í fimm löndum. Hámarksstigafjöldi var 600 stig.



a Hvaða land telur þú að hafi staðið sig best? Raðaðu löndunum eftir frammistöðu. Rökstyddu röðun þína. Væri hægt að færa rök fyrir annarri röðun?

b Í hvaða landi var dreifingin mest?

c Í hvaða landi náðu hlutfallslega flestir góðum árangri?

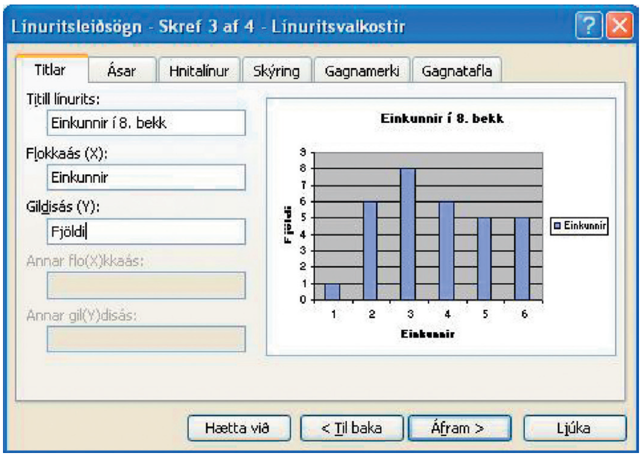
Gott getur verið að nota töflureikni þegar vinna á úr talnasöfnum. Notaðu töflureikni þegar þú vinnur úr eftirfarandi gögnum.

19 Einkunnir í 8. bekk

2, 5, 6, 1, 2, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 2, 6, 2, 5, 2, 3, 4, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 5, 6, 3, 6

a Byrjaðu á því að búa til tíðnitöflu. Í A-dálkinn skrifar þú mögulegar einkunnir. Í B-dálkinn skrifar þú hve margir hafa fengið hverja einkunn. Veldu tölurnar í B-dálkinum og síðan merki sem sýnir súlurit. Veldu einfalt súlurit. Gefðu súluritinu heiti og skráðu einkunnir við x-ás og fjölda við y-ás.

	A	B
1	1	1
2	2	6
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	



b Prófaðu að búa til skífurit sem sýnir niðurstöðurnar.

c Reiknaðu meðaleinkunn. Þá þarftu að nota þriðja dálkinn. Þú byrjar á því að setja reiknireglu í efstu röðina. Þú þarft að margfalda saman tölur í fyrsta og öðrum dálki.

- Þú afritar regluna eins langt og þarf niður þriðja dálkinn.
- Þú velur þriðja dálkinn og finnur summu talnanna í honum með því að ýta á $\sum$.
- Til að finna meðaltalið þarftu að deila með fjölda nemenda. Hann getur þú fundið með því að finna summu talna í B-dálki. Meðaltalið finnst með því að deila summu í C-dálki í summu í B-dálki.

= A1*B1

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	6	12
3	3		

20 Á stærðfræðiprófi var notaður einkunnakvarðinn 1–60. Niðurstöður í 8. bekk voru eftirfarandi.

52, 31, 51, 17, 43, 24, 8, 23, 43, 29, 55, 16, 31, 37, 38, 15, 47, 26, 38, 45, 49, 25, 41, 34, 27, 17, 21, 57, 25, 22, 39, 45, 6, 60, 16, 36, 34, 56, 26, 39, 24, 29, 33, 49, 54, 43, 47, 39

a Flokkaðu gögnin og settu þau upp í tíðnitöflu.

b Finndu meðaleinkunn.

c Hvert er miðgildið?

d Hvert er tíðasta gildið?

e Hvert er hæsta gildið?

f Hvert er lægsta gildið?

g Hver er dreifing einkunnanna?

h Hve stór hluti einkunnanna er á bilinu 20–40?

i Sýndu niðurstöðurnar í myndriti.

21 Meðalúrkoma í mm árið 2003.

	jan.	feb.	mars	apríl	maí	júní	júlí	ág.	sept.	okt.	nóv.	des.	árið
Bangkok	10,6	28,2	30,7	71,8	189,4	151,7	158,2	187,0	319,9	230,8	57,3	9,4	1466,9
Róm	81,2	63,2	70,3	55,7	53,0	36,4	17,5	27,5	60,9	117,7	111,0	97,9	792,9
Manchester	71,3	58,5	57,7	51,9	62,3	71,1	87,3	93,2	81,7	93,1	84,7	86,6	899,6

a Búðu til línurit sem sýnir meðalúrkomu í borgunum Bangkok, Róm og Manchester.

b Lýstu því hvernig úrkoma er yfir árið í þessum borgum.
Berðu saman úrkomumagn í borgunum og skoðaðu sérstaklega hæstu og lægstu gildi.

c Hvaða árstíma myndir þú velja ef þú ætlaðir að heimsækja þessar borgir. Rökstyddu svarið.

Finndu upplýsingar sem gæti verið áhugavert að setja fram með mismunandi myndritum.

Hagstofa Íslands sér um að safna saman upplýsingum og vinna úr þeim fyrir ýmsa aðila. Einstaklingar og stofnanir hafa því aðgang að upplýsingum sem nýtast þeim við að leita svara við spurningum.

Oft er þó ekki hægt að nota fyrirliggjandi upplýsingar og þá verður að gera sérstakar kannanir til að leita svara. Að mörgu þarf að hyggja þegar slíkar kannanir eru gerðar. Ef nota á tölfræðilega úrvinnslu þarf að gæta þess að spyrja spurninga þannig að vinna megi úr svörunum á tölfræðilegan hátt. Einnig þarf að hafa í huga að framkvæmd könnunar verði þannig að draga megi ályktanir af niðurstöðum.

22 Trausti sá í dagblaði að samkvæmt könnun sem gerð var árið 2003 nota Íslendingar Internetið meira en ýmsar nágrannaþjóðir.

Internetnotkun einstaklinga á Norðurlöndum og í Evrópusambandinu 2003

	Danmörk	Finnland	Ísland	Noregur	Svíþjóð	Evrópusambandið
Allir	71	66	81	75	77	50

Eining: hlutfall
Heimild: Hagstofa Íslands

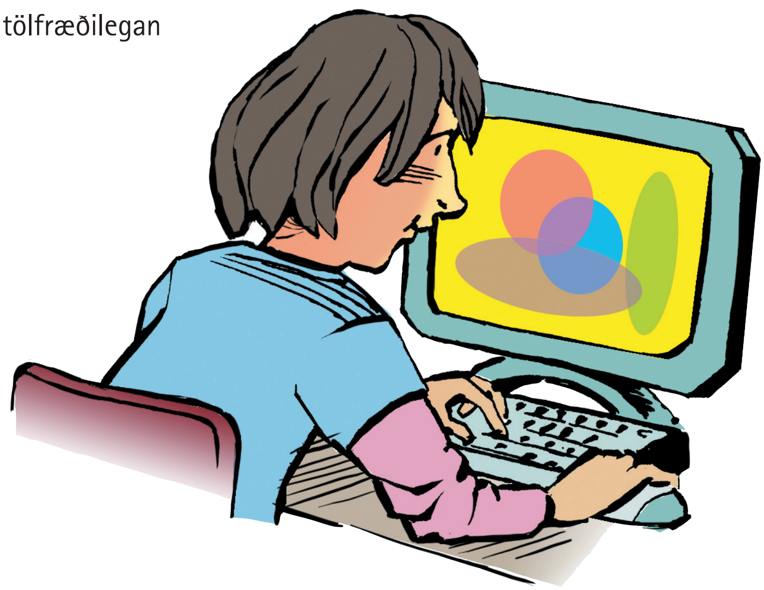
Trausti veltir fyrir sér hvort íslenskir unglingar noti Internetið meira en jafnaldrar þeirra í nágrannalöndunum. Einnig finnst honum áhugavert að kanna til hvers þeir nota Internetið.

a Hvaða upplýsinga þarf hann að afla?

b Er hægt að vinna úr upplýsingum á tölfræðilegan hátt ef spurt er
- Notarðu Internetið oft?
- Finnst þér gaman í tölvuleikjum?
- Mátt þú vera á spjallrásum?
- Ferðu á Internetið?

daglega 2–3 í viku sjaldnar

c Búðu til spurningar sem Trausti gæti notað til að afla sér upplýsinga.



23 Trausti þarf að ákveða hverja hann ætlar að spyrja. Fyrst þarf hann að ákveða hvaða aldurshópur unglingar eru. Hvernig skilgreinir þú hópinn unglingar?

24 Þegar sá hópur sem skoða á er mjög stór er oft ógerlegt að spyrja alla. Þá þarf að taka úrtak.

Trausti veltir fyrir sér nokkrum leiðum.
Hann gæti spurt:

- nemendur í einum bekk í hverju landi
- alla 15 ára nemendur í hverju landi
- 1000 nemendur á aldrinum 13–18 ára í hverju landi, sem valdir eru af handahófi
- allar 13 ára stelpur sem búa í þéttbýli
- alla 15 ára stráka sem eiga tölvu
- alla sem heita nafni sem byrjar á A

Hver af þessum leiðum telur þú að gefi besta mynd af Internetnotkun unglinga? Rökstyddu svar þitt og gerðu grein fyrir hvers vegna þú telur hinar leiðirnar vera verri.

Í könnunum þar sem ekki er hægt að spyrja alla er yfirleitt notað tilviljanakennt úrtak. Til eru nokkrar leiðir við að taka tilviljunarkennd úrtök. Ein leiðin er að gefa öllum númer og draga tiltekinn fjölda númera. Í stórum alþjóðlegum könnunum er talið áreiðanlegt að spyrja 3000–4000 manns í hverju landi.
Í skoðanakönnunum er hins vegar oft látið nægja að spyrja 800–1200 manns en þá verða upplýsingar ekki eins áreiðanlegar.

25 Stundum eru valin 1000 nöfn úr símaskrá. Hverjir telur þú að séu gallar slíks úrtaks þegar spurt er um málefni unglinga?

26 Í sjónvarpsþáttum er áhorfendum stundum boðið að segja álit sitt á tilteknu málefni. Þeim er boðið að senda smáskilaboð eða hringja og borga fyrir það. Hversu góða mynd telur þú að slík könnun gefi? Nefndu nokkra kosti og galla.

27 Trausti valdi 1000 nemendur af handahófi á hverju Norðurlandanna fimm. Hann fékk 4500 svör.

Könnun á Internetnotkun 13–16 ára Norðurlandabúa

☐ Strákur ☐ Stelpa Aldur: ☐ Land: ☐

Hvaða fullyrðing á best við þig?

Ég nota Netið ☐ oftar en þrisvar á dag ☐ daglega ☐ 2–3 í viku ☐ sjaldnar

Hefur þú aðgang að nettengdri tölvu heima? ☐ já ☐ nei

Merktu við það sem þú gerir í tölvu. Gerðu hring utan um það sem þú notar mestan tíma í.

leikir spjall skoða heimasíður blogg ritvinnsla og/eða töflureiknir

heimasíðugerð myndvinnsla annað hvað: ☐

a Hvernig getur Trausti unnið úr öllum þessum upplýsingum?

b Hvað leið getur hann valið til að flokka gögnin?

c Hvaða útreikninga getur hann gert?

d Hvernig getur hann sett fram niðurstöður sínar?

e Telur þú að mark sé takandi á könnun sem þessari?

f Hverjir gætu haft gagn af niðurstöðum úr könnun Trausta?

HÓPVERKEFNI

28 Gerið könnun í ykkar heimabyggð
Þið þurfið að:

- velja ykkur viðfangsefni og kynna ykkur það
- ákveða spurningar
- velja úrtak ef við á
- safna gögnum
- flokka gögn og framkvæma tölfræðilega útreikninga
- setja fram niðurstöður og túlkun þeirra
- kynna niðurstöður

Metrakerfið

Metrakerfið var lögleitt á Íslandi árið 1912. Áður hafði fólk hér á landi notað mælieiningar eins og alin, pottur, peli og pund. Metrakerfið er sætiskerfi þar sem hvert sæti á sitt nafn. Það er notað hvort sem verið er að mæla lengd, þyngd, flöt eða rými. Algengustu lengdarmælieiningar eru kílómetri, metri, sentímetri og millímetri.

kíló-metri	*hektó-metri*	*deka-metri*	*metri*	*desí-metri*	*sentí-metri*	*millí-metri*

1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 cm = 1 mm

1 Mælieiningarnar hektómetri, dekametri og desímetri eru lítið notaðar hér á landi. Hvernig mætti skrá þessar lengdir í hm, dam, dm?

1 m   23 cm   25,6 m   8,4 km

2 Skráðu tölurnar.

a í sentímetrum   **c** í hektómetrum
b í desímetrum   **d** í kílómetrum

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		2	3,	4	6	
	2	5	8,	3		
			0,	4	7	
4	5	6	1			
			0,	0	5	3

3 Metrakerfið er líka notað fyrir fleiri grunneiningar heldur en metra. Þar má nefna gramm eða lítra.

a Hvaða mælieiningar þekkir þú þar sem gramm er notað sem viðmið? Nefndu dæmi um hvað væri hægt að mæla með þessum einingum.

b Hvaða mælieiningar þekkir þú þar sem lítri er notaður sem viðmið? Nefndu dæmi um hvað væri hægt að mæla með þessum einingum.

4 Hve mörgum sinnum stærri er:

a 1 cm en 1 mm   **b** 1 kg en 1 hg   **c** 1 dl en 1 cl   **d** 1 dam en 1 m

e Lýstu samhenginu milli sæta í metrakerfinu.

5 Halldór kaupir inn:

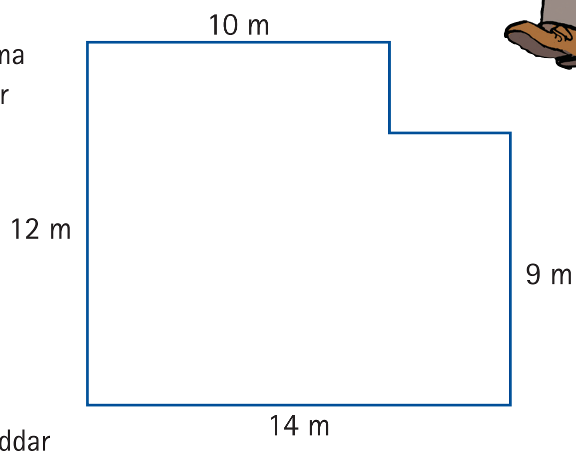
Hann þarf að bera vörurnar heim og vill hafa sem jafnasta þyngd í tveimur pokum. Hvernig gæti hann skipt vörunum í pokana? Settu fram tvær hugmyndir.

3 lítrar mjólk	6 gosdósir (50 cl)
850 g nautahakk	4 jógúrt (180 g)
200 g salat	750 ml matarolía
0,785 kg ostur	100 g súkkulaði
2 kg kartöflur	

6 Ástfríður á fallegt hús á Kópaskeri. Hve margir fermetrar er húsið hennar?

Hún ætlar að stækka húsið sitt um 100 fermetra. Hún biður Árna að koma með nokkrar tillögur. Settu fram þrjár hugmyndir að stækkun.

Hve mörg prósent er stækkunin?



7 Hús Ástfríðar stendur á lóð sem er 1200 fermetrar. Breidd lóðarinnar er 30 metrar. Hve löng er lóðin?

Hvert er hlutfall milli lengdar og breiddar lóðarinnar?

Hvernig breyttist nýtingarhlutfall lóðarinnar við stækkun hússins?

8 Ástfríður ekur til Akureyrar á 2 klukkustundum og 15 mínútum. Árni ekur til Egilsstaða á $2\frac{1}{2}$ klukkustund. Hvort þeirra ekur hraðar?

Atriðisorð

afsláttur 63
andhverfar aðgerðir 14
arabísk talnaritun 67
brot 4
deiling 68
dekametri (dam) 110
desímetri (dm) 110
dreifing 107
dreifiregla 87
einingabrot 10
ferningstala 72
Fibonacci-tölur 73
flutningar 42
fobverð 99
frumtölur 19, 68
gagnagrunnur 25
gagnasafn 101
Gauss 79
heilar tölur (Z) 70
heild 53, 57
hektómetri (hm) 110
hliðrun 42
hlutfallsleg skipting 53
hlutföll 77
hluti 57
hnitakerfi 42
hæsta gildi 102
íslömsk mynstur 51
jafngild almenn brot 6
jöfnur 30
KappAbel-stærðfræði-
keppnin 93
kílómetri (km) 110
laufrit 103
Leonardo frá Pisa 73
liðir 31
líkindatré 20
líkindi 17
líkur 18
línurit 30, 39, 100
lotubundin tugabrot 71
lægsta gildi 102
margföldun 88
meðaltal 101
mengi 69
metrakerfið10
metri (m) 110
miðgildi 101, 103
millímetri (mm) 110
mynsturborðar 48
námundun 4
náttúrlegar tölur (N) 70
Niels Henrik Abel 94
núll 68
óendanleg tugabrot 71
óþekkt stærð 36
Pascal 74
Pascal-þríhyrningur 74
pí (π) 70
prósenta 54, 57
prósentujafna 57, 63
prósentureikningur 53
rammarit 103
rangolí-mynstur 50
reikniregla 82
rómversk talnaritun 67
ræðar tölur (Q) 70
röðunarmöguleikar 75
samhverf mynstur 46
sammengi 69
samnefnari 7
sentímetri (cm) 110
skífurit 61, 96, 100
sniðmengi 69
snúningur 43
spegiltala 95
speglun 45
speglunarás 46
stak 69
stærðfræði í atvinnulífinu
80, 81
súlurit 100
talnamengi 70
Talnapúkinn 66
tilraun 27
tilviljanakennt úrtak 108
tíðasta gildi 102
tugabrotstölur 70
töflureiknir 28
tölfræði 96
tölur 66
ummál 41
veldi 67, 78
veldisvísir 67
þáttun 8, 68
þrautir 52, 65
þríhyrningstala 72

Heimildir

Haddon, Mark. 2004. *Furðulegt háttalag hunds um nótt*. Kristín R. Thorlacius þýddi. Reykjavík, Mál og menning.

Enzensberger, Hans Magnus. 1998. *Talnapúkinn*. Arthúr Björgvin Bollason þýddi. Reykjavík, Mál og menning.